Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2015/2016**

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Arbeitsblatt 20

Gar nicht mehr lange! Wir wünschen schon jetzt frohe Weihnachten!

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 20.1. Berechne das Ergebnis, wenn man im Polynom

$$X^2 - 5X + 3$$

die Variable X durch die 2×2-Matrix

$$\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

ersetzt.

Übungsaufgaben

Aufgabe 20.2.*

Man finde ein Polynom

$$f = a + bX + cX^2$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ derart, dass die folgenden Bedingungen erfüllt werden.

$$f(-1) = 2,\ f(1) = 0,\ f(3) = 5\,.$$

Aufgabe 20.3. Man finde ein Polynom
$$f = a + bX + cX^2 + dX^3$$
mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ derart, dass die folgenden Bedingungen erfüllt werden.
$$f(0) = 1,\ f(1) = 2,\ f(2) = 0,\ f(-1) = 1\,.$$

Aufgabe 20.4. Finde für die folgenden drei Mengen
$$\{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\},\ \{1, 2, 4, 8, 16, \ldots\},\ \{9, 99, 999, 9999, 99999, \ldots\}$$
(die alle die Form $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots\}$ besitzen) jeweils ein Polynom
$$P(k) = c_0 + c_1k + c_2k^2 + c_3k^3 + c_4k^4$$
(mit Koeffizienten $c_j \in \mathbb{Q}$) mit
$$P(1) = a_1,\ P(2) = a_2,\ P(3) = a_3,\ P(4) = a_4,\ P(5) = a_5\,.$$

Aufgabe 20.5.*

Berechne das Ergebnis, wenn man im Polynom
$$2X^3 - 5X^2 + 7X - 4$$
die Variable X durch die 2×2-Matrix
$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$
ersetzt.

Aufgabe 20.6. Es sei
$$f, g \colon V \longrightarrow V$$
ein Endomorphismen auf einem K-Vektorraum V und $P \in K[X]$ Polynom. Zeige, dass die Gleichheit
$$P(f \circ g) \, = \, P(f) \circ P(g)$$
im Allgemeinen *nicht* gilt.

Aufgabe 20.7.*

Zu einer 2×2-Matrix $M \,=\, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sei
$$P_M \,:=\, X^2 - \operatorname{Spur}(M)\, X + \det M.$$
Zeige, dass $P_M(M) \,=\, 0$ ist.

Aufgabe 20.8. Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper K und es sei
$$f \colon V \longrightarrow V$$
eine lineare Abbildung. Zeige, dass die Menge
$$\{P \in K[X] \,|\, P(f) = 0\}$$
ein Hauptideal im Polynomring $K[X]$ ist, das vom Minimalpolynom μ_f erzeugt wird.

Aufgabe 20.9. Es sei M eine Matrix mit dem Minimalpolynom $X - a$. Zeige, dass M die Streckung mit dem Streckungsfaktor a ist.

Aufgabe 20.10. Wir besprechen die Minimalpolynome zu den Elementarmatrizen.

a) Zeige, dass das Minimalpolynom einer Vertauschungsmatrix V_{ij} gleich $X^2 - 1$ ist.

b) Zeige, dass das Minimalpolynom einer skalaren Elementarmatrix $S_k(s)$ mit $s \neq 1$ gleich

$$X^2 - (s+1)X + s$$

ist.

c) Zeige, dass das Minimalpolynom einer Additionsmatrix $A_{ij}(a)$ von der Form

$$(X-1)^k$$

ist. Was ist dabei k?

Aufgabe 20.11.*

Es sei $V \neq 0$ ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine Projektion. Zeige, dass es für das Minimalpolynom zu φ drei Möglichkeiten gibt, nämlich $X, X-1$ und $X(X-1)$.

Aufgabe 20.12.*

Es sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung. Es sei eine $n \times n$-Matrix M über K gegeben. Zeige, dass das Minimalpolynom $P \in K[X]$ mit dem Minimalpolynom zu M übereinstimmt, wenn man die Matrix über L auffasst.

Aufgabe 20.13.*

Es sei M eine $n \times n$-Matrix über K mit dem Minimalpolynom $P \in K[X]$. Es sei

$$P = F_1 \cdots F_k$$

eine Faktorzerlegung in Polynome F_i von positivem Grad. Zeige, dass $F_i(M)$ nicht bijektiv ist.

Aufgabe 20.14. Wir betrachten die lineare Abbildung

$$\varphi \colon K^{(\mathbb{N})} \longrightarrow K^{(\mathbb{N})},$$

die durch $e_n \mapsto e_{n+1}$ festgelegt ist. Zeige, dass φ nur vom Nullpolynom annulliert wird.

Die Weihnachtsaufgabe für die ganze Familie

Aufgabe 20.15. Welches Bildungsgesetz liegt der Folge

$$1,\ 11,\ 21,\ 1211,\ 111221,\ 312211,\ ...$$

zugrunde?

(Es wird behauptet, dass diese Aufgabe für Grundschulkinder sehr einfach und für Mathematiker sehr schwierig ist.)

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 20.16. (4 Punkte)

Man finde ein Polynom f vom Grad ≤ 3, für welches

$$f(0) = -1,\ f(-1) = -3,\ f(1) = 7,\ f(2) = 21$$

gilt.

Aufgabe 20.17. (3 Punkte)

Man finde ein Polynom

$$f = a + bX + cX^2$$

mit $a, b, c \in \mathbb{C}$ derart, dass die folgenden Bedingungen erfüllt werden.

$$f(i) = 1,\ f(1) = 1 + i,\ f(1 - 2i) = -i\,.$$

Aufgabe 20.18. (3 Punkte)

Berechne das Ergebnis, wenn man im Polynom

$$-X^3 + 6X^2 - 6X + 27$$

die Variable X durch die 3×3-Matrix

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 7 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

ersetzt.

Aufgabe 20.19. (3 Punkte)

Es sei

$$f \colon V \longrightarrow V$$

ein Endomorphismus auf einem K-Vektorraum V und

$$g \colon V \longrightarrow V$$

ein Isomorphismus. Zeige, dass für jedes Polynom $P \in K[X]$ die Gleichheit

$$gP(f)g^{-1} \,=\, P(gfg^{-1})$$

gilt.

Aufgabe 20.20. (4 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N},$$

die dem Bildungsgesetz aus Aufgabe 20.15 entspricht.

(1) Ist f wachsend?
(2) Ist f surjektiv?
(3) Ist f injektiv?
(4) Besitzt f einen Fixpunkt?

Die Weihnachtsaufgabe

Aufgabe 20.21. (10 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N},$$

die dem Bildungsgesetz aus Aufgabe 20.15 entspricht. Unter einem *Zykel* von f der Länge n verstehen wir ein $x \in \mathbb{N}$ derart, dass $f^n(x) = x$ (f^n bezeichnet die n-te Hintereinanderschaltung von f mit sich selbst) und $f^i(x) \neq x$ ist für $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Besitzt f Zykel der Länge $n \geq 2$?

(Diese Aufgabe ist gesondert abzugeben, die Deckelregel findet für sie keine Anwendung.)