Matematica in relax

99 problemi divertenti, con l'aiutino

Maurizio Codogno

Matematica in relax

99 problemi divertenti, con l’aiutino

Maurizio Codogno

Elettroedizioni Bipunto
febbraio 2022

Prima edizione Elettroedizioni Bipunto: febbraio 2022
Edizione originale: Vallardi, marzo 2011

ISBN 9798770390148

Elettroedizioni Bipunto – https://xmau.com/bipunto/
elettroedizioni.bipunto@gmail.com

Ad Anna,
come la prima volta

Introduzione

Caro lettore,

nel marzo 2011, per i tipi di Vallardi, apparve in libreria il mio primo libro, *Matematica in relax*. Era nato più o meno per caso: avevo raccolto un certo numero di problemi matematici a cui si poteva rispondere facilmente una volta trovata l'idea giusta, e un'amica mi ha suggerito di provare a raccoglierli in un libro. Con un po' di fortuna trovai un editore, e il libro fece la sua onesta carriera. La tiratura di 3000 copie è andata tutta venduta, oltre a 250 copie della versione pdf e una versione "da edicola", che presumo abbia tirato altre 1500 copie. Ma anche le belle cose prima o poi finiscono. Il libro non faceva parte di una collana specifica, e così non godeva dell'effetto traino; così alla fine del 2021 l'editore ha deciso di toglierlo dal catalogo, rinunciando ai diritti che gli avevo ceduto all'atto del contratto. Che fare, dunque? Ero affezionato a quel testo, ma non aveva senso proporlo a un altro editore; anche se la spinta propulsiva non si era del tutto esaurita, non sarebbe stata comunque quella dei primi tempi. L'alternativa più semplice era quindi l'autopubblicazione: ma ti devo svelare un segreto, anzi due. Il primo segreto è che è possibile guadagnare un po' di soldini con le vendite su Amazon, ma occorre vederlo come un lavoro e mettersi a spammarlo – pardon, a pubblicizzarlo – a ogni piè sospinto. Il secondo segreto è che oltre a non essere tagliato per fare il venditore io sono pigerrimo: un lavoro continuativo di pubblicità non fa per me. Aggiungi anche il fatto che avevo sì scritto il libro cercando di rendere i problemi piacevoli da leggere, oltre che da risolvere: però quasi tutti i problemi qui presenti sono stati inventati da altri, e rivenderli un'altra volta mi pareva davvero troppo.

Alla fine ho deciso per una via di mezzo. Ho preso il testo, lasciando intatti i problemi aggiustando però qualcosa qua e là, e l'ho rilasciato con una licenza Creative Commons CC-BY-SA, come quella di Wikipedia. In pratica puoi tranquillamente riutilizzare il mio testo in tutto o in parte: basta che tu dica che è opera mia e dia la stessa licenza alla tua opera. Questo non significa di per sé che il testo è gratuito: puoi comprarlo su Amazon e dare un po' di soldini a Jeff Bezos (e qualche spicciolo a me). Ma se non hai voglia di spendere soldi, puoi tranquillamente scaricare dal mio sito *https://xmau.com/bipunto/* la versione in pdf, e vivere felice e senza alcun rimorso.

Ah: Ho indicato il livello di matematica necessario per risolvere i problemi (non la difficoltà!) con delle losanghe ◊ (nessun conto), ◊◊ (operazioni elementari), ◊◊◊ (competenze un po' maggiori); il *tipo* dei problemi è invece indicato come segue.

$\boxed{A}$ – aritmetica
$\boxed{B}$ – algebra
$\boxed{C}$ – combinatorica
$\boxed{G}$ – geometria
$\boxed{L}$ – logica
$\boxed{O}$ – manipolazione di oggetti
$\boxed{P}$ – probabilità
$\boxed{T}$ – pensiero laterale

Buon divertimento!
Milano, febbraio 2022

Introduzione alla prima edizione

Caro lettore,

(nel resto del libro userò il voi, ma qui voglio parlare proprio a te... e scusami se ti do del tu) sono in molti a pensare che l'espressione "matematica ricreativa" sia un ossimoro e che sia impossibile divertirsi cercando di risolvere un problema matematico. Io non sono d'accordo: ho pensato perciò di raccogliere alcuni problemi che a prima vista possono sembrare difficili, ma che hanno una soluzione inaspettatamente facile. In un certo senso, la vera difficoltà consiste nel **trovare l'idea giusta per risolverli**: non servono conoscenze avanzate di matematica né risme di carta per fare un tentativo dopo l'altro. D'altra parte, molti Veri Matematici non si trovano a loro agio nel fare i conti!

Libri di problemi matematici ce ne sono tanti: perché scegliere proprio questo? Ci sono un paio di punti che lo caratterizzano. Visto che so bene che non c'è nulla di più indisponente di non riuscire a risolvere un problema, andare a leggere la risposta e dirsi: "Ma perché non ci ho pensato da solo?", per ogni problema c'è un suggerimento che dovrebbe aiutarti a trovare la strada giusta per la soluzione: l'"**aiutino**".

Oltre agli aiutini, questo libro offre un altro strumento originale: il **Post Scriptum**, una rubrica che accompagna tutte le soluzioni, nella quale spiego quali sono i concetti matematici alla base del problema. La matematica non nasce dal nulla e anche i suoi campi più astratti hanno qualche contatto con la realtà. Capire i princìpi che stanno alla base della soluzione è più importante di risolvere correttamente il problema, un po' come imparare a pescare è più importante di catturare un pesce.

Un'ultima annotazione. Alcuni problemi non sono matematici in senso stretto, ma logici. Ce n'è anche qualcuno che richiede semplicemente di guardare le cose in modo un po' diverso dal solito e di fare molta attenzione al testo. In fin dei conti, non di sola matematica vive l'uomo...

Non mi resta che augurarti buon divertimento e segnalarti che a *https://xmau.com/wp/relax/* ho preparato una pagina di accompagnamento a questo libro!

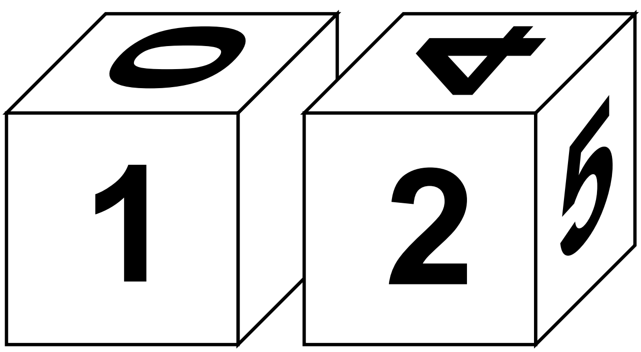
I problemi

◊ T

1. Il calendario cubista

Alla fine degli anni ’60 del secolo scorso non era così difficile vedere sulle scrivanie un datario da tavolo dove il numero del giorno era composto utilizzando due cubi, su ogni faccia dei quali era presente una delle cifre da 0 a 9. Per completezza, aggiungo che il mese veniva indicato per mezzo delle sue tre prime lettere scritte in stampatello minuscolo sulle facce di altri tre cubi: come ottenere i nomi dei mesi non è però un problemino matematico.

Come facevano i produttori del calendario a disporre le cifre da 0 a 9 nei due cubi in modo che li si potesse combinare per indicare un qualunque giorno del mese, da 01 a 31?

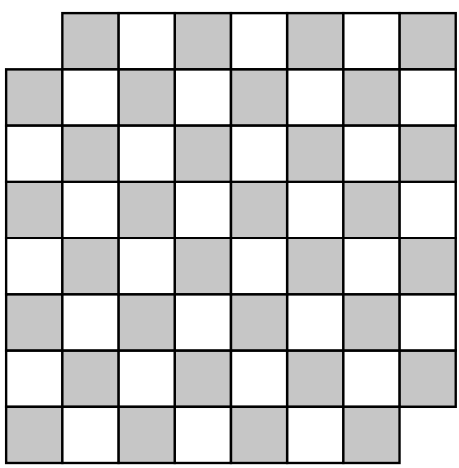


L’aiutino è a pagina 115; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 127.

2. La scacchiera mutilata

Prendete una comune scacchiera e 32 tessere del domino, di dimensione una casella per due. Non è certo difficile ricoprire esattamente la scacchiera con le tessere; la cosa più complicata è al limite trovare 32 tessere del domino, dato che la dotazione standard è di sole 28.

Mentre riordinavo la soffitta, mi è però capitata tra le mani una scacchiera a cui mancavano due caselle situate agli angoli opposti, come si vede nella figura qui sotto: da piccolo rompevo tutto. Come potete disporre 31 tessere per ricoprire questa scacchiera mutilata?

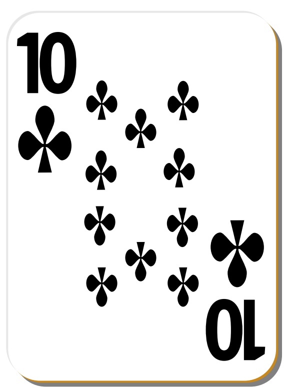


L'aiutino è a pagina 115; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 134.

3. Una partita a bridge

Ogni tanto si legge che durante una partita a bridge a qualcuno sono state distribuite 13 carte tutte dello stesso seme. Se il mazzo è stato mischiato bene la cosa è piuttosto incredibile. La probabilità che un giocatore riceva tutte carte di picche è una su 635.013.559.600: in confronto vincere al Superenalotto è un gioco da ragazzi!

Supponiamo però che vi accontentiate di qualcosa di più fattibile, che cioè tutte le carte di picche siano divise tra voi e il vostro compagno (ricordo che a bridge si gioca in due coppie di giocatori). È più facile che avvenga una distribuzione di questo tipo, oppure che né a voi né al vostro compagno non sia capitata alcuna carta di picche?



L'aiutino è a pagina 117; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 143.

4. Perditempo

La scorsa settimana avevo deciso di andare al mare per il fine settimana. Devo fare esattamente 200 chilometri di autostrada, e avevo contato di percorrerli alla velocità di 100 km/h. Però poi mi sono fermato a prendere un panino all'autogrill (confesso di avere un debole per la Rustichella) e già che c'ero mi sono fermato a godermi l’aria condizionata e a guardare un gruppo di turiste olandesi. Quando sono finalmente ripartito, mi sono accorto di aver percorso la prima metà del tragitto alla velocità media di 50 Km/h. Autovelox a parte, che velocità avrei dovuto tenere per arrivare alla fine dell’autostrada alla media che avevo inizialmente previsto?

L’aiutino è a pagina 117; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 149-150.

5. Maciachini o Rogoredo?

Umberto Eco scrisse del Paradosso di Porta Ludovica: girando in macchina a Milano si finisce sempre là. Non so se sia vero, però qualcosa di strano ci dev'essere davvero! Parecchi anni fa abitavo dalle parti di Porta Romana e frequentavo due ragazze, una in zona Rogoredo e l'altra vicino a piazza Maciachini. Non sapevo decidermi quale mi piacesse di più, e così lasciavo che fosse il caso a scegliere chi andare a trovare. Le due stazioni si trovano sulla linea gialla della metropolitana di Milano, in direzione opposta rispetto a casa mia: così ogni giorno scendevo ai binari e prendevo il primo treno che arrivava. In entrambe le direzioni passava un treno ogni sei minuti.

Nonostante arrivassi in stazione a ore sempre diverse e casuali, dopo qualche tempo la ragazza di Rogoredo mi piantò, dicendo che andavo a trovarla una volta la settimana o poco più. Com'è possibile?

L'aiutino è a pagina 118; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 156-157.

6. Due vittorie in fila

Un adolescente chiede a suo padre un po' di soldi per andare in discoteca con gli amici durante il fine settimana. Il padre ci pensa un attimo, e poi dice "Facciamo così: mancano tre giorni a sabato. Tua mamma e io ci alterneremo a giocare a scacchi con te, una partita per sera; se ne vinci almeno due consecutive, ti darò i soldi che mi hai chiesto; altrimenti preparati come volontario per le Grandi Pulizie di Casa".

Non avendo molta scelta, il figlio accetta; poi ci pensa su un attimo e gli chiede "Ma comincerò a giocare con te o con la mamma?". Il padre, sorridendo, risponde: "Scegli pure chi preferisci". Il figlio sa che sua madre gioca a scacchi meglio di suo padre; cosa gli conviene fare?

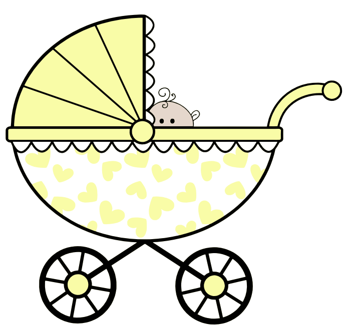
L'aiutino è a pagina 119; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 164.

◊ P

7. La popolazione di Fertilia

La nazione di Fertilia è governata da un sultano che vorrebbe aumentare la percentuale di donne nella popolazione per rimpinguare gli harem; promulga così una legge che vieta ai sudditi di procreare ulteriormente dopo un figlio maschio, pensando: "Ci saranno famiglie con un solo maschio, famiglie con una femmina e un maschio, famiglie con due femmine e un maschio e via discorrendo, e famiglie con sole femmine. Una situazione perfetta!" Peccato che le cose non vadano così. Prendiamo tutte le coppie con figli e consideriamo il loro primogenito: in media, metà saranno maschi e metà femmine. Passando ai secondogeniti delle coppie che hanno almeno due figli, di nuovo metà di essi sarà maschio e metà femmina: il fatto che *il primo* loro figlio sia una femmina è irrilevante, dato che è già stato considerato nel gruppo precedente, e lo stesso per i terzogeniti e oltre. Insomma, in media il numero di maschi e di femmine sarà lo stesso.

Supponete che le famiglie di Fertilia continuino ad avere figli fino a che non arrivi loro un maschio. Quanti figli avrà allora in media una famiglia?



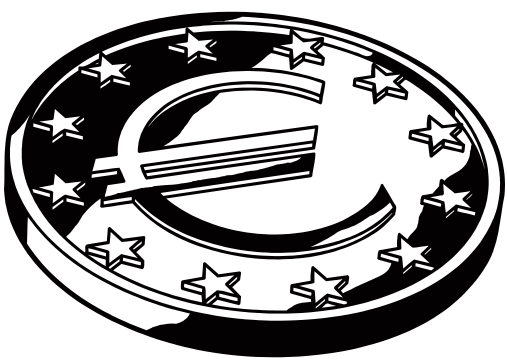
L'aiutino è a pagina 120; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 171-172.

◊ P

8. Una moneta poco equa

Quando vado a cena col mio amico Ugo, è nostra usanza decidere chi paga lanciando una moneta. Stasera però abbiamo un problema: abbiamo dimenticato entrambi il borsellino a casa (tanto paghiamo con la carta di credito). L'unica moneta a nostra disposizione è quella truccata che uso quando ho voglia di fare qualche scherzetto agli amici: lanciandola, infatti, esce testa quattro volte su sette.

Possiamo comunque lanciare la moneta in modo che ci garantisca di avere entrambi la stessa probabilità di dover pagare la cena?



L'aiutino è a pagina 121; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 179.

◊ T

9. Meditazione montana

Quest'anno ho voluto trascorrere le ferie in maniera speciale. Sono stato una settimana in meditazione presso un tempio in cima a una montagna tibetana, che si può raggiungere solo percorrendo un sentiero. Sono partito all'alba dai piedi della montagna e ho raggiunto il tempio al tramonto, camminando a velocità diverse, fermandomi ogni tanto a meditare e soprattutto a riprendere fiato. Un paio di volte sono anche tornato sui miei passi, per osservare meglio il panorama.

Dopo la settimana di meditazione, sono ritornato a valle sempre per lo stesso sentiero, partendo di nuovo all'alba. In genere camminavo più veloce che all'andata, ma c'erano dei punti pericolosi in cui sono andato più lentamente, e mi sono fermato più a lungo, arrivando comunque ai piedi della montagna due ore prima del tramonto. Dimostrate che c'è stato almeno un punto del percorso dove mi sono trovato alla stessa ora nei due viaggi.

L'aiutino è a pagina 122; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 186-187.

◊ A

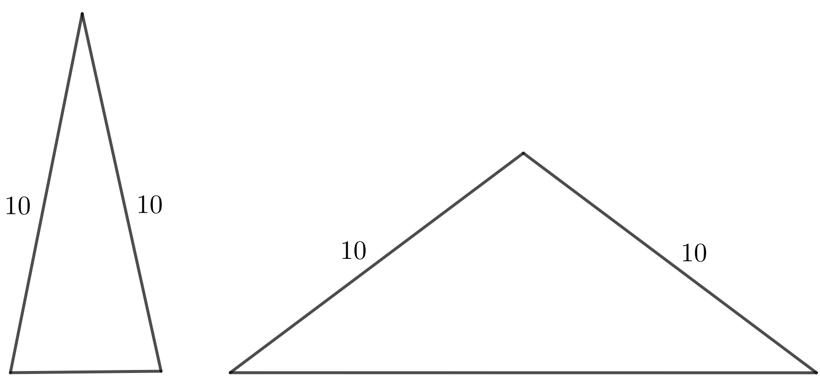
10. Missili in collisione

Nel quadro del programma militare "Star Wars: episodio 42", il Pentagono intende mostrare la sua abilità nel colpire bersagli in movimento ad alta velocità. Da due basi aeree che distano 2600 Km in linea d'aria vengono lanciati due missili a distanza di 30 secondi. Dopo essere saliti verticalmente fino a 10 Km di altezza, il primo in 35 secondi e l'altro in 20, i due missili si dirigono l'uno contro l'altro. Sapendo che il primo missile viaggia a 3700 Km/h e il secondo a 2300 Km/h, a che distanza si troveranno un minuto prima della collisione?

L'aiutino è a pagina 123; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 194.

11. Il triangolo più grande

Con la scusa di un “regalo utile” per il compleanno dei miei gemelli mi sono finalmente regalato una confezione di Meccano, sapendo che il duo l’avrebbe snobbata. Adesso mi trovo tra le mani due listelli lunghi 10 cm ciascuno e vorrei costruire un triangolo isoscele, come nei due esempi della figura, di area massima. (Tralasciate il fatto che i listelli hanno solo una lunghezza specifica, e immaginate di poterne scegliere una qualunque). Quanto vale quest’area?



L’aiutino è a pagina 115; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 128.

12. La pentola di Kant

Le cronache del tempo – vere o false che siano – riportano che Immanuel Kant era una persona molto metodica. Si narra che i suoi concittadini a Königsberg avessero due hobby: cercare di passare una sola volta su ciascuno dei ponti sul fiume Pregel, almeno fino a quando Eulero dimostrò che la cosa era impossibile, e regolare i loro orologi quando il filosofo usciva per fare la sua passeggiata quotidiana.

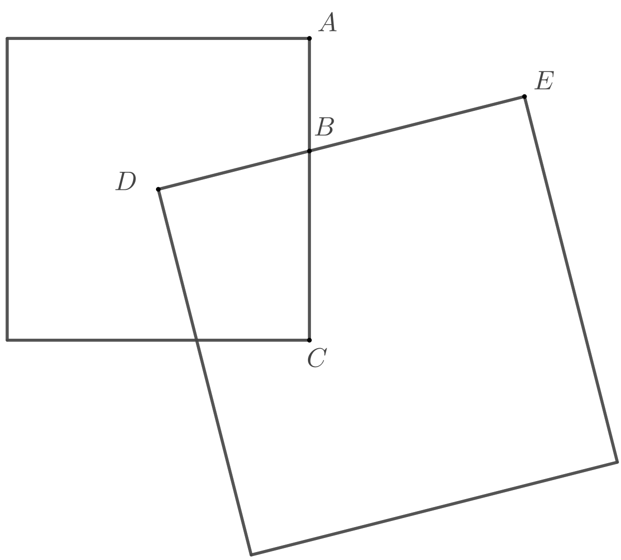
Un giorno però accadde l'incredibile: Kant si svegliò e scoprì che l'orologio a pendolo di casa sua non era stato caricato e quindi si era fermato. Il filosofo non aveva a disposizione nessun altro orologio; però uscì col suo passo metodico e costante per andare a trovare un amico che abitava a qualche decina di minuti da casa sua (non aveva mai fatto il conto esatto della distanza), rimase a conversare con lui per un po' di tempo, tornò a casa con il suo solito passo, e regolò esattamente la pendola. Come fece?

L'aiutino è a pagina 116; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 135.

◊ G

13. I quadrati sovrapposti

Nel mio giardino zen ci sono due aiuole parzialmente sovrapposte, come si vede in figura. Ciascuna di esse è di forma quadrata; i loro lati sono lunghi rispettivamente 40 cm e 50 cm. Il vertice D dell'aiuola più grande si trova esattamente al centro di quella più piccola; il lato AC viene diviso dal lato DE in due parti in rapporto 3:5 tra loro (cioè 15 e 25 cm). Qual è l'area della parte comune, colorata in scuro?



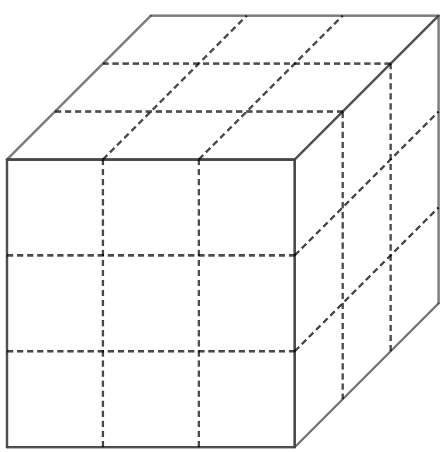
L'aiutino è a pagina 117; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 143-144.

◊ G

14. Il taglio del cubo

Per un incontro intitolato “Oltre Rubik” dovevo tagliare due cubi, ciascuno di 15 cm di lato, in 27 cubetti uguali. Ho preso il primo cubo e ho fatto sei tagli secondo le linee tratteggiate indicate in figura. Prendendo in mano il secondo cubo, mi sono detto “Che stupido! Perché non riposiziono i vari pezzi che ottengo man mano, per risparmiare qualche taglio?”

Ero di fretta e non ho avuto voglia di verificare la mia ipotesi: così ho tagliato anche il secondo cubo allo stesso modo del primo. Ma il dubbio mi è rimasto: qual è il numero minore di tagli necessario per suddividere un cubo in 27 cubetti?

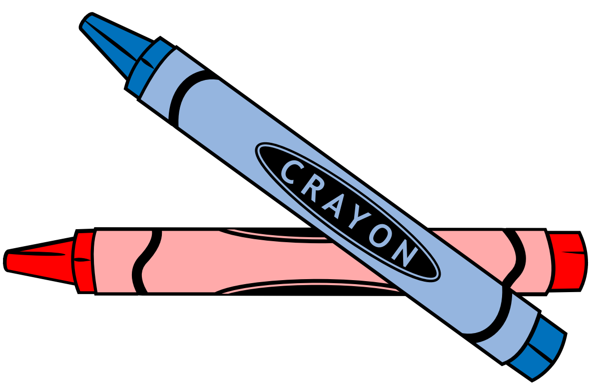


L’aiutino è a pagina 118; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 150-151.

◊◊◊ C

15. Rosso o blu

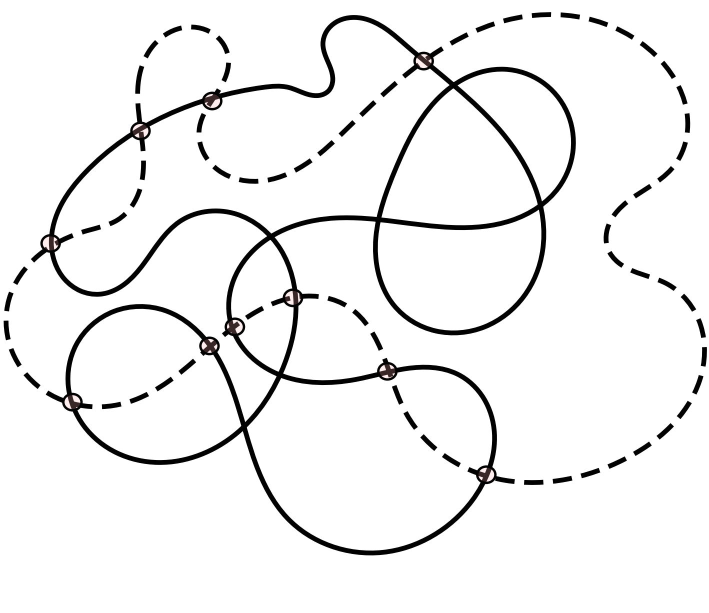
Supponete di volere colorare tutti i punti del piano di rosso oppure di blu, con l'obbligo di non formare nessun triangolo equilatero i cui vertici siano tutti dello stesso colore. Secondo voi, la cosa è possibile?



L'aiutino è a pagina 119; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 157-158.

16. Un problema aggrovigliato

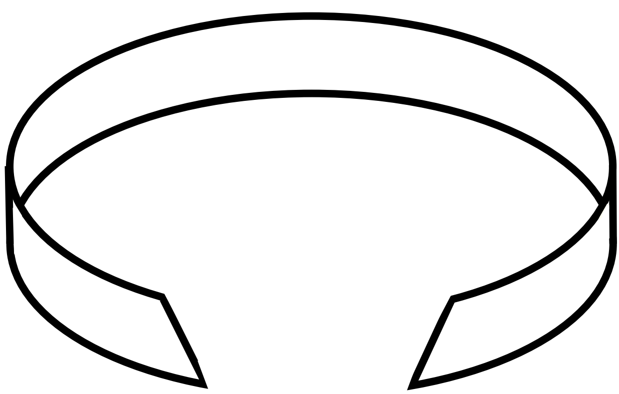
Prendete una matita e tracciate una linea chiusa qualunque. La linea può anche intersecare sé stessa: è sufficiente che non ripassiate mai su una precedente intersezione o fate toccare la curva con una tangente: l'intersezione deve proprio passare da una parte all'altra. Ripetete l'operazione disegnando un'altra linea, questa volta tratteggiata: anche in questo caso, non dovete mai passare sopra un'intersezione già esistente; inoltre i punti di incrocio tra le due curve devono essere veri, e non semplici tangenti. Terminata la vostra fatica artistica kandinskiana, dimostrate che i punti in cui le due curve si intersecano (tralasciando le autointersezioni) sono in numero pari, senza mettervi con tanta pazienza a contarle…



L'aiutino è a pagina 119; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 165.

17. Piegare la fascia

Ho una bella fascia, a forma di una lunga cintura con i due estremi tagliati a 45 gradi come in figura, e quando devo metterla in valigia mi piace piegarla in modo che formi un rettangolo. Potrei limitarmi a piegare gli angoli all'indietro, però poi la parte finale diventa troppo spessa e il mio senso estetico rimarrebbe comunque offeso: il rettangolo deve essere tutto dello stesso spessore. C'è un modo per piegare la fascia come voglio senza dovere iscrivermi a un corso di origami?

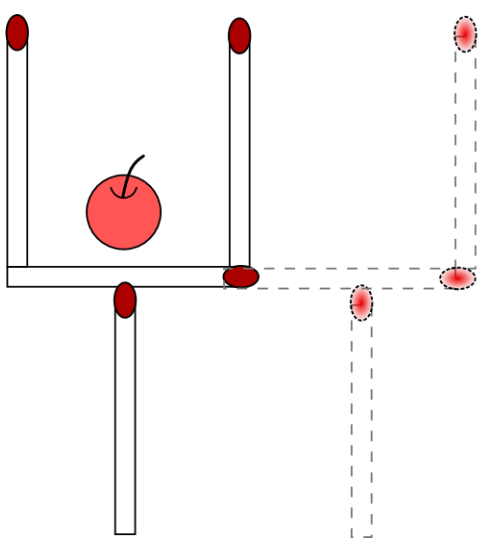


L'aiutino è a pagina 120; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 172.

18. Spostare una ciliegia

Non ho mai capito come mai sia considerato così fine mettere una ciliegina dentro il bicchiere del cocktail. Sono certo che questo capita solo perché nessuno si è ancora deciso a fondare la Società per la Protezione di Ciliegie, Duroni e Amarene.

Per il momento mi dedico a una lotta passiva: sposto via la ciliegina ogni volta che la trovo in un bicchiere. Toccare la ciliegia però non è bello: preferisco così concentrarmi sul bicchiere. Se costruisco un bicchiere con quattro fiammiferi, come mostrato nella figura sopra, posso spostare solo due fiammiferi e avere la ciliegina fuori dal bicchiere? Nel disegno sotto si vede come si può fare spostando tre fiammiferi, ma così è troppo facile....

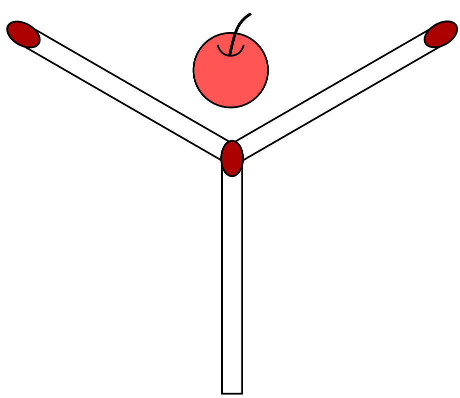


L'aiutino è a pagina 121; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 179-180.

◊ O T

19. Spostare un’altra ciliegia

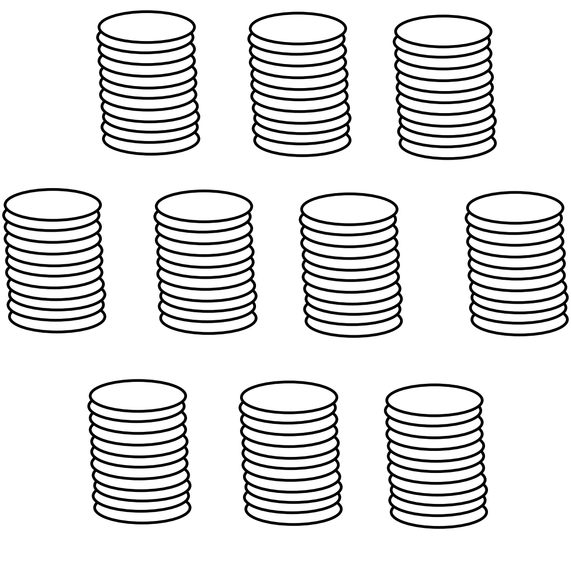
Dopo il successo del problema precedente, la mia carriera di Eliminatore di Ciliegine ha avuto un’eccezionale spinta propulsiva. Qualcuno mi ha però fatto notare come il bicchiere che avevo usato non era quello da cocktail, così mi sono accinto a una nuova impresa: spostare il minor numero di fiammiferi per togliere la ciliegia dal bicchiere schematizzato in figura. Anche in questo caso non posso toccare la ciliegia, ma posso solo spostare i fiammiferi. Quanti ne devo spostare?



L’aiutino è a pagina 122; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 187.

20. Attenti ai falsi

Le monete da un euro sono carine, ma il fatto stesso che ce ne siano così tante in circolazione è stata una gioia per i falsari; sembra che molte delle monete che circolano siano false. Mi sa che anch'io sono stato turlupinato: ora mi tocca scoprire quale di queste dieci pile, ciascuna con dieci monete, sia composta da euro falsi. So che una moneta vera pesa 7,5 g, mentre una falsa ne pesa 7,4; ho poi a disposizione una bilancia da farmacista, che mi permette di calcolare pesi fino a mezzo chilo con la precisione di un decigrammo. Quante pesate mi sono necessarie per scoprire qual è la pila con le monete false?



L'aiutino è a pagina 123; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 194-195.

21. Vino annacquato o acqua avvinata?

Un oste, data un'occhiata esperta all'avventore che ha chiesto un litro di vino della casa, ha pensato che la gradazione troppo alta di quel vino gli potrebbe causare dei problemi al momento del pagamento. Prende così un bicchiere da 125 ml, lo riempie di vino dalla brocca e lo versa in un'altra brocca che conteneva un litro d'acqua. Poi riempie il bicchiere con la miscela della seconda brocca e riporta a 1 litro il volume del liquido nella prima.

Il cliente (che probabilmente in mattinata si era già fatto diversi bianchetti) non si accorge di nulla, tracanna e paga: ma all'oste resta un dubbio. Dopo i due travasi, c'era più acqua nella prima brocca o più vino nella seconda? Supponete che prima del secondo travaso la miscela fosse perfettamente uniforme.

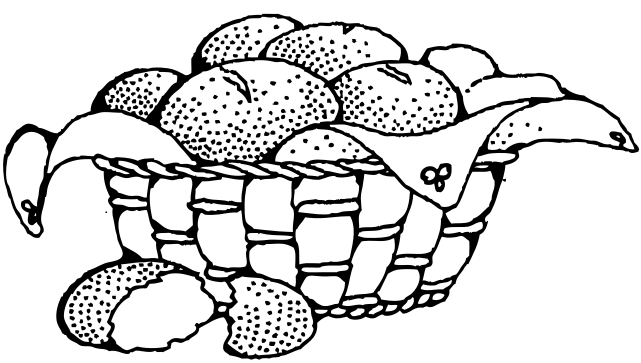
L'aiutino è a pagina 115; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 129.

◊◊◊ A

22. La dozzina del panettiere

In inglese, l'espressione "a bakery's dozen" corrisponde al numero 13. Un possibile motivo per questa curiosità è che c'erano leggi molto severe per chi vendeva pagnotte sottopeso, e quindi per sicurezza i panettieri mettevano una pagnotta in più per essere certi che il peso fosse sufficiente; ad ogni modo ciò non è importante saperla per risolvere questo quesito.

Un panettiere ha preparato una "dozzina del panettiere" di pagnotte. Tutte le pagnotte pesano un numero intero di grammi, e mettendone da parte una qualunque di esse si possono suddividere le altre dodici in due gruppi di sei pagnotte dallo stesso peso complessivo. Dimostrate che tutte e 13 le pagnotte hanno lo stesso peso.

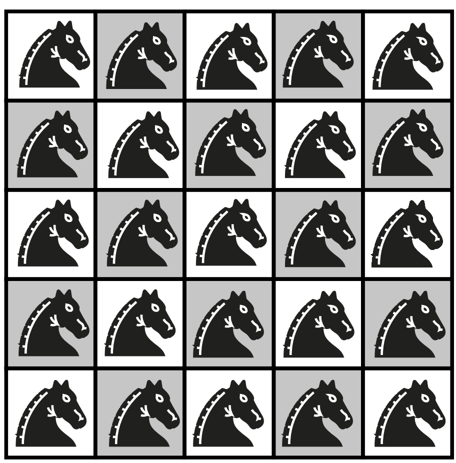


L'aiutino è a pagina 116; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 136.

◊ I

23. Venticinque cavalli

Ricordate come muove un cavallo negli scacchi? Si sposta di due caselle in una direzione e di una sola nella direzione ortogonale, disegnando una specie di L. Nella scacchiera ridotta di dimensione 5×5 che vedete nella figura sotto trovate ben 25 cavalli in parata, che riempiono ogni spazio disponibile. Come in ogni parata che si rispetti, vorreste far cambiare loro disposizione (tecnicamente, "facite ammuina"), muovendoli tutti e 25 contemporaneamente, in modo che ciascuno finisca su una casella diversa. Quali sono le mosse che deve fare ciascun cavallo?



L'aiutino è a pagina 117; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 144.

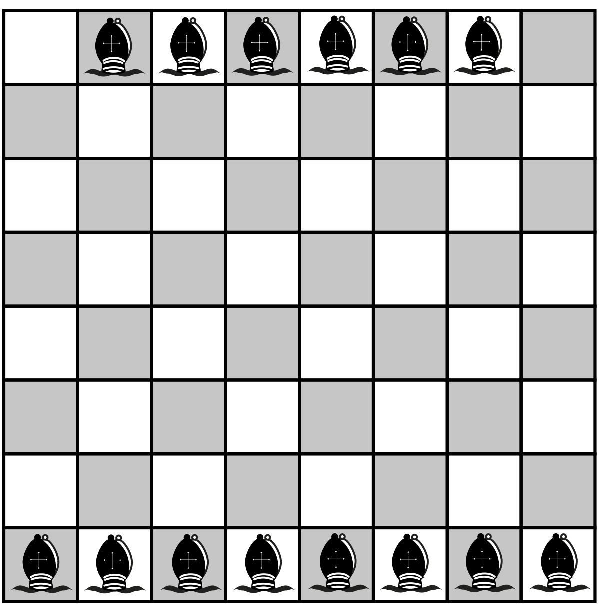
24. Detenuti numerati

In una nazione sudamericana ai tempi di una feroce dittatura, dopo la decisione della Junta "Svuotiamo le carceri, in un modo o nell'altro", sono stati sorteggiati 10 (presto ex, qualunque sia il risultato) detenuti, a cui è stato dipinto in fronte un numero da 0 a 9. I numeri non sono necessariamente tutti diversi: potrebbero ad esempio esserci nove 3 e un 2. La prova cui vengono sottoposti è collaborativa. Ciascuno di essi scriverà su un foglietto il numero che lui pensa sia dipinto sulla sua fronte; è sufficiente che un solo detenuto indovini il proprio numero perché tutti vengano liberati, altrimenti il becchino dovrà fare gli straordinari. I detenuti possono accordarsi prima della prova sulla strategia da seguire, ma non potranno più comunicare a partire dal momento in cui vedranno i numeri sulla fronte degli altri. Qual è la loro strategia migliore?

L'aiutino è a pagina 118; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 152.

25. Parcheggiare i cavalli

Forse sapete che in una scacchiera è possibile collocare otto regine in modo che nessuna di esse possa essere attaccata da qualcuna delle altre; lo stesso vale per le torri. Passando agli alfieri, ne possiamo mettere ben 14: basta riempire completamente l'ultima riga e metterne altri sei nella prima, lasciando libere le due caselle alle estremità come mostrato in figura. Considerate ora i cavalli. Quanti se ne possono collocare senza che nessuno ne possa attaccare un altro?

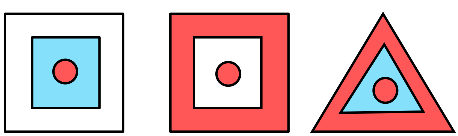


L'aiutino è a pagina 119; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 158-159.

26. Il simbolo "più diverso"

Avete presente i test di intelligenza? Alcuni di essi chiedono di trovare qual è l'elemento intruso in un gruppo. Non che la cosa sia sempre così semplice: a volte l'idea di "ovvio" di chi propone il test non è affatto ovvia, e persone diverse danno risposte diverse... il che spiega perché non è facile misurare l'intelligenza, sempre ammesso che il concetto stesso di "misura dell'intelligenza" abbia senso.

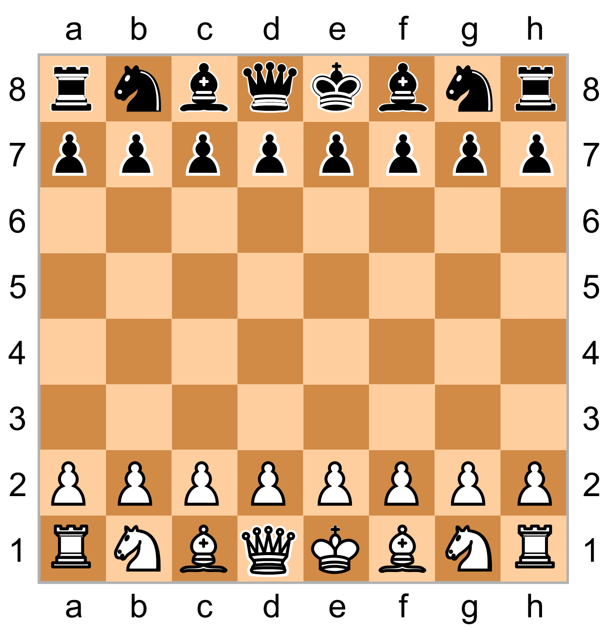
Indipendentemente da queste diatribe, e tenendo presente che questo *non* è un test di intelligenza: secondo voi quale di queste figure è "la più diversa"?



L'aiutino è a pagina 119; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 165-166.

27. Scacchi doppi

Gli scacchi doppi sono una variante del gioco degli scacchi. Le regole sono identiche a quelle solite, con l'eccezione che ogni giocatore, quando è il suo turno, deve fare *due* mosse consecutive. Dimostrate che il primo giocatore ha una strategia di gioco che gli assicura di non perdere mai una partita agli scacchi doppi.

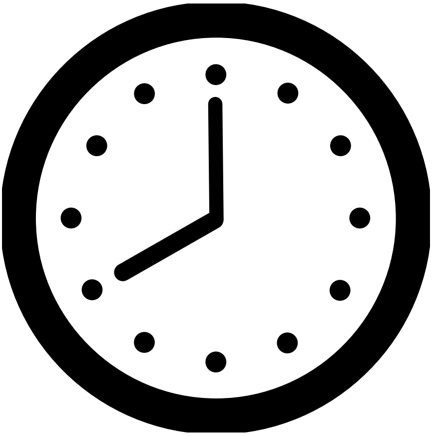


L'aiutino è a pagina 120; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 173.

28. Rientro anticipato

Un uomo torna a casa dal lavoro tutti i giorni alla stessa ora; sale sul treno, arriva in stazione dove sua moglie va a prenderlo in auto e tornano a casa insieme. Il treno è sempre puntuale; la moglie lo sa, e quindi arriva in stazione esattamente all'orario di arrivo del treno. Un giorno però l'uomo prende il treno precedente, che arriva un'ora prima. Arrivato in stazione, si incammina verso casa a passo costante. Sua moglie, che non sa del cambiamento di programma del marito, parte alla solita ora e quando lo incrocia per strada lo fa salire in macchina; la coppia rientra a casa venti minuti in anticipo rispetto al solito. Per quanto tempo l'uomo ha camminato?

Come sempre in questi problemi i tempi di trasbordo sono da immaginarsi nulli; inoltre la moglie guida a velocità costante, che ci sia o no a bordo il marito.

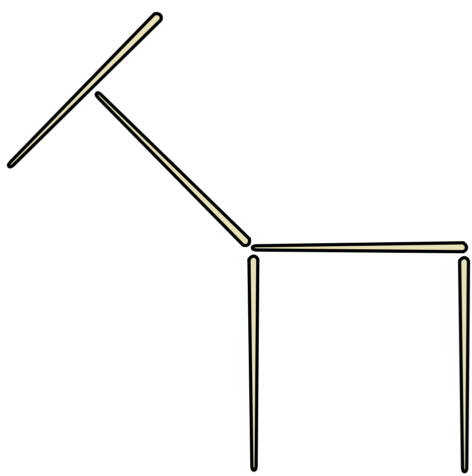


L'aiutino è a pagina 121; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 180.

◊ O T

29 (Non) spostare la giraffa

Nel laboratorio esperenziale “disegnate con gli stuzzicadenti” vi è stato chiesto di raffigurare una giraffa. D’accordo, il vostro risultato, che vedete qui sotto, è leggermente peggiore di quanto potreste trovare dipinta in una grotta preistorica: ma nessuno vi chiede di essere artisti. Il vostro compito è spostare esattamente uno stuzzicadenti per ottenere… la stessa giraffa. Beh, non proprio la stessa, altrimenti basterebbe rimettere lo stecchino al suo posto; dovete ottenere una giraffa identica all’originale, a meno di eventuali rotazioni e riflessioni.

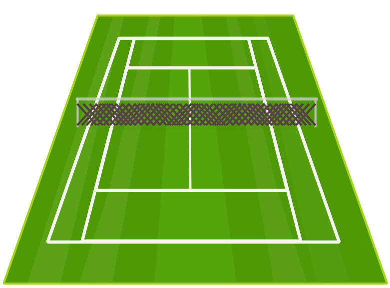


L’aiutino è a pagina 122; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 188.

30. Il torneo di tennis

Il torneo aziendale di tennis della megazienda è stato accuratamente preparato: i 32 dipendenti che si sono iscritti sono stati posizionati nel tabellone, che è formato da cinque turni: come sempre in questi tornei, chi perde una partita viene eliminato, e si continua fino alla finale che proclamerà il vincitore.

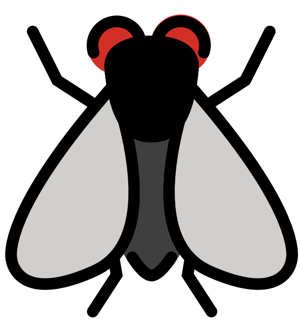
Il giorno prima dell'inizio del torneo il capo del personale decide però di aggiungersi ai partecipanti. Non è opportuno impedirglielo, e quindi il tabellone viene rifatto in fretta e furia; viene aggiunto un nuovo turno, e dato che il numero di partecipanti non è una potenza di 2 alcuni dei giocatori (tra cui presumibilmente il capo del personale. immagino...) salteranno il primo turno ed entreranno nel torneo successivamente. Sapendo che i campi vengono pagati un tot a partita giocata, e che l'azienda vorrebbe evitare di spendere più del necessario, qual è la disposizione migliore del tabellone per spendere il meno possibile?



L'aiutino è a pagina 123; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 195.

31. La mosca suicida

Una mosca, stanca della vita, ha deciso di suicidarsi e ha scelto di farlo nel modo più clamoroso possibile. Si reca così in un laboratorio dove si effettuano crash test; due automobili, inizialmente a 50 metri di distanza, si muovono rispettivamente a 2 e 3 m/s l'una contro l'altra. La mosca, che per comodità di calcolo consideriamo puntiforme, parte dal paraurti di una delle auto, e viaggia a 7 m/s in direzione dell'altra. Quando tocca il paraurti della seconda auto si gira istantaneamente e ritorna indietro, sempre alla stessa velocità; mi ero dimenticato di aggiungere che era stata addestrata dalla Nasa e quindi poteva sopportare accelerazioni incredibili. Il suo avanti-e-indietro prosegue fino al fatale spiaccicamento: quanta strada la povera mosca avrà percorso nel suo ultimo viaggio terreno, pardon, aereo?



L'aiutino è a pagina 115; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 129-130.

32. Una moneta equa, una no

È tradizione che la cena del Raduno annuale del Circolo dei Probabilisti sia pagata dal presidente oppure dal segretario; ciascuno di loro deve lanciare una delle due monete simbolo del Circolo stesso. Purtroppo però c'è un problema: anche se le due monete sono assolutamente indistinguibili a prima vista, una di esse non è equa. I soci non sanno però quale delle due monete sia, se lanciandola esca più spesso testa oppure croce, né tantomeno la frequenza relativa di teste e croci.

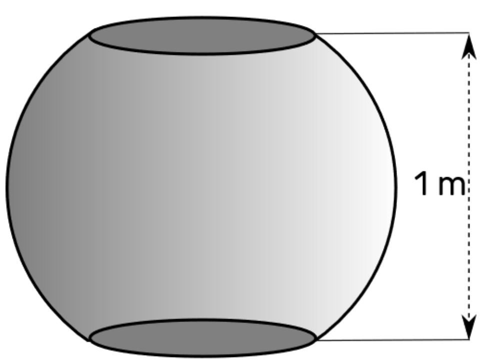
Come fanno i Probabilisti a scegliere in modo assolutamente casuale ed equo chi deve pagare, lanciando una sola volta le due monete?

L'aiutino è a pagina 116; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 137.

◊ G T

33. La sfera trapanata

Tutti applaudirono all'inaugurazione dell'ultima opera di Giò Prezzemolo, nella piazza principale di Cocconito di Cocconato. Solo Gaudenzio, lo scemo del paese, gridò: "Ma è una palla con un buco!" L'assessore alla cultura, il famoso critico Vittorio Sparli, lo zittì. "Capra! Non vedi la grandiosità di questa espressione del razionalismo minimal-geometrico? La perfezione di una sfera, trapanata al suo esatto centro da un cilindro rappresentante l'ingegnosità dell'umanità che penetra i misteri della natura. Spiegavo giusto nel mio ultimo libro…" Gaudenzio lo interruppe: "Sì, ma quanto ne rimane, della sfera?" Giò Prezzemolo prese la parola con un sorriso sardonico: "Sono certo che Sparli ne ha verificato il volume prima di firmare l'assegno per saldare il mio onorario. Ma un uomo di cultura come lui potrà comunque calcolare il suo volume al volo; gli basterà sapere che il cilindro mancante è alto esattamente un metro". Sparli era un esperto di diatribe, ma aveva difficoltà persino con le tabelline: borbottò che non era sua responsabilità e si affrettò a dichiarare conclusa l'inaugurazione. Qual è il volume della scultura?

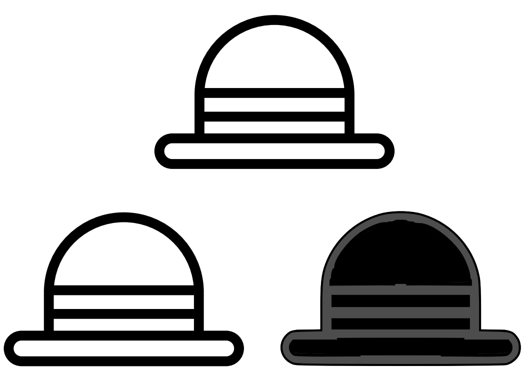


L'aiutino è a pagina 117; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 145.

34. Lo spareggio

Nell'annuale gara di giochi matematici e logici tenutasi nella scuola di Germagnano, Alice, Bruno e Carlo terminarono le prove con lo stesso punteggio: la giuria decise così di fare uno spareggio per stabilire il vincitore. I tre ragazzi furono bendati e fu messo loro in testa un cappello. Questi cappelli, fu loro spiegato, potevano essere o bianchi o neri: una volta tolte le bende, ciascuno di loro avrebbe potuto vedere i cappelli degli altri ma non il proprio. Se uno di loro avesse visto almeno un cappello bianco, avrebbe dovuto battere la mano sul tavolo una volta; quando fosse stato certo del colore del proprio cappello, avrebbe dovuto battere la mano sul tavolo due volte.

I giudici non fecero quasi in tempo a togliere le bende che Alice batté immediatamente tre volte la mano sul tavolo annunciando "il mio cappello è bianco!", e aggiudicandosi lo spareggio. Come poté essere così rapida e sicura?

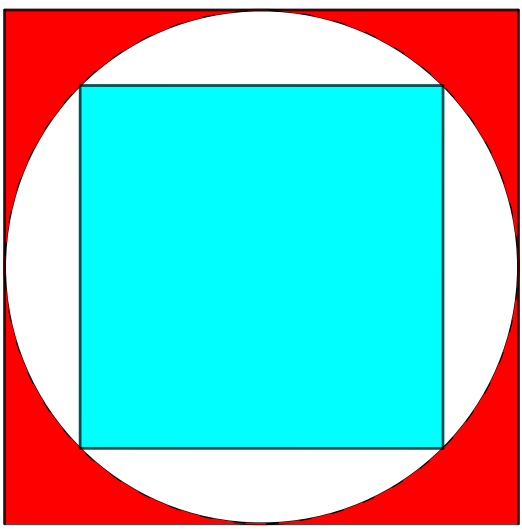


L'aiutino è a pagina 118; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 152.

◊ G

35. Inscritto e circoscritto

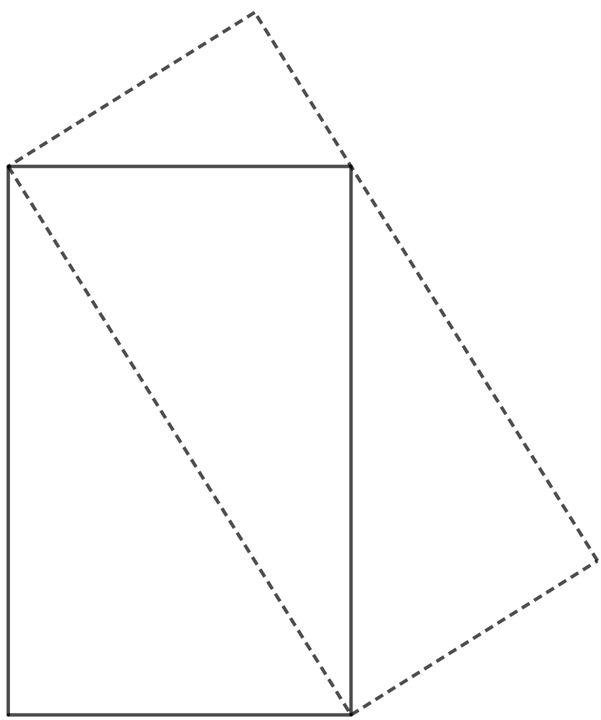
La figura qui sotto rappresenta il simbolo del Partito della Matematica: un cerchio a cui è stato inscritto e circoscritto un quadrato. Se l'area del quadrato maggiore è 1000 cm², qual è l'area del quadrato minore?



L'aiutino è a pagina 119; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 159.

36. Due rettangoli

Il rettangolo a tratto intero mostrato in figura ha i lati di 5 e 8 centimetri. Qual è l'area del rettangolo tratteggiato?



L'aiutino è a pagina 120; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 166.

37. Quadrato magico utopico

Immagino conosciate tutti il quadrato magico raffigurato qui sotto, che contiene al suo interno tutte le cifre dall'1 al 9. Purtroppo è così obsoleto! Pensate che i cinesi lo conoscevano già due millenni or sono. Ormai siamo nel XXI secolo e lo zero ha piena dignità di cifra; il vostro compito è pertanto (ammesso che ciò sia possibile) costruire un nuovo quadrato magico che contenga tutte le cifre dallo 0 al 9, senza ripetizioni. Evidentemente, visto che il quadrato è formato da nove caselle e le cifre da usare sono dieci, ci dovrà essere un numero di due cifre. Ma quello non è certo un problema: anche la notazione posizionale vanta oltre mille anni di storia, no?

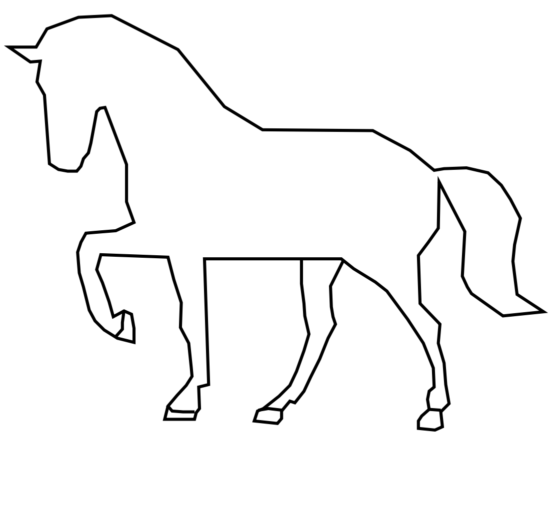
6	7	2
1	5	9
8	3	4

L'aiutino è a pagina 120; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 173-174.

38. Recinti dispari

Il nostro circolo ippico è gestito da un numerologo, con idee ben precise su come trattare gli animali perché possano rendere al meglio. In questo periodo, ad esempio, è convinto che i recinti non debbano mai contenere un numero pari di cavalli, perché altrimenti si formano delle coppie che tenderanno a stare vicine anche in gara.

In questo momento il circolo possiede 21 cavalli, e bisogna disporli in quattro recinti quadrati (anche quella del formato dei recinti è una mania del nostro gestore) in modo che all'interno di ciascun recinto ci sia un numero dispari di cavalli. Come si può fare, senza vendere o comprare (o prestare, o affittare…) cavalli?



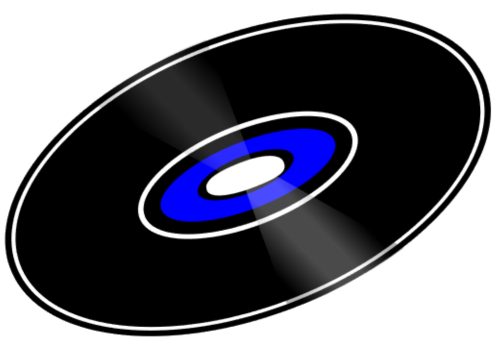
L'aiutino è a pagina 121; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 181.

◊ T

39. Ai tempi del vinile

Probabilmente molti di voi hanno visto i giradischi solo nei vecchi film, anche se i dischi in vinile sono tornati di moda tra gli appassionati audiofili. Ma non dovrebbe essere difficile capire come funzionava: il disco veniva fatto girare a velocità costante (quando si parla di 45 giri, si sottintende "al minuto") e la puntina se ne stava nel solco, spostandosi dall'esterno all'interno del disco per raccogliere vibrazioni da trasformare poi in suono. La speranza era che la puntina non saltasse da un solco all'altro, perché altrimenti "si incantava il disco". Curiosità: il CD funziona alla rovescia: la lettura parte dal centro verso l'esterno. Inoltre nelle tracce più esterne sono scritti più dati, pertanto la velocità di rotazione non è costante.

Uno dei dischi a 45 giri che avevo conteneva due brani, uno per lato. Il primo durava 2'30" e il secondo 2'45". Quanti solchi c'erano nel disco?



L'aiutino è a pagina 122; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 188.

◊◊ M

40. Manca sempre qualcuno

Nella caccia al tesoro del paese occorreva raccogliere cinque coccarde, superando altrettante prove di abilità. Non tutti sono stati però abili allo stesso modo: dei 128 partecipanti, 117 hanno superato la prima prova, 105 la seconda, 110 la terza, 113 la quarta e solo 86 l'ultima. Nel pomeriggio sono stati radunati tutti coloro che hanno superato con successo tutte le prove. Quanti sono, come minimo? E soprattutto, potete essere certi che ce ne sia stato per forza qualcuno?

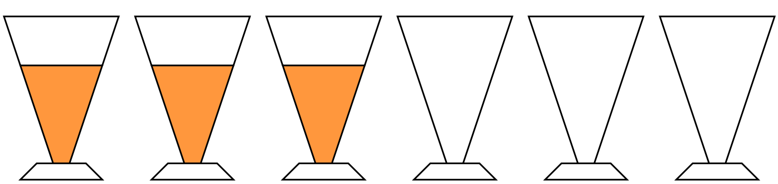
L'aiutino è a pagina 123; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 195-196.

◊ 🅃

41. Catering pericoloso

L'ultima volta che mi è capitato di trovarmi a uno di quei buffet dove sembra che gli invitati si siano evoluti a partire dalle cavallette, a un certo punto erano rimasti solo sei bicchieri, messi belli in fila come si può vedere in figura: i primi tre erano pieni di succo d'arancia e gli ultimi tre vuoti.

Sperando di fermare per un attimo la furia consumatrice dei partecipanti, li ho sfidati a muovere il numero minore di bicchieri per fare in modo che i bicchieri fossero alternativamente pieni e vuoti. Ho aggiunto che mi andava anche bene una soluzione in cui la fila di bicchieri finale fosse spostata rispetto a quella iniziale. Uno degli ospiti iniziò a dire "è facilissimo!", ma nessuno udì la sua soluzione: il grumo osmotico degli invitati andò infatti all'assalto dei tre bicchieri pieni, facendomi capire che la mia carriera di barman era terminata prima ancora di cominciare. Secondo voi, quanti bicchieri occorreva muovere?

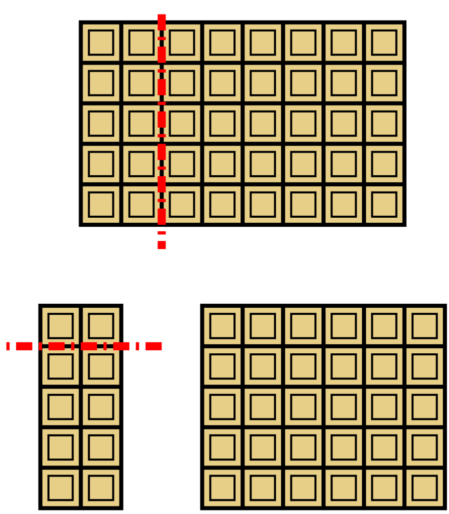


L'aiutino è a pagina 115; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 130.

42. Com'è buono il cioccolato!

Alberto e Fred hanno ricevuto una tavoletta di cioccolato ciascuno: la tavoletta è un rettangolo formato da 5 quadretti per 8. Per far durare più a lungo il cioccolato (e probabilmente per impiastricciarsi per bene) le due pesti hanno pensato a un gioco. A ogni "Via!" fanno contemporaneamente una mossa, che può essere di due tipi: dividere un pezzo di tavoletta in due parti secondo una delle linee di demarcazione, oppure, se tra i vari pezzi formati c'è un quadretto singolo, mangiarselo. Nella figura si mostra una possibile prima mossa con un taglio verticale, e una possibile seconda mossa con un taglio orizzontale.

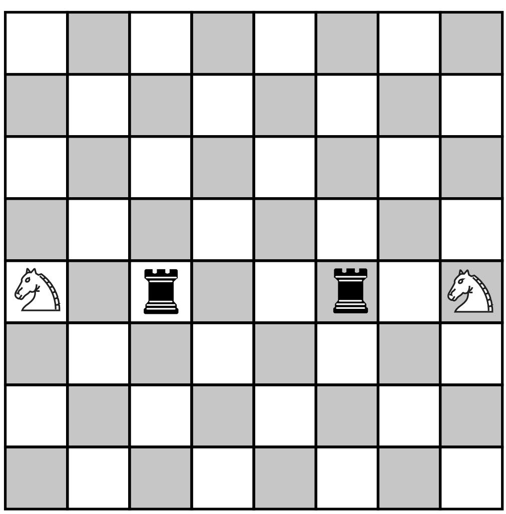
Nonostante ciascuno di loro avesse studiato attentamente la strategia per l'ordine in cui eseguire le operazioni, Alberto e Fred hanno mangiato l'ultimo quadretto di cioccolato insieme. Come mai? E quante mosse sono state fatte in totale?



L'aiutino è a pagina 116; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 138.

43. Caccia alla lepre

Forse non tutti sanno che a Marostica non si celebra solo la partita con gli scacchi viventi. Nella famosa piazza con la scacchiera si celebra anche una rituale caccia alla lepre. Due lepri e due cacciatori si posizionano come i cavalli e le torri in figura, muovendosi alternativamente di una casella in orizzontale o verticale. La prima mossa è dei cacciatori, dopo avere scelto quale lepre inseguire. Un cacciatore cattura la sua lepre se con la sua mossa finisce nella casella dove essa si trova; se si trovasse nella stessa casella della lepre dell'altro cacciatore non succederebbe nulla, perché nessuno ruberebbe mai il lavoro altrui. Se però dopo 15 mosse i cacciatori non sono riusciti a catturare le lepri, queste otterranno però la libertà. Riusciranno i cacciatori a vincere?



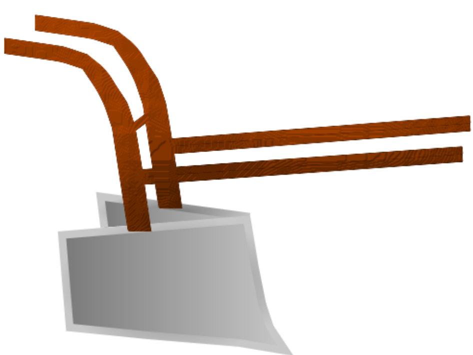
L'aiutino è a pagina 117; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 145-146.

◊ B

44. Stakanov and friends

Durante i primi gloriosi tempi della Rivoluzione d'Ottobre, prima della degenerazione staliniana, a una squadra di contadini fu assegnato l'incarico di arare due campi, uno dei quali aveva superficie doppia dell'altro. La squadra si dedicò al campo più grande per mezza giornata; poi si divise a metà, e nell'altra mezza giornata le due sottosquadre lavorarono su entrambi i campi. Alla fine della giornata il campo grande era stato arato completamente; rimaneva ancora un pezzetto del campo piccolo, che un contadino terminò lavorando da solo per tutto il giorno successivo.

Supponendo che tutti i contadini lavorassero alla stessa velocità, di quanti uomini era composta la squadra?

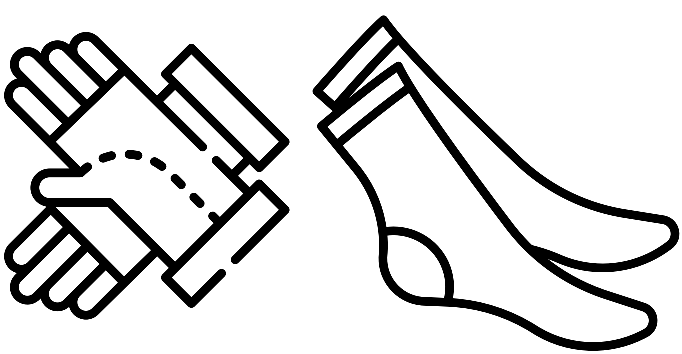


L'aiutino è a pagina 118; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 152-153.

45. Problemi di vestizione

Era ancora notte fonda, ma Karl Heinz Grüber doveva assolutamente partire per l'aeroporto, e si trovava a rovistare nel cassetto dei calzini, perché la sera prima si era dimenticato di prepararli con gli altri vestiti; il tutto al buio, per non svegliare la moglie Gudrun. Nel cassetto c'erano 10 paia di calzini bianchi e 10 paia di calzini grigi (essendo tedesco, Karl Heinz non trovava nulla di strano nel girare con i calzini corti bianchi e le Birkenstock). Quanti calzini dovette prendere per essere certo di averne due dello stesso colore?

Curiosamente, la settimana successiva fu Gudrun a compiere un'operazione analoga, aprendo però il cassetto superiore dove c'erano 10 paia di guanti bianchi e 10 paia di guanti neri: una signora come lei non sarebbe mai andata a un ricevimento senza indossare un paio di guanti. Quanti guanti dovette prendere Gudrun per essere certa di averne un paio dello stesso colore?

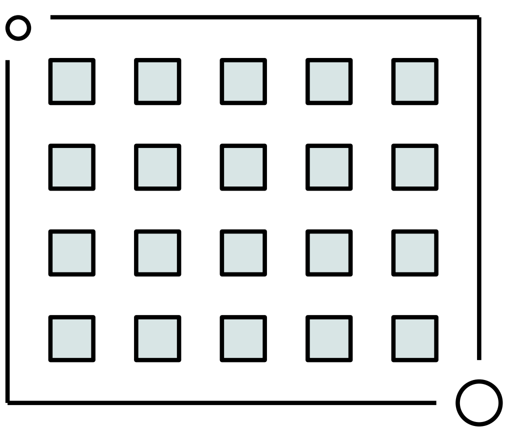


L'aiutino è a pagina 119; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 160.

◊◊◊ B

46. Saper scegliere la propria strada

A Gaia piace andare a scuola. Ha infatti l'occasione di attraversare insieme al nonno tutto il quartiere modello dove vive, raffigurato schematicamente in figura: la sua casa sta all'angolo nord-ovest del quartiere mentre la scuola è a quello sudest. Gaia è una bimba curiosa e ogni giorno vorrebbe fare una strada diversa (solo all'andata, al ritorno no: anche se non l'ho indicata, all'angolo sud-ovest c'è una gelateria...). Non vuole però allungare inutilmente il percorso, per evitare di arrivare in ritardo: i due camminano quindi solo in direzione est o sud. In quanti modi nonno e nipotina possono scegliere un percorso diverso?



L'aiutino è a pagina 120; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 167.

◊◊ T

47. Barbecue estivo

In spregio a tutte le norme contro l’inquinamento atmosferico, John Bull ha deciso di sfruttare la giornata di sole per fare un bel barbecue come quelli di una volta: lui, la moglie Samantha e il figlioletto Junior. Beh, figlioletto non è forse il termine giusto per un ragazzone di 1 metro e 80 per 90 kg! Le tre bistecche da 8 etti cadauna sono lì belle pronte, così come le due bistecchiere: in omaggio allo stile “se non sono carbonizzate non ci piacciono”, ogni bistecca verrà lasciata cuocere per 5 minuti da ogni lato.

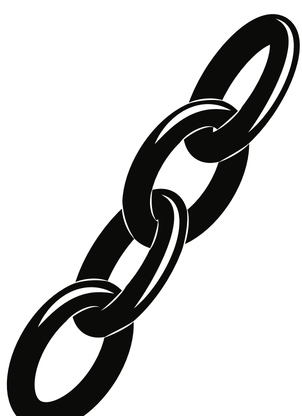
John si gratta la testa e fa due conti: “In 10 minuti posso cuocere le prime due bistecche, e poi me ne serviranno altri 10 per la terza. Quanto tempo ci vuole per riuscire a fare un bel pranzetto!” Samantha, bionda ma non certo stupida, lo interrompe: “Non preoccuparti, caro: possiamo farcela più in fretta!” In quanto tempo si possono cuocere le tre bistecche? Supponete che togliere e girare una bistecca sia un’operazione istantanea.

L’aiutino è a pagina 120; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 174.

48. Scateniamoci!

Non è bello trovarsi in un paese straniero senza soldi. Al giorno d'oggi abbiamo carte di credito e bancomat, ma in passato non era così! A un mio antenato era capitato di non avere denaro liquido nei primi decenni dell'Ottocento. L'unico bene di valore che aveva era una catena d'argento formata da sette anelli: sapendo che il denaro che aveva richiesto a casa gli sarebbero arrivati al più tardi in una settimana, fece un patto con il suo albergatore. Il primo giorno gli avrebbe lasciato in pegno un anello della catena, il secondo due, e così via fino al settimo giorno. L'albergatore si impegnava a non vendere gli anelli fino alla fine della settimana, in modo che il mio avo potesse poi rientrare in possesso della catena una volta saldati i conti.

Il mio antenato non voleva però aprire tutti gli anelli della catena, anche perché poi avrebbe dovuto farli richiudere e spendere soldi. Qual è il modo più economico per tagliarla che permette di dare ogni giorno all'albergatore il numero necessario di anelli?

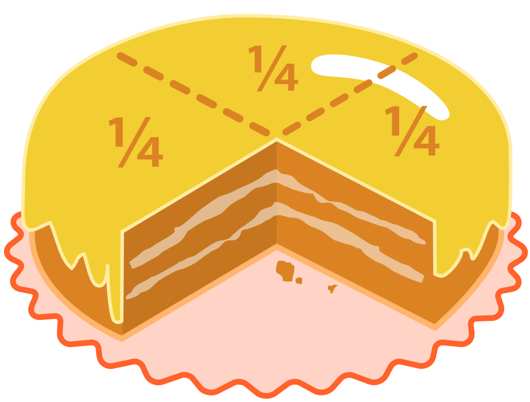


L'aiutino è a pagina 121; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 181-182.

◊ T

49. Il taglio della torta

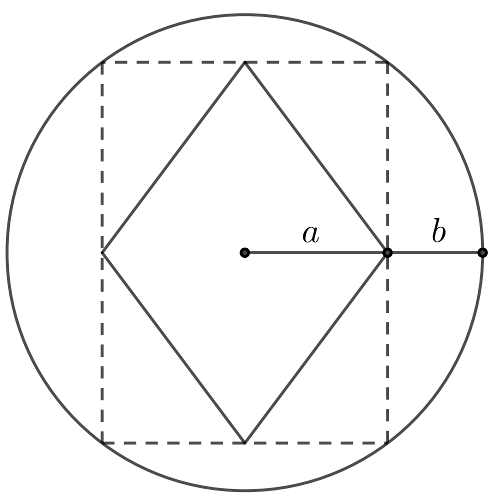
A me la Sachertorte piace tanto. Dalle parti di casa mia c'è una pasticceria che riesce a mettere la glassa anche sotto la torta, il che è fantastico. Il guaio è che non sono il solo ad apprezzare la Sacher e quindi quando ci troviamo tra amici dobbiamo sempre dividercela equamente. Visto che la torta è a forma di cilindro perfetto, dividerla in due è facile: la tagliamo a metà, e rimangono due semicilindri. Anche la divisione in quattro parti è facile: due tagli perpendicolari e si hanno quattro fette. La scorsa settimana però eravamo in otto, e il nostro tagliatore specializzato ha fatto ben quattro tagli, con le proteste di tutti perché il coltello se l'è poi pulito lui guadagnandosi delle preziose briciole di torta. È possibile fare di meglio? Non è permesso riposizionare le fette tra un taglio e l'altro, altrimenti ci si impiastriccia tutti.



L'aiutino è a pagina 122; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 189.

50. Una losanga è per sempre

Il quartiere modello di Casalpusterlengo 2 si fregia di un laghetto sulla piazza centrale. Il lago è a forma di rombo, all'interno di una pavimentazione rettangolare a piastrelle inscritta a sua volta in un prato circolare come si vede in figura. L'architetto Le Cordusieur, nella conferenza stampa di inaugurazione del laghetto, ha spiegato che il cerchio simboleggia la natura, il rettangolo l'opera dell'uomo, e il rombo, un po' come il diamante, l'eternità. Il pubblico, che si era distratto durante lo sproloquio dell'architetto, si è risvegliato solo quando un ragazzino ha chiesto quant'era lungo il lato del laghetto. Le Cordusieur si è fermato, la sua faccia ha assunto una smorfia, e ha bofonchiato "Oui, i prosgettì mi dicono che la lunghessa a è cinque metri mentre b è di quattro metri. Ci sarà sicuramànt una modalità di calcolare il lato, oui...". Potete aiutare l'architetto?

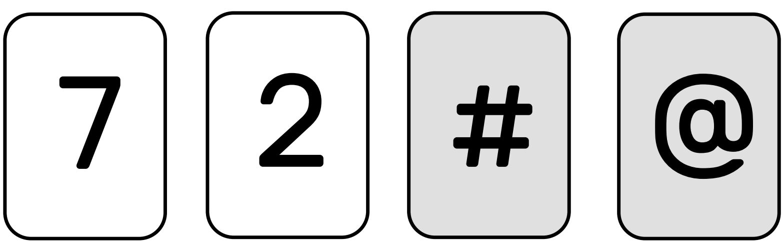


L'aiutino è a pagina 123; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 196.

◊ L

51. Gira la carta

In un test attitudinale vi viene spiegato che le carte che vi mostreranno hanno da un lato un numero, che può essere pari oppure dispari, e dall'altro possono avere un cancelletto (#) oppure una chiocciola (@). Voi dovete verificare se l'affermazione "tutte le carte con un numero pari hanno sul dorso un cancelletto" è vera oppure falsa, girando il numero minimo di carte necessario. Se le carte che vi vengono mostrate sono quelle qui sotto, quante e quali voltereste?



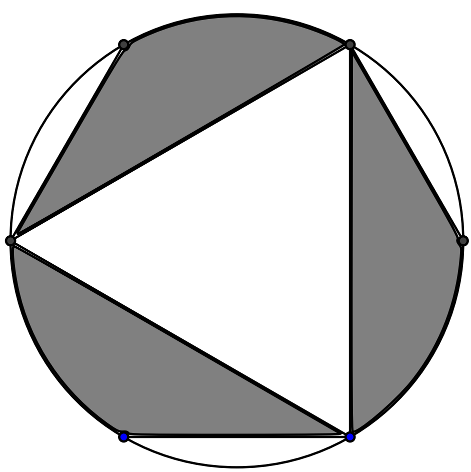
L'aiutino è a pagina 115; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 130-131.

◊ G

52. Quadrature varie

Nonostante alcuni irriducibili ci tentino ancora, è stato dimostrato che la quadratura del cerchio (costruire cioè con riga e compasso un quadrato della stessa area di un cerchio dato) è impossibile. Però possiamo calcolare l’area di alcune particolari figure curvilinea: Ippocrate di Chio era riuscito a quadrare delle lunule, e Archimede un arco di parabola.

Se volete cimentarvi con una quadratura, guardate il disegno qui sotto. I punti indicati sulla circonferenza sono tutti equidistanti: se l’area del cerchio è 100 cm^2, qual è l’area della parte grigia?

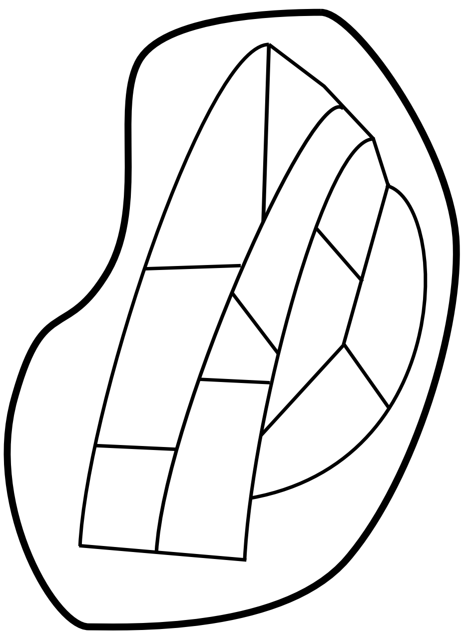


L’aiutino è a pagina 116; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 138-139.

◊◊ C

53. Il giro dell'isola

L'isola di Triabol ha una curiosa caratteristica: tutti gli incroci che vi si trovano sono fatti a Y, con tre strade che arrivano all'incrocio. Loris, con la sua moto, a un certo punto si è perso e, non sapendo esattamente cosa fare, ha deciso di seguire un algoritmo ben preciso per spostarsi: al primo incrocio girerà a destra, al secondo a sinistra, al terzo a destra e così via. Dimostrate che Loris prima o poi passerà di nuovo dal punto di partenza.

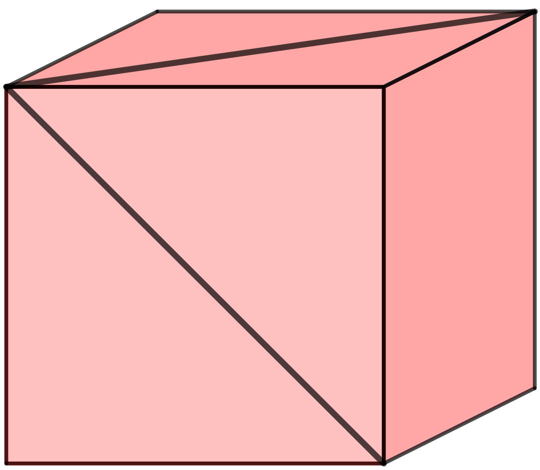


L'aiutino è a pagina 117; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 146.

◊ G

54. Triangolare il cubo

Prendete un cubo, scegliete un vertice e disegnate le diagonali di due delle facce del cubo che partono da quel vertice, come nella figura. Quanto misura l'angolo tra i due segmenti?



L'aiutino è a pagina 118; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 153.

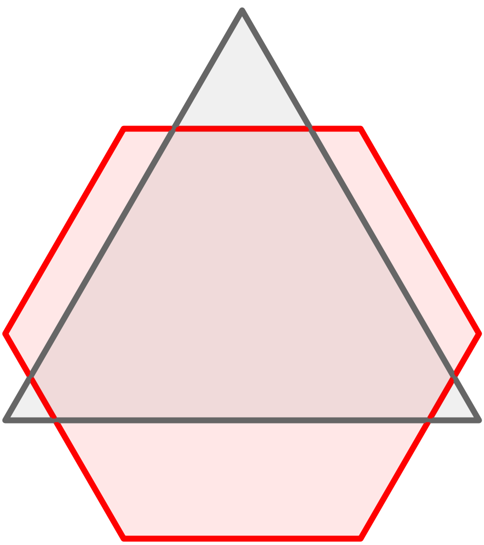
55. Al fuoco!

La scorsa estate piantai la mia tenda non troppo lontano da un canale (perfettamente rettilineo in quel tratto), e a una certa distanza da quella del mio amico Gino, visto che ciascuno di noi ci tiene alla propria privacy. La notte mi svegliai sentendo uno strano odore e mi accorsi che la tenda di Gino stava bruciando. Avevo con me un secchio, ma non avevo acqua, e quindi sono dovuto passare prima dal canale per riempirlo. Considerando che non mi fidavo di correre al buio, quindi col secchio pieno o vuoto mi sarei mosso alla stessa velocità, e visto che per ovvie ragioni cercavo di fare il più in fretta possibile, in quale punto del fiume mi è convenuto prendere l'acqua?

L'aiutino è a pagina 119; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 160-161.

56. Stesso perimetro, area diversa

Un triangolo equilatero e un esagono regolare hanno lo stesso perimetro. Qual è il rapporto tra le loro aree?



L'aiutino è a pagina 120; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 168.

57. Spaccaquindici

A un tavolo di uno stand della fiera del paese era disegnata una fila di nove rettangoli, numerati da 1 a 9. L’imbonitore invitava i passanti a giocare contro di lui e spiegava le semplici regole. Giocare una partita contro di lui costava 50 centesimi. I due contendenti selezionavano a turno un rettangolo. Se il giocatore riusciva ad averne tre la cui somma fosse 15, allora avrebbe vinto 50 euro. Se invece avesse vinto l’imbonitore, il giocatore avrebbe dovuto pagargli 5 euro; se nessuno dei due fosse riuscito a “spaccare il quindici” non sarebbe successo nulla.

Ho provato a giocare, e ho messo il mio segnalino sul 7, al che l’imbonitore ha giocato sull’8. Ho proseguito col 2, e lui ha subito risposto con il 6, per evitare che facessi 15. A questo punto sono stato costretto a giocare l’1; l’imbonitore ha scelto il 4 e sorriso, visto che alla mossa successiva avrebbe potuto scegliere il 3 oppure il 5 e vincere in ogni caso, e io non avevo nessuna possibilità di anticiparlo facendo 15 prima di lui. Ho pagato i miei 50 centesimi evitando di cimentarmi in una rivincita che temevo si sarebbe risolta in un’altra disfatta; ma avrei potuto vincere la partita giocando meglio?

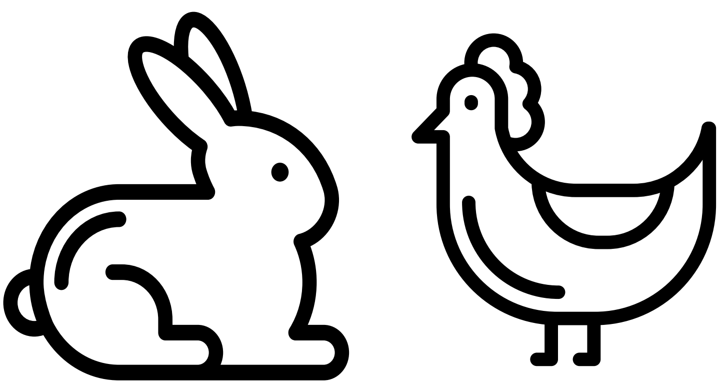
1	2	3	4	5	6	7	8	9

L’aiutino è a pagina 121; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 174-175.

58. Conigli e polli

Questo problema potrebbe essere assegnato a scuola e risolto pedissequamente, ma la soluzione si può anche trovare in maniera molto poco scolastica.

Un ragazzo vede in un cortile alcuni conigli e alcuni polli. Conta 18 teste e 58 zampe. Quanti polli e quanti conigli ci sono nel cortile?

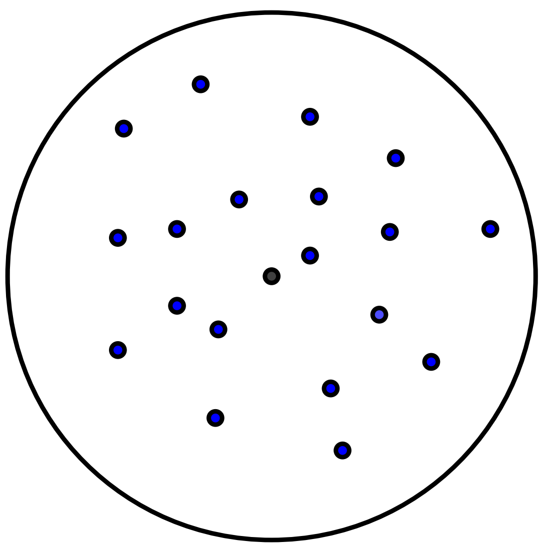


L'aiutino è a pagina 121; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 182.

◊ C

59. Un circolo affollato

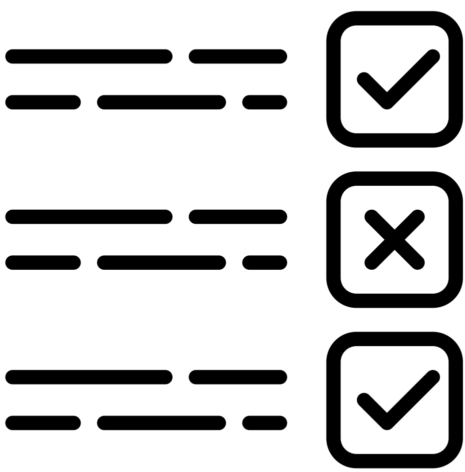
All'Ipermercato della Geometria Piana c'è un'offerta speciale: un numero sterminato di cerchi di raggio pari a un centimetro, tutti garantiti avere al loro interno un milione di punti distinti tra loro e colorati – altrimenti come potreste riconoscerli? Preso uno qualsiasi di questi cerchi, è possibile tracciare una retta, che non deve necessariamente passare dal centro del cerchio, che divida equamente i punti, mezzo milione per parte? (L'immagine ha solo lo scopo di presentare il prodotto)



L'aiutino è a pagina 122; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 189-190.

60. Zero spaccato

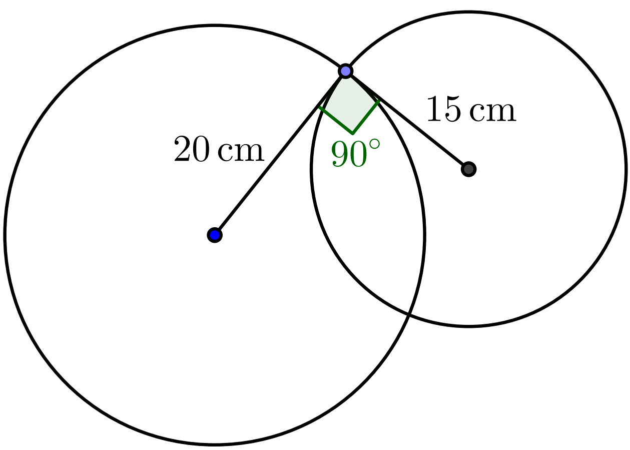
Il test di ammissione alla Facoltà di Matematica consiste in 25 domande. Vengono assegnati 8 punti per ogni risposta corretta, e tolti 5 punti per ogni risposta sbagliata oppure non data. Una volta pubblicati i risultati, Paolino sbottò: “Non è possibile! Il mio punteggio è esattamente zero!” A quante domande aveva risposto correttamente Paolino?



L’aiutino è a pagina 123; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 197.

61. Aree sovrapposte

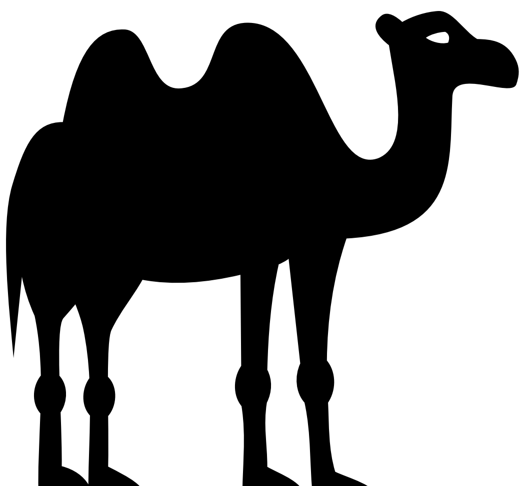
Nella figura qui sotto potete vedere due cerchi parzialmente sovrapposti. I raggi rispettivi sono di 20 e 15 cm, e l'angolo formato dai due raggi che passano per i punti di contatto è retto. Qual è la differenza tra le aree delle lunule formate dalle parti non sovrapposte dei due cerchi?



L'aiutino è a pagina 115; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 131-132.

62. I diciassette cammelli

Un racconto che non è riuscito a finire nell'edizione ufficiale delle Mille e una notte narra di un carovaniere che alla sua morte lasciò in eredità ai suoi tre figli maschi (le femmine a quei tempi contavano ancora meno di adesso) i suoi 17 cammelli, richiedendo però che la metà andasse al figlio maggiore, un terzo a quello di mezzo e un nono al minore. Come fecero i figli a suddividersi il lascito senza dover mangiare carne di cammello per vari mesi?



L'aiutino è a pagina 116; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 139-140.

63. Legare il mondo

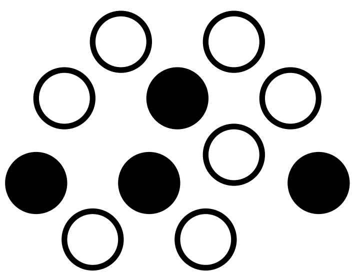
Nella sua ultima opera, la famosa artista concettuale Marianna Isaccovich ha steso una corda lungo l'equatore della Terra (che per comodità di calcolo potete supporre essere un cerchio perfetto lungo 40.000 km). Isaccovich ha poi pensato di modificare la sua opera: ha allungato di un metro la corda e l'ha fatta sospendere uniformemente sulla superficie terrestre, ovunque alla stessa distanza: non ho idea di quanto abbia speso in tiranti. La domanda è però un'altra: secondo voi un gatto riuscirà a passare sotto la corda?

L'aiutino è a pagina 117; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 147.

◊ I

64. Tutti meno uno

La schermata iniziale di un videogioco (uno di quelli educativi ai quali nessuno vuole mai giocare) mostra un certo numero di pedine bicolori, bianche e nere: all'inizio sono tutte con il lato nero visibile. Cliccando su una qualsiasi pedina, non le succede nulla; in compenso tutte le altre cambiano colore, da nera a bianca e viceversa. Scopo del gioco è far diventare tutte le pedine bianche. È sempre possibile riuscirci?



L'aiutino è a pagina 118; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 154.

65. Scrivendo del più e del meno

Carlo e Alice hanno scritto una fila di segni meno (“–”) sulla lavagna della scuola e iniziano a giocare così: a turno, ciascuno di loro può aggiungere una barretta verticale a uno dei meno oppure a due meno consecutivi, in modo da trasformarli in segni più (“+”). Chi non ha più a disposizione segni meno da convertire perde la partita.

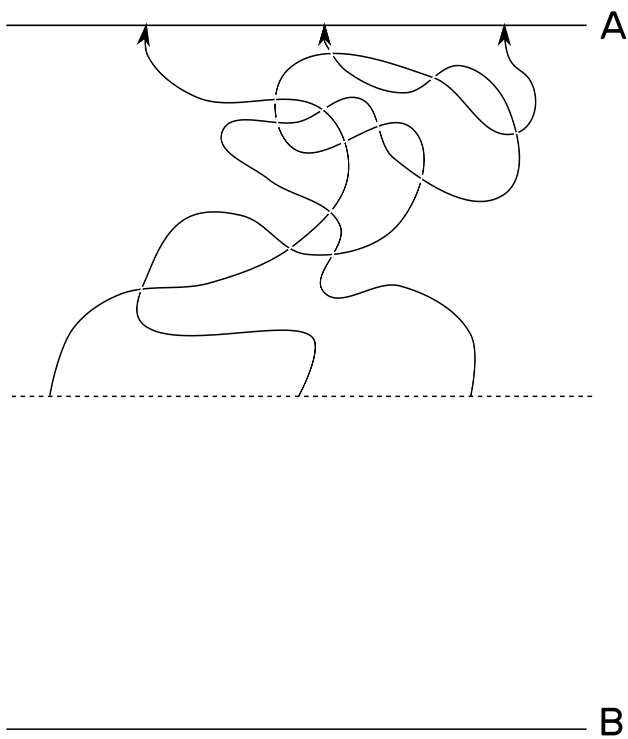
Se Alice è la prima a fare una mossa, può assicurarsi la vittoria? Oppure è Carlo ad avere una strategia vincente?

+ – – + + – – – + – +

L’aiutino è a pagina 119; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 161-162.

66. Sciogliere i nodi

Nella figura qui sotto è schematizzato un bastone (A) a cui sono legati tre fili che poi sono fatti passare uno sopra l'altro in varie convoluzioni. Con buona probabilità, se legassimo questi tre fili a un altro bastone posizionato sulla riga tratteggiata essi risulterebbero annodati; almeno è quanto capita sempre con i cavi dei dispositivi collegati al mio PC. Ma riuscireste a prendere altri tre fili, legarli ai tre originali e al bastone (B) posizionato più sotto, in modo tale che i tre fili alla fine non rimangano annodati?

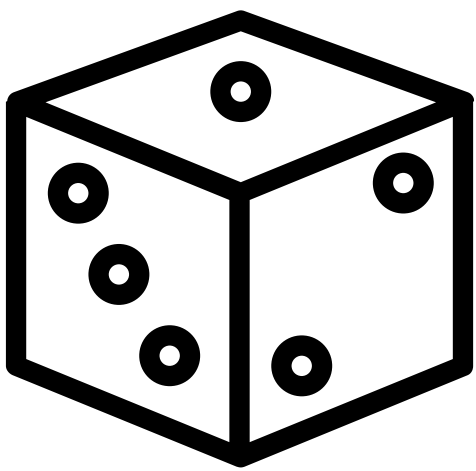


L'aiutino è a pagina 120; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 168-169.

◊◊◊ P

67. Al casinò

Uno dei più recenti giochi d'azzardo introdotto al casinò di Baden-Baden prevede che il croupier lanci un comune dado, sommando man mano i punteggi ottenuti, fino a che non raggiunge oppure supera il totale di 42. Alla fine del gioco si otterrà pertanto un punteggio compreso tra 42 e 47. Qual è il punteggio più probabile che si può ottenere?

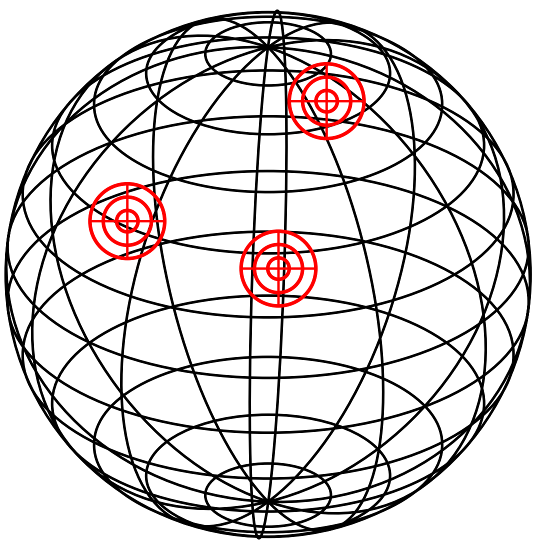


L'aiutino è a pagina 121; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 176.

◊ G

68. Tiro al bersaglio

Tre tiratori sparano a una sfera che oltre a muoversi di qua e di là gira rapidamente su sé stessa in modo casuale, cambiando sempre asse di rotazione ed esponendo quindi nel tempo tutta la superficie ai tiratori. Se tutti e tre riescono a colpire la sfera, qual è la probabilità che i tre proiettili si trovino tutti su una stessa semisfera?



L'aiutino è a pagina 122; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 183.

69. Diamoci la mano!

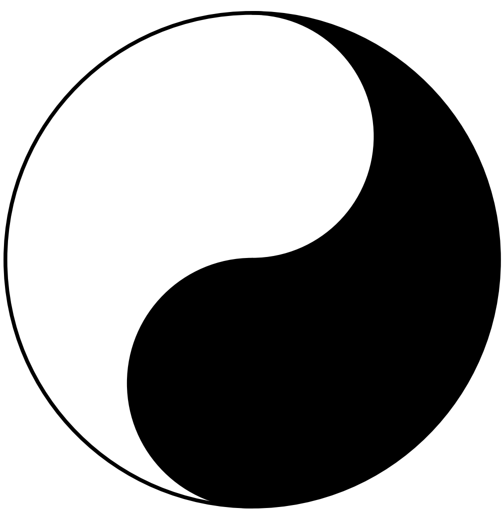
Ogni persona vissuta sulla Terra da Adamo ed Eva in poi (o se preferite dai primi ominidi in poi) ha stretto la mano a un certo numero di persone (magari zero, nel caso la sua religione vieti un simile contatto in quanto peccaminoso). Dimostrate che il numero di persone che ha dato la mano a un numero dispari di persone è pari.

L'aiutino è a pagina 122; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 190-191.

70. Bisecare lo Yin e Yang

Conoscete il simbolo dello Yin e Yang? È formato essenzialmente da un cerchio diviso da due semicerchi in due parti uguali (sovrapponibili per rotazione) e che simboleggia la dualità dei princìpi. La figura originale in realtà conterrebbe un piccolo Yin dentro lo Yang e viceversa, per ricordarsi che nel mondo i princìpi non sono mai puri, ma in questo problema usiamo l'approssimazione raffigurata qui sotto.

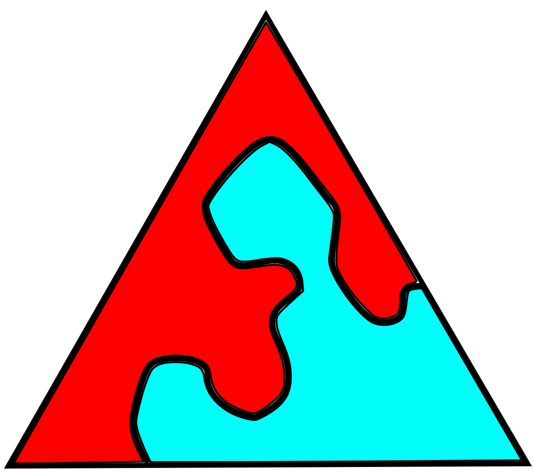
Tracciate una retta che passi per il centro e che divida a metà sia la parte bianca che la nera.



L'aiutino è a pagina 123; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 197-198.

71. Bisettore minimale

Prendete un triangolo equilatero e tracciate una curva al suo interno in modo da dividerlo in due parti di area uguale, anche se naturalmente di forma diversa. Qual è il tipo di curva di lunghezza minima? È sufficiente dare una risposta qualitativa (ad esempio, "due segmenti che passano per il baricentro del triangolo", senza specificare dove i segmenti incontrano i lati).



L'aiutino è a pagina 115; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 132.

72. La marcia delle formiche

Su una barra lunga 1 metro posizionata in direzione est-ovest sono piazzate a caso 25 formiche puntiformi. Lo so che una formica non è mai effettivamente puntiforme, ma un matematico non riesce a fare a meno delle approssimazioni! La tredicesima formica da sinistra è una nostra vecchia conoscenza, Federica Formica. Le formiche guardano in maniera casuale verso ovest o verso est. Al via tutte si muovono contemporaneamente nella direzione in cui stanno guardando, alla velocità di un 1 cm al secondo; se due formiche si incontrano, cambiano immediatamente direzione. Quando una formica arriva a un estremo della barra, casca giù (non preoccupatevi, sotto la barra c'è un cuscino: nessuna formica è stata maltrattata nella preparazione di questo problema.) Dopo quanto tempo siamo certi che anche Federica non si troverà più sulla barra?

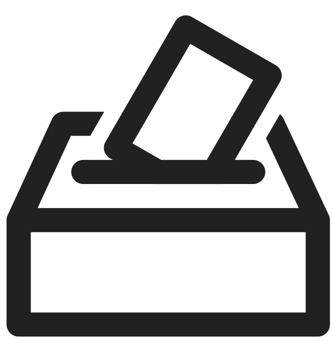
L'aiutino è a pagina 116; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 140-141.

◊◊ P

73. Il solitario dell'urna

Avete davanti a voi un'urna che contiene 100 schede, alcune rosse e altre verdi; sapete che ce n'è almeno una di ciascuno dei due colori. Estraete a caso una scheda, guardate il suo colore e la mettete da parte. Continuate a estrarre schede: fino a che le schede che prendete sono dello stesso colore della prima continuate a toglierle, altrimenti rimettete l'ultima scheda estratta nell'urna e terminate la prima mossa. A questo punto ricominciate da capo, scegliendo come nuovo colore da eliminare quello che apparirà alla prima estrazione, e continuate a togliere (e ogni tanto a rimettere) schede fino a che non ce ne saranno più. Se l'ultima scheda estratta è verde, avete vinto; se è rossa, avete perso.

Quante schede rosse e quante schede verdi vi conviene chiedere che siano inserite inizialmente per massimizzare la probabilità di vittoria?



L'aiutino è a pagina 117; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 147-148.

74. Monete in fila

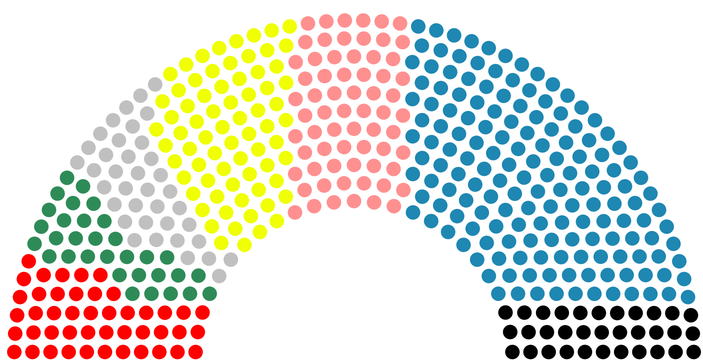
Su un tavolo sono state messe in fila 50 monete di vari valori, da 1 centesimo a 2 euro. Arianna inizia a giocare prendendo una moneta da uno dei due estremi della fila; poi anche Bruno prende una moneta da uno qualunque dei due estremi. Il gioco continua così, con Arianna e Bruno che si alternano a prendere una moneta da uno degli estremi della fila finché tutte le monete sono finite nelle loro tasche. Dimostrate che Arianna ha una strategia che le permette di guadagnare almeno tanti soldi quanto Bruno.

L'aiutino è a pagina 118; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 155.

75. Schieramenti trasversali in Parlamento

In una lontana nazione oceanica, i parlamentari vengono eletti dal popolo, ma il re può decidere a quale delle due Camere essi apparterranno. Il re è interessato non tanto a creare maggioranze favorevoli alla sua linea politica (che consiste principalmente in "stiamo più tranquilli possibile") quanto nell'evitare le liti interne ai singoli rami del Parlamento.

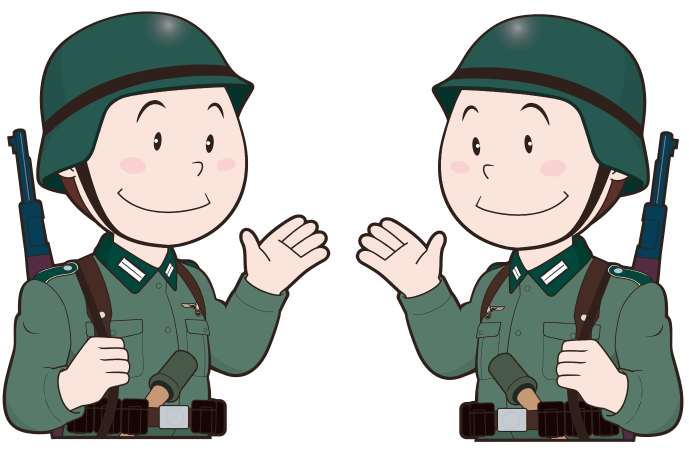
Fortunatamente dopo le elezioni si è scoperto che nessun parlamentare ha più di tre nemici tra gli eletti. L'essere nemici è una relazione simmetrica: se A è nemico di B allora B è nemico di A. Dimostrate che il re può formare le due Camere in modo che ciascun parlamentare abbia al massimo un solo nemico nella sua stessa Camera.



L'aiutino è a pagina 119; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 162.

76. Il nemico ti osserva!

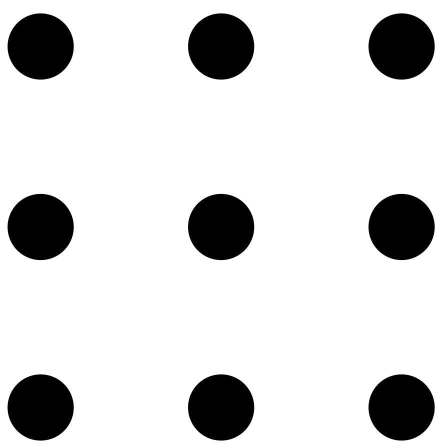
Durante un'esercitazione militare, un gruppo di 17 soldati si dispone nella piazza d'armi in modo che non ci siano due coppie di soldati alla stessa distanza; a tutti viene poi dato l'ordine di osservare il soldato a loro più vicino. Dimostrate che c'è almeno un soldato che non viene osservato da nessun altro.



L'aiutino è a pagina 120; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 169-170.

77. (Quasi) sempre dritto

I nove punti qui sotto sono disposti a forma di quadrato. Visto che il quattro è un numero che ha una sua certa quadratura, provate a toccare tutti i punti disegnando quattro segmenti, senza mai sollevare la matita dal foglio. Potete orientare i segmenti come volete, ma sia i segmenti sia i punti devono essere considerati senza spessore: non vale insomma dire "uso un pennarello molto spesso, così mi basta un solo tratto per ricoprire tutto!"

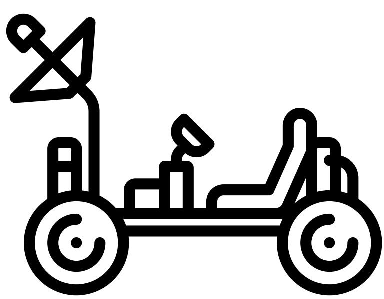


L'aiutino è a pagina 121; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 176-177.

78. Giro del mondo in economia

Durante la seconda missione inviata per l'esplorazione del satellite Tayoto (la prima era fallita per un'improvvida scelta del comandante, che aveva trascurato una macchiolina all'orizzonte ed era stato spazzato via insieme a tutto l'equipaggio da una tempesta magnetonucleare) il Comando Astrale decise di usare la Sat Rover in dotazione alla flotta per fare un periplo completo del satellite sulla pista equatoriale.

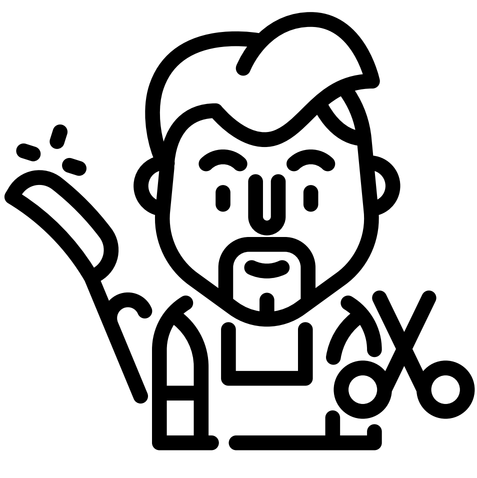
Purtroppo però c'era un problema: il serbatoio della Sat Rover era sconsolatamente vuoto e la quantità totale del carburante presente nei vari depositi sparsi per la pista era esattamente sufficiente per completare il periplo. Considerando che la Sat Rover può essere fatta "attayotare" in un punto qualunque della pista, e sapendo che il suo serbatoio è abbastanza capiente per riuscire a fare tutto il giro del satellite con un singolo pieno (se solo ci fosse la possibilità di farlo...) è possibile farle completare il percorso?



L'aiutino è a pagina 122; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 184-185.

79. Il barbiere di Russell

Non so se avete mai sentito parlare del paradosso del barbiere di Russell. No, non è il barbiere che spuntava i capelli alla buonanima di sir Bertrand, ma un controesempio che il logico inglese presentò per far crollare la teoria degli insiemi che Gottlob Frege aveva costruito e pubblicato. Nel paradosso si parla di un villaggio dove c'è un unico barbiere, che fa la barba a tutti gli uomini che non si fanno la barba da sé, e solo a loro. La domanda che poneva Russell è "chi fa la barba al barbiere?" Se non se la fa da sé allora per definizione deve farsela, ma se si fa la barba da sé allora, sempre per definizione, non può farsela! Eppure né Frege né Russell si accorsero che c'era una soluzione al problema. Qual è? Supponete che in quel villaggio nessun uomo si lasci crescere la barba, e non ci siano scambi di barbieri con i paesi vicini.



L'aiutino è a pagina 122; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 191.

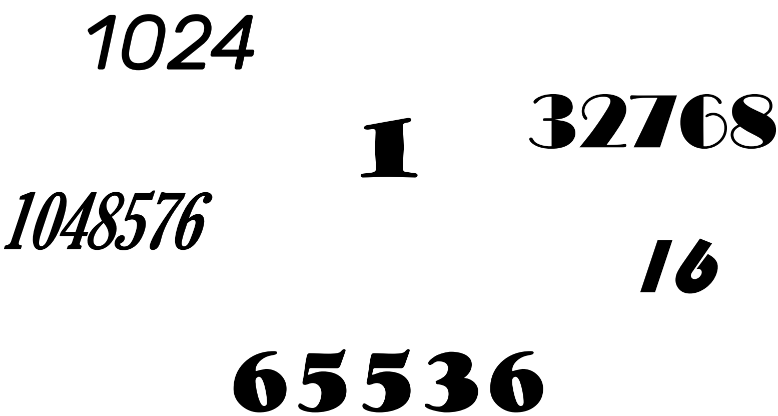
80. Vecchi e nuovi amici

Xavier e Yolanda vanno una sera a cena con altre quattro coppie. Non tutte le persone si conoscono tra loro: nelle inevitabili presentazioni che si fanno, i due nuovi conoscenti si stringono la mano. Alla fine della serata, Xavier (che presumibilmente soffre di una sindrome compulsiva catalogatrice) chiede a tutti con quante persone si sono date la mano e si accorge che ciascuno degli altri ha stretto le mani a un numero diverso di persone. Quante mani ha stretto Yolanda?

L'aiutino è a pagina 123; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 198-199.

81. La cifra mancante

Le potenze di 2 crescono abbastanza velocemente, come sanno tutti coloro che sono abituati a lavorare con l’informatica e in un attimo si trovano a dover gestire numeri di pochi bit che però possono rappresentare numeri enormi. Per esempio, il numero 2^{29} è composto da nove cifre, tutte diverse. Qual è la cifra mancante?



L’aiutino è a pagina 115; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 133.

◊ P

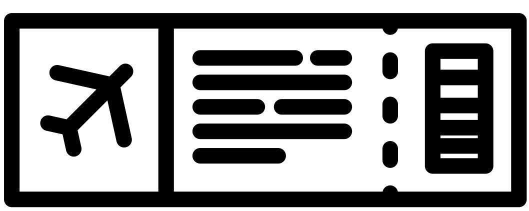
82. L'altra faccia della medaglia

Un sacchetto contiene tre monete piuttosto particolari. O meglio, una di esse è assolutamente normale, ma la seconda ha su entrambe le facce una testa e la terza ha su entrambe le facce una croce. Si estrae una di queste monete a caso, la si lancia, e si osserva che è uscita testa. Qual è la probabilità che anche l'altro suo lato abbia una testa?

L'aiutino è a pagina 116; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 141.

83. Carta d'imbarco

Il volo ZA042 da Saarbrücken a Cuneo Levaldigi era stato completamente riempito: tutti e 100 i posti erano stati venduti. I tedeschi, con la loro notoria precisione, avevano aperto il gate al minuto spaccato e ora facevano entrare uno alla volta i passeggeri. Il primo di loro, arrivato in carlinga, si accorse però di aver perso la propria carta d'imbarco nel finger: scrollò le spalle, e scelse un posto a caso. Man mano che gli altri passeggeri arrivavano (tutti con la carta d'imbarco, non può esserci più di un distratto in Germania!) essi si sedettero al posto loro assegnato se era libero, altrimenti scelsero anch'essi un posto a caso. Qual è la probabilità che l'ultimo a entrare si sia seduto al posto corretto?

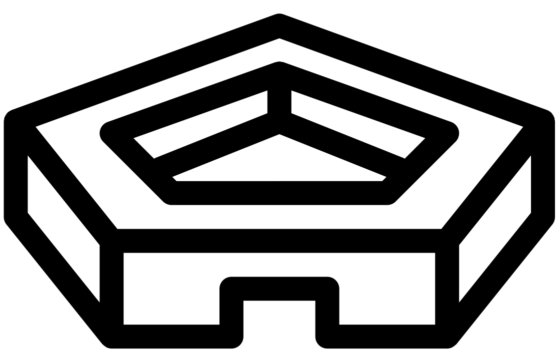


L'aiutino è a pagina 117; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 148.

◊ G

84. Il Pentagono

Il Pentagono è un edificio a forma di... pentagono regolare. Se poteste esserci molto vicino senza che i sistemi di sicurezza vi abbiano sparato, ovviamente ne vedreste solo una faccia, a meno che non siate proprio davanti a un suo angolo; se vi allontanate abbastanza, per esempio al doppio della lunghezza di un suo lato, vedrete sempre due lati oppure tre. Se vi trovate proprio sul prolungamento di un lato possiamo discutere se vedete quel lato o no; ma la probabilità di trovarsi proprio lì è infinitesima, e quindi possiamo tralasciare le eccezioni. In generale, sarà più probabile vedere due o tre lati?



L'aiutino è a pagina 118; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 155-156.

85. Corona e àncora

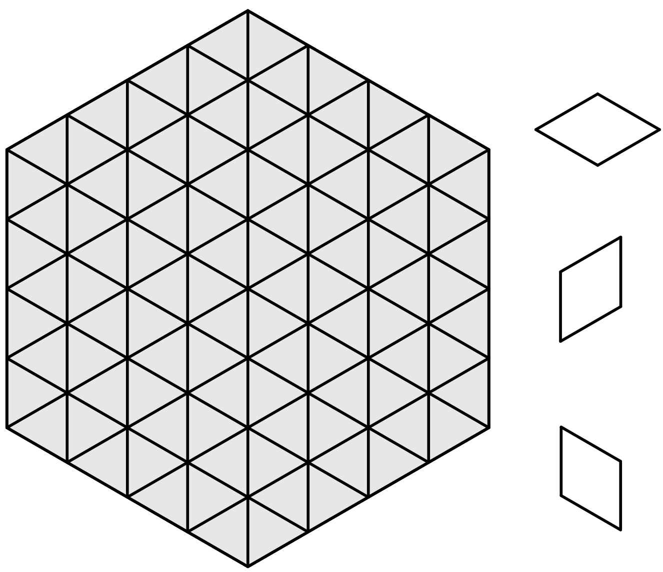
Un gioco piuttosto diffuso nei Paesi di lingua anglosassone è chiamato con molta fantasia in Italia “Corona e àncora”, traducendo letteralmente il nome originale “Crown and Anchor”. Il gioco prevede che il banco lanci tre dadi speciali, che hanno raffigurati sulle facce i quattro semi delle carte, una corona e un’ancora: da qui il nome, anche se si possono tranquillamente usare tre dadi normali. I giocatori puntano sull’uscita di una figura: se la riporta uno dei dadi, vincono la posta giocata; se la riportano due dadi, vincono il doppio della posta; se a riportarla sono tutti e tre i dadi, vincono il triplo della posta. Secondo voi, il gioco è equo oppure no?

L’aiutino è a pagina 119; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 163.

◊ G T

86. Un esagono pieno di rombi

Prendete un esagono e dividetelo in tanti triangoli equilateri, come nella figura qui sotto. Considerate ora i tre tipi di rombo che si possono formare unendo due triangoli, e ricoprite esattamente l'esagono con questi rombi, senza sovrapposizioni. Dimostrate che il numero di rombi per ciascuna orientazione è lo stesso.

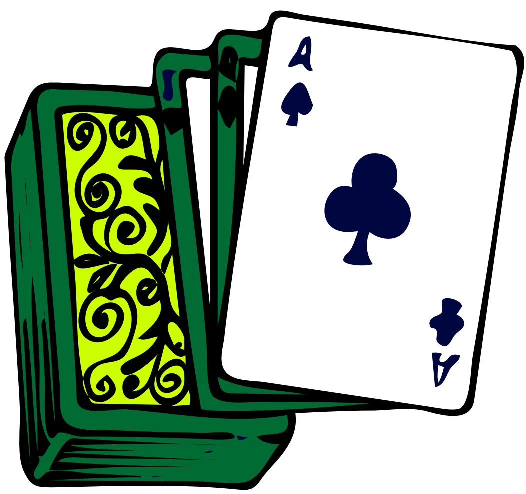


L'aiutino è a pagina 120; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 170-171.

◊◊ C

87. Rosso oppure nero?

Tristano e Isotta hanno inventato un gioco di scommesse con le carte. Isotta prende un normale mazzo di carte, lo mischia, e inizia a girare lentamente una carta per volta. Tristano può fermarla in un qualsiasi momento, annunciando “Scommetto che la prossima carta sarà rossa!”: se in effetti è rossa, allora vince, altrimenti perde. Tristano è obbligato a fare una previsione; se continua a tacere fino a che Isotta scopre la penultima carta, deve per forza affermare che l’ultima carta è rossa. Qual è la sua strategia migliore?



L’aiutino è a pagina 121; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 177.

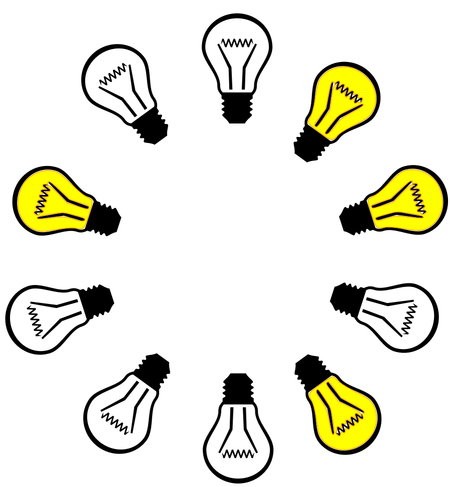
88. Tutti per uno

A un numero non meglio identificato *n* di prigionieri di una ciurma di pirati particolarmente sadica viene messo un cappello in testa: il cappello può essere bianco oppure nero, e come sempre capita in questi problemi nessuno può vedere di che colore sia il proprio cappello. I prigionieri vengono poi bendati e spostati tutti insieme, in modo che ciascuno possa vedere il colore dei cappelli degli altri: a questo punto vengono condotti nella propria cella e viene chiesto separatamente a ciascuno di loro di quale colore sia il proprio cappello. I prigionieri verranno giustiziati a meno che tutti indovinino correttamente il colore del proprio cappello, oppure tutti lo sbaglino. I prigionieri possono discutere una strategia prima dell'operazione, ma poi non potranno più comunicare tra loro. Riusciranno a salvarsi?

L'aiutino è a pagina 122; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 185.

89. Luci della ribalta

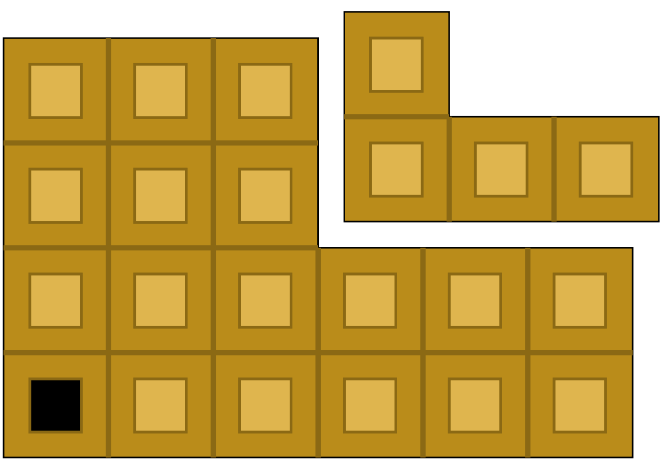
Vi trovate in una stanza con *n* lampadine (almeno due) messe in cerchio, inizialmente tutte accese; sotto ogni lampadina c'è un interruttore che la accende o la spende. Scegliete una qualsiasi lampadina, guardate se era accesa o spenta, e passate a quella successiva in senso orario. Se la lampadina dove eravate prima era accesa, azionando l'interruttore; se era spenta, non fate nulla. Guardate com'è la lampadina davanti a voi e continuate a ripetere la stessa operazione, azionando o no l'interruttore della lampadina successiva a seconda se quella che avete guardato era accesa o spenta. Dimostrate che proseguite per un tempo sufficiente a compiere questa operazione, a un certo punto le lampadine saranno di nuovo tutte accese.



L'aiutino è a pagina 123; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 192.

90. Chomp

Alberto e Fred hanno messo le mani su un'altra tavoletta di cioccolato dopo quelle divorate nel problema 42, e hanno pensato di usarla per un nuovo gioco. Ciascuno di loro a turno, partendo da Alberto, sceglie un singolo quadretto e se lo prende, assieme a tutti quelli che si trovano sopra e alla sua destra. Dopo ogni mossa rimarrà pertanto un pezzo di tavoletta a forma di L, a meno che uno dei due non scelga un quadretto nella riga più in basso o nella colonna più a sinistra, nel qual caso si avrebbe un rettangolo. L'unico problema è che chi mangerà il quadretto in basso a sinistra dovrà poi rimettere in ordine la stanza, quindi i nostri eroi lo vogliono evitare a tutti i costi. Dimostrate che Alberto può sicuramente lasciare a Fred l'onore di riordinare la stanza.

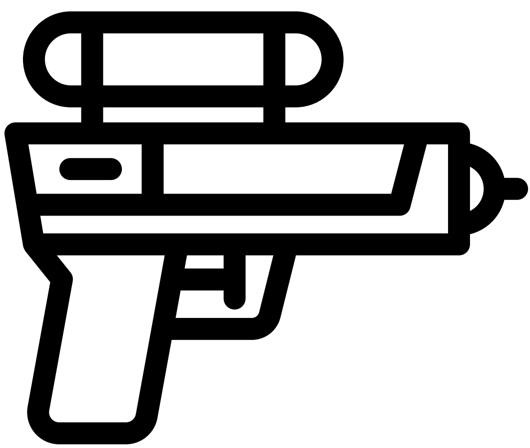


L'aiutino è a pagina 123; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 199.

B T

91. Triello

Ada, Bice e Clara hanno deciso di fare un duello all'ultimo sangue, o meglio all'ultimo gavettone, per decidere chi di loro potrà chiedere a Zeno se vorrà essere il suo accompagnatore ufficiale al ballo di fine anno. Chi viene colpita si ritira dalla tenzone; ciascuna di loro sa che Ada colpisce l'avversaria una volta su tre, Bice due su tre, mentre Clara ci riesce sempre. I lanci dei gavettoni saranno fatti in ordine: inizierà Ada, seguirà Bice, poi Clara, se necessario tirerà di nuovo Ada e così via. Qual è la strategia migliore per Ada?

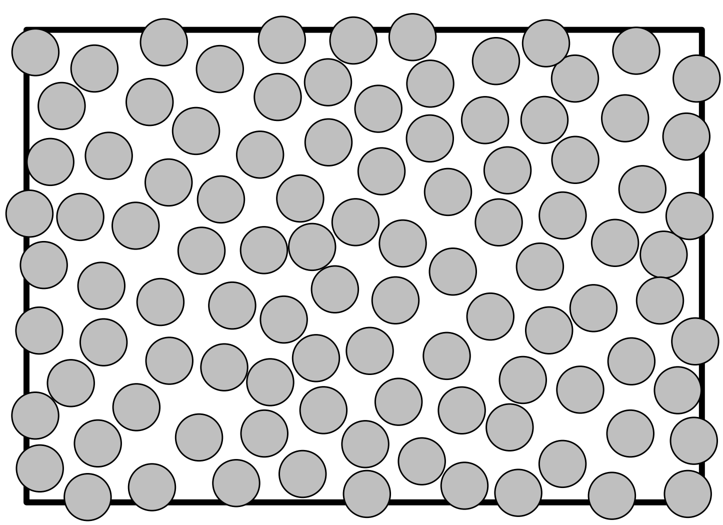


L'aiutino è a pagina 115; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 133-134.

92. Monete sul tavolo

Avete messo 100 monete uguali (perfettamente rotonde) su un tavolo in modo tale che sia impossibile aggiungerne un'altra senza che ne tocchi qualcuna già presente. Le monete non possono toccarsi: possono però oltrepassare i bordi del tavolo, basta che il loro centro resti al suo interno in modo che non cadano a terra.

Dimostrate che se invece di 100 monete ne avete 400, potete coprire completamente il tavolo, senza che nessun punto rimanga esposto: a differenza di prima, vi è permesso sovrapporre in parte una moneta a un'altra. Le monete si suppongono di spessore nullo e quindi sovrapponibili senza problemi.



L'aiutino è a pagina 116; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 141-142.

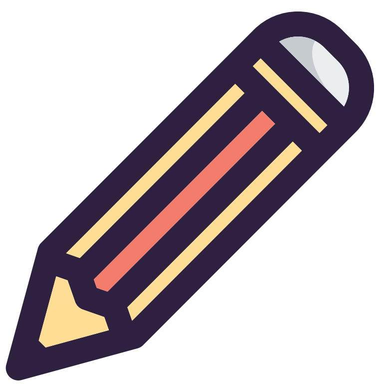
93. Sacchetti di biglie

Vi è stato regalato un numero esorbitante di biglie. Se avete con voi 15 sacchetti (tutti girano sempre con almeno una dozzina di sacchetti in tasca, no?) e volete riempirli con il numero minimo possibile di biglie per cui ogni sacchetto ne abbia un numero diverso, quante biglie vi servono?

L'aiutino è a pagina 117; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 149.

94. Rotola, matita, rotola

Se usate ancora le matite in legno a cui bisogna fare la punta, immagino saprete che in genere hanno una sezione esagonale. Un amico mi ha stupito, però, arrivando con una matita a sezione pentagonale: in effetti mi ero sempre chiesto se avesse frequentazioni diaboliche. Per il resto, la matita era assolutamente normale: su uno dei lati c'era anche scritta la marca (Faust... Ve l'avevo detto, che non mi fidavo troppo del mio amico?). Con un sogghigno, mi ha invitato a far rotolare la matita sul tavolo, e mi ha chiesto qual è la probabilità che rimanga con la faccia scritta all'insù. Sapreste aiutarmi?

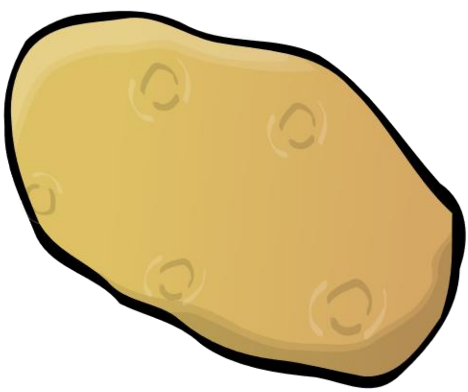


L'aiutino è a pagina 118; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 156.

◊ G

95. Patata time

Prendete due patate e un pennarello. Dimostrate che è possibile usare il pennarello per tracciare una curva (non necessariamente planare) sulla superficie di ciascuna patata in modo tale che le due curve, togliendo la patata e lasciando solo il segno con il pennarello, siano esattamente sovrapponibili dopo una traslazione e un'eventuale rotazione.



L'aiutino è a pagina 119; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 163-164.

◊◊◊ L

96. Lucchetti

A Kleptonia la situazione delle poste locali è tragica: ogni pacco postale viene aperto, a meno che non sia chiuso con un lucchetto. Bruno vorrebbe mandare ad Alice un anello per posta; purtroppo entrambi hanno tante scatole e tanti lucchetti, come si può bene immaginare vista la situazione, ma nessun lucchetto di cui entrambi abbiano la chiave... e naturalmente non si può mandare la chiave per posta! Riuscirà Bruno a fare arrivare l'anello ad Alice?

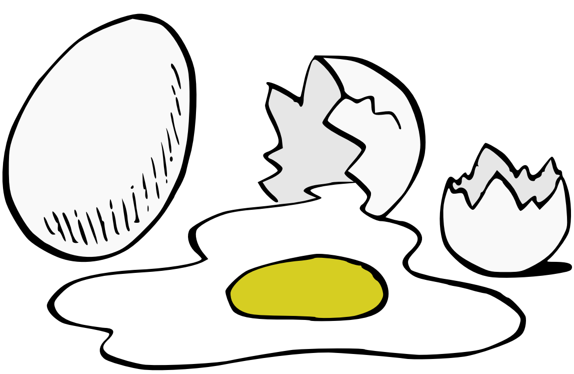
L'aiutino è a pagina 120; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 171.

◊◊◊ B

97. Test di resistenza

La Struzzuovo S.p.A. sta preparando una campagna pubblicitaria per far conoscere ai potenziali clienti i vantaggi delle uova di struzzo rispetto a quelle di gallina. Tra le varie caratteristiche proposte, c'è la loro maggior solidità; la Struzzuovo ha così pensato di fare una serie di test lanciando un uovo dai vari piani dell'Empire State Building fino a che non si rompe. Purtroppo però sono state messe a disposizione solamente due uova per i test. Si suppone che entrambe le uova abbiano esattamente la stessa resistenza e che nessun uovo subisca dei microdanni dopo un lancio; o si spacca o rimane intatto.

Se ci fosse un solo uovo, l'unico modo di fare i test è partire dal primo piano e andare su man mano di un piano per volta, fin quando l'uovo si rompe; nel peggiore dei casi (un uovo indistruttibile) occorreranno pertanto 101 lanci. Con due uova, ce ne vorranno sicuramente di meno. Ma quanti ne servono?

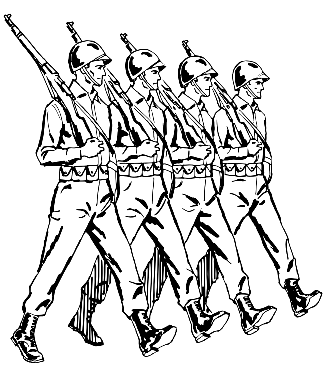


L'aiutino è a pagina 121; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 178.

98. Righe e colonne

Mattina di esercitazioni in caserma: e si sa che a comandare sono sempre in troppi. I 42 soldati del plotone siano stati messi in formazione rettangolare, sei righe per sette colonne, e il capitano ha ordinato che in ciascuna riga i soldati si disponessero in ordine dal più basso al più alto. Ha poi lasciato il comando al tenente che subito, per dimostrare che anche lui contava qualcosa, ha ordinato che i soldati di ciascuna colonna si disponessero in ordine dal più basso al più alto. Il capitano, sentito l'ordine gridato dal tenente, è tornato immediatamente indietro, pronto a fare una lavata di capo al tenente: solo che si è accorto che nonostante la seconda manovra i soldati continuavano a rimanere anche ordinati per riga, oltre che per colonna.

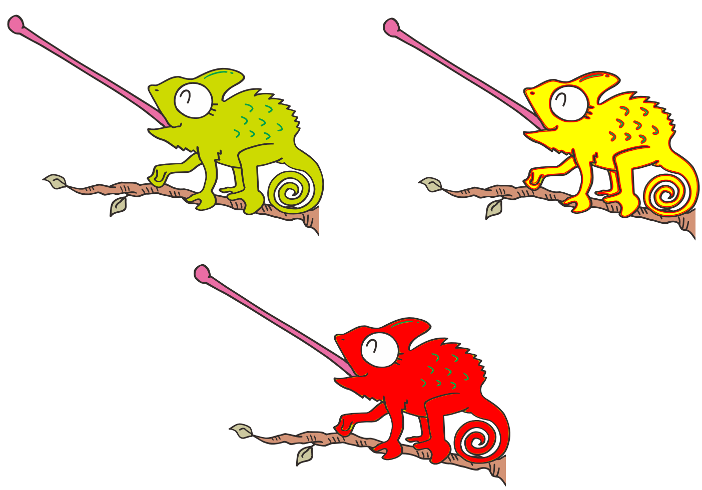
La competenza matematica del capitano non era eccelsa, e così è rimasto stupefatto di quello che in seguito definì "un caso assolutamente fortuito che mostra solo la fortuna di quel tenentino." Dimostrate invece che doveva per forza essere così.



L'aiutino è a pagina 122; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 185-186.

99. Camaleonti

In un'isola viene introdotta una colonia di camaleonti: inizialmente ce ne sono 20 verdi, 18 gialli e 16 rossi. Ogni volta che due camaleonti di colore diverso si incontrano, cambiano colore secondo la loro abitudine; essendo poi i camaleonti molto educati e non volendo prevaricare sul compagno, entrambi assumono il terzo colore, cioè quello che nessuno dei due ha. Non capita mai che si incontrino più di due camaleonti per volta. Potrà mai succedere che diventino tutti di un unico colore?



L'aiutino è a pagina 123; soluzione e Post Scriptum sono a pagina 193.

Gli aiutini

1. Le cifre 0, 1, 2 devono apparire su entrambi i dadi, e quindi ne dobbiamo avere in tutto due; in compenso 6 e 9 non appaiono mai insieme.

11. L'area di un triangolo è data dal prodotto della base per l'altezza, diviso due: se vogliamo che l'area sia massima e fissiamo la lunghezza della base, l'altezza deve pertanto essere la massima possibile.

21. Non ci interessa calcolare quanta acqua sia finita nella brocca del vino; è sufficiente ricordare che il volume finale del liquido nella brocca è esattamente quello iniziale.

31. Lasciate perdere le giravolte della mosca e cronometrate la durata del suo viaggio.

41. Il succo d'arancia non è indissolubilmente legato al bicchiere, anche prima di berlo.

51. Non voltate certo la carta con il numero dispari, vero? Bene, qual è la cosa corrispondente da fare rispetto ai dorsi?

61. Non occorre usare tutti i dati forniti: provate a risolvere un problema più generale di calcolo della differenza di due aree.

71. Ricordate che, a parità di area, la figura di perimetro minimo è il cerchio, e che un caleidoscopio crea un esagono facendo specchiare più volte un triangolo.

81. Ricordate la prova del nove? Vi può aiutare.

91. La fretta è sempre una cattiva consigliera: a volte è meglio aspettare e non lanciarsi immediatamente contro qualcuno.

2. Una tessera del domino ricopre sempre una casella bianca e una nera, in qualunque modo la disponiate.

12. Il tempo che Kant ha impiegato per andare e tornare da casa del suo amico è stato esattamente lo stesso; inoltre la pendola non era rotta ma solo scarica, quindi una volta caricata poteva calcolare correttamente un intervallo di tempo.

22. Immaginate innanzitutto che ci sia una pagnotta senza peso, e tenetela da parte; poi cambiatela con un'altra e applicate il conteggio della parità per vedere cosa succede se c'è una pagnotta che pesa un numero dispari di grammi.

32. La moneta non equa cadrà come testa con probabilità p; basta dividere in due parti uguali questa probabilità e fare in modo che non sia necessario distinguere le due monete.

42. Entrambi i bimbi mangeranno 40 quadretti di cioccolato; entrambi iniziano la loro operazione con una tavoletta formata da un singolo rettangolo; le mosse possibili sono solo di due tipi. Mettete tutto insieme.

52. Inscrivete nel cerchio un esagono; i sei vertici li avete già.

62. I figli non si offenderanno se si darà loro più del dovuto, e in effetti il padre ha sbagliato i conti.

72. Anche se abbiamo battezzato una delle formiche, in realtà sono tutte indistinguibili. Quando si incontrano, potete quindi fingere che non tornino indietro, ma proseguano per la loro strada scavalcandosi.

82. Provate a immaginare che le facce uguali delle monete siano distinguibili tra loro.

92. Se le monete fossero dei rettangoli, raddoppiando le dimensioni di ogni moneta si ricoprirebbe il tavolo; a questo punto basterebbe suddividere ogni rettangolo grande in quattro parti. Peccato che con i cerchi questo sistema non funziona: pertanto *cherchez le rectangle*!

3. Nei tornei internazionali di bridge la stessa mano viene giocata due volte da due quartetti diversi delle stesse squadre nazionali, in modo che ciascuna nazione abbia la stessa distribuzione di carte.

13. Prolungate i lati del quadrato grande fino a che tocchino gli altri due lati del quadrato piccolo.

23. Quando un cavallo si muove, finisce in una casella del colore opposto.

33. Anche se potrebbe sembrare impossibile, per risolvere il problema il raggio della sfera è ininfluente; sfruttate questo fatto. Nel caso non ve lo ricordaste, il volume di un cilindro è superficie di base per altezza, e quello di una sfera è $4/3\ \pi r^3$.

43. Non sempre la via che sembra più immediata è quella migliore; a volte è meglio guardare più lontano.

53. Il numero di percorsi che si possono fare all'interno dell'isola è finito; prima o poi si torna in un punto già passato, che però non è necessariamente quello iniziale. O no?

63. Non lasciatevi suggestionare dalle dimensioni relative; limitatevi a fare i conti.

73. Fate un'analisi retrograda partendo dall'ultima mossa; arrivati alla penultima mossa, considerate quali possibilità si sono potute effettivamente verificare.

83. Quale può essere l'ultimo posto libero prima che entri l'ultimo passeggero? Non ci sono molte possibilità diverse, e soprattutto non ci è dato di sapere come si è arrivati a quella posizione.

93. Ricordatevi che anche lo 0 è un numero.

4. Attenzione! Non si deve fare la media aritmetica delle medie. In quanto tempo ho percorso la prima metà del tragitto?

14. Alla fine dei tagli otterrete anche il cubetto centrale, che all'inizio è completamente all'interno del cubo.

24. Ci sono dieci possibilità diverse per il numero sulla fronte di ciascun prigioniero. I prigionieri devono pertanto dare dieci risposte tutte diverse: in questo modo una sarà quella corretta. Che cosa possono sapere i prigionieri riguardo alla somma di tutti i numeri, compreso il proprio?

34. Essendo uno spareggio, i giudici non vogliono certo favorire nessuno, quindi tutti e tre i ragazzi potevano fare lo stesso identico ragionamento. Alice è semplicemente stata la più lesta.

44. Considerate ciò che è successo nel campo grande il primo giorno. Quanta parte è stata arata al mattino e quanta al pomeriggio?

54. Disegnate una terza diagonale del cubo e guardate quale figura ottenete.

64. Se il numero totale di pedine è pari, basta procedere con ordine; se il numero è dispari, rimane dispari dopo ogni mossa

74. Numerate le monete da sinistra a destra da 1 a 50, in modo da tenere i conti; trovate ora un metodo che sfrutti la parità.

84. Trovate un amico, e insieme cercate la simmetria giusta.

94. La probabilità che la faccia *che poggia* sul tavolo sia quella con la scritta è 1/5, fin qui non ci piove.

5. Se i treni in direzione Maciachini passano alle 14.00, 14.06, 14.12… mentre quelli in direzione Rogoredo passano alle 14.03, 14.09, 14.15, … allora sarei andato a trovare le mie ragazze più o meno con la stessa frequenza.

15. Cominciate a costruire un reticolo triangolare e colorarlo, e ricordatevi che il primo triangolo avrà necessariamente due vertici di un colore e il terzo dell'altro.

25. Come già detto nel problema 23, il cavallo si muove da una casella di un colore a una del colore opposto.

35. Ruotare un quadrato non ne cambia l'area; provate a disegnare la figura in maniera un po' diversa.

45. Un calzino destro e uno sinistro sono interscambiabili; un guanto destro e uno sinistro no.

55. È un po' come fare un tiro al biliardo. Come potete sfruttare la sponda del tavolo, pardon del fiume?

65. La strategia migliore consiste nel rendere il gioco simmetrico.

75. Partite da una suddivisione qualunque e trovate il modo di ridurre man mano il numero totale di coppie di nemici presenti complessivamente nelle due Camere.

85. Fate giocare contemporaneamente più persone e guardate che cosa succede.

95. Cosa potete produrre, oltre che un purè, se compenetrate le patate?

6. Il figlio deve vincere due partite consecutive. In quali casi capiterà?

16. Più che a Kandinsky, dovreste pensare alla Pop art; tracciata la prima curva, provate a colorare in bianco e in nero le varie aree che si sono formate senza che ce ne siano mai due vicine dello stesso colore.

26. Pensate alle differenze tra le differenze!

36. La figura è composta da diversi triangoli: valutate la loro area.

46. Iniziate a contare in quanti modi si può arrivare all'isolato più vicino, e proseguite man mano aggiungendo sempre nuovi isolati.

56. Cominciate col calcolare le lunghezze rispettive dei lati del triangolo e dell'esagono.

66. Ciò che è fatto si può disfare: basta procedere nell'ordine opportuno.

76. Iniziate a considerare i due soldati più vicini, e procedete poi man mano con quelli un po' più lontani.

86. Ruotando l'esagono di 30 gradi, si ottiene un cubo visto in prospettiva. Disegnate una configurazione qualsiasi e osservatela come se fosse un disegno in prospettiva.

96. Una scatola può essere chiusa con più di un lucchetto; e i lucchetti sono tra loro indipendenti, quindi ogni chiave apre un singolo lucchetto.

7. Come indicato nel testo del problema, a Fertilia ci sono tanti maschi quante femmine, e ogni famiglia ha esattamente un figlio maschio.

17. La fascia è sì stretta, ma non la si deve considerare approssimata come un segmento: ha pur sempre due dimensioni! Beh, ne avrebbe anche una terza, ma quella potete trascurarla.

27. Negli scacchi, semplici o doppi che siano, il cavallo salta gli altri pezzi.

37. Il problema può essere risolto usando nove numeri (positivi) consecutivi.

47. A volte non conviene fare le cose da cima a fondo; interrompere le operazioni può permettere di ottimizzarle.

57. Anche la somma delle righe, delle colonne e delle diagonali di un quadrato magico 3×3 è 15.

67. Dopo aver fatto l'ultima mossa del gioco, tornate indietro alla penultima, e considerate che cosa è successo, sapendo appunto che è stata effettivamente la penultima.

77. C'è tanto spazio al di là dei punti, potete anche usarlo!

87. Se ci pensate un attimo, scommettere sulla carta successiva oppure sull'ultima carta del mazzo è la stessa cosa!

97. Una volta rotto un uovo, ve ne rimane a disposizione uno solo, e quindi dovete provare uno per uno tutti i piani inferiori; ma se dopo il lancio non si rompe, non vi servirà più provare i piani inferiori. Bisogna trovare un giusto equilibrio tra i due vincoli.

8. Nessuno ci obbliga a lanciare la moneta una sola volta, e non siamo nemmeno costretti a usare i risultati di tutti i lanci che abbiamo fatto; possiamo annullarne qualcuno, se la cosa ci fa comodo.

18. Il bicchiere non dev'essere necessariamente a testa in su, e i due fiammiferi possono anche essere spostati solo in parte.

28. La moglie ha evitato di percorrere la strada dal punto di incontro alla stazione e ritorno.

38. Un recinto contiene tutto quello che si trova al suo interno, non solamente i cavalli.

48. Tagliare un anello può creare tre pezzi di catena separati.

58. Contate il numero di coppie formate da un pollo e un coniglio, e vedete cosa rimane.

68. Due punti che non si trovano agli antipodi su una sfera definiscono un cerchio massimo, che taglia a metà la sfera stessa.

78. Immaginate di poter viaggiare con benzina presa a prestito (senza interessi, chiaro!). Cosa succederebbe alla fine del giro?

88. A prima vista non sembra, ma anche questo problema è risolvibile con le tecniche di parità, proprio perché l'importante è che siano tutti d'accordo.

98. È tutta questione di disuguaglianze; cercate quella giusta.

9. Se ci fosse stato un mio clone che avesse esattamente replicato le mie azioni con una settimana di ritardo, che cosa sarebbe successo mentre scendevo dalla montagna?

19. Oltre alla simmetria rispetto a un asse centrale, il bicchiere ne ha anche una di rotazione. Provate a guardarlo in modo diverso.

29. Dato che potete spostare un solo stecchino, iniziate a indicare quali non devono essere toccati e considerate che cosa rimane a disposizione.

39. Normalmente, mentre il disco girava, la puntina del giradischi non saltava.

49. Una torta non ha solo due dimensioni!

59. Spostate man mano una retta all'interno del cerchio, facendo attenzione a non incocciare mai in due punti contemporaneamente.

69. Iniziate dalla prima stretta di mano avvenuta nella storia e proseguite nel tempo.

79. Non fate assunzioni che non trovate scritte nel testo.

89. Innanzitutto dimostrate che le lampadine non potranno mai essere tutte spente: inoltre il numero di combinazioni possibili che si possono ottenere è finito.

99. Il numero totale di camaleonti è multiplo di 3; quindi alla fine le differenze tra i vari colori dovranno essere multipli di 3.

10. Non viene chiesto *dopo quanto tempo* i missili collideranno; le rampe di lancio sono inoltre abbastanza lontane per essere certi che nell'ultimo minuto i due missili si stavano già dirigendo direttamente l'uno contro l'altro.

20. Dovete trovare un modo per riuscire ad associare a ciascuna pila un valore diverso. Fortunatamente le pile sono composte da tante monete.

30. Come succede in *Dieci piccoli indiani*, dopo ogni partita viene eliminato un giocatore.

40. Considerate quelli che non sono riusciti a raccogliere tutte le coccarde, e contateli.

50. La somma di *a* e *b* è il raggio della circonferenza.

60. I numeri 5 e 8 sono primi tra loro, quindi il primo multiplo che hanno in comune è il loro prodotto.

70. Completate i semicerchi piccoli e osservate la figura che appare.

80. È tutta questione di simmetrie (o asimmetrie) tra le coppie!

90. Se il secondo giocatore avesse una strategia vincente, ce l'avrebbe per una qualunque mossa iniziale del primo; trovate una mossa di apertura minimale.

Soluzioni e Post Scriptum

1. Il calendario cubista

È immediato notare che i numeri 1 e 2 devono apparire in entrambi i cubi, altrimenti non si possono comporre l'11 e il 22. Ma anche lo 0 deve apparire in entrambi i cubi, perché lo si deve poter combinare con tutte le altre cifre. Restano pertanto sei facce da riempire, tre per dado, e sette cifre (3...9). Il compito sembrerebbe pertanto impossibile: ma per fortuna ruotando di 180 gradi il numero 6 si ottiene il 9, e nessun giorno del mese richiede che quei due numeri appaiano assieme. Basterà pertanto usare una sola faccia di un cubo per averli entrambi; le altre cinque potranno essere assegnate alle altre cifre. È ora facile assegnare le cifre ai cubi: per esempio, uno può avere 0,1,2,3,4,5 e l'altro 0,1,2,6,7,8.

Post Scriptum

Cominciare un libro di problemi matematici con uno la cui risposta è in fin dei conti un trucco può sembrare un'eresia per chi ha un approccio con la matematica misto tra il terrore e la venerazione. Ma la cosa è voluta: con la matematica si può infatti anche giocare. Le regole della matematica, come quelle di ogni gioco, devono essere rispettate; ma nessuno ci vieta di applicarle in modo corretto sì, ma anche creativo. Ah, sui cubi per indicare il mese potete usare queste lettere:

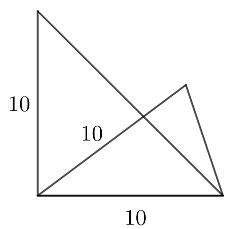
dado 1: c f g r t v
dado 2: a e i l o t
dado 3: b m n o p s

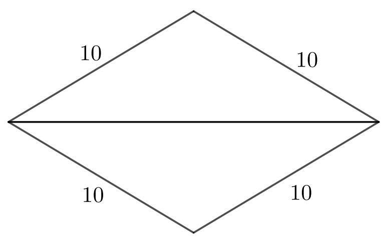
Per scrivere i mesi, usate i cubi in quest'ordine: gennaio 123 – febbraio 123 – marzo 321 – aprile 231 – maggio 321 – giugno 123 – luglio 213 – agosto 213 – settembre 321 – ottobre 321 – novembre 321 – dicembre 321. Per giugno e luglio, rovesciate la n per farla diventare una u; a dicembre, rovesciate la p che diventerà una d. Anche le lettere, come i numeri, possono essere ruotate!

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

11. Il triangolo più grande

Ribaltate il triangolo in modo da considerare uno dei suoi lati uguali come base; l'altro può ruotare a piacere. Poiché per massimizzare l'area occorre che l'altezza sia massima, dobbiamo lasciare il secondo lato perpendicolare al primo, come nella figura sotto, a sinistra. Il triangolo sarà rettangolo oltre che isoscele, e la sua area sarà di 50 cm^2.





Un altro modo per arrivare alla soluzione è considerare il quadrilatero ottenuto aggiungendo il simmetrico del triangolo rispetto al terzo lato. Avendo tutti i lati uguali, tale quadrilatero è un rombo: a parità di perimetro, il rombo di area massima è il quadrato, quindi il triangolo originale, che è la sua metà, ha area 50 cm^2.

Post Scriptum

Non avrete pensato che il triangolo di area massima sia quello equilatero, vero?

Ho scelto due modi diversi per rispondere al quesito innanzitutto perché mi piacciono entrambi, ma anche per ricordare che non sempre esiste la soluzione canonica di un problema, quella che il grande matematico ungherese Paul Erdős diceva venire dal "Libro": un enorme volume in possesso di Dio, nel quale ogni teorema matematico ha la dimostrazione che Lui ritiene essere perfetta, e che pochi fortunati mortali possono a volte sbirciare. Qualcuno risolverà il problema avendo il coraggio di guardare il triangolo in maniera diversa da come ce l'hanno sempre mostrato a scuola, con i lati uguali obliqui; qualcun altro preferirà ottenere una figura più facile da maneggiare.

Qualcuno potrebbe anche ricavare analiticamente l'area del triangolo come funzione dell'angolo e poi calcolare il massimo di tale funzione: ma questi conti fanno perdere la voglia di occuparsi di matematica... a meno di non ricordarsi che l'area vale ½ *ab* sin γ ed è quindi massima se γ è un angolo retto.

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

21. Vino annacquato o acqua avvinata?

Non importa quanto liquido sia stato travasato, né se la miscela fosse o no uniforme, né il numero di travasi fatti o la quantità di liquido iniziale in ciascuno dei due contenitori. Se alla fine nei due contenitori c'è tanto liquido quanto ce n'era all'inizio, quello che è passato dal primo al secondo deve essere esattamente quello che dal secondo è passato al primo.

Post Scriptum

Questo problema è un classico, e sono certo che molti di voi lo conoscevano già. La cosa interessante è che la chiave per risolverlo in fretta è vedere il modello giusto da applicare, invece che mettersi a fare i conti. Certo, se ci fosse stato domandato quanti centilitri d'acqua erano finiti nella prima brocca i conti dovevamo farli di sicuro! Ma non era questo il caso. La matematica non è solo composta di numeri e conti, come in troppi credono; e nemmeno di lettere, come forse immaginano quelli che sono stati messi davanti alle espressioni algebriche.

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

31. La mosca suicida

Le due auto si muovono a una velocità relativa di 5 m/s, e quindi si scontreranno dopo 10 secondi; nel frattempo la mosca, viaggiando a 7 m/s, avrà percorso 70 m. Avrà fatto dietrofront un infinito numero di volte; ma si sa che i problemi matematici non si curano di queste quisquilie.

Post Scriptum

Anche in questo caso c'è un modo noioso di giungere alla soluzione, sommando gli infiniti tratti percorsi dalla mosca, e uno facile, notando che possiamo spostare il punto di vista e semplificare così i calcoli. Si narra che quando il problema venne proposto a John von Neumann, il grande matematico rimase pensieroso qualche secondo, poi diede la risposta corretta. L'interlocutore sorrise e commentò: "Vedo che ti sei accorto del trucco! Molti si arrendono perché pensano di dover trovare il risultato di una somma infinita." E lui, di rimando: "Ah, c'era un trucco?"

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

41. Catering pericoloso

Basta muovere un solo bicchiere. Prendete il secondo bicchiere da sinistra, versatene il contenuto nel secondo da destra, e rimettetelo al suo posto.

Post Scriptum

Se al posto dei bicchieri ci fossero stati tre segnalini su una scacchiera 1×6, avreste trovato subito la soluzione, vero? Ecco l'ennesimo caso in cui bisogna studiare attentamente il problema per capire qual è il suo modello corretto. L'operazione che si deve compiere è sì muovere i bicchieri, ma la configurazione si riferisce al succo d'arancia; i bicchieri, vuoti o pieni, sono dei semplici segnaposto.

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

51. Gira la carta

Occorre girare due carte: quella con il 2, per verificare se sul retro c'è effettivamente un cancelletto, e quella con la chiocciola, per verificare se nel retro non ci sia un numero pari. Spesso si pensa di dovere girare anche la carta con il cancelletto; ma non serve farlo, perché se sul retro c'è un numero pari la legge è confermata, e se c'è un numero dispari non la stiamo affatto invalidando, visto che non ci viene detto nulla su cos'abbiano sul dorso le carte con un numero dispari.

Post Scriptum

Questo problema è noto in psicologia come il *Problema delle quattro carte di Wason*, dal nome dello psicologo inglese Peter Cathcart Wason che lo ideò; si può leggere qualcosa al riguardo su Wikipedia (*https://w.wiki/4hUc*). Non si tratta di matematica in senso stretto ma di logica. L'errore comune che si fa è immaginare che l'affermazione "se A è vero, allora B è vero" sia equivalente a "se B è vero, allora A è vero"; mentre è invece equivalente a "se B è falso, allora A è falso". Se non ci credete, partite dalla frase "Se nevica (A), allora fa freddo (B)" e provate a pronunciare le altre due frasi.

Stranamente, però, si è visto che la cosa cambia se ci si trova in una situazione reale. Se immaginate di essere un barista che non può vendere alcolici ai minorenni e i quattro casi equivalenti (minorenne che chiede una bevanda, maggiorenne che chiede una bevanda, persona che chiede un'aranciata, persona che chiede una birra), sapete che solo in due casi dovete chiedere la carta d'identità o il tipo di bevanda per essere certi di rispettare la legge. Due modelli equivalenti matematicamente possono essere ben diversi dal punto di vista psicologico!

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

61. Aree sovrapposte

La differenza tra le due aree è di $\pi(20^2\text{-}15^2)$ cm^2, cioè 175π cm^2. Per vederlo, basta aggiungere a entrambe le lunule il disco in comune e ottenere i due cerchi iniziali; la differenza tra le loro aree sarà evidentemente la stessa di quella delle lunule. Il fatto che le due figure fossero dei cerchi e che l'angolo tra i raggi fosse retto è ininfluente.

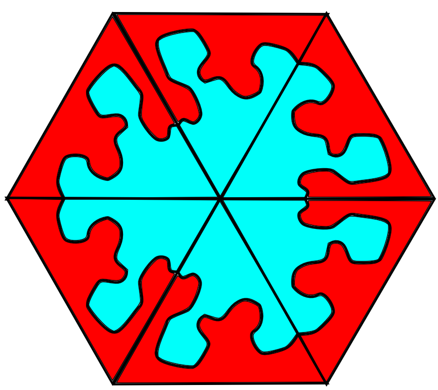
Post Scriptum

Il problema aveva dati inutili e anzi fuorvianti, perché possono indurre a pensare che la via risolutiva sia legata a una serie di applicazioni del teorema di Pitagora che fanno perdere la voglia di trovare la risposta anche ai più fanatici. Come ho già scritto, a volte conviene pensare in generale, per vedere se c'è una strada più semplice verso la soluzione; nella vita non si sa mai a priori quali dei dati che possiamo conoscere siano davvero utili.

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

71. Bisettore minimale

Se specchiamo il triangolo rispetto ai suoi lati come se fosse in un caleidoscopio, otteniamo un esagono, come si può vedere nella figura di sinistra alla pagina seguente. La linea di minima lunghezza formerà a sua volta una curva chiusa; visto che a parità di area racchiusa la curva di minima lunghezza è un cerchio, la risposta al problema originale è un arco di cerchio, di raggio pari a $\sqrt[4]{(27/16\pi^2)}$ il lato del triangolo, per completezza.



Post Scriptum

La parte della matematica che studia i massimi e i minimi di una funzione con uno o più vincoli (in questo caso il minimo perimetro ad area costante) si chiama *calcolo delle variazioni* e ha una storia lunga e interessante. Spesso è difficile trovare la risposta a questi problemi; il calcolo differenziale è nato dai tentativi dei matematici di avere quanti più strumenti generali possibile per risolverli. Un semplice trucco può essere quello di rifarsi a una situazione facile, come quella che porta a un cerchio o nel caso di quadrilateri a un quadrato.

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

81. La cifra mancante

Innanzitutto calcolate la somma delle cifre di 2^{29} modulo 9. Quella di $2^0=1$ è 1; quella di 2^1 è 2; quella di 2^2 è 4; quella di 2^3 è 8; quella di $2^4=16$ è 7; quella di 2^5 è 5; quella di 2^6 è 1; da qua il ciclo si ripete. Quindi la somma delle cifre di 2^{29} modulo 9 è 5; ma la somma delle cifre da 0 a 9 vale 0, pertanto la cifra mancante è 4. Per la cronaca, il numero è 536870912.

Post Scriptum

Questo problema è facile da risolvere, se vi ricordate come funziona la prova del nove; peccato che la maggior parte delle persone si ricordi solo che esiste qualcosa del genere. Se siete curiosi, sul mio sito *https://xmau.com/mate/light/provadel9.html* trovate qualcosa al riguardo.

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

91. Triello

Vediamo innanzitutto la strategia di Clara: se è il suo turno, le conviene mirare a Bice, visto che ha maggiori probabilità di essere colpita da lei piuttosto che da Ada. Passando a Bice, è ovvio che anche a lei conviene mirare a Clara; altrimenti, come appena visto, soccomberà al gavettone che l'amica le lancerà. Anche per quanto riguarda Ada, le converrebbe mirare a Clara piuttosto che a Bice. La sua strategia migliore è però buttare via il primo gavettone! Se infatti riuscisse a colpire Clara, a questo punto Bice si dedicherebbe a lei e avrebbe il vantaggio del primo colpo; quindi le sue probabilità di sopravvivenza sarebbero inferiori a un terzo. Se invece Ada lascia scannarsi tra loro le altre due ragazze, sarà lei ad avere il primo lancio utile e quindi almeno un terzo di probabilità di vincere.

Post Scriptum

I conti precisi sono noiosi e ve li risparmio, visto che per rispondere alla domanda basta l'analisi qualitativa, che non è una prerogativa dei soli fisici! Per i curiosi, se Ada cerca di colpire Clara le rispettive probabilità di sopravvivenza sono comunque 59/189, 102/189 e 28/189; se invece evita di lanciare il primo gavettone le probabilità passano a 25/63, 24/63 e 14/63. Con la strategia ottimale Anna ha quindi la probabilità maggiore di vittoria! Cosa si può imparare? Da un punto di vista matematico, che è opportuno non partire in quarta senza avere considerato ipotesi non esplicitamente vietate; da un punto di vista sociale, che essere i favoriti non aiuta certo, tanto che Clara dalla mira perfetta ha la minore probabilità di vittoria...

2. La scacchiera mutilata

Non è possibile ricoprire una scacchiera a cui siano state tolte due caselle agli angoli opposti con 31 tessere di dimensione 1×2. Le due caselle d'angolo sono infatti dello stesso colore; togliendole, rimangono 32 caselle di un colore e 30 dell'altro. Poiché ogni tessera di dimensione 1×2 ricopre una casella di ciascun colore, risulta impossibile disporle per ricoprire la scacchiera.

Post Scriptum

In questo problema gioca un ruolo molto importante la parità. La parità è un caso particolare di quello che tecnicamente si chiama un *invariante*, cioè un valore che non cambia dopo aver eseguito un'operazione. Qui l'invariante è la differenza tra il numero di caselle bianche e di caselle nere ancora da coprire man mano che si posizionano le tessere. La differenza non può cambiare: ma la scacchiera iniziale ha differenza pari a 2, mentre la configurazione finale ha differenza 0, e quindi il problema è impossibile.

Attenzione: un invariante può solo dare la certezza che la soluzione è impossibile. Se avessimo tolto due caselle di colore diverso, la differenza sarebbe sempre rimasta zero e l'invariante ci direbbe che il problema *potrebbe* avere una soluzione, ma non la certezza che ci sia, anche se in questo caso particolare è in effetti sempre possibile usare 31 tessere 1×2 per ricoprire una scacchiera da cui sono state tolte due caselle qualunque di colore diverso.

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

12. La pendola di Kant

Prima di uscire per la visita al suo amico, Kant caricò la pendola, la regolò ad esempio sul mezzogiorno e la fece partire. Arrivato dal suo amico, guardò che ora fosse, diciamo le 15. Controllò l'ora (supponiamo fossero le 17) subito prima di andarsene, e così seppe quanto tempo era rimasto a conversare.

Una volta tornato a casa, verificò l'ora che segnava la sua pendola. Se essa indicava le 14.40, Kant poté ricavare che erano trascorse 2 ore e 40 minuti da quando era uscito; tolte le due ore di conversazione, aveva impiegato 40 minuti per andare e tornare dal suo amico e visto che il suo passo era costante il viaggio di ritorno era durato venti minuti. Essendo uscito da casa del suo amico alle 17, regolò la pendola alle 17.20.

Post Scriptum

Il problema a prima vista sembra non essere risolubile: è vero che Kant sa a che ora esce da casa del suo amico, ma non sa quanto tempo impiegherà per tornare a casa sua. I concetti matematici rilevanti in questo caso sono due. Per prima cosa, le misure sono sempre relative a un punto fisso; noi non misuriamo un tempo, ma una *differenza* di tempo, o se preferite un intervallo. Se una persona corre i 100 metri in 10 secondi netti, non importa se il giudice di gara ha dato il via alle 18 o alle 18.10. Inoltre si sfrutta la *simmetria*; il tempo per andare e quello per tornare è lo stesso. Entrambi i concetti semplificano il modello di base e ci aiutano a trovare la risposta; la matematica è sempre a caccia di scorciatoie come questa.

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

22. La dozzina del panettiere

Innanzitutto è chiaro che se sommiamo o moltiplichiamo per lo stesso numero il peso di tutte le pagnotte, se prima c'era una soluzione continuerà a essere valida, e se non c'era continuerà a non esserci. Possiamo quindi sottrarre a tutte le pagnotte il peso della più leggera, ottenendo così (almeno) una pagnotta che pesa zero grammi; pagnotta poco nutriente ma certo matematicamente valida. Dividiamo ora tutti i nuovi pesi per il loro massimo comun divisore; oltre alla pagnotta che pesa zero grammi ne avremo così almeno una che pesa un numero dispari di grammi. Mettiamo da parte quella pagnotta: visto che le altre dodici possono essere messe in equilibrio, la somma totale dei loro pesi è un numero pari. Ma se ora rimettiamo la pagnotta nel mucchio e togliamo quella senza peso, la nuova dozzina peserà un numero dispari di grammi, e quindi non potrà essere equamente suddivisa in due gruppi da sei.

Post Scriptum

Questo è uno di quei problemi che sembrano ovvi, ma che sono difficili da dimostrare senza l'idea giusta. La parità da sola (un classico, quando ci sono bilance in gioco) non basta perché sui due lati della bilancia c'è comunque un numero pari di pagnotte: la pagnotta senza peso serve proprio per sparigliare il tutto.

Per i curiosi, la tesi è vera anche se i pesi delle pagnotte sono dei numeri reali, e non semplicemente interi (o frazionari, che è poi lo stesso); la dimostrazione richiede però strumenti matematici più complicati, come la teoria delle basi vettoriali.

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

32. Una moneta equa, una no

Per ottenere una distribuzione di probabilità equa con due monete apparentemente identiche, una delle quali non sia equa, occorre lanciarle entrambe una sola volta.

Indicando con T e C il risultato del lancio della moneta non equa, e con t e c quello della moneta equa, visto che $P(t) = P(c)$ abbiamo

$$P(T, t) = P(T, c);$$
$$P(C, t) = P(C, c).$$

È vero che non sappiamo quale sia la moneta equa, ma non importa. Se infatti stabiliamo che pagherà il presidente se le monete mostrano la stessa faccia, e il segretario se mostrano una faccia diversa, è immediato capire che le due probabilità sono le stesse; $P(T, t) + P(C, c) = P(T, c) + P(C, t)$; e non abbiamo bisogno di distinguere le due monete (né quale sia la probabilità che esca testa quando la moneta truccata viene lanciata).

Post Scriptum

Questo problema è interessante. A prima vista si può forse accettare che non serva sapere con quale probabilità la moneta truccata segni testa; ma si direbbe impossibile riuscire a scoprire *quale sia* la moneta non equa...

In effetti non lo si può stabilire; ma per fortuna quell'informazione non è necessaria. Ci basta sfruttare l'*invarianza* dei risultati dell'altra moneta, cioè il fatto che la probabilità che esca testa oppure croce è la stessa; possiamo allora scegliere il risultato che più ci fa comodo per semplificare i conti.

Per una volta la tipica ipotesi dei problemi probabilistici, che sostiene che se non si possono distinguere i vari casi si deve dare loro la stessa probabilità, viene messa in pratica a un metalivello!

•• ••• ••••• •••••• ••••• ••• ••

42. Com'è buono il cioccolato!

È chiaro che ciascun bambino mangerà 40 quadretti di cioccolato e la sua ultima mossa sarà "mangia", non "dividi"; inoltre per poter mangiare un qualunque quadretto occorre prima averlo diviso dagli altri. Possiamo perciò immaginare che prima facciano tutti i tagli e poi mangino i quadretti.

Ogni volta che si divide un pezzo di cioccolato il numero complessivo di parti aumenta di uno. Visto che si parte con un singolo rettangolo (la tavoletta intera) e finisce con un totale di 40, l'ordine in cui vengono fatte le mosse di suddivisione è ininfluente: bisognerà comunque farne 39, che sommate alle 40 mosse in cui vengono mangiati i quadretti danno un totale di 79.

Post Scriptum

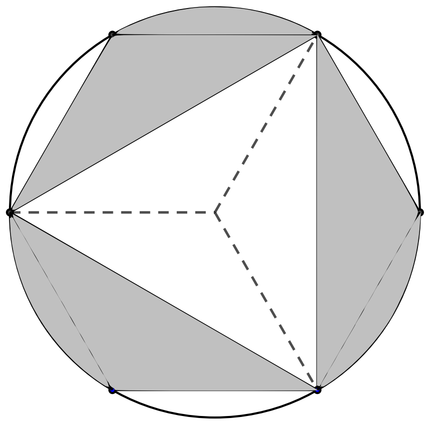
In questo problema si possono vedere all'opera due diverse tecniche. La prima, spesso negletta, è la *semplificazione*. In una barzelletta, a un matematico vengono dati un pentolino, un uovo, un rubinetto e un fornello per cuocere un uovo, cosa che fa brillantemente; ma quando in seguito gli si chiede di rifarlo col pentolino pieno d'acqua e il fornello acceso, lui diligentemente comincia col vuotare il pentolino e spegnere il fornello "per ricondurmi al caso precedente".

A parte le battute, se è già noto un risultato, anche se più complicato di quello che ci serve, si fa comunque meno fatica a usarlo. La seconda tecnica utilizzata è quella degli invarianti, ma con una differenza inaspettata. L'invariante non è infatti il numero di parti in cui la tavoletta è stata divisa, ma la differenza tra il numero di parti prima del taglio e quello dopo il taglio, che è sempre 1. I trucchi matematici possono essere ben nascosti!

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

52. Quadrature varie

Se costruite l'esagono regolare inscritto nel cerchio e aggiungete tre raggi come indicato nella figura qui sotto, vi accorgerete che le varie parti grigie corrispondono esattamente a metà del cerchio. L'area grigia è quindi di 50 cm^2.



Post Scriptum

Quando occorre calcolare aree con tratti curvi conviene sempre cercare un modo di riassemblare i pezzi e ottenere qualcosa di facilmente riconoscibile. Avendo già a disposizione i vertici di un esagono regolare, disegnarlo è la scelta immediata che viene in mente. Si poteva arrivare alla risposta anche disegnando sei raggi e ottenendo sei triangoli equilateri che formano l'esagono; la scelta in questo caso è una questione di gusti, tenendo conto che meno linee si disegnano (sempre che siano quelle giuste...) più è facile accorgersi delle simmetrie.

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

62. I diciassette cammelli

Il racconto continua con l'arrivo di un saggio sul suo cammello. Sentita la storia, si avvicina alla mandria dei cammelli da dividere e aggiunge il proprio. "Ora ci sono 18 cammelli", dice: "9 di essi, la metà, vanno al figlio maggiore; 6, cioè un terzo, al figlio di mezzo; 2, un nono, al figlio più piccolo. Avanza giusto il mio cammello, con cui posso riprendere il mio cammino". A dire il vero, sembra che il saggio abbia lasciato al figlio maggiore il suo vecchio cammello e si sia preso il più bello della mandria: ma cambiando l'ordine dei cammelli il risultato non cambia.

Post Scriptum

Questo problema, pur non essendo ovviamente uno dei racconti delle *Mille e una notte*, è davvero vecchio di secoli. Il motivo per cui funziona è che la somma 1/2 + 1/3 + 1/9 non fa 1 ma 17/18, e quindi il padre, che in fin dei conti era un carovaniere e non un mercante, aveva sbagliato a fare i conti per l'eredità. Il saggio ha arrotondato per eccesso le quote spettanti a ciascun figlio; aggiungere il suo cammello ha nascosto l'operazione e gli ha portato il suo tornaconto... ma questo non c'entra con la matematica.

La suddivisione di un intero in somma di frazioni del tipo $1/n$ risale addirittura agli antichi egizi; Wikipedia ne parla estesamente a https://w.wiki/4iN5.

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

72. La marcia delle formiche

Visto che le formiche sono in realtà indistinguibili, possiamo immaginare che quando due di loro si incrocino non facciano dietrofront ma continuino a procedere oltrepassandosi. È allora chiaro che dopo 100 secondi al più tutte le formiche sono cadute da una parte o dall'altra della barra, compresa la nostra Federica; quindi la risposta è al più 100 secondi. Per vedere che Federica potrebbe in effetti rimanere per tutti e 100 i secondi sulla barra, iniziamo ad immaginare che ci siano solo tre formiche: una all'estremo ovest della barra che guarda in direzione est, una all'estremo est che guarda verso ovest, e Federica al centro. Federica percorrerà 25 cm, cambierà direzione, ne percorrerà altri 25, cambierà di nuovo direzione e farà gli ultimi 50 cm prima di cadere. Aggiungendo altre formiche messe vicinissime alla prima e all'ultima il risultato finale non cambia.

Post Scriptum

Il metodo di risoluzione di questo problema ricorda un po', almeno a me, i diagrammi di Feynman, o comunque tutte le interazioni tra particelle atomiche, che a dire il vero non interagiscono per nulla. Considerare le formiche indistinguibili (proprio come gli elettroni!) e trasparenti permette di semplificare il problema in maniera risolutiva.

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

82. L'altra faccia della medaglia

La probabilità è due terzi. Immaginiamo infatti che tutte le facce delle monete siano diverse e pertanto distinguibili tra loro. Chiamiamo le facce della prima moneta T e C, quelle della seconda T1 e T2, e quelle della terza C1 e C2. Se il lancio dà testa, i casi possibili sono tre: T (e quindi sull'altra faccia c'è C), T1 (sull'altra faccia c'è T2), T2 (sull'altra faccia c'è T1). Visto che i tre casi sono equiprobabili, la risposta si ottiene subito.

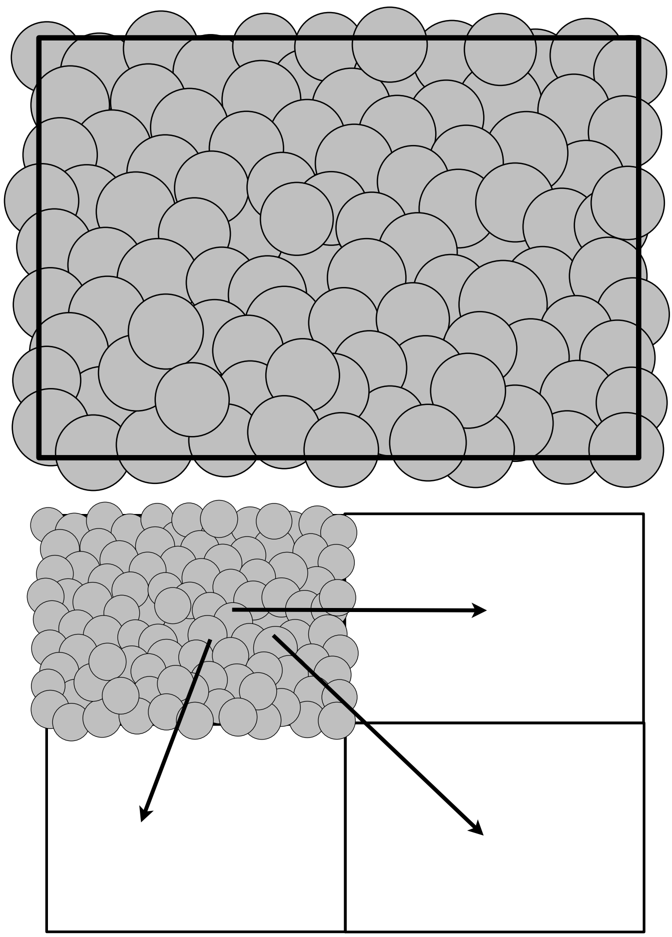
Post Scriptum

La risposta ingenua che spesso si dà a questo problema è 1/2, perché si pensa che una volta uscita testa, avendo eliminato la moneta CC, ne restano solo due. Questo è vero, ma le due monete non hanno la stessa probabilità di essere quella prescelta, come si è visto sopra. Conviene sempre accertarsi, quando si tratta di probabilità, di verificare che i casi trattati siano davvero equiprobabili!

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

92. Monete sul tavolo

Supponete che le monete abbiano raggio 1 e raddoppiate le dimensioni di ogni moneta, quadruplicandone quindi l'area. Queste monetone sicuramente ricoprono il rettangolo, perché altrimenti ci sarebbe un punto con distanza maggiore di 2 da tutti i centri delle altre monete e avreste potuto mettere lì un'altra moneta. Non si possono sostituire quattro monete a quella originale, perché non la ricoprirebbero; ma si può fare l'opposto e dimezzare il *rettangolo originale* con le monete grandi, che ritornano delle dimensioni iniziali. Potete ora piazzare quattro copie del rettangolo piccolo per ricoprire quello originale.



Post Scriptum

Le proprietà di ricoprimento con figure curve sono assolutamente infide. Pensate che la dimostrazione dell'"ovvio" fatto che l'impacchettamento migliore dei cerchi sul piano è il tassellamento esagonale (ogni moneta è circondata da altre sei) è stato dimostrato solo nel 1972 dal matematico ungherese László Tóth (che all'epoca aveva 57 anni, giusto per non dire che i matematici fanno le loro scoperte solo da giovani). Per fortuna nel problema è presente un rettangolo, le cui proprietà sono molto più semplici e che è dunque la chiave per arrivare alla risposta. Per completezza, il rapporto di 4 monete a 1 è il migliore possibile.

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

3. Una partita a bridge

La probabilità è esattamente la stessa. Se due giocatori hanno insieme tutte le carte di un seme, gli altri due non ne possono avere nessuna. Possiamo allora associare a ciascun caso in cui noi e il nostro compagno non abbiamo carte di picche il caso opposto in cui le due coppie si scambiano tra loro le carte: il numero totale di occorrenze dei due casi deve essere per forza identico.

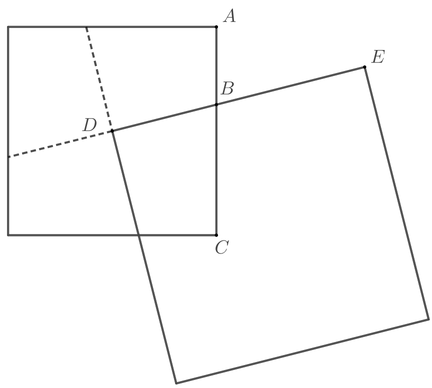
Post scriptum

In questo problema la simmetria gioca un ruolo fondamentale. Spesso non è necessario calcolare esplicitamente il valore esatto della soluzione: se è sufficiente un confronto relativo, le tecniche di simmetria sono molto utili. Anche "guardare il problema dalla prospettiva opposta", nel nostro caso controllare cosa capita agli altri giocatori, a volte può essere utile per semplificarlo.

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

13. I quadrati sovrapposti

Prolungando i lati del quadrato grande all'interno di quello piccolo si nota che quest'ultimo è diviso in quattro parti uguali. L'area totale in comune sarà pertanto un quarto di quella del quadrato piccolo, cioè 400 cm^2.



Post Scriptum

In questo problema è stata indicata la distanza dei punti di incrocio tra i quadrati con i vertici. In realtà l'area compresa tra i due quadrati è indipendente da come i quadrati sono posizionati; basta che un vertice del quadrato grande sia al centro di quello piccolo e che i due lati del quadrato grande tocchino due lati distinti di quello piccolo.

Disegnare linee ausiliarie (in questo caso, i prolungamenti dei lati) può essere utile per vedere se la nuova figura ha una sua simmetria, arrivando così alla soluzione per una via più breve.

23. Venticinque cavalli

Non è possibile. Visto che un cavallo si sposta da una casella di un colore a un'altra casella del colore opposto, e la scacchiera ha 13 caselle di un colore e 12 dell'altro, i 13 cavalli sulle caselle bianche non avranno spazio per posizionarsi tutti.

Post Scriptum

Ecco un altro esempio di parità all'opera. Disporre i cavalli sulla scacchiera tutti insieme serve solo per nascondere la struttura interna del problema, che dipende dal numero di caselle di ciascun colore. A volte non è facile trovare la chiave giusta per affrontare un problema; per esempio, se provassimo a risolvere questo problema cercando un percorso rientrante del cavallo, come si farebbe nel caso di una scacchiera 8×8, ci troveremmo a mal partito.

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

33. La sfera trapanata

La chiave per risolvere questo problema sta nell'affermazione di Giò Prezzemolo, secondo cui è sufficiente sapere qual è l'altezza del cilindro per calcolare il volume del resto della sfera. Se questo è vero, il volume è indipendente dal raggio della sfera: se la cosa vi sembra strana, ricordatevi che maggiore è il raggio, più grandi sono le calotte superiore e inferiore che vengono eliminate insieme al cilindro.

Ma se il raggio della sfera può essere qualunque, possiamo immaginare che il cilindro abbia raggio nullo, e sia in pratica un segmento alto dieci centimetri. La sfera quindi non sarebbe affatto bucata: avendo diametro 1 m, il suo raggio è 0,5 m e il suo volume $\pi/6$ m^3.

Post Scriptum

Nella vita reale non si può utilizzare il procedimento mostrato qui sopra, perché occorrerebbe prima dimostrare che in effetti il volume della sfera bucata non cambia con il variare del raggio della sfera. Si può però ricavare un metainsegnamento: quando c'è un problema conviene sempre leggerlo molto attentamente!

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

43. Caccia alla lepre

Sì, i cacciatori possono catturare la propria lepre in 15 mosse o meno; però ciascuno di loro deve dirigersi verso la lepre inizialmente *più lontana*. Infatti le lepri più vicine partono da una casella dello stesso colore dei cacciatori; ogni mossa di quest'ultimo lo porterà in una casella di colore diverso, e la lepre sfuggirà sempre. Le lepri più lontane sono invece su una casella del colore opposto, e quindi i cacciatori possono riuscire a intrappolarle in un angolo.

Post Scriptum

Ecco un altro problema dove la parità è la chiave per la soluzione; in questo caso l'unica vera difficoltà è accorgersi che quella che sembra la strategia più facile (gli inglesi la chiamano *greedy*, ingorda) non può essere vincente.

•• ••• ••••• •••••• ••••• ••• ••

53. Il giro dell'isola

Considerate tutte le triplette (incrocio, strada di arrivo, ultima direzione presa). Il loro numero è finito, quindi prima o poi Loris deve per forza ripeterne una. Ma visto che da ogni tripletta si può raggiungere solo una specifica altra tripletta, la prima che capiterà di nuovo sarà quella iniziale.

Post Scriptum

Anche in questo caso abbiamo una soluzione combinatoria non costruttiva. Un matematico direbbe che ha definito *uno spazio degli stati* tale per cui c'è una funzione univoca e invertibile tra uno stato e l'altro; a questo punto la soluzione segue subito. Il vero problema è trovare il giusto spazio degli stati! Non basta per esempio dire "consideriamo tutti gli incroci, e come ci siamo arrivati", perché in tal caso non sapremmo se dobbiamo girare a sinistra o a destra una volta arrivati all'incrocio; né tanto meno è sufficiente considerare i soli incroci. Lo spazio degli stati è in genere enorme, e con moltissime dimensioni; ma questo non è un problema per un matematico, perché gli strumenti teorici non si curano della dimensione del problema, almeno fino a che essa è un numero finito.

•• ••• ••••• •••••• ••••• ••• ••

63. Legare il mondo

Se due circonferenze differiscono di una lunghezza x, i loro raggi differiscono di $x/2\pi$, visto che la circonferenza si ottiene moltiplicando il raggio per 2π. Quindi la corda si troverà circa 16 cm sopra la superficie terrestre, e un gatto non dovrà fare troppe contorsioni per passarci sotto.

Post Scriptum

Ecco un problema (risalente al 1702!) in cui l'intuizione può giocare dei brutti scherzi. Non bisogna pensare alla differenza tra la lunghezza iniziale e quella finale della corda, che è aumentata di un fattore assolutamente minuscolo, ma bisogna mettersi a fare i conti e fidarsi di questi. Forse è ancora più paradossale accorgersi che l'altezza della corda non dipende dal diametro del cerchio iniziale: avessimo fatto la stessa operazione partendo da una biglia, il risultato sarebbe stato lo stesso. Gli occhi della matematica spesso sono più acuti dei nostri.

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

73. Il solitario dell'urna

Non importa quante schede rosse e verdi sono state inizialmente messe nell'urna: la probabilità di terminare con una scheda verde è esattamente 1/2!

Per convicervi, cominciate a definire la procedura di scelta in un modo diverso ma sempre casuale ed equivalente: togliete tutte le schede dall'urna, disponetele in fila e iniziate a prenderle una per volta dalla prima a sinistra. A questo punto, prima della vostra ultima mossa avrete necessariamente una fila di una o più schede di un solo colore. Tornando indietro, prima della *penultima* mossa avrete necessariamente schede di due colori, ma tutte ordinate: prima le rosse e poi le verdi, o viceversa. Se così non fosse, dopo la penultima mossa vi rimarrebbero ancora schede di due colori e avreste quindi bisogno almeno di altre due mosse. A questo punto viene il bello: qualunque sia il numero di schede di ciascun colore in questo momento (e qualunque fosse il numero di schede iniziali dei due colori) se l'unico dato che conta è l'ordine dei colori, allora la probabilità di avere alla penultima mossa l'ordine rosso-verde è la stessa di avere l'ordine verde-rosso; ma il primo ordine corrisponde alla vittoria e il secondo alla sconfitta, e quindi le probabilità di vittoria sono esattamente il 50%.

Post Scriptum

Come già visto nel problema 67, l'analisi retrograda permette spesso di ridurre il numero di casi possibili. In questo problema, però, la vera intuizione consiste nell'ordinare le possibilità in un modo più semplice di quello usuale. Aggiungo solo che il teorema che abbiamo dimostrato è più forte di quanto richiesto dal problema; a volte può essere più utile fare una generalizzazione, perché si possono usare princìpi più potenti.

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

83. Carta d'imbarco

Quando l'ultimo passeggero entrò, c'erano solo due posti liberi teoricamente possibili, quello assegnato a lui e quello del primo passeggero. Tutti gli altri posti erano stati necessariamente occupati: o dal legittimo assegnatario oppure come risultato di una serie di scambi di posto. Ma in nessun momento durante l'ingresso dei vari passeggeri c'è stato qualcosa che permettesse di distinguere i due casi: quindi la probabilità dev'essere 1/2.

Post Scriptum

Ricordate il gioco del 15, il quadratino 4 per 4 dove bisognava mettere in ordine le varie tessere, e che nella versione originale proposta da Sam Loyd era irrisolvibile? Bene, il modo migliore per studiare il gioco era immaginare che ci fosse una tessera fantasma, quella mancante, che a ogni mossa si spostava. Anche in questo caso per trovare facilmente la soluzione non bisogna fermarsi a studiare i posti man mano occupati, ma conviene guardare che cosa succede al posto libero. In matematica la figura e lo sfondo, visto che assieme riempiono il quadro, in fin dei conti sono equivalenti!

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

93. Sacchetti di biglie

Se, memori dell'esperienza con i recinti (si veda il problema 38), accettate di mettere un sacchetto dentro l'altro, allora vi bastano 14 biglie. Prendete un sacchetto vuoto (0 è un numero come gli altri), mettetelo dentro un altro sacchetto insieme a una biglia, mettete questo sacchetto in un nuovo sacchetto ancora con un'altra biglia e così via. Se siete dei puristi, oppure i sacchetti devono essere tra loro separati, la risposta è 105; i sacchetti avranno da 0 a 14 biglie.

Post Scriptum

La soluzione "sporca", quella cioè con i sacchetti uno dentro l'altro, ha un contenuto matematico molto importante. Il metodo di von Neumann – quello del problema 31 – per definire formalmente i numeri naturali funziona proprio in questo modo! Come con i nostri sacchetti, i numeri vengono associati agli insiemi. Allo 0 corrisponde l'insieme vuoto, {}; all'1 corrisponde l'insieme che ha come elemento l'insieme vuoto, { {} }; (no, non è la stessa cosa del precedente! l'insieme vuoto non contiene nessun elemento, questo invece contiene un insieme, ancorché vuoto...) e così via. Mai fidarsi dei matematici, quando si tratta di trucchi!

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

4. Perditempo

Non potrò arrivare nel tempo previsto! Infatti la mia tabella di marcia prevedeva di percorrere 200 km alla media di 100 km/h, impiegandoci pertanto due ore. Ma se ho percorso 100 km a 50 km/h, le due ore sono già passate. È vero che secondo la teoria della relatività basterebbe, si fa per dire, viaggiare alla velocità della luce; ma è anche vero che un qualunque corpo dotato di massa non può raggiungere tale velocità, pertanto la risposta è ancora negativa.

Post Scriptum

Il problema dovrebbe essere abbastanza noto; forse però non si pensa spesso al tipo di media necessaria nel considerare due velocità. La media che si usa generalmente è quella aritmetica, che si ottiene sommando due elementi e dimezzando il risultato. Chi ha risposto "150 km/h" stava pensando alla media aritmetica: "ho mantenuto una velocità di 50 km/h meno di quella prevista, ora devo aumentare la velocità di 50 km/h". Esiste poi la media geometrica, che si ottiene moltiplicando due elementi ed estraendo la radice quadrata del prodotto ottenuto. Chi avesse risposto "200 km/h" stava pensando alla media geometrica: "la mia velocità è stata la metà di quella prevista, ora devo raddoppiarla".

La media che si usa in questo caso è invece quella *armonica*, che è un po' più difficile da spiegare: "è l'inverso della media aritmetica degli gli inversi dei due elementi". Il fatto di dover usare gli inversi si può forse ricordare ricordando che la media è una funzione inversa del tempo (si parla di chilometri *all'ora*) e che a noi interessa calcolare il tempo rimanente.

Per curiosità, ricordo che dati due numeri (positivi e distinti) la loro media geometrica è sempre inferiore alla loro media aritmetica, ma è maggiore di quella armonica.

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

14. Il taglio del cubo

In qualunque modo io riposizioni i cubi dopo ogni taglio, mi occorreranno comunque almeno sei tagli per dividere il cubo in 27 cubetti. Consideriamo infatti il cubo centrale; esso ha ovviamente sei facce, nessuna delle quali è inizialmente visibile. Serviranno quindi sei tagli per esporre tali facce.

Post Scriptum

Quando sembra che un problema richieda metodi combinatorici (cioè è necessario contare il numero di possibilità diverse) conviene cercare una proprietà implicita: in questo caso ci siamo concentrati su un cubetto specifico ancorché inizialmente invisibile, potendo così eliminare la necessità di fare i conti e provare varie altre disposizioni.

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

24. Detenuti numerati

Poiché occorre che un solo detenuto indovini il numero sulla propria fronte perché tutti siano salvi, basta trovare un modo per suddividere lo spazio delle risposte in modo che ciascuno di essi abbia una possibilità su dieci di indovinare, e non sia mai possibile che due detenuti rispondano correttamente (altrimenti ci sarebbero dei casi in cui tutti darebbero la risposta sbagliata). Un modo molto semplice di ottenere il risultato è, per esempio, assegnare a ciascun detenuto un numero da 0 a 9. Il detenuto a cui è stato assegnato il numero n deve immaginare che la somma di tutti e dieci i numeri dipinti sulle loro fronti termini con la cifra *n*; a questo punto può calcolare il numero che ha in fronte dopo avere sommato quello dei suoi compagni di sventura. Visto che effettivamente la somma dei numeri terminerà con un ben preciso *n*, e il numero sulla fronte di ciascun prigioniero è inferiore a 10 quindi c'è una sola possibilità di calcolare la somma, sicuramente uno e uno solo dei detenuti avrà ragione!

Post Scriptum

La strategia risolutiva di questo problema è quella che in fantascienza verrebbe definita "del multiverso": si moltiplicano le posizioni possibili e le si provano in contemporanea, per cogliere tutto lo spettro delle soluzioni in una sola volta. Dal punto di vista matematico, invece, la si può vedere come la ricerca di un modo per suddividere equamente tutti i casi teoricamente possibili, in modo da non sprecare tentativi cercando combinazioni che non capitano spesso.

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

34. Lo spareggio

Il punto fondamentale è che la prova finale è uno spareggio, quindi nessuno dei ragazzi può essere avvantaggiato. Ma allora i cappelli devono essere tutti e tre dello stesso colore: se infatti uno solo di essi fosse nero, chi ce l'ha non potrà mai essere il primo a scoprire il proprio colore; se invece ce ne fosse uno solo bianco, tutti e tre potrebbero indovinare il proprio colore ma usando un ragionamento differente, e quindi non equo.

Visto che Alice ha visto due cappelli bianchi, ha intuito che dovevano esserlo tutti e tre.

Post Scriptum

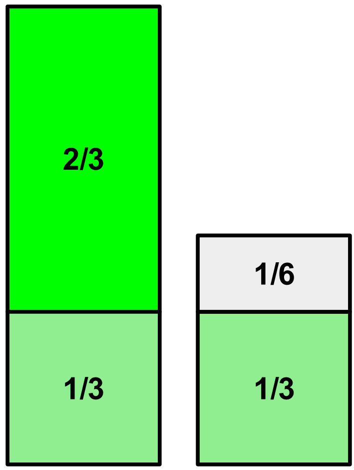
Stavolta il problema non presenta alcun trucco, nonostante quanto appaia a prima vista. Bisogna però fare attenzione a un dato del problema, quello che dice che si tratta di uno spareggio; dato che viene facilmente tralasciato. Da un certo punto di vista, questo problema è addirittura più vicino alla vita reale di tanti altri, visto che in fin dei conti bisogna andare a caccia dei dati!

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

44. Stakanov and friends

Se il campo grande è posto pari a un'unità (e quello piccolo pertanto a 1/2 unità), i contadini l'hanno arato lavorando per mezza giornata a squadra intera e per l'altra mezza a mezza squadra. Quindi a metà giornata ne avevano completato i 2/3, e nell'altra metà il restante 1/3, assieme a 1/3 di unità del campo piccolo, come si vede in figura.

Rimaneva pertanto 1/6 di unità, completata da una persona in un giorno. Ma il primo giorno sono stati arati 4/3 di unità, che equivale a 8/6 di unità; quindi la squadra era formata da otto persone.



Post Scriptum

Il problema non è difficile, ma resta comunque noioso da risolvere algebricamente, e una scorciatoia di questo tipo è sicuramente utile. Sembra che questo problema fosse uno dei preferiti di Lev Tolstoj, proprio per la sua facilità di risoluzione usando questo sistema; Tolstoj amava fare un disegno come questo per mostrare la soluzione.

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

54. Triangolare il cubo

Anche gli altri due estremi delle diagonali stanno sulla diagonale di una faccia del cubo. Se li uniamo, otteniamo un triangolo equilatero; quindi l'angolo che ci interessa è di 60°.

Post Scriptum

La poca dimestichezza con la geometria solida ci rende difficile visualizzare il piano formato da due rette che si incontrano: la geometria analitica può dare una mano, ma a volte basta applicare la simmetria per trovare la soluzione di un problema. A proposito, sapete che si può affettare un cubo con un piano e ottenere un esagono regolare? Prendete un cubo, ruotatelo in modo che un vertice sia esattamente davanti a voi e capirete subito qual è il taglio da fare: il piano passerà per sei vertici del cubo, evitando solo quello più vicino a voi e quello opposto.

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

64. Tutti meno uno

Se il numero *n* di pedine è pari, basta cliccare metodicamente su ciascuna di esse; ognuna verrà girata $n-1$ volte, vale a dire un numero dispari, e quindi alla fine sarà bianca. Se invece le pedine sono in numero dispari è impossibile riuscire ad averle tutte bianche. Per convincervi, considerate il numero di pedine bianche che ci sono a ogni mossa. Inizialmente, visto che tutte le pedine sono nere, quelle bianche sono zero, cioè un numero pari. Una mossa rovescia un numero pari di pedine; quelle bianche e quelle nere che vengono rovesciate sono entrambe un numero pari o entrambe un numero dispari, e quindi il numero finale di pedine

bianche continua ad essere pari. Peccato che il numero totale di pedine sia dispari, quindi ne avanzerà sempre almeno una nera!

Post Scriptum

Anche in questo caso la parità gioca un ruolo importante: non tanto nella soluzione alla prima parte del problema, che è costruttiva e ci dice quali sono le operazioni da fare effettivamente, quanto in quella della seconda parte. Quest'ultima dimostrazione si limita a mostrare che rimangono sempre alcune pedine del colore sbagliato; tuttavia è indubbiamente più semplice procedere in questo modo che verificare tutte le combinazioni possibili, no?

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

74. Monete in fila

Numerate da sinistra a destra le monete nella fila da 1 a 50. Qualunque siano le mosse di Bruno, Arianna può scegliere se raccogliere tutte le monete di posto pari oppure tutte quelle di posto dispari. Basta che scelga il gruppo con il maggior valore, oppure uno qualunque dei due se la somma è identica.

Post Scriptum

Il bello di questo problema (che si dice essere stato usato da una azienda tecnologica israeliana per selezionare i suoi candidati) è che la soluzione è costruttiva, anche se a prima vista non lo sembra. Alice ha in effetti un algoritmo esplicito per scegliere quale moneta prendere a ogni mossa; se preferite vederla in un altro modo, è possibile programmare un calcolatore per renderlo imbattibile nel gioco. Quella indicata non è però la strategia migliore: Alice può fare di meglio (o, se vogliamo essere pignoli, almeno non fare peggio) se a ogni sua mossa controlla di nuovo le monete e verifica se è meglio scegliere quelle di posto pari oppure dispari. La cosa più strana è che però se le monete fossero 49 oppure 51, insomma un numero dispari, sarebbe allora Bruno a poter usare la strategia indicata e avere buone probabilità di guadagnare più soldi, nonostante giochi per secondo e raccolga una moneta in meno!

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

84. Il Pentagono

Se per ogni punto prendete il simmetrico rispetto al centro del pentagono, pardon del Pentagono, è immediato che i punti estremi dell'edificio che si vedono sono gli stessi. Se da uno dei punti di osservazione si vedono tre lati, quindi, dall'altro se ne vedono due, e viceversa. La probabilità è pertanto esattamente la stessa.

Post Scriptum

Il risultato è controintuitivo, visto che a prima vista si potrebbe pensare che sia più facile vedere tre lati invece che due. La simmetria gioca un ruolo determinante, in questo caso. Per vostra curiosità: la distanza minima da cui si vedranno sempre almeno due lati di un pentagono è quella della circonferenza che racchiude una stella a cinque punte formata dai prolungamenti del lato del pentagono, il cui rapporto con il lato è pari al numero aureo φ (poco più di 1,618) visto nella soluzione del problema 78.

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

94. Rotola, matita, rotola

La probabilità è zero, perché in alto ci sarà uno spigolo e non una faccia! Se invece preferite definire "in alto" come "visibile dall'alto", allora la probabilità è 2/5.

Post Scriptum

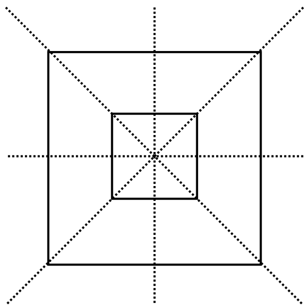
Il problema è naturalmente uno scherzo. Però è utile per ricordarsi che la matematizzazione di un problema deve sempre tenere conto dei vincoli reali. È chiaro che una matita perfetta può finire di rotolare sopra una qualunque faccia con la stessa probabilità, ma la domanda posta è un'altra.

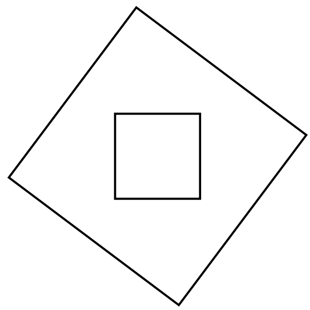
•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

5. Maciachini o Rogoredo?

Gli orari dei treni sono tali che i treni in direzione Rogoredo passano esattamente un minuto dopo quelli verso Maciachini: ad esempio, ci sono treni per Maciachini alle 14.00, 14.06, 14.12 ... e per Rogoredo alle 14.01, 14.07, 14.13 ... Se arrivo quindi in stazione tra le 14.00 e le 14.01, prenderò il treno per Rogoredo, ma se arrivo tra le 14.01 e le 14.06 prenderò quello per Maciachini, e così via. In generale, considerato un intervallo di 6 minuti, capiterà solo per un minuto di scegliere la direzione Rogoredo, con un rapporto di 5 contro 1 a favore di Maciachini.

Per la cronaca, l'altra ragazza l'ho poi lasciata io; mi sono scocciato di vederla così spesso...





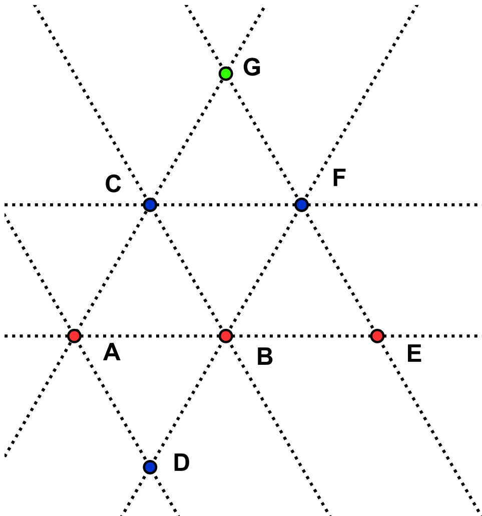
Post Scriptum

Anche se a prima vista la situazione sembra essere simmetrica (i treni passano a intervalli regolari e identici nelle due direzioni: più simmetrico di così…), non è affatto detto che due simmetrie si possano sempre combinare! Per fare un esempio pratico, disegnate due quadrati con lo stesso centro e lati diversi; la figura ottenuta ha quattro assi di simmetria. Se però ruotate il quadrato grande lasciando fermo quello piccolo, la figura risultante è molto meno simmetrica.

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

15. Rosso o blu

No, non è possibile. Considerate il reticolo triangolare in figura. Senza perdita di generalità si può immaginare che A e B siano due punti rossi; pertanto C e D dovranno essere blu. A questo punto, E dev'essere rosso (altrimenti il triangolo CDE avrebbe tutti i vertici blu), e F dev'essere blu (altrimenti il triangolo BEF sarebbe tutto rosso). Ma il punto G fa parte dei triangoli AEG e CFG, quindi non può essere né rosso né blu.



Post Scriptum

So di almeno un professore universitario che è cascato nella trappola di cercare di considerare tutti i punti del piano per ricavare una formula generale. A volte è più semplice risolvere un problema più generale di quello dato; altre volte conviene cercare un controesempio particolare. George Pólya diceva che chi generalizza è come una scimmia che sa salire sugli alberi, mentre chi specializza sa scendere dagli alberi; ma una brava scimmia deve saper fare entrambe le cose. Non che un matematico sia una scimmia: però...

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

25. Parcheggiare i cavalli

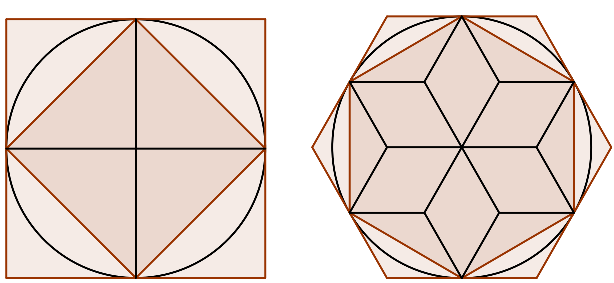
Si possono mettere 32 cavalli su una scacchiera senza che nessuno ne attacchi un altro; basta posizionarli tutti sulle caselle bianche oppure su quelle nere.

Post Scriptum

Parità, sempre parità. Se preferite, abbiamo associato il colore della casella dove c'è un cavallo a un numero dell'insieme $\{0,1\}$ e abbiamo notato che ogni mossa del cavallo cambia il numero associato. La chiave è proprio questa associazione, dalla quale otteniamo immediatamente il risultato. Notate che anche per le torri si poteva affrontare il problema nello stesso modo: sappiamo che non ci può essere più di una torre per riga o per colonna, e quindi il numero di torri dev'essere 8. Nel caso degli alfieri c'è il guaio che due delle quindici diagonali (quelle formate da una singola casella) fanno parte di un'altra diagonale; ma si ricava comunque che si possono collocare al più 14 alfieri.

35. Inscritto e circoscritto

Se si disegna il quadrato interno ruotato di 45 gradi, come nella parte sinistra della figura, ci si accorge subito che esso è la metà di quello esterno, e la sua area è pertanto di 500 cm^2.



Post Scriptum

Nei problemi che trattano di aree relative tra due figure, è spesso utile vedere se esiste qualche trasformazione (in questo caso una semplice rotazione) che non cambi l'area ma renda la nostra figura complessiva più semplice da considerare.

Per curiosità, la figura di destra mostra come il rapporto tra le aree degli esagoni inscritto e circoscritto a un cerchio è pari a tre quarti.

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

45. Problemi di vestizione

A Harl Heinz bastarono 3 calzini: se i primi due fossero stati di colore diverso, il terzo sarebbe per forza stato dello stesso colore di uno di essi. Gudrun invece dovette prendere 21 guanti: infatti poteva capitarle che i primi 20 fossero tutti guanti sinistri.

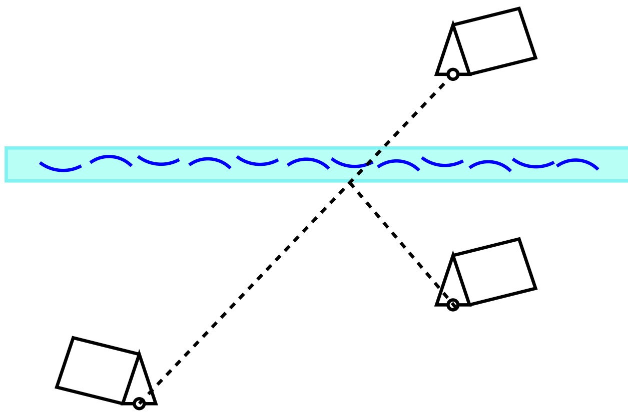
Post Scriptum

La prima parte del problema è notissima, e mi stupirei se non ne aveste mai sentito parlare. La seconda è invece meno nota. La differenza sembra minima, ma il solo fatto di dovere scegliere tra due categorie complementari (guanti sinistri e destri) cambia completamente le carte in tavola; il caso peggiore diventa drammaticamente peggiore.

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

55. Al fuoco!

Nella figura alla pagina seguente si vede come si può calcolare il percorso più breve. Immaginate che ci sia una tenda simmetrica a quella che brucia rispetto al canale, e tracciate una linea retta tra la tenda di partenza e quella immaginaria. Seguite quella linea fino ad arrivare al fiume e da lì, dopo avere riempito il secchio d'acqua, andate alla tenda che sta andando a fuoco. La distanza tra il punto dove avete preso l'acqua e le due tende (reale e immaginaria) è la stessa; se si prendesse l'acqua da un altro punto, il percorso verso la tenda immaginaria percorrerebbe due lati di un triangolo invece che il terzo, e quindi sarebbe più lungo.



Post Scriptum

Chiunque abbia fatto una partita a biliardo sa come funzionano i colpi di sponda, e che se non si dà apposta un effetto alla palla l'angolo di arrivo viene rispecchiato in quello di partenza. La soluzione dovrebbe insomma essere chiara: purtroppo però è difficile riconoscere che il problema così "travestito" non è altro che una trasposizione fluviale del gioco del biliardo. Questo è un altro esempio di come la matematica associ problemi a prima vista diversissimi tra loro.

65. Scrivendo del più e del meno

Alice può sempre vincere, qualunque sia il numero di segni meno presenti inizialmente sulla lavagna. Il segno più in pratica divide in due parti separate una successione di segni meno tra loro contigui, a meno che il segno più non venga creato a un estremo della successione. La prima mossa di Alice consisterà nello sdoppiare opportunamente la successione. Se la fila originale ha un numero dispari di meno, Alice trasformerà in un più quello centrale; altrimenti trasformerà in più i due centrali. In entrambi i casi, Alice lascia a Carlo due file della stessa lunghezza, e a questo punto ripeterà simmetricamente le mosse dell'altro.

Post Scriptum

In generale, la strategia di giocare simmetricamente rispetto all'avversario è vincente per il secondo giocatore, ma non questa volta... perché il primo giocatore può *crearsi* la simmetria! Anche in questo caso, la parità gioca comunque un ruolo importante perché Alice può giocare e ottenere un numero pari di segni a disposizione.

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

75. Schieramenti trasversali in Parlamento

Iniziate a dividere in un modo qualunque i parlamentari tra le due Camere. Se per puro caso siete riusciti a ottenere il risultato richiesto, forse è meglio che dedichiate la vostra fortuna a sistemi più redditizi. Altrimenti sia n il numero totale di coppie di nemici presenti nelle due Camere. Scegliete ora un parlamentare che abbia almeno due nemici nel ramo del Parlamento dove al momento si trova, e spostatelo nell'altra camera. Il numero n diminuirà almeno di due unità, e aumenterà al massimo di una unità (se il terzo nemico del vostro parlamentare era già là, pronto ad affilare i coltelli); insomma n si abbasserà. Ma non può decrescere all'infinito, perché deve essere un numero non negativo; quindi a un certo punto non potrà più essere ridotto. In quel momento per definizione non ci sarà più nessuno con due o più nemici nel suo ramo del Parlamento.

Post Scriptum

Anche qui viene applicata una variante del metodo della discesa infinita, che poi infinita non lo è per nulla. Da una configurazione di base ne ricaviamo una migliore e proseguiamo, per quanto possibile, fino a giungere alla soluzione richiesta. Nella discesa infinita classica si dimostra l'impossibilità di arrivare a una soluzione riuscendo a trovarne una più piccola; in questo caso, invece, abbiamo una funzione che non può scendere più di tanto, ma la logica che la sostiene è la stessa.

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

85. Corona e àncora

Supponete che sei persone giochino contemporaneamente, puntando ciascuna un euro su un simbolo diverso; a ogni lancio il banco riscuote pertanto sei euro. Se i tre dadi danno tutti risultati diversi, i tre vincitori riceveranno due euro ciascuno (quello puntato e quello guadagnato) e quindi il banco va alla pari. Se due dadi hanno lo stesso valore, chi ha puntato su di esso riceve tre euro e chi ha puntato sull'altro valore ne riceve due; il banco quindi guadagna un euro. Se infine tutti e tre i dadi mostrano la stessa faccia, l'unico vincitore ottiene quattro euro e al banco ne restano due. Pertanto il gioco è a favore del banco.

Post Scriptum

La tecnica della "moltiplicazione" (o se preferite, del multiverso quantistico...), dove si testano contemporaneamente tutte le ipotesi possibili per scoprire se appare un pattern combinato, è spesso utile nei problemi che trattano di probabilità, e permette di confutare quei ragionamenti intuitivi che porterebbero alla soluzione sbagliata. Beh, a dire il vero l'intuito ci fa anche capire che se il banco offre quelle condizioni per giocare non lo fa certo perché ci vuole così bene! In questo modo si capisce però perché il gioco è sfavorevole a chi punta: nel caso dei risultati dove due o tre dadi hanno la stessa faccia, il banco paga la stessa quantità di "nuovi" soldi ma deve rendere una quantità minore di quelli puntati.

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

95. Patata time

Se immaginate di compenetrare le due patate, le loro superfici si intersecheranno in una curva. Questa curva fa necessariamente parte di entrambe le bucce delle patate, ed è per definizione sovrapponibile!

Post Scriptum

Questo è un altro problema di geometria spaziale la cui soluzione è immediata se lo si osserva nel modo giusto. La difficoltà in questo caso è ancora maggiore se si guardano singolarmente le due patate, perché le curve richieste non sono planari ma tridimensionali; l'approccio corretto è quello di vederle entrambe allo stesso tempo.

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

6. Due vittorie in fila

Il figlio può riuscire a vincere due partite consecutive in tre casi: se le vince tutte e tre, se vince la prima e la seconda perdendo la terza, se perde la prima ma vince la seconda e la terza. In ciascun caso è necessario che vinca la seconda partita; quindi gli conviene giocare quella partita contro suo padre che è il giocatore più debole, e incontrare sua madre due volte, nella prima e nella terza partita.

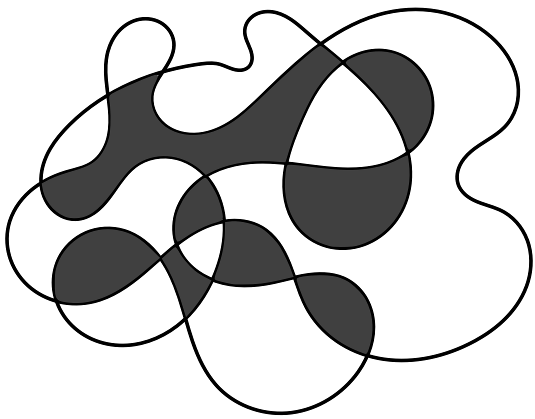
Post Scriptum

Il problema non è difficile, ma è controintuitivo; a prima vista si direbbe infatti che sia meglio giocare due volte contro l'avversario più debole. Questo sarebbe vero se lo scopo del ragazzo fosse vincere due partite su tre; ma l'ulteriore vincolo di vincere due partite consecutive cambia completamente l'analisi. Conviene sempre fare un modello del problema per non cadere in trappola.

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

16. Un problema aggrovigliato

Dopo aver disegnato la prima curva, colorate in bianco e nero le figure chiuse da essa formate, in modo che due figure con un lato in comune abbiano il colore opposto. A questo punto, la seconda curva attraverserà alternativamente figure bianche e nere; essendo una curva chiusa, terminerà poi sulla figura iniziale. Poiché ogni intersezione corrisponde a un cambio di colore, si ha immediatamente che il numero di intersezioni deve essere pari.



Post Scriptum

La formulazione del problema dovrebbe far subito pensare a un problema di parità: in casi come questo, l'idea "dentro/fuori" è un argomento molto potente, e bisogna cercare di trovare un sistema per applicarlo.

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

26. Il simbolo "più diverso"

La prima figura è diversa dalle altre perché il quadrato esterno è bianco; la seconda è diversa perché il quadrato interno è bianco; la terza è diversa perché la figura esterna è un triangolo; la quarta è diversa perché il punto interno è chiaro. L'ultima figura non ha nessuna di queste differenze; ma questo significa che è la "più diversa"!

Post Scriptum

Non è uno scherzo, anche se lo sembra. In pratica siamo passati da un modello (le differenze rispetto alle altre figure) a un metamodello (le differenze rispetto alle differenze). La matematica è tutta basata sui modelli, e nella storia della matematica capita molto spesso che si costruisca un modello che dopo un po' viene preso come elemento base da modellare a sua volta. Si arriva a un'astrattezza sempre maggiore, come in questo caso, dove consideriamo le "differenze delle differenze"; è proprio questo il modo, tuttavia, in cui la matematica progredisce.

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

36. Due rettangoli

Entrambi i rettangoli hanno la stessa area, 40 cm^2. Per dimostrarlo, partiamo dai tre triangoli in cui è diviso il rettangolo tratteggiato. Se consideriamo come base la diagonale dell'altro rettangolo e la sua parallela, vediamo che i tre triangoli hanno la stessa altezza, e la base di quello in comune con il primo rettangolo è pari alla somma delle altre due basi. Questo significa che il triangolo comune ha la stessa area degli altri due triangoli: ma visto che tale area è la metà del primo rettangolo, l'area totale è la stessa per entrambi i rettangoli.

Post Scriptum

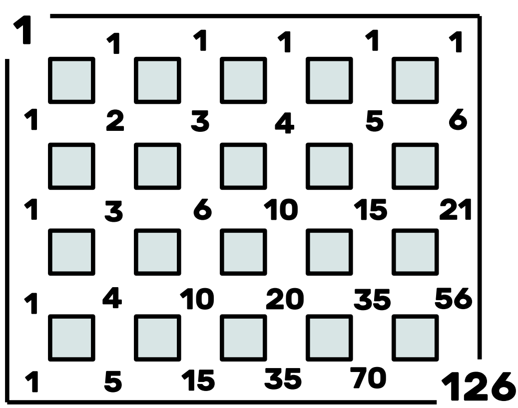
In questo caso è la figura a trarre in inganno il solutore, perché il rettangolo tratteggiato sembra essere più sottile e quindi di area minore. È vero che è più sottile, ma è anche vero che l'altro suo lato, essendo una diagonale del rettangolo originario, è maggiore, quindi non si può di per sé dire nulla a priori... e del resto non sono molti i problemi la cui soluzione può essere ricavata da un semplice disegno.

46. Saper scegliere la propria strada

Per calcolare il numero di percorsi diversi, conviene etichettare man mano gli incroci raggiungibili scrivendo in quanti modi ci si può arrivare.

Il punto di partenza si etichetta con 1: o si è lì, o si è lì. Al primo passo si possono raggiungere solo i due punti immediatamente a destra e sotto, che avranno pertanto anch'essi etichetta 1; al secondo passo si raggiungeranno i due punti ancora a destra e sotto, sempre con etichetta 1, ma anche quello in diagonale rispetto al punto di partenza, che può essere raggiunto in due modi, e avrà come etichetta la *somma* delle etichette dei punti da cui può essere raggiunto, vale a dire 2.

Continuando così, e selezionando ogni volta solo i nuovi punti immediatamente raggiungibili, si arriva alla risposta finale, che è 126 (tanti, vero?).



Post Scriptum

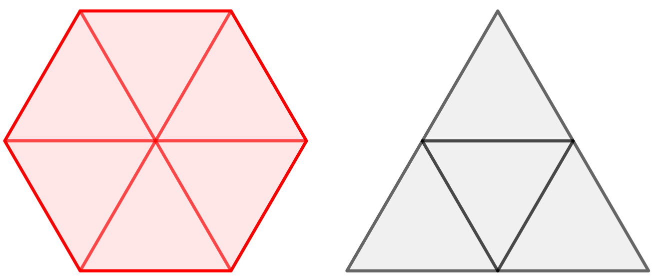
Questo tipo di operazione è molto usuale in informatica, dove spesso i valori richiesti si calcolano per mezzo di iterazioni successive. Un procedimento iterativo di questo tipo è perfetto per uno stupido calcolatore: quello che importa è che noi siamo sufficientemente intelligenti per trovarlo e implementarlo.

Ah: se ruotiamo il nostro quartiere modello di 45 gradi in senso orario i numeri scritti formano il triangolo di Tartaglia, almeno fino a che non finiscono gli isolati. In matematica non è affatto raro riciclare gli stessi risultati in concetti a prima vista diversissimi.

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

56. Stesso perimetro, area diversa

Se le due figure hanno lo stesso perimetro, il lato del triangolo deve essere il doppio di quello dell'esagono. Suddividendo le due figure come indicato alla pagina seguente, è immediato verificare che l'area del triangolo è i due terzi di quella dell'esagono.



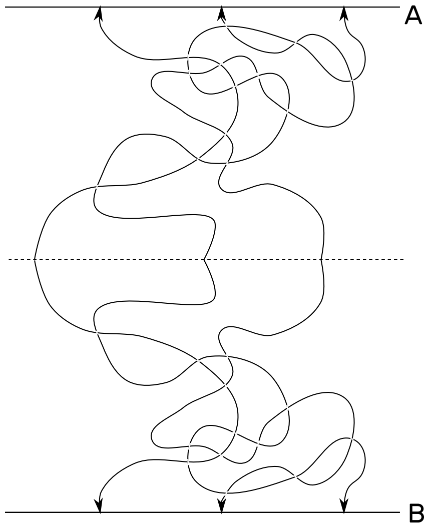
Post Scriptum

Scomporre le aree è spesso un'arte complicata; ma in questo caso la divisione è naturale.

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

66. Sciogliere i nodi

Basta che i nuovi fili siano esattamente simmetrici rispetto a quelli già esistenti, come si può vedere in figura.



Post Scriptum

La soluzione a prima vista sembra stupida: è ovvio che per disfare un nodo basta rifare tutte le operazioni alla rovescia e nell'ordine inverso. Eppure questo è un concetto fondamentale nella *teoria dei gruppi*, una parte dell'algebra che considera una serie di operazioni che si possono compiere all'interno di un sistema. Nel nostro caso il sistema è quello delle posizioni relative dei tre fili, e le operazioni sono i passaggi di un filo sopra oppure sotto un altro. Visto in questo modo, il "prodotto" di elementi del gruppo (cioè la giustapposizione dei vari scambi) e la regola per definire l'inverso sono immediate.

76. Il nemico ti osserva!

Considerate i due soldati tra loro più vicini. Essi dovranno necessariamente osservarsi l'un l'altro per definizione. Inoltre nessun altro soldato può osservare uno di loro due: se c'è un soldato che viene osservato da più di un altro soldato, ne resterebbe almeno un altro non osservato da nessuno. Ma allora possiamo eliminare questi due soldati che non interagiscono col resto del gruppo; restano 15 soldati, a cui si può applicare ricorsivamente il ragionamento fino a che non ne rimane uno solo, che evidentemente non può essere osservato da nessun altro.

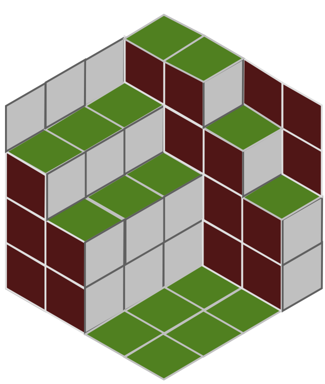
Post Scriptum

La soluzione di questo problema racchiude almeno tre concetti chiave: quello di parità, il principio dei cassetti e la discesa infinita che, come abbiamo visto nel problema precedente, è una specie di induzione al rovescio che ci porta da un caso a un altro più semplice fino a che risulta impossibile soddisfare la tesi. Campione della discesa infinita è stato Pierre de Fermat: la sua dimostrazione che non esistono numeri a, b, c maggiori di uno per cui $a^4 + b^4 = c^4$ sfrutta proprio questo sistema. Peccato che non sia riuscito ad applicarlo a tutte le altre potenze e risolvere il teorema che porta il suo nome...

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

86. Un esagono pieno di rombi

Data una configurazione, colorate in maniera diversa i tre tipi di rombo come nella figura e immaginate che il disegno sia la raffigurazione tridimensionale di una serie di cubetti dentro un cubo vuoto più grande. Il numero di rombi di ciascun colore è pari a quello che si avrebbe se il cubo fosse pieno (basta guardarlo dall'alto…), quindi è sempre lo stesso.



Post Scriptum

D'accordo, questa non è una vera dimostrazione. Per fare le cose per bene occorrerebbe assegnare un'orientazione a ciascun tipo di rombo, definire magari per induzione i tipi di rombi che possono stare nelle varie posizioni, e produrre una funzione che associ il rombo alla faccia di un cubetto. Ma un matematico spesso inizia col "vedere" le cose, proprio come nel disegno precedente; e solo a questo punto si mette a cercare la dimostrazione formale. Qui ci accontentiamo del primo passo!

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

96. Lucchetti

Bruno invia ad Alice una scatola con l'anello all'interno, chiudendola con un suo lucchetto. Alice riceve la scatola e la rimanda a Bruno dopo avere aggiunto un proprio lucchetto. Bruno toglie il suo lucchetto, lasciando solo quello di Alice, e spedisce nuovamente la scatola: finalmente Alice può togliere il suo lucchetto, aprire la scatola, e infilarsi l'anello.

Post Scriptum

Tutta l'operazione sembra inutilmente complicata. La sua importanza teorica è però notevole, visto che è l'idea su cui si basa il protocollo Diffie-Hellman, il primo algoritmo di crittografia a chiave pubblica che ha permesso di inviare dati segreti senza dover scambiare prima un codice. Niente male per un semplice problemino, vero?

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

7. La popolazione di Fertilia

Abbiamo visto che in media ci saranno tanti maschi quante femmine. Ma tutte le famiglie hanno esattamente un maschio; quindi in media avranno anche una femmina, per un totale di due figli.

Post Scriptum

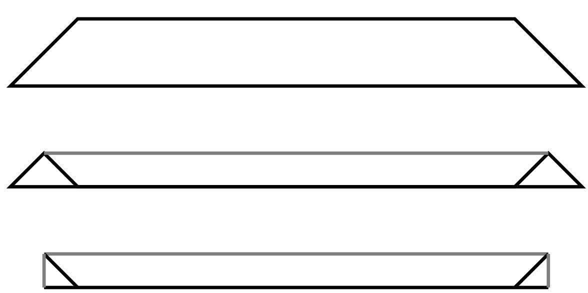
Un problema come questo si potrebbe tranquillamente risolvere sommando la serie infinita (1 · 1/2) + (2 · 1/4) + (3 · 1/8) + ... Beh, "tranquillamente" non è la parola giusta, perché prima bisogna sapere come si somma la serie. Le informazioni date nel problema, però, risultano utili per trovare una via molto più breve alla soluzione. In generale può essere utile provare a risolvere un problema correlato a quello dato, utilizzando poi quel risultato come base di partenza per il problema iniziale.

Quando si parla di probabilità bisogna infine fare molta attenzione alla formulazione esatta del problema. Se la domanda fosse stata "qual è la tipologia di famiglia più numerosa?", la risposta sarebbe stata "quella con un figlio solo", che si ha nella metà dei casi.

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

17. Piegare la fascia

Il metodo più semplice per piegare la fascia per ottenere un rettangolo consiste nel piegarla inizialmente sul lato lungo, e poi ripiegare gli angoli.



Post Scriptum

In questo caso non ci sono trucchi veri e propri: la piegatura proposta è assolutamente standard. Non è però facile intuirla, perché non siamo abituati a piegare una fascia sul lato lungo. Siamo noi quindi a precluderci certe linee di azione a priori: è una variante del famoso detto di Sherlock Holmes, secondo cui una volta eliminato l'impossibile tutto quello che resta, per quanto improbabile, è vero. Un matematico dovrebbe invece dire che una cosa non è impossibile finché non la si è dimostrata tale.

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

27. Scacchi doppi

Supponete che il nero abbia una strategia vincente e quindi il bianco perda qualunque sia la sua prima mossa. Se però il bianco con la prima mossa muove prima il cavallo da b1 a c3 e poi lo stesso cavallo da c3 a b1, i pezzi della scacchiera si trovano di nuovo nella posizione iniziale e il nero si trova a dover fare la prima mossa, che abbiamo supposto essere perdente! Pertanto l'ipotesi iniziale è errata, e il nero non ha alcuna strategia vincente. Non si sa se il bianco può forzare la patta o vincere, ma sicuramente può evitare di perdere.

Post Scriptum

Questo tipo di strategia per assurdo, dove si dimostra che il primo giocatore non può perdere perché può rubare la strategia all'altro, è abbastanza comune nell'analisi dei giochi. Naturalmente non serve a molto, visto che non ci dice come si fa a vincere; ma magari può far sentire meno preoccupato chi deve muovere per primo!

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

37. Quadrato magico utopico

Basta sommare un'unità a ciascuno dei numeri del quadrato originale e se ne otterrà uno con i numeri dal 2 al 10, che rispecchia esattamente le condizioni del problema.

Post Scriptum

Il problema non era troppo difficile: bastava ricordarsi che il 10 è composto da un 1 e uno 0 e il problema si risolveva all'istante. Però non è comunque immediato riuscire a vedere un numero come un insieme di cifre, o se preferite vedere che nella successione 2, 3, ..., 9, 10 sono presenti tutte le cifre. La notazione posizionale è qualcosa che diamo così per scontato che è difficile Ragionarci sopra.

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

47. Barbecue estivo

Il sistema più veloce per cuocere le tre bistecche consiste nel mettere la prima e la seconda a cuocere su un lato. Dopo 5 minuti si gira la prima, si toglie la seconda e si mette al suo posto la terza: dopo altri 5 minuti la prima bistecca è pronta, si gira la terza e si finisce di cuocere la seconda. Il tempo totale richiesto è pertanto 15 minuti.

Post Scriptum

Anche in questo caso abbiamo un problema di ottimizzazione. Se c'è un'operazione che può essere suddivisa in vari passi e l'algoritmo "ingordo" (fai subito tutto il possibile, vedi anche il problema 43) sembra non essere ottimale, può valere la pena suddividere l'operazione. Il costo della suddivisione può infatti essere minore del risparmio ottenuto aumentando l'uso delle risorse.

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

57. Spaccaquindici

Il gioco è una versione camuffata del tris! Riprendete il quadrato magico 3×3 che abbiamo visto nel problema 37; potete notare come la somma dei tre numeri di ogni riga, colonna o diagonale è 15, e con un po' di osservazione potete convincervi che non ci sono altre triplette possibili.

L’imbonitore ha memorizzato le posizioni dei numeri nel quadrato magico, e gioca i valori che corrispondono alla strategia vincente, o almeno non perdente, a tris. Il pareggio, e quindi il guadagno di 50 centesimi, è sempre assicurato; non è poi improbabile che l’altro giocatore faccia una mossa falsa che lo porti alla sconfitta.

6	7	2
1	5	9
8	3	4

Post Scriptum

Una delle parole più strane che si sentono dire da un matematico è *omeomorfismo*. Il concetto è molto meno complicato di quanto sembri a prima vista: due modelli sono omeomorfi se tra essi c’è una corrispondenza che associa a qualunque azione si applichi su uno di essi un’azione equivalente sull’altro. Rimanendo nell’ambito della fiera di paese, pensate a uno specchio deformante: la persona che vedete riflessa non vi assomiglia affatto, ma a ogni vostro movimento ne corrisponde uno suo, come se dietro lo specchio ci fosse la vostra caricatura.

Qui abbiamo un omeomorfismo tra il gioco proposto dall’imbonitore e il tris, attraverso la corrispondenza data dai valori del quadrato magico. L’importanza degli omeomorfismi consiste nella possibilità di trasformare un problema ostico in uno molto più semplice, trovare la soluzione di quest’ultimo e riportarla al problema originario... esattamente come ha fatto l’imbonitore.

67. Al casinò

Considerate il punteggio che si è ottenuto al *penultimo* lancio: può essere un numero qualunque tra 36 e 41. Se fosse 35 o meno non basterebbe infatti un lancio solo per raggiungere o superare 42; se fosse 42 o più sarebbe l'ultimo lancio. Non sappiamo quali siano le probabilità relative dei vari punteggi, ma non importa. Infatti, dato un qualunque punteggio x, tutti i valori che si possono raggiungere da esso al lancio successivo sono equiprobabili; ma 42 è sempre raggiungibile mentre gli altri punteggi no (se il penultimo valore è stato 36, vuol dire che si è per forza terminato il gioco con 42), pertanto 42 è il risultato più probabile.

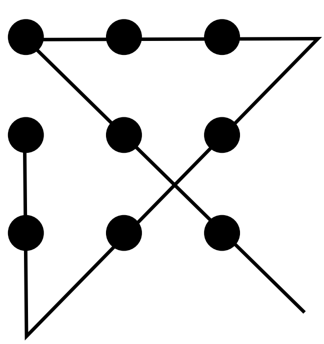
Post Scriptum

L'analisi retrograda (partire cioè dal risultato finale per comprendere come è stato ottenuto) è un procedimento spesso solo qualitativo, che però può semplificare molto la vita nel caso in cui ci siano troppe vie percorribili per giungere alla soluzione, come in questo caso.

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

77. (Quasi) sempre dritto

Una possibile soluzione è mostrata qui sotto.



Post Scriptum

Questo problema è molto noto, e viene usato per saggiare le capacità di "pensiero laterale", cioè uscendo dal pensiero "squadrato". Mi affretto ad aggiungere che un vero spirito matematico potrebbe però sostenere che bastano solo tre segmenti, anche se in effetti un po' lunghetti! Disegnando i nove punti sulla superficie terrestre, e immaginando pertanto che "in linea retta" significhi "su un arco di cerchio massimo", basta completare il cerchio massimo e poi cambiare direzione quel tanto che basta per passare alla terna successiva di punti e all'altra ancora.

87. Rosso oppure nero?

Qualunque sia la strategia scelta da Tristano, la sua speranza di vittoria sarà esattamente la stessa. Per dimostrarlo, immaginate che lui abbia una strategia ottimale, e giocate a un gioco leggermente diverso dal suo. Il mazzo di carte è mischiato esattamente allo stesso modo e voi dite "Stop!" esattamente allo stesso suo momento, però scommettete che sia rossa l'ultima carta del mazzo, e non la successiva. Evidentemente la vostra probabilità di vittoria è esattamente la stessa; però in questo caso la strategia è ovviamente ininfluente, perché l'ultima carta non cambia certo a seconda della strategia scelta.

Post Scriptum

È vero che uno può pensare "se dico che la prossima carta è rossa in un momento in cui ne sono uscite più nere che rosse, ho una probabilità di vincita maggiore del 50%"; ma è anche vero che questo potrebbe non capitare mai, e in quel caso perdereste. È un po' come la martingala alla roulette, dove si continua a raddoppiare la posta finché non esce il colore previsto: in teoria va bene, in pratica si rischia di perdere una fortuna. Anche in questo caso il problema si risolve cambiando il modo di vedere le cose: tanto se le altre carte sono ancora ignote la successiva e l'ultima sono indistinguibili!

•• ••• ••••• •••••• ••••• ••• ••

97. Test di resistenza

Supponiamo che il palazzo abbia *n* piani e di lanciare un uovo dal piano *p*. I casi sono due: o l'uovo si rompe, o non si rompe. Se si rompe, a questo punto dobbiamo provare a lanciare il prezioso secondo uovo dal primo piano al piano $p-1$, con un totale di *p* lanci nel caso peggiore. Se non si rompe, abbiamo usato un lancio ma ci rimangono solo $n-p$ piani da testare.

Se quindi consideriamo la funzione $F(l)$ che misura quanti piani si possono testare con due uova e *l* lanci, dobbiamo scegliere il piano dove fare il primo lancio in modo tale che $F(l-1) = n-l$; in questo modo riusciamo infatti a equilibrare i test da fare "più in alto" e quelli da fare "più in basso". Ora, $F(1) = 1$ (occorre per forza testare il primo piano). In generale, $F(l) - F(l-1) = l$; quindi andando man mano indietro abbiamo che $F(l)$ è la somma dei numeri da 1 a *l*, cioè $l\,(l+1)/2$. Facendo un po' di conti, $F(13) = 91$ e $F(14) = 105$; il nostro test richiederà al più 14 lanci.

Post Scriptum

Se invece di scrivere il problema sotto forma di giochino l'avessi scritto nel modo prediletto da chi prepara i libri di testo ("Dimostrate che con due uova e l lanci, blablabla, potete discriminare tra $l(l+1)/2$ piani diversi") avreste trovato un tipico esempio di problema che si risolve per mezzo dell'induzione, come raccontato nel problema 69. In questo caso l'applicazione sarebbe stata molto semplice, visto che il caso di un singolo lancio è immediato e quello generale si ricava mostrando come abbiamo fatto noi che conviene fare il primo lancio all'*n*-simo piano. Però bisogna dire che l'induzione, pur essendo un metodo molto potente, è anche piuttosto noiosa, tanto che non mi stupirei se qualcuno avesse scritto un programma di intelligenza artificiale che riesce a risolvere problemi per induzione. Spero che nascondendola in questo modo il procedimento sia risultato più piacevole!

•• ••• ••••• •••••• ••••• ••• ••

8. Una moneta poco equa

Sì, è possibile riuscire a ottenere una distribuzione di probabilità equa anche con una moneta non equa, indipendentemente dalla probabilità di uscita di testa o croce, purché non sia nulla. Lanciatela *due* volte: uno dei due giocatori sceglie il risultato "prima testa e poi croce" (in breve, TC), l'altro "prima croce e poi testa" (CT). Se i due lanci sono uguali (TT oppure CC), il risultato si considera nullo, e si inizia da capo. È chiaro che, qualunque sia la probabilità di ottenere testa o croce, quella di ottenere la successione TC è la stessa di ottenere CT; l'unico problema è che in teoria l'operazione può durare all'infinito.

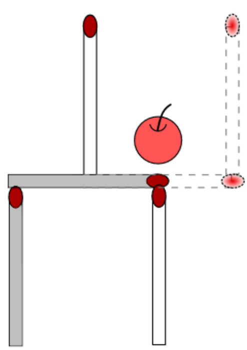
Post Scriptum

L'accorpamento di più eventi e l'eliminazione di eventi che non interessano sono strumenti molto potenti in probabilità. Si può addirittura dimostrare che con questa tecnica possiamo lanciare una moneta e ottenere una qualunque probabilità, addirittura con valore irrazionale!

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

18. Spostare una ciliegia

La figura mostra come si debbano spostare i due fiammiferi. Uno di essi si muove solamente di mezza lunghezza, e il bicchiere è rovesciato; ma la ciliegia è effettivamente fuori dal bicchiere.



Post Scriptum

Ci sono tre diversi fatti che impediscono di trovare subito la risposta. I primi due, non pensare a rovesciare il bicchiere e voler lasciare nella stessa funzione logica (gambo/calice) i fiammiferi che non si muovono, sono facilmente riconoscibili; molto più ostico è il terzo, quello che non fa pensare alla possibilità di uno spostamento parziale che così viene tralasciato mentre si è alla caccia della soluzione.

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

28. Rientro anticipato

Guardando che cosa è successo dal punto di vista della moglie, lei ha risparmiato 20 minuti di viaggio; quindi il percorso in auto dal punto in cui si sono incrociati alla stazione dura 10 minuti, visto che ha evitato di farlo sia all'andata sia al ritorno. Questo significa che i due si incontrano 10 minuti prima dell'arrivo del treno che l'uomo prende di solito: come infatti ricordate, lei giunge in stazione esattamente nel momento in cui il treno arriva. Essendo lui partito un'ora prima, ha camminato per 50 minuti.

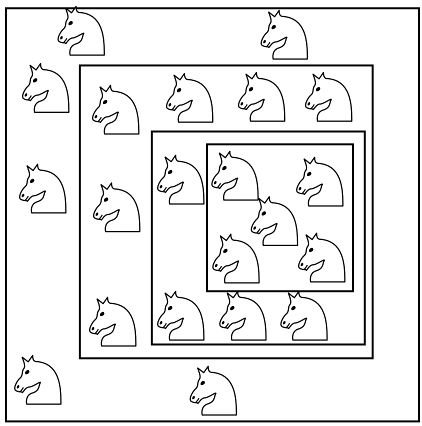
Post Scriptum

Anche questo problema appartiene alla categoria di quelli che sembrano non fornire dati sufficienti per la soluzione. In realtà invece ne è stato dato addirittura uno di troppo: non importa se l'uomo cammini a velocità costante oppure no, visto che gli unici dati che contano sono il punto di incontro e il fatto che la moglie guidi a velocità costante. Si potrebbe ricavare la soluzione con una serie di supposizioni e di conti che non finiscono più; ma è più semplice cambiare sistema di riferimento (la moglie invece del marito) ed eliminare gli orpelli inutili.

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

38. Recinti dispari

Una possibile soluzione è la seguente, dove si intende che ogni recinto contiene anche quelli al suo interno. I recinti contengono pertanto rispettivamente 5, 9, 15 e 21 cavalli. Un'altra soluzione lascia quattro recinti separati con rispettivamente 21, 0, 0, 0 cavalli. Zero è un numero pari, ma con 0 cavalli non si fomano coppie!



Post Scriptum

Qualcuno potrebbe ribattere che i recinti esterni sono a forma di anello; però, visto che contiamo anche la parte interna, l'obiezione viene respinta. D'altra parte, dovrebbe essere immediatamente chiaro che la somma di un numero pari di addendi dispari non può essere un numero dispari, e che quindi ci voleva un qualche trucco: o no?

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

48. Scateniamoci!

Basta tagliare un singolo anello: il terzo della catena. Rimarranno così due pezzi di due e quattro anelli, e l'anello singolo aperto. Il primo giorno il mio antenato diede all'albergatore l'anello aperto; il secondo giorno se lo riprese e gli diede il pezzo da due anelli; il terzo giorno gli ridiede l'anello aperto; il quarto giorno si riprese i due pezzi e gli diede quello da quattro; dal quinto al settimo giorno rifece i passi dal primo al terzo.

Post Scriptum

La prima intuizione che serve è che aprire un anello non lascia due ma *tre* pezzi: l'anello stesso e le due parti rimaste. La seconda intuizione è che ogni pezzo può trovarsi in mano al viaggiatore o all'albergatore, e quindi si arriva naturalmente a scrivere i numeri in base due. A questo punto, visto che 1+2+4=7, il conto è presto fatto.

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

58. Conigli e polli

Il modo più rapido per arrivare alla soluzione è probabilmente quello di considerare il *conigliopollo*, animale con due teste e sei zampe dato dall'unione di un coniglio e di un pollo. Se immaginiamo che nel cortile ci siano 9 coniglipolli, per un totale di 54 zampe; avanzano quattro zampe. Si introduce allora il *coniglio spollato*, animale dato dalla differenza tra un coniglio e un pollo, e pertanto con zero teste e due zampe; di questi ce ne sono quindi due. Risultano così esserci in tutto 9 coniglipolli e 2 conigli spollati, vale a dire 9+2=11 conigli e 9-2=7 polli, come potete facilmente verificare.

Post Scriptum

La soluzione qui indicata sembra uno scherzo, ma non lo è affatto. In primo luogo, è la base di una bella poesia di Elio Pagliarani (*La merce esclusa*) che potete ad esempio leggere a *http://www.rudimathematici.com/bookshelf/pdf/Coniglipolli.pdf* nel sito dei Rudi Mathematici. Ma c'è anche un significato matematico molto importante! Introdurre coniglipolli e conigli spollati equivale infatti a fare un *cambio di variabili* nel sistema di equazioni collegato al problema, che uno studente poco creativo avrebbe scritto e risolto sperando di non compiere errori. Iniziare a cercare somma e differenza di conigli e polli semplifica notevolmente la vita, tanto che i conti si possono fare a mente; risalire infine dalla soluzione del nuovo problema a quella originale non è per nulla difficile. Se usare concetti inesistenti come il conigliopollo vi sembra barare... beh, siete in buona compagnia. I numeri immaginari si chiamano così perché i matematici rinascimentali che risolvevano le equazioni di terzo e quarto grado se li trovavano tra i piedi mentre facevano i calcoli. Essi erano assolutamente convinti che non esistessero: visto però che conducevano alla soluzione corretta e avevano il buon gusto di scomparire alla fine, li accettavano con sano pragmatismo. Cosa volete che sia un conigliopollo!

68. Tiro al bersaglio

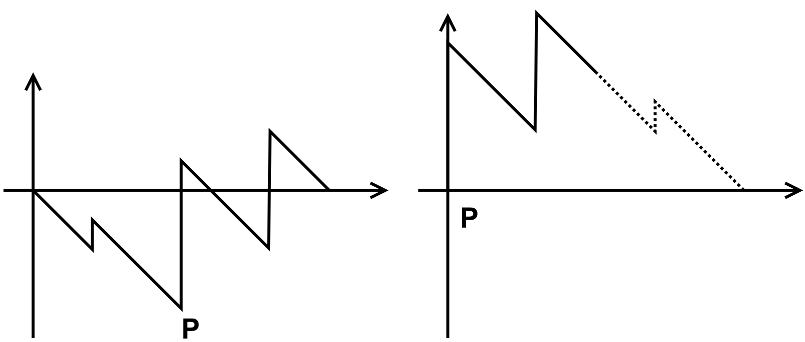
Ci sarà necessariamente una semisfera che contiene tutti e tre i punti. Presi due punti a piacere, c'è infatti sempre un cerchio massimo che passa per essi; se i punti sono agli antipodi, ce ne sono addirittura infiniti. Il terzo punto, se non è su quel cerchio massimo, è sicuramente su un emisfero o sull'altro.

Post Scriptum

Se vi avessi proposto l'equivalente del problema sul piano (due punti su una circonferenza stanno sempre su una semicirconferenza) non ci avreste pensato su nemmeno un attimo. Cos'è allora che rende più complicato questo problema? Innanzitutto la poca dimestichezza con la geometria solida, ma forse anche il fatto che quando pensiamo a una superficie sferica ci viene in mente la Terra, anzi un mappamondo. Lì ci sono due emisferi "naturali", l'australe e il boreale, e non è facile cambiare punto di vista!

78. Giro del mondo in economia

Sì, è possibile. Per dimostrarlo, partite da un punto qualunque sulla circonferenza e immaginate che la quantità di carburante possa scendere sotto zero senza problemi per il movimento della Sat Rover. Il grafico della quantità di carburante presente nel veicolo sarà simile a quello raffigurato nella figura di sinistra, dove le righe verticali corrispondono ai depositi di benzina presenti sul percorso. Alla fine del circuito saremo di nuovo a zero, visto che il carburante totale è esattamente sufficiente per il periplo; ci sarà inoltre almeno un punto (nel nostro caso è indicato con P) dove il livello di carburante sarà più basso in assoluto. Basterà allora partire da P, come si vede nella figura di destra, dove ho tratteggiato la parte di percorso spostato dall'inizio alla fine del circuito, e per definizione non si arriverà mai ad avere il serbatoio vuoto, tranne eventualmente nei punti dove si trova un deposito.



Post Scriptum

Usare i numeri negativi in un problema che non li permette come soluzioni può sembrare un modo piuttosto sofisticato di barare; ma come ho già raccontato, procedimenti di questo tipo sono sempre stati considerati perfettamente leciti anche dai matematici del passato, che si preoccupavano solo che il risultato finale fosse valido e verificabile altrimenti. Oltre all'uso dei numeri immaginari per risolvere le equazioni di terzo e quarto grado, come ho accennato nella risposta al problema 58, si può per esempio calcolare l'n-simo numero di Fibonacci F_n partendo da $\varphi^n/\sqrt{5}$, dove φ è il rapporto aureo $(1+\sqrt{5})/2$; il numero che si ottiene è irrazionale, ma basta arrotondarlo all'intero più vicino e si ha il valore richiesto.

•• ••• ••••• •••••• ••••• ••• ••

88. Basta essere d'accordo!

Sì, i prigionieri possono salvarsi. È sufficiente che si mettano d'accordo su un'affermazione di tipo vero/falso; per esempio "il numero di cappelli bianchi che ci metteranno sarà dispari". Ogni prigioniero guarda i cappelli degli altri, e deduce quale sarebbe il colore del suo cappello se l'affermazione fosse vera. Se in effetti lo era, tutti risponderanno correttamente; altrimenti tutti sbaglieranno la risposta.

Post Scriptum

È troppo complicato da spiegare in questa sede, ma i prigionieri potrebbero salvarsi persino se fossero in numero infinito... sempre che l'assioma della scelta sia vero. L'assioma della scelta è un enunciato matematico legato agli insiemi infiniti che intuitivamente sembra corretto, viene spesso considerato vero, ma porta a una serie di paradossi come quello di Banach–Tarski (presa una sfera, la si può dividere in cinque parti che possono essere riassemblate per ottenere *due* sfere identiche alla prima). Non sempre la matematica dà sicurezze, insomma.

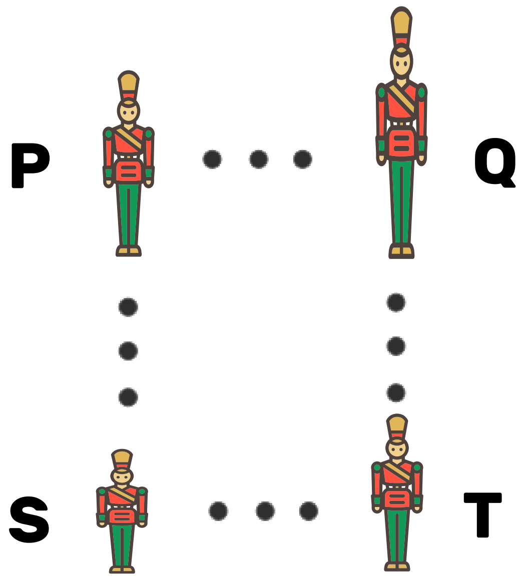
Ah, comunque ci sarebbe una risposta che vale sia nel caso finito che in quello infinito: tutti i prigionieri dicono "il mio cappello è verde"!

•• ••• ••••• •••••• ••••• ••• ••

98. Righe e colonne

Dopo il primo ordinamento dei soldati, prendete un elemento qualsiasi nella riga *r* e nella colonna *c*: con scarsa fantasia, lo chiameremo S. Per definizione, tutti i soldati nella riga *r* e nelle colonne a destra di *c* saranno più alti di lui.

Supponiamo ora che al di sopra di S ci sia un soldato P più alto di un altro soldato T che si trova a destra di S, come raffigurato schematicamente nel disegno. Ma allora il soldato Q che sta sulla stessa riga di P e sulla stessa colonna di S deve essere più alto di S, e quindi si sposterà anche lui. Facendo lo stesso ragionamento per tutti i soldati da spostare, si vede che alla fine l'ordinamento sulle righe non si modificherà.



Post Scriptum

Quello presentato nel problema è il teorema di Boerner. O almeno Donald Knuth, che è uno che di queste cose se ne intende, ha sentenziato che la prima traccia di questo risultato si trova in una nota a piè di pagina in un lavoro del 1955 di questo autore. In effetti, è un risultato che da un certo punto di vista è assolutamente banale, ma è così strano da osservare che lascia perplessi, proprio come il capitano del nostro problema!

9. Meditazione montana

Immaginate che io abbia un clone che si comporti esattamente come me, ma lo faccia con una settimana di ritardo. Quindi, nell'esatto momento in cui io inizio la discesa a valle il clone inizia la salita al monte. Visto che il sentiero è lo stesso, dobbiamo per forza incontrarci almeno in un punto: potrebbe essercene più di uno nel caso io o il mio clone ogni tanto ritornassimo sui nostri passi, ma non importa. Il punto di incontro è il luogo in cui mi sono trovato nello stesso momento all'andata e al ritorno.

Post Scriptum

Chi ha studiato analisi matematica dovrebbe accorgersi che questo problema è il Teorema di Bolzano sotto mentite spoglie. Il teorema richiede che la funzione "movimento lungo il sentiero" sia continua, e in effetti se io fossi diventato così bravo nella meditazione da potermi teletrasportare, l'affermazione sarebbe falsa. Visto che le ipotesi matematiche dei problemi non sono poi così campate in aria?

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

19. Spostare un'altra ciliegia

Non occorre spostare nessun fiammifero! Basta immaginare la figura ruotata di 120 gradi, in modo che uno dei fiammiferi che prima formavano il calice diventi ora lo stelo.

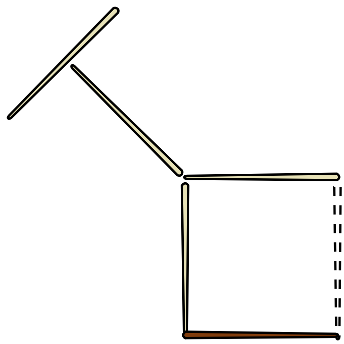
Post Scriptum

Qualcuno potrebbe lamentarsi dicendo che questo è un bieco trucco: ma non è affatto così. Dal punto di vista strettamente matematico, non vi è alcuna differenza fra i tre fiammiferi; il modello (la configurazione a Y) viene semplicemente applicato in maniera diversa a seconda di quale dei tre fiammiferi si sceglie come stelo. D'altra parte, il problema della modellizzazione è fondamentale non appena si passa da una struttura puramente teorica a una pratica, per quanto schematica come nel nostro esempio. In un certo senso, abbiamo più di un modello che rispetta le ipotesi, e possiamo scegliere quello che ci è più comodo.

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

29. (Non) spostare la giraffa

La soluzione si ottiene ruotando lo stuzzicadenti a destra e mettendolo orizzontale in basso, come nella figura qui sotto.



Post Scriptum

L'aiutino era molto più sensato di quanto sembrasse a prima vista. Nei problemi combinatorici (e questo in un certo senso lo è, visto che si parla di permutazioni degli stuzzicadenti) può essere utile vedere se si riesce a ridurre il numero di combinazioni possibili in un modo o nell'altro. In questo caso, testa, collo, corpo e una zampa devono per forza restare nella stessa posizione relativa; l'unica possibilità rimasta è quella di spostare la seconda zampa.

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

39. Ai tempi del vinile

Il disco ha due solchi, uno su ciascun lato, che formano entrambi una lunghissima spirale.

Post Scriptum

È vero che guardando radialmente il disco si incontrano 45 solchi per ogni minuto di musica, ma non sono certo solchi diversi, altrimenti la puntina dovrebbe saltare da un solco all'altro.

Non avrete per caso creato il modello sbagliato? Modellare il problema è un punto chiave in matematica.

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

49. Il taglio della torta

La Sachertorte si può tagliare in otto parti uguali con tre tagli: dopo i due tagli ortogonali dall'alto in basso, si fa un taglio orizzontale a metà dell'altezza della torta.

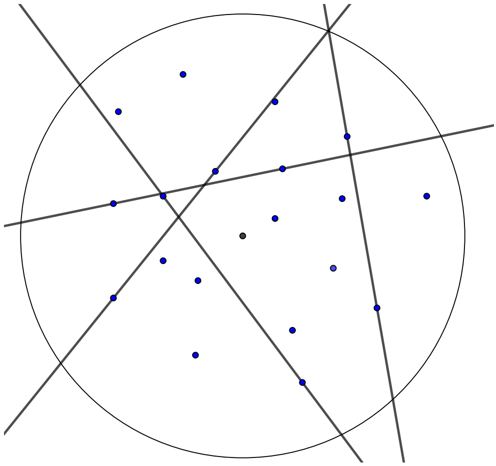
Post Scriptum

Siamo così abituati a vedere i problemi da risolvere geometricamente come problemi di geometria piana che è molto difficile ricordarci che esiste anche una terza dimensione, che nel caso di una torta riveste indubbiamente una certa importanza. Anche il fatto di avere un cilindro complica la vita: se la torta fosse stata a forma di cubo, e quindi simmetrica rispetto ai tre assi cartesiani spaziali, la risposta sarebbe forse arrivata immediatamente.

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

59. Un circolo affollato

Sì, è possibile fare una divisione esatta di questo tipo. Considerate tutte le rette che uniscono due dei punti all'interno del cerchio: alcune di esse sono indicate nella figura qui sotto. Il numero totale di queste rette è enorme ma finito, quindi è sempre possibile trovare una retta con una pendenza diversa da tutte loro. Disegniamo questa retta all'esterno del cerchio, e spostiamola man mano verso di esso. All'inizio la retta lascerà tutti i punti da un lato; alla fine, dopo che sarà dall'altra parte del cerchio, li lascerà tutti dall'altro. Nel suo percorso ne incontrerà solo uno per volta (se ne incontrasse due, avrebbe la stessa pendenza della retta per quei due punti); basta allora fermarsi dopo aver passato il 500.000-simo e prima del 500.001-simo punto.



Post Scriptum

Questo problema mostra come l'infinito sia davvero tutt'altra cosa rispetto al finito. In pratica c'è sempre ancora dello spazio... Ma è fondamentale stare attenti a non "cascare" per sbaglio su qualcosa (nel nostro caso una retta) che non ci va bene. Nella vita reale sarebbe un classico caso della legge di Murphy; nella matematica possiamo assicurarci contro di essa.

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

69. Diamoci la mano!

Prima che ci fosse stata una qualunque stretta di mano, ovviamente il numero di persone che avevano stretto la mano un numero dispari di volte era zero, che è un numero pari. Con la prima stretta di mano, si è passati a due persone, numero anch'esso pari. Da qua in poi ci sono tre possibilità per lo stato delle due persone che si stringono la mano: entrambe avevano stretto un numero pari di mani (allora il numero di persone che hanno stretto un numero dispari di mani aumenta di due); entrambe avevano stretto un numero dispari di mani (allora diminuisce di due); una aveva stretto un numero pari di mani e una un numero dispari (in questo caso il numero di persone che hanno stretto un numero dispari di mani resta costante). In ogni caso non si potrà mai passare da un numero pari a un numero dispari di persone che hanno stretto un numero dispari di mani.

Post Scriptum

Questo è uno dei tanti problemi che si risolvono con la parità. Ha però un'ulteriore caratteristica: usa l'*induzione*. In matematica l'induzione vera e propria è un procedimento molto potente che, partendo da due premesse a prima vista banali (una proprietà di un numero n vale nel caso n=1; se la proprietà vale per un certo n, allora vale anche per n+1), produce un risultato per *tutti* gli infiniti numeri naturali. In questo caso ci limitiamo a un numero finito di strette di mano; ma è sempre lo stesso concetto di un'enorme fila di tessere di domino messe ritte in posizione tale che, facendone cadere una, si avvia una reazione a catena che le rovescia tutte.

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

79. Il barbiere di Russell

Il barbiere è una donna.

Post Scriptum

Non picchiatemi per questo che in effetti è uno scherzo, e serve solo a ricordarvi che i dati sono sempre da verificare attentamente prima di partire in quarta alla ricerca di una risposta... oltre che a evitare di essere troppo sessisti.

Il paradosso di Russell è stato davvero dirompente e ha costretto tutti i matematici a fermarsi e trovare una definizione di insieme che fosse sufficientemente generale per fare tutte le operazioni tipiche che si volevano eseguire, ma evitasse problemi di questo tipo; Russell stesso, insieme ad Alfred Whitehead, sviluppò una teoria complicatissima con infinite categorie di "tipi" costruiti ciascuno a partire dal precedente... teoria resa del tutto inutile da Kurt Gödel che nel 1931 dimostrò che in *qualsiasi* sistema assiomatico che permette almeno le operazioni aritmetiche era impossibile avere contemporaneamente la correttezza (tutti i teoremi dimostrabili sono veri) e la completezza (tutti i teoremi veri sono dimostrabili). Chi di paradosso ferisce, di paradosso perisce?

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

89. Luci della ribalta

Per prima cosa, notate che è impossibile che a un certo punto tutte le lampadine siano spente: per spegnere una lampadina, infatti, occorre che quella precedente sia accesa. Questo è importante, perché se mai si fosse arrivati a quella configurazione da lì non ci si sarebbe più mossi. Definiamo ora uno spazio degli stati, come nel problema 53, che raccolga tutti i possibili modi in cui ci troviamo noi e le lampadine: per la precisione, uno stato viene specificato dicendo se ciascuna delle lampadine è accesa o spenta, e a quale lampadina siamo arrivati nel nostro giro turistico. Il numero di stati è molto grande, per la precisione $n \cdot 2^n$, ma è comunque finito; prima o poi si dovrà perciò tornare in uno stato già visitato, con la configurazione delle lampadine già apparsa mentre si guarda la stessa lampadina. Prendiamo ora il primo istante di tempo t_1 in cui rivediamo uno stato che c'era già a un tempo precedente t_0, e consideriamo *lo stato precedente*, t_1-1. Visto che si può arrivare a ogni stato in un solo modo, questo doveva essere stato raggiunto al tempo t_0-1, il che è impossibile per ipotesi... a meno che $t_0=0$.

Post Scriptum

A vederla così, la dimostrazione spaventa un po'. Però non è difficile capirne l'idea di base; se si trova una definizione di spazio degli stati tale che si può arrivare a un qualunque stato da un solo altro stato, e il numero di stati è finito, siamo costretti a fare un ciclo. È un po' come mettere un cavallo su una casella ai bordi di una scacchiera 3×3 e vietargli di tornare indietro alla casella che aveva appena lasciato: se si osserva la scacchiera, si vede che il cavallo si muove qua e là, si direbbe quasi a caso, ma tracciando fisicamente le mosse con un filo e stendendo il filo ci si accorge che in realtà percorre un cerchio... solo un po' "appallottolato".

Attenzione però a non fidarvi ciecamente del potere dei cicli! Se infatti si può arrivare a uno stato da diversi stati, tutto quanto scritto sopra non vale più. Prendete ad esempio l'algoritmo che associa a ogni numero la somma dei quadrati delle sue cifre: è chiaro che 25 e 52 portano entrambi a 29, quindi non possono fare entrambi parte di un ciclo. Inoltre, anche se vale la regola "si arriva a ciascuno stato solo in un modo", non è affatto detto che il ciclo raggiunga tutti gli stati. Come abbiamo visto, anche nel nostro problema gli stati dove tutte le lampadine sono spente non fanno parte del nostro ciclo principale, e fanno un ciclo (molto breve... continuiamo a girare senza far nulla) per conto loro.

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

99. Camaleonti

No, è impossibile. Visto che il numero totale di camaleonti presenti è un multiplo di 3, se si arrivasse ad averli tutti di un colore significa che tutte le differenze tra il numero di quelli di un colore e di quelli di un altro sono multipli di 3. Nel nostro caso, all'inizio nessuna di queste differenze lo è. Ogni volta che due camaleonti di colore diverso, diciamo rosso e giallo per fissarci le idee, si incontrano, che succede? Semplice. La differenza tra rosso e giallo rimane la stessa, visto che entrambe le popolazioni diminuiscono di un'unità; la differenza tra rosso e verde cambia di 3 unità (1 rosso in meno e 2 verdi in più), quindi se non era un multiplo di 3 continua a non esserlo, e lo stesso per la differenza tra giallo e verde. Lo stesso discorso vale per le altre coppie di colori: non potendo mai raggiungere un multiplo di 3, il problema non è risolvibile.

Post Scriptum

Mentre ci sono moltissimi problemi che sfruttano la parità, quelli che richiedono di guardare i multipli di 3 sono piuttosto rari. Per curiosità, se tutte e tre le differenze fossero multiple di 3, allora i camaleonti potrebbero diventare tutti di uno qualunque dei 3 colori: se c'è una sola differenza multipla di 3, ad esempio tra rosso e giallo, i camaleonti potrebbero diventare tutti *del terzo* colore.

Provate con 4 gialli, 2 verdi e 1 rosso. Non venite però a chiedermi cosa succederebbe se invece le differenze multiple di 3 fossero esattamente 2: se volete, questo è il centesimo problema del libro!

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

10. Missili in collisione

I due missili hanno una velocità relativa tra di loro di 6000 km/h, pari alla somma delle due velocità. Un minuto prima della collisione si troveranno pertanto a 100 km di distanza.

Post Scriptum

Ho presentato il problema con tantissimi dati, per la maggior parte inutili. Nella vita reale capita spesso qualcosa del genere: quando creiamo un modello matematico per risolvere un problema, dobbiamo scegliere quali dati sono necessari e quali no. Se il problema fosse stato "dopo quanto tempo i due missili si scontrano", allora le altre informazioni sarebbero state tutte necessarie; ma in questo caso avevano l'unico scopo di cercare di intorbidire le acque.

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

20. Attenti ai falsi

Basta una sola pesata. Prendete una moneta dalla prima pila, due dalla seconda, tre dalla terza e così via fino a prendere tutte le dieci monete dalla decima pila. Avrete 55 monete che se fossero tutte vere peserebbero complessivamente 412,5 g. Se il peso risultante è invece 412,4 g allora la pila con le monete false sarà la prima; se è 412,3 g sarà la seconda pila; e così via. Il metodo funziona anche con undici pile: dall'ultima non si piglia nulla, e se il peso risultante è 412,5 g sarà quella la pila delle monete false.

Post Scriptum

Il concetto usato per risolvere questo problema è la *rottura della simmetria*. Si parte infatti da una struttura simmetrica (tutte pile da dieci monete) e facciamo in modo di averne una dove la simmetria non c'è più, per poter differenziare ciascuna delle pile. Il gioco tra simmetria e asimmetria è fondamentale in matematica.

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

30. Il torneo di tennis

Non importa come viene stilato il calendario: il numero totale di partite da giocare resterà sempre lo stesso, cioè 32. Ogni partita infatti elimina un giocatore; visto che per stabilire il vincitore occorre eliminare tutti gli altri uno per volta, il risultato è immediato.

Post Scriptum

Se si hanno a disposizione tanti campi di tennis si può ottimizzare il numero di turni da giocare; ma un torneo a eliminazione è per forza composto dallo stesso numero di partite. La parallelizzazione, quando si può fare, serve a risparmiare tempo, non certo il numero di operazioni.

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

40. Manca sempre qualcuno

Se consideriamo chi *non* ha superato le prove, abbiamo 11 persone per la prima, 23 per la seconda, 18 per la terza, 15 per la quarta e 42 per l'ultima. Il numero totale di errori è stato pertanto 109; se tutti avessero sbagliato al massimo una prova, rimarrebbero 19 persone che devono averle superate tutte. Non possiamo sapere il numero esatto di chi è riuscito a fare tutto, ma sappiamo che è compreso tra 19 e 86.

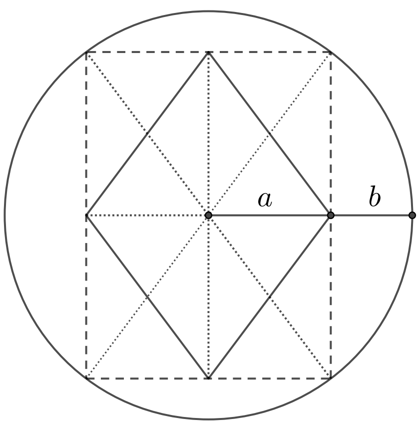
Post Scriptum

Risolvere i problemi "alla rovescia", cioè cercando prima quanti sono i casi in cui non vale la tesi e facendo poi la differenza con l'insieme totale, è un trucco che si usa spesso nei problemi basati sulla probabilità: nel paradosso dei compleanni, per esempio, per calcolare la probabilità che in un gruppo di 23 persone ce ne siano almeno due nate lo stesso giorno si ricava prima la probabilità che tutte siano nate in giorni diversi. Come sempre, un problema può essere affrontato in svariati modi; l'importante è riuscire a risolverlo!

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

50. Una losanga è per sempre

Il lato del laghetto è 9 m. Infatti la somma di *a* e *b* è il raggio del cerchio esterno: ma come si può vedere in figura il raggio è esattamente uguale al lato del laghetto.



Post Scriptum

Il rombo è una figura relativamente poco usata in geometria, e quindi non siamo abituati a cogliere immediatamente le sue proprietà. Può aiutare ricordarci che un rombo è la metà di un rettangolo.

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

60. Zero spaccato

Paolino evidentemente non va proprio d'accordo con la matematica, visto che è impossibile ottenere esattamente zero in quel test!

Dato che 5 e 8 sono numeri primi tra di loro, il più piccolo numero positivo che può essere formato come somma di una certa quantità di 5 oppure di una (diversa) quantità di 8 è il loro prodotto, cioè 40; tutti gli altri numeri ottenibili in questo modo sono i multipli di 40. Il 40 si ottiene con otto 5 e cinque 8, quindi in totale 13 domande; 25 non è multiplo di 13, quindi il risultato è impossibile.

Post Scriptum

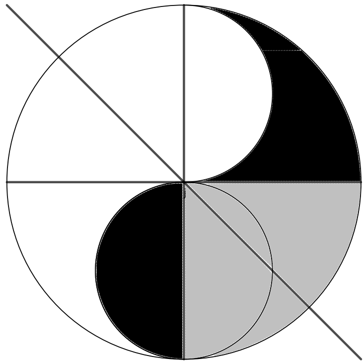
Massimo comun divisore e minimo comune multiplo si incontrano già alle elementari, ma sono esposti in modo tale che il bambino si chiede a che cosa serviranno mai in futuro. Non che questo sia un utilizzo importante; però credo che sia interessante vedere come i concetti matematici possano spuntare anche in altri contesti.

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

70. Bisecare lo Yin e Yang

Nella figura alla pagina seguente si può vedere la struttura dello Yin e Yang. Il diametro dei cerchi piccoli è la metà del cerchio grande, e la loro area sarà quindi un quarto; l'area del semicerchio nero è dunque un ottavo del cerchio grande. Ma la parte in nero in alto a destra insieme al semicerchio bianco forma un quadrante, e perciò ha anch'essa area un ottavo di quella del cerchio.

Per bisecare la figura basterà pertanto dividere a metà il quadrante indicato in grigio, con una retta orientata da nord-ovest verso sud-est.



Post Scriptum

A volte aggiungere righe ausiliarie a una figura geometrica ci può far vedere le cose in maniera più chiara. Occorre anche ricordarsi che i rapporti di similitudine vanno moltiplicati: se le lunghezze sono in rapporto 1 a k, le aree lo sono in rapporto 1 a k^2.

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

80. Vecchi e nuovi amici

Poiché si suppone che tutti conoscano la persona con cui sono andati alla cena (o che comunque le presentazioni siano state fatte prima), le nove persone, escludendo Xavier, devono aver stretto rispettivamente 0, 1, 2, ... 8 mani. Consideriamo la persona che ha stretto 0 mani e quella che ne ha strette 8: devono per forza essere una coppia, perché il secondo ha stretto le mani a tutti gli altri. A questo punto la persona che ha stretto una mano e quella che ne ha strette sette formano anch’esse una coppia per le stesse ragioni, e così via; rimarrà una coppia dove entrambi hanno stretto quattro mani, e questi devono essere Xavier e Yolanda, perché altrimenti ci sarebbero due persone diverse da Xavier che hanno stretto lo stesso numero di mani. Insomma, Yolanda ha stretto quattro mani.

Post Scriptum

Il bello di questo problema è che si chiede di risolvere un'affermazione su Yolanda senza che si parli mai di lei! Questo dovrebbe subito mettere sulla giusta strada il tipico risolutore di problemini matematici, che dovrebbe pensare a qualcosa sulla falsariga di "Se non si parla mai di Yolanda, significa che se c'è una soluzione questa deve essere simmetrica tra lei e Xavier: pertanto ciascuno dei due deve avere stretto quattro mani." La risposta è corretta, il procedimento no: però l'idea della simmetria, con le coppie 8-0, 7-1, 6-2, 5-3 e finalmente 4-4 strette di mano, porta in effetti anche alla soluzione.

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

90. Chomp

Innanzitutto è chiaro che il gioco non può finire in pareggio: qualcuno dovrà per forza prendere l'ultimo quadretto di cioccolato. Supponete ora, per assurdo, che il secondo giocatore abbia una strategia vincente. Tale strategia deve valere per una qualunque mossa iniziale del primo giocatore... compresa quella per cui l'altro si limita a prendere il singolo quadratino in alto a destra. Ma qualunque fosse la risposta vincente del secondo giocatore, il primo giocatore avrebbe potuto farla direttamente lui!

Post Scriptum

Le dimostrazioni per assurdo (tecnicamente in questo caso si parla di *furto della strategia*, come nel problema 27) lasciano sempre l'amaro in bocca, soprattutto nel caso dei giochi. Ci si crede anche, ma ci si arrabbia perché non si ha nessun indizio su quale sia la mossa giusta da fare. D'altro canto, sapere chi vince dà un certo aiuto: innanzitutto si può avere un'idea di cosa succede e si possono notare già alcune configurazioni sicuramente perdenti. Nessun giocatore, infatti, lascerebbe all'altro un rettangolo, perché sarebbe sicuro di perdere.

Il trucco usato per risolvere il problema è stato scoprire l'esistenza di una "mossa inclusiva", che cioè è contenuta in tutte le mosse possibili. Non è sempre facile trovare una mossa inclusiva, ammesso che ce ne sia una: ma non si sa mai...

•• ••• ••••• ••••••• ••••• ••• ••

Fonti e ringraziamenti

È sempre difficile scoprire la paternità di un problema matematico; ma a volte è possibile attribuire un nome specifico, o almeno la mia fonte originaria. Ecco le fonti a me note. Problema 5: semifinali dei Giochi Matematici 2010; problema 13: Pierre Berloquin, *The Garden of the* Sphinx; problema 18: *Mente e cervello*, gennaio 2010; problema 20: dal blog *Wild About Math!*; problema 21: *Rudi Mathematici*, marzo 2010; problema 24: in Edward de Bono, *Creatività e pensiero laterale*; problemi 29, 54: Kobon Fujimura, *The Tokyo* Puzzles; problema 32: Edward J. Barbeau, Murray S. Klamkin, William O.J. Moser, *Five Hundred Mathematical Challenges*; problemi 33–39: Martin Gardner, *Enigmi da altri mondi*; problemi 42 e 43: proposti agli esami di ammissione alla Scuola Normale Superiore (nel 1965 e 1982 rispettivamente); problema 44: in Douglas Hofstadter, *Gödel, Escher, Bach*; problemi 48-49: in Boris Kordemsky, *Giochi matematici russi*; problemi 50, 51, 99: *International Mathematics Tournament of Towns*; problemi 55-60: David J. Bodycombe, *The Riddles of the Sphinx*; problema 72: da Robert Eastaway; problemi 73 e 79: dal blog *Futility Closet*; problema 74: da Julian Havil, *Impossible?*; problema 78: finali di MathCounts 2011; problema 92: Guido Trombetti e Giuseppe Zollo, *I segreti di Pitagora*; problemi dal 93-96: George Polya e Jeremy Kilpatrick, *The Stanford Mathematics Problem Book*.

Per quanto riguarda le immagini, ecco la fonte di quelle che non sono state create da me. In alcuni casi sono state modificate, come permesso dalla loro licenza d'uso (quelle da Wikimedia Commons generalmente CC-BY-SA; le altre CC0, in pratica pubblico dominio:). Il font del problema 5 è Transport Heavy, https://www.roads.org.uk/fonts; i pezzi degli scacchi sono presi da https://freesvg.org/chess-pieces-vector.

3. https://freesvg.org/ten-of-clubs-vector-image
4. https://w.wiki/_ybjJ
5. https://w.wiki/4SPj
6. https://freesvg.org/thumbs-up-hand-gesture
7. https://freesvg.org/1530164139
8. http://www.clker.com/clipart-15606.html
9. https://freesvg.org/hiker-vector-silhouette
10. https://freesvg.org/missile-153422
12. https://freesvg.org/grandfather-clock
15. https://freesvg.org/vector-drawing-of-grease-pencils
21. https://freesvg.org/1525695135
22. https://freesvg.org/basket-of-buns-vector-illustration
24. https://freesvg.org/johnny-automatic-vacant-prison-cell
27. https://w.wiki/4aDC
28. https://freesvg.org/clock-rounded-hands-and-dots
30. https://freesvg.org/grass-tennis-court-vector-illustration
31. https://www.svgrepo.com/svg/312213/fly
34. https://www.svgrepo.com/svg/154084/hat
38. https://freesvg.org/galloping-horse-outline-vector-clip-art
39. https://freesvg.org/vector-graphics-of-45-rpm-vinyl-record
40. https://freesvg.org/vector-graphics-of-golden-trophy-cup
44. https://w.wiki/4dnW
45. https://www.svgrepo.com/svg/233728/gloves,
    https://www.svgrepo.com/svg/140729/socks
47. https://freesvg.org/barbecue
48. https://freesvg.org/chain
49. https://freesvg.org/quartered-cake
55. https://www.svgrepo.com/svg/288946/fire
58. https://www.svgrepo.com/svg/176688/rabbit-animals,
    https://www.svgrepo.com/svg/4127/chicken
60. https://www.svgrepo.com/svg/230704/test
62. https://www.svgrepo.com/svg/321953/camel
68. https://freesvg.org/wire-globe

69. https://freesvg.org/1538106725
72. https://freesvg.org/vector-image-of-an-ant
73. https://www.svgrepo.com/svg/310209/vote
74. https://freesvg.org/vector-graphics-of-two-euro-coin,
    https://freesvg.org/vector-image-of-50-euro-cent,
    https://freesvg.org/vector-image-of-10-euro-cent,
    https://freesvg.org/vector-image-of-one-euro-cent-coin,
    https://freesvg.org/vector-image-of-5-euro-cent-coin,
    https://freesvg.org/20-euro-cent-vector-illustration
76. https://freesvg.org/1554648437
78. https://www.svgrepo.com/svg/151353/moon-rover
79. https://www.svgrepo.com/svg/242885/barber
80. https://freesvg.org/shaking-hands-cartoon
82. https://freesvg.org/vector-clip-art-of-gold-currency-coin
83. https://www.svgrepo.com/svg/234734/boarding-pass
84. https://www.svgrepo.com/svg/220965/pentagon
85. https://www.svgrepo.com/svg/17895/crown,
    https://www.svgrepo.com/svg/40166/anchor,
    https://www.svgrepo.com/svg/3283/diamonds
87. https://freesvg.org/poker-card-deck-vector-clip-art
88. https://www.svgrepo.com/svg/261416/accesory-hats
89. https://openclipart.org/detail/211389/lightbulb
91. https://www.svgrepo.com/svg/5328/gun
93. https://www.svgrepo.com/svg/322757/marbles
94. https://www.svgrepo.com/svg/1746/pencil
95. https://freesvg.org/nicubunu-potato
96. https://freesvg.org/ossidiana-lock-and-key
97. https://freesvg.org/1470911084
98. https://freesvg.org/soldiers-marching,
    https://www.svgrepo.com/svg/184591/toy-soldier
99. https://freesvg.org/chameleon-1637701565

Grazie infine a tutti coloro che hanno controllato le prime bozze del libro – ma anche la versione pubblicata – segnalandomi gli errori anche marchiani: voi sapete chi siete!

Ah: siete rimasti bloccati sul “centesimo problema”? Se la differenza tra il numero di camaleonti rossi e gialli e quella tra il numero di camaleonti gialli e verdi sono entrambe un multiplo di tre, anche quella tra camaleonti rossi e verdi lo deve essere...

Indice