Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2023**

Grundkurs Mathematik II

Arbeitsblatt 56

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 56.1. Eine faire Münze werde zehnmal hintereinander geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei genau einmal ein Wechsel von Kopf nach Zahl oder umgekehrt eintritt?

Übungsaufgaben

Aufgabe 56.2. Eine faire Münze werde zehnmal hintereinander geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich die Münzseite mit jedem Wurf ändert?

Aufgabe 56.3.*

Was ist wahrscheinlicher: Ein Lottogewinn mit sechs Richtigen oder, dass bei einem 24-fachen Münzwurf stets Kopf fällt?

Aufgabe 56.4. Im Brötchenkorb der Familie Ngolo befinden sich drei Laugenbrötchen, zwei normale Brötchen, eine Brezel und zwei Scheiben Graubrot. Im Marmeladenkorb befindet sich Himbeermarmelade, Erdbeermarmelade, Quittenmarmelade und Waldrandhonig. Folgende Kombinationen machen Heinz Ngolo am Morgen glücklich:

- Laugenbrötchen mit Himbeermarmelade.
- Ein normales Brötchen mit Waldrandhonig.
- Eine Brezel mit beliebigem Aufstrich außer Quittenmarmelade.
- Erdbeermarmelade, außer mit Graubrot.

Heinz wählt zufällig aus den beiden Körben eine Backware und einen Aufstrich aus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sein Tag glücklich anfängt?

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Aufgabe 56.5. Ein Würfel werde zweimal geworfen. Bestimme die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass die Augensumme gleich $2, 3, \ldots, 12$ ist.

Aufgabe 56.6. Ein Würfel werde zweimal geworfen. Bestimme die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass das Produkt der Augenzahlen gleich $1, 2, 3, \ldots, 36$ ist.

Aufgabe 56.7. Ein Würfel werde zweimal geworfen. Bestimme die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass die Augensumme mindestens so groß wie das Produkt der Augenzahlen ist.

Aufgabe 56.8. Ein fairer Würfel werde sechsmal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich dabei keine Augenzahl wiederholt?

Aufgabe 56.9.*

Wir betrachten die Produktmenge $\{K, Z\} \times \{K, Z\}$ und ihre Teilmengen. Fridolin sagt:

„Jede Teilmenge der Produktmenge ist selbst ein Produkt von Teilmengen. Die Menge $\{K, Z\}$ hat nämlich zwei Elemente, deshalb besitzt ihre Potenzmenge $2^2 = 4$ Elemente. Eine Produktmenge zu zwei Teilmengen besitzt die Form $E_1 \times E_2$. Da hier jede Kombination erlaubt ist, muss es $4 \cdot 4 = 16$ Teilmengen geben, die selbst Produktmengen sind. Die Produktmenge $\{K, Z\} \times \{K, Z\}$ besitzt 4 Elemente, somit besitzt ihre Potenzmenge 16 Elemente. Somit gibt es überhaupt 16 Ereignisse in der Produktmenge und 16 Produktereignisse, also ist jedes Ereignis ein Produktereignis“.

(1) Ist diese Aussage korrekt?

(2) Ist diese Argumentation korrekt?

Aufgabe 56.10. Es seien $M_1, \ldots, M_n$ endliche Wahrscheinlichkeitsräume und es sei der Produktraum $M_1 \times \cdots \times M_n$ ein Laplace-Raum. Zeige, dass jeder M_i ein Laplace-Raum ist.

Aufgabe 56.11. Eine Münze werde achtmal geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeiten, dass dabei keinmal, einmal, zweimal, dreimal , ..., achtmal eine Zahl geworfen wird.

Aufgabe 56.12. Durch langjährige Beobachtungen weiß man, dass Heinz in einer Mathearbeit mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ eine Zwei oder besser schreibt. Im Schuljahr werden vier Arbeiten geschrieben. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass Heinz keinmal, einmal, zweimal, dreimal, viermal eine Zwei oder besser hat?

Die folgende Aufgabe ist eine Verallgemeinerung von Aufgabe 8.35. Die Formel wird *Siebformel* genannt.

Aufgabe 56.13.*

Es sei G eine Menge und es seien $M_i \subseteq G$, $i = 1, \ldots, n$, endliche Teilmengen. Für eine Teilmenge $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ sei

$$M_J = \bigcap_{i \in J} M_i .$$

Beweise die Anzahlformel

$$\# \left(\bigcup_{i=1}^{n} M_i \right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \left(\sum_{J \subseteq \{1,\ldots,n\},\, \#(J)=k} \# \left(M_J \right) \right).$$

Aufgabe 56.14. Es sei (M, P) ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum und es seien $E_i \subseteq M$, $i = 1, \ldots, n$, Ereignisse in M. Für eine Teilmenge $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ sei

$$E_J = \bigcap_{i \in J} E_i .$$

Beweise die folgende Formel für die Wahrscheinlichkeit

$$P \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i \right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \left(\sum_{J \subseteq \{1,\ldots,n\},\, \#(J)=k} P(E_J) \right).$$

AUFGABE 56.15.*

Es sei $K = \mathbb{Z}/(11)$ der Körper mit elf Elementen. Im Vektorraum K^2 werden zufällig drei Punkte ausgewählt, wobei Wiederholungen erlaubt sind. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die drei Punkte auf einer Geraden liegen?

AUFGABE 56.16. Eine faire Münze werde sechsmal hintereinander geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei viermal hintereinander Kopf geworfen wird?

AUFGABE 56.17.*

Eine faire Münze werde zehnmal geworfen. Wir interessieren uns für die Anzahl, wie oft Kopf geworfen wurde.

(1) In welchem minimalen Bereich der Form $\{5-k, \ldots, 5+k\}$ liegt die Anzahl der Kopfwürfe mit einer Wahrscheinlichkeit von $\geq 0{,}9$?
(2) In welchem minimalen Bereich der Form $\{5-k, \ldots, 5+k\}$ liegt die Anzahl der Kopfwürfe mit einer Wahrscheinlichkeit von $\geq 0{,}6$?
(3) In welchem minimalen Bereich der Form $\{5-k, \ldots, 5+k\}$ liegt die Anzahl der Kopfwürfe mit einer Wahrscheinlichkeit von $\geq 25\,\%$?

AUFGABE 56.18. Zeige, dass die Folge

$$x_n = \binom{n}{\frac{n}{2}} \cdot 2^{-n}$$

für n gerade gegen 0 konvergiert.

Tipp: Betrachte den Faktor zwischen x_n und x_{n+1}. Dann hilft Aufgabe 47.20.

AUFGABE 56.19. Man gebe eine hinreichend große Zehnerpotenz $n = 10^k$ derart an, dass die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem n-fachen Münzwurf die Anzahl der Kopfwürfe zwischen $\frac{n}{2} - 10$ und $\frac{n}{2} + 10$ liegt, kleiner als $\frac{1}{10}$ ist.

AUFGABE 56.20.*

Zeige durch Induktion, dass für die Fakultät für $n \geq 3$ die Abschätzung

$$n! \leq \left(\frac{3}{4}n\right)^n$$

gilt.

Aufgabe 56.21. Zeige durch Induktion, dass für die Fakultät die Abschätzung

$$n! \geq \left(\frac{1}{3}n\right)^n$$

gilt.

Aufgabe 56.22.*

Es sei α eine rationale Zahl mit

$$0 < \alpha < \frac{1}{2}.$$

Zeige

$$\alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha} < \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 56.23.*

Es sei A das Ereignis, dass bei einem zehnfachen Münzwurf keinmal Kopf fällt, und es sei B das Ereignis, dass bei einem hundertfachen Münzwurf höchstens zehnmal Kopf fällt. Welches Ereignis ist wahrscheinlicher?

Aufgabe 56.24.*

Wir betrachten, analog zum Pascalschen Dreieck, die folgende Rekursionsvorschrift und das dadurch erzeugte Dreieck. Rekursionsanfang: In der nullten Zeile steht an der mittleren Stelle eine 1 (alle Zeilen kann man sich durch beliebig viele Nullen nach links und nach rechts aufgefüllt denken). Rekursionsschritt: Aus einer Zeile ergibt sich die nächste Zeile, indem man aus zwei benachbarten Zahlen der Zeile das arithmetische Mittel bildet und dieses in der nächsten Zeile unterhalb der beiden Zahlen hinschreibt.

(1) Bestimme die ersten fünf Zeilen (also Zeile 0 bis Zeile 4).
(2) Begründe induktiv, dass in jeder Zeile die Summe aller Einträge gleich 1 ist.
(3) Zeige, dass in der n-ten Zeile die Zahlen $B_{\frac{1}{2},n}(k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, der Binomialverteilung stehen.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 56.25. (2 Punkte)

Lucy Sonnenschein besitzt einen blauen, einen grünen und zwei rote Hüte, ferner besitzt sie drei blaue Blusen, zwei gelbe Blusen, eine grüne Bluse, vier rote Blusen und eine weiße Bluse, ferner besitzt sie drei rote Röcke, zwei grüne Röcke, einen schwarzen Rock und drei blaue Röcke. Für heute wählt sie zufällig einen Hut, eine Bluse und einen Rock aus. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie heute einfarbig in die Schule geht?

Aufgabe 56.26. (5 Punkte)

Eine faire Münze werde zehnmal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei siebenmal hintereinander Kopf geworfen wird?

Aufgabe 56.27. (4 (2+2) Punkte)

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und sei M die Menge aller Abbildungen von $\{1, \ldots, n\}$ nach $\{1, \ldots, n\}$. Es wird zufällig eine Abbildung ausgewählt.

(1) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die gewählte Abbildung bijektiv ist?
(2) Es sei $p(n)$ diese Wahrscheinlichkeit. Kann man eine Konvergenzaussage für diese Folge machen?

Aufgabe 56.28. (4 Punkte)

Gabi Hochster, Heinz Ngolo, Lucy Sonnenschein, Mustafa Müller und Conchita Cauchy wollen untereinander wichteln. Jede Person soll also genau von einer Person ein Geschenk bekommen, aber natürlich nicht von sich selbst. Sie ziehen zufällig aus Lucys Hut die Namen, wenn jemand seinen eigenen Namen zieht, fangen sie nochmal von vorne an. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Namensziehung wichtelkonform ist?

Aufgabe 56.29. (4 Punkte)

Eine faire Münze werde zwanzigmal geworfen. Wir interessieren uns für die Anzahl, wie oft Kopf geworfen wurde. In welchem minimalen Bereich der Form $\{10 - k, \ldots, 10 + k\}$ liegt die Anzahl der Kopfwürfe mit einer Wahrscheinlichkeit von $\geq 0{,}9$?

Abbildungsverzeichnis