算學小叢書

三線位標

N. M. Ferrers 著
邱丕榮譯

商務印書館發行

算學小叢書

三 線 位 標

N. M. Ferrers 著

邱 丕 榮 譯

商務印書館發行

目　　錄

第　一　章

三線位標　直線之方程式

第 二 章

特殊之二次方程式

第三章

一次方程式組之消去式

第四章

二次方程式之圖象

第 五 章

三 角 位 標

第六章

互對極線

第七章

切式位標

第　八　章

關於兩圓錐曲線之交點之研究及投影法

投 影

第九章

雜　命　題

五幾何條件所定之圓錐曲線

三 線 位 標

第 一 章

三線位標　直線之方程式

1.　在尋常所用之位標系中，平面上任何一點之位置，類皆由其點至兩定線之距離以定之．本書所將研究者，則為又一種之位標系．平面上之點之位置，將由是點至三定線之距離之比以定之．此三定線非共點者，而成一三角形，稱為基本三角形 (triangle of reference)，其三邊稱為基線 (line of reference)．此平面上之點，至三基線之距離，稱為該點之三線位標 (trilinear co-ordinates)．命基本三角形之三角頂為 A, B, C；其對邊之長量各為 a, b, c；一點至 BC, CA, AB 等之距離各為 α, β, γ.

若兩點各在一基線之異側，則兩點至該線之距離之符號相反．若以其一為正，則其他為負．今規定：凡點與 A 同在 BC 之一側者，其 α 為正，異側者為負．準此以定 β

及 γ 之符號.由是可知基本三角形內之點,其三位標皆爲正;而在此平面上,點之位標,無全爲負者.

2. 任何一點之三位標間,有一甚重要之關係,研究如下:

設 Δ 爲基本三角形之面積,α, β, γ 爲平面上一點之三位標,則

$$a\alpha+b\beta+c\gamma=2\Delta.$$

設 P 點在三角形內,

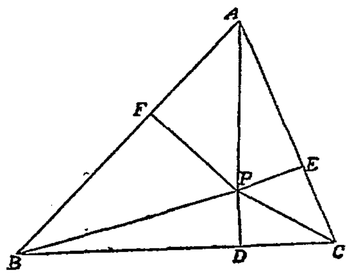


圖 1

如圖 1. 聯 PA, $I\cdot B$, PC; 並作 $PD \perp BC$, 則

$$PD=\alpha,$$

而 $a\alpha=PBC$ 之面積之 2 倍.

同理, $b\beta=PCA$ 之面積之 2 倍,

$c\gamma=PAB$ 之面積之 2 倍.

相加,得 $$a\alpha+b\beta+c\gamma=2\Delta.$$

其次,若 P 在 AB 及 AC 之延長線間 (圖 2), 與 A 各在 BC 之異側時,則 α 爲負,而 β, γ 皆爲正.因之, PBC 面積之 2 倍當爲 $-a\alpha$. 故仍同前,

$$a\alpha+b\beta+c\gamma=2\Delta.$$

又若 P 在 BA 及 CA 之延長線間(圖3),與 A 同在 BC 之一側時,則 β, γ 爲負,而 α 爲正.因之,諸三角形 PBC, PCA, PAB 之面積之 2 倍各爲 $a\alpha$, $-b\beta$, $-c\gamma$. 故仍得

$$a\alpha+b\beta+c\gamma=2\Delta.$$

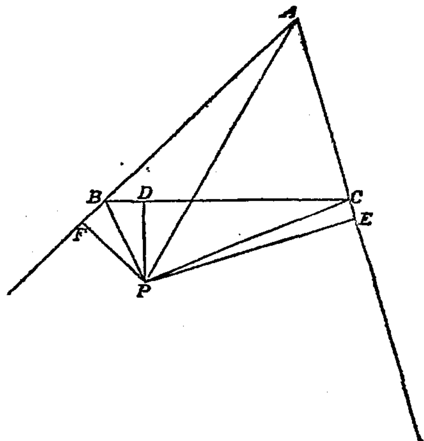


圖 2

是以不論 P 點在何位置,上式恆眞.

利用此式,則任何方程式,可用其點之三位標表之,成爲齊次式.在尋常之位標系中,任何軌跡,可用其點之兩位標之關係,以式表之.設將其式中之項,各以 $\dfrac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{2\Delta}$ 之相當次方乘之,則可化成 α, β, γ 之齊次式矣.如方程式

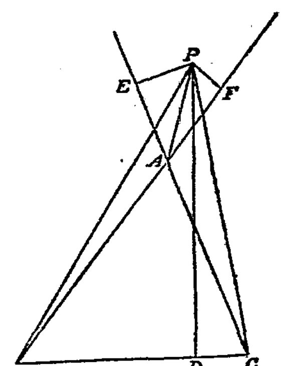


圖 3

$$\beta^2+h\gamma^2+k^2=0$$

與　$4\Delta^2\beta^2+2\Delta h\gamma(a\alpha+b\beta+c\gamma)+k^2(a\alpha+b\beta+c\gamma)^2=0,$

實二而一者也.

下列諸例,可增益讀者對於此種位標系之認識。

1. 試證: BC 線上中點之位標爲 $0, \frac{\Delta}{b}, \frac{\Delta}{c}$.

2. 基本三角形之外接圓心爲 $R\cos A, R\cos B, R\cos C,$

$$R=\frac{2\Delta}{a\cos A+b\cos B+c\cos C}.$$

3. 內切圓心之位標皆爲 $\frac{2\Delta}{a+b+c}$.

三傍切圓心之位標爲何?

4. 基本三角形之重心爲 $\frac{2\Delta}{3a}, \frac{2\Delta}{3b}, \frac{2\Delta}{3c}$.

5. 試證: $\alpha\cdot\sin A+\beta\cdot\sin B+\gamma\cdot\sin C=\frac{\Delta}{R}$, R 爲外接圓之半徑.

3. 試以兩定點之位標表其間之距離.

設 $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ 及 $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ 爲兩定點之位標, r 爲其距離,則 r^2 必爲 $\alpha_1-\alpha_2, \beta_1-\beta_2, \gamma_1-\gamma_2$ 之二次有理整函數*.

---

* 可證之如下: 命 P, Q 爲兩定點. 聯 PQ, 並作 $PM, QM'\perp AB$; 作 $PN, QN'\perp AC$. 作 $Qm\perp PM$, $Qn\perp PN$. 聯 mn.

又因
$$a\alpha_1+b\beta_1+c\gamma_1=2\,\Delta,$$
$$a\alpha_2+b\beta_2+c\gamma_2=2\,\Delta.$$
$$\therefore\quad a(\alpha_1-\alpha_2)+b(\beta_1-\beta_2)+c(\gamma_1-\gamma_2)=0.$$
$$\therefore\quad (\alpha_1-\alpha_2)^2=-\frac{c}{a}(\gamma_1-\gamma_2)(\alpha_1-\alpha_2)-\frac{b}{a}(\alpha_1-\alpha_2)(\beta_1-\beta_2).$$

同理，可得 $(\beta_1-\beta_2)^2$ 及 $(\gamma_1-\gamma_2)^2$ 之類似之式。

故 r^2 呈如下之形：

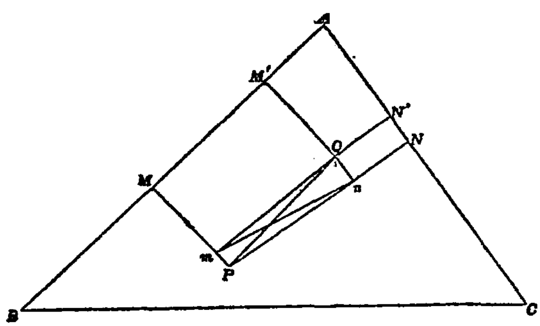


圖 4

則
$$r=PQ=\frac{mn}{\sin mPn}=\frac{mn}{\sin A},$$
且
$$Pn=\beta_1-\beta_2,\ Pm=\gamma_1-\gamma_2.$$
$$\therefore\quad \overline{mn}^2=(\beta_1-\beta_2)^2+(\gamma_1-\gamma_2)^2+2(\beta_1-\beta_2)(\gamma_1-\gamma_2)\cos A.$$
故
$$r^2=\frac{(\beta_1-\beta_2)^2+(\gamma_1-\gamma_2)^2+2(\beta_1-\beta_2)(\gamma_1-\gamma_2)\cos A}{\sin^2 A},$$
即二次之有理整函數也。

$$l(\beta_1-\beta_2)(\gamma_1-\gamma_2)+m(\gamma_1-\gamma_2)(\alpha_1-\alpha_2)$$
$$+n(\alpha_1-\alpha_2)(\beta_1-\beta_2),$$

其中之 l, m, n 爲 a, b, c 之函數，如下定之.

因 $l, m\ n$ 之值，與此兩定點之位置無關；故設此兩點爲 B 及 C，則

$$\alpha_1=0,\ \beta_1=\frac{2\Delta}{b},\ \gamma_1=0;$$

$$\alpha_2=0,\ \beta_2=0,\ \gamma_2=\frac{2\Delta}{c}.$$

且 $r=a$. 故

$$a^2=-l\cdot\frac{2\Delta}{b}\cdot\frac{2\Delta}{c}.$$

$$\therefore\quad l=-\frac{a^2bc}{4\Delta^2}.$$

同理，
$$m=-\frac{ab^2c}{4\Delta^2},$$

$$n=-\frac{abc^2}{4\Delta^2}.$$

故

$$r^2=-\frac{abc}{4\Delta^2}[a(\beta_1-\beta_2)(\gamma_1-\gamma_2)+b(\gamma_1-\gamma_2)(\alpha_1-\alpha_2)$$
$$+c(\alpha_1-\alpha_2)(\beta_1-\beta_2)].$$

此爲 r^2 之一式. 同法，可證得

$$r^2=\frac{abc}{4\Delta^2}[a\cos A(\alpha_1-\alpha_2)^2+b\cos B(\beta_1-\beta_2)^2$$
$$+c\cdot\cos C(\gamma_1-\gamma_2)^2].$$

4. 茲進而探求直線之方程式. 先就與基本三角形有切要之關係者論之.

求過基本三角形之一角頂, 且平分其對邊之直線之方程式.

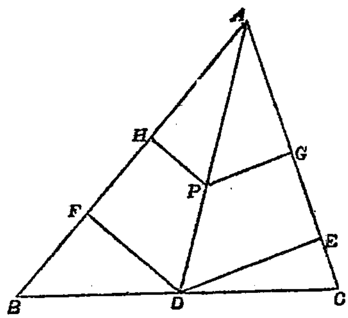


圖 5

命 D 爲 BC 之中點. 取 AD 線上之任一點 P, 並設其位標爲 α, β, γ. 由 D 及 P 各作 $DE, PG \perp AC, DF$; 作 $PH \perp AB$, 則由相似三角形之關係, 得

$$PG : DE :: PH : DF.$$

但 $DE \cdot AC$ 及 $DF \cdot AB$ 皆爲三角形 ABC 之面積之式,

故 $$DE \cdot AC = DF \cdot AB.$$

因之, $$PG \cdot AC = PH \cdot AB,$$

或 $$b\beta = c\gamma.$$

此式表示 AD 線上任何點之位標之關係，故卽爲 AD 之方程式矣。

系 由是可證知，由三角形三角頂至各對邊中點之線，相交於一點。蓋此三線之方程式爲

$$b\beta=c\gamma,$$

$$c\gamma=a\alpha,$$

$$a\alpha=b\beta.$$

故相遇於此點 $\quad a\alpha=b\beta=c\gamma.$

下列三命題，讀者可參照圖 5，自作圖示之。

5. 求過基本三角形之一角頂，且垂直於對邊之直線之方程式.

作與前題相似之圖，則可知

$$\frac{DE}{AD}=\sin DAE=\cos C,$$

$$\frac{DF}{AD}=\sin DAF=\cos B.$$

$$\therefore\quad \frac{DE}{\cos C}=\frac{DF}{\cos B}.$$

故
$$\frac{PG}{\cos C}=\frac{PH}{\cos B}.$$

$$\therefore\quad PG\cos B=PH\cos C,$$

或 $$\beta\cos B=\gamma\cos C.$$

卽過 A 點且垂直於 BC 之直線之方程式也。

系　由是可證過三角頂且垂直於各對邊之三直線，相交於一點，由下式定之：$\alpha\cos A=\beta\cos B=\gamma\cos C$.

6. 求基本三角形之內外角之平分線之方程式.

作同上之圖，就 A 之內角平分線視之，得

$$PG=PH.$$

故可以方程式 $\beta=\gamma$ 表之。

就其外角之平分線視之，設 Q 爲此線上之任一點，其位標爲 α,β,γ. 作 $QK\perp AC$, $QL\perp AB$, 則得

$$QK=QL.$$

但若 Q,B 同在 AC 之一側，則 Q,C 必各在 AB 之異側。反之亦然。故若 $$QK=\beta,$$

則 $$QL=-\gamma.$$

因之，得 $$\beta+\gamma=0,$$

爲 A 之外角平分線之方程式。

由諸方程式之形研究之，可見 (1) 三角形三內角之平分線相交於一點；(2) 一內角及他兩外角之平分線，亦相交於一點。

此四點各爲內切圓及傍切圓之圓心.

此後將證明：三角形三外角之平分線與其各對邊之交點，在同一直線上；又，任一外角之平分線及他兩內角之平分線與其各對邊之交點，亦在同一直線上.

7. 今更進而研究任何直線之通式.

凡直線皆可以一次方程式表之.

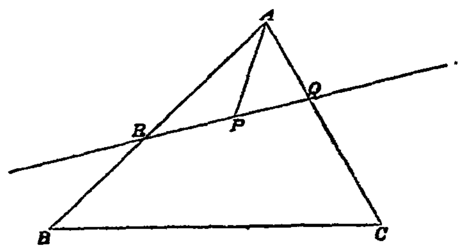


圖 6

設 Q 爲 AC 線上之一點；R 爲 AB 線上之一點. 並設 P 爲 QR 線上之任一點. 今就 P 點之位標間之關係研究之.

先述此直線之一性質，爲吾人研究時所依據者，卽：此直線爲一動點之軌跡,移動時能使兩三角形 PAQ 及 PAR 之面積之和恆爲一定值者.

命 $AQ=q, AR=r$；則兩三角形 PAQ, PAR 之面積各

爲 $\frac{1}{2}q\beta$ 及 $\frac{1}{2}r\gamma$；而 QAR 之面積爲 $\frac{qr}{bc}\Delta$.

故
$$q\beta+r\gamma=\frac{2\,qr}{bc}\Delta$$
$$=\frac{qr}{bc}(a\alpha+b\beta+c\gamma).$$

此爲直線 QR 之方程式．因此式含兩任意常數 q 及 r，故可謂爲含兩變數之一次方程式之通式。設命

$$\frac{qra}{bc}=l,\quad \frac{qr}{c}-q=m,\quad \frac{qr}{b}-r=n;$$

則此方程式可書爲

$$l\alpha+m\beta+n\gamma=0.$$

8. 次證其逆理：凡一次方程式必表一直線。

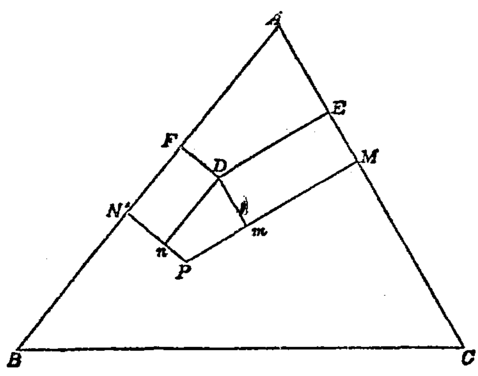


圖 7

設 $$l\alpha+m\beta+n\gamma=0$$

爲一次方程式之通式．並設 f, g, h 爲其軌跡上某定點 D 之位標；α, β, γ 爲任一點 P 之位標．

作 $DE, PM \perp AC$；$DF, PN \perp AB$. 並作 $Dm \perp PM$；作 $Dn \perp PN$，則

$$Pm=\beta-g, \quad Pn=\gamma-h.$$

因 f, g, h 爲此軌跡上之一點，故

$$lf+mg+nh=0.$$

因得 $$l(\alpha-f)+m(\beta-g)+n(\gamma-h)=0.$$

又 $$a\alpha+b\beta+c\gamma=2\Delta,$$

$$af+bg+ch=2\Delta.$$

$$\therefore \quad a(\alpha-f)+b(\beta-g)+c(\gamma-h)=0.$$

$$\therefore \quad \frac{\alpha-f}{bn-cm}=\frac{\beta-g}{cl-an}=\frac{\gamma-h}{am-bl}.$$

是卽不論 P 爲此軌跡上之任何點，$Pm : Pn$ 之値，恆爲一定．但此事實，僅以此軌跡爲一直線時爲眞．故本定理因得證明如上．

9. 求兩已知直線之交點之位標．

設兩直線之方程式爲

$$l\alpha+m\beta+n\gamma=0$$

及　$$l'\alpha+m'\beta+n'\gamma=0.$$

相交時，則得

$$\frac{\alpha}{mn'-m'n}=\frac{\beta}{nl'-n'l}=\frac{\gamma}{lm'-l'm}.$$

將此式與　$a\alpha+b\beta+c\gamma=2\Delta$

聯立解之，則得其交點之位標 α, β, γ 矣。

10. 求過兩定點之直線之方程式。

設 f, g, h; f', g', h' 爲兩定點之位標。並設所求之方程式爲　$$L\alpha+M\beta+N\gamma=0,$$

則有次之關係：

$$Lf+Mg+Nh=0,$$

$$Lf'+Mg'+Nh'=0.$$

因之，得

$$\frac{L}{gh'-g'h}=\frac{M}{hf'-h'f}=\frac{N}{fg'-f'g}.$$

故得所求之方程式爲

$$(gh'-g'h)\alpha+(hf'-h'f)\beta+(fg'-f'g)\gamma=0$$

11. 求過兩定線之交點之直線方程式。

設兩定線之方程式爲

$$l\alpha+m\beta+n\gamma=0$$

及 $$l'\alpha+m'\beta+n'\gamma=0;$$

則凡過其交點之直線，皆可用下式

$$l\alpha+m\beta+n\gamma+k(l'\alpha+m'\beta+n'\gamma)=0$$

表之．蓋凡能同時適合兩定線之方程式之値，亦必能適合此式．且此式爲一次之方程式，故必表一直線，過兩定線之交點．式中之 k 爲一任意之常數．

12. 求三定點共線之條件．

設 $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ 及 $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ 爲三定點之位標．若此三點共線，命此線之方程式爲

$$\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma=0;$$

則得

$$\lambda\alpha_1+\mu\beta_1+\nu\gamma_1=0,$$

$$\lambda\alpha_2+\mu\beta_2+\nu\gamma_2=0,$$

$$\lambda\alpha_3+\mu\beta_3+\nu\gamma_3=0.$$

由十字乘法 (cross multiplication)，以消去 λ, μ, ν，得

$$\alpha_1\beta_2\gamma_3-\alpha_1\beta_3\gamma_2+\alpha_2\beta_3\gamma_1-\alpha_2\beta_1\gamma_3+\alpha_3\beta_1\gamma_2-\alpha_3\beta_2\gamma_1=0,$$

即所求之條件也．

13. 求三定線共點之條件．

設三定線之方程式爲

$$l_1\alpha+m_1\beta+n_1\gamma=0,$$

$$l_2\alpha+m_2\beta+n_2\gamma=0,$$

$$l_3\alpha+m_3\beta+n_3\gamma=0.$$

若此三線相交於一點，則上之三式必能以同一組之 α, β, γ 之值適合之. 今就此三式聯立解之. 由十字乘法消去 α, β, γ, 得

$$l_1m_2n_3-l_1m_3n_2+l_2m_3n_1-l_2m_1n_3+l_3m_1n_2-l_3m_2n_1=0,$$

爲所求之條件.

三線共點之條件及三點共線之條件，二者呈相似之形. 宜注意之. 至其幾何上之意義，待後示之.

此後研究時，將以稱爲直線 $l\alpha+m\beta+n\gamma=0$ 者，以直線 (l, m, n) 代之. 如是，則三點 (l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2), (l_3, m_3, n_3) 共線之條件與三線 (l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2) 及 (l_3, m_3, n_3) 共點之條件相同.

14. 求兩直線互相平行之條件.

設兩直線之方程式爲

$$l\alpha+m\beta+n\gamma=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

及

$$l'\alpha+m'\beta+n'\gamma=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

命 (f, g, h) 及 (α, β, γ) 爲 (1) 線上之任何兩點; (f', g', h') 及 $(\alpha', \beta', \gamma')$ 爲 (2) 線上之任何兩點.

則此兩線互相平行之條件爲

$$\frac{\alpha-f}{\alpha'-f'}=\frac{\beta-g}{\beta'-g'}=\frac{\gamma-h}{\gamma'-h'}.$$

由 § 8 之圖 7 之結果，得

$$\frac{\alpha-f}{bn-cm}=\frac{\beta-g}{cl-an}=\frac{\gamma-h}{am-bl},$$

$$\frac{\alpha'-f'}{bn'-cm'}=\frac{\beta'-g'}{cl'-an'}=\frac{\gamma'-h'}{am'-bl'}.$$

故所求之平行條件爲

$$\frac{bn-cm}{bn'-cm'}=\frac{cl-an}{cl'-an'}=\frac{am-bl}{am'-bl'}\quad\cdots\cdots\cdots(3)$$

此兩式實等於一式，蓋可書爲

$$\frac{\dfrac{n}{c}-\dfrac{m}{b}}{\dfrac{n'}{c}-\dfrac{m'}{b}}=\frac{\dfrac{l}{a}-\dfrac{n}{c}}{\dfrac{l'}{a}-\dfrac{n'}{c}}=\frac{\dfrac{m}{b}-\dfrac{l}{a}}{\dfrac{m'}{b}-\dfrac{l'}{a}},$$

而其中任何兩式之等式，已隱含其第三式矣.

(3)式中之各式之分子，分母，各以 l', m', n' 乘之；再相加，則得其條件如下：

$$(mn'-m'n)a+(nl'-n'l)b+(lm'-l'm)c=0\cdots\cdots(4)$$

此卽兩線平行之必須條件也. 於應用上爲最便利之一式. 其他之一式如

$$(mn'-m'n)\sin A+(nl'-n'l)\sin B+(lm'-l'm)\sin C=0$$

效用相埒.間或用之.

讀者注意：兩線平行之條件式 (4), 與由下列三式

$$l\alpha+m\beta+n\gamma=0,$$

$$l'\alpha+m'\beta+n'\gamma=0,$$

$$a\alpha+b\beta+c\gamma=0$$

消去 α, β, γ 之後所得之結果同.

但此中最後之一式,與 § 2 之 $a\alpha+b\beta+c\gamma=2\Delta$ 衝突.故不論 α, β, γ 之值如何,無有能適合之者.故可視 (4) 式爲表示兩方程式

$$l\alpha+m\beta+n\gamma=0$$

及 $$l'\alpha+m'\beta+n\gamma=0$$

無公解之事實.換言之,卽此兩方程式所代表之二直線不能相交也.此爲兩線平行之必須條件.又因此兩直線係在同一平面上,故又爲充分之條件.

吾人雖不能求得 α, β, γ 之值以適合

$$a\alpha+b\beta+c\gamma=0$$

之式,但恆可令 $l:m:n$ 之值,漸近於 $a:b:c$ 使

$$l\alpha+m\beta+n\gamma=0$$

之一式得以適合.

由 § 7, 命直線 (l, m, n) 交 AC 及 AB 之點至 A 之距離各為 q, r; 則

$$\frac{qra}{bc}=l, \quad \frac{qr}{c}-q=m, \quad \frac{qr}{b}-r=n.$$

因之 $$\frac{b}{a}-\frac{bc}{ar}=\frac{m}{l}, \quad \frac{c}{a}-\frac{bc}{aq}=\frac{n}{l};$$

或 $$\frac{c}{r}=1-\frac{am}{bl}, \quad \frac{b}{q}=1-\frac{an}{cl}.$$

故若使 $l:m:n$ 漸近於 $a:b:c$, 則可使 q, r 之值隨意增大. 換言之, 卽可隨意移動直線 (l, m, n) 至距基本三角形於任何遠之處. 故當 $l:m:n$ 漸次趨近以至於密合於 $a:b:c$ 時, 此直線 (l, m, n) 所趨, 以至於疊合時之極限之位置, 為一直線在無窮遠處.

如此情形, 恆謂此方程式

$$a\alpha+b\beta+c\gamma=0,$$

或 $$\alpha\cdot\sin A+\beta\cdot\sin B+\gamma\cdot\sin C=0$$

代表無窮遠線 (line at infinity).

採此語法, 甚為便利. 且此規約如能淸晰明瞭之, 則亦毫無阻礙. 但讀者宜注意一事. 卽此方程式

$$a\alpha+b\beta+c\gamma=0$$

自身，實不能存在。祇能視之爲一極限之式耳。

15. 求過一定點且平行於一定線之直線之方程式。

設定線爲 (l, m, n)，定點爲 (f, g, h)；則所求之直線之方程式爲

$$\frac{l\alpha+m\beta+n\gamma}{lf+mg+nh}=\frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{af+bg+ch}.$$

蓋此直線通過定點(f, g, h)且不與定線(l, m, n)相交也。苟相交，則必得 $a\alpha+b\beta+c\gamma=0$ 矣。

又因 $af+bg+ch=2\Delta$，故此式又可書爲

$$l\alpha+m\beta+n\gamma=\frac{lf+mg+nh}{2\Delta}(a\alpha+b\beta+c\gamma).$$

系 凡平行於定線 (l, m, n) 之直線，其方程式爲

$$l\alpha+m\beta+c\gamma=k(a\alpha+b\beta+c\gamma),$$

k 爲任意常數。

16. 求過基本三角形之一角頂之直線與兩夾邊之傾角 (inclination).

設直線 AP 之方程式爲

$$\mu\beta=\nu\gamma.$$

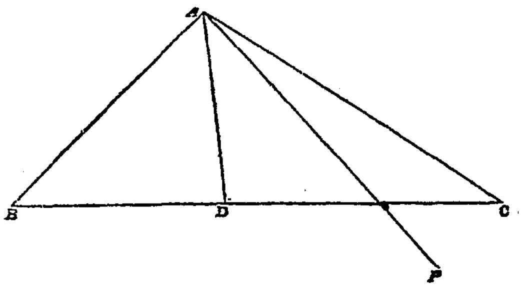


圖 8

命 θ 爲 AP 與 A 角之平分線 AD 之傾角。

則
$$\frac{\sin\left(\frac{A}{2}+\theta\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}-\theta\right)}=\frac{\gamma}{\beta}=\frac{\mu}{\nu}.$$

故
$$\frac{\tan\theta}{\tan\frac{A}{2}}=\frac{\mu-\nu}{\mu+\nu}.$$

$$\therefore\quad \tan\left(\theta+\frac{A}{2}\right)=\frac{\left(1+\frac{\mu-\nu}{\mu+\nu}\right)\tan\frac{A}{2}}{1-\frac{\mu-\nu}{\mu+\nu}\cdot\tan^2\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{\mu\sin A}{\nu+\mu\cos A}.$$

同理，
$$\tan\left(\theta-\frac{A}{2}\right)=-\frac{\nu\sin A}{\mu+\nu\cos A}.$$

由此兩式，則直線 AP 與 AB 及 AC 之傾角可定矣。

17. 求兩直線互相垂直之條件。

設兩直線爲 (l,m,n) 及 (l',m',n'). 過 A 點作兩線各平行於此兩已知線,則其方程式爲

$$(ma-lb)\beta+(na-lc)\gamma=0$$

及
$$(m'a-l'b)\beta+(n'a-l'c)\gamma=0,$$

且亦互相垂直.

設 θ,θ' 各爲此兩線與 A 角平分線之傾角,則由前節之結果,得

$$\tan\theta=\frac{(lc-na)-(ma-lb)}{(lc-na)+(ma-lb)}\cdot\tan\frac{A}{2},$$

$$\tan\theta'=\frac{(l'c-n'a)-(m'a-l'b)}{(l'c-n'a)+(m'a-l'b)}\cdot\tan\frac{A}{2}.$$

垂直時,則　$1+\tan\theta\cdot\tan\theta'=0.$

故得

$$(lc-na)(l'c-n'a)+(ma-lb)(m'a-l'b)$$
$$+[(lc-na)(m'a-l'b)+(ma-lb)(l'c-n'a)]\cos A$$
$$=0.$$

$$\therefore\quad ll'(b^2+c^2-2bc\cos A)+mm'a^2+nn'a^2$$
$$-(mn'+m'n)\cos A\cdot a^2-(nl'+n'l)(ac-ab\cos A)$$
$$-(lm'+l'm)(ab-ac\cos A)=0.$$

但　$b^2+c^2-2bc\cos A=a^2$, $c-b\cos A=a\cos B$,

$$b-c\cos A=a\cos C;$$

故上式成爲

$$ll'+mm'+nn'-(mn'+m'n)\cos A$$

$$-(nl'+n'l)\cos B-(lm'+l'm)\cos C=0,$$

卽所求之條件也.

18. 求一定點至一定線之垂距.

設 (f, g, h) 爲定點,直線 (l, m, n) 爲定線. 命 q, r 各爲由 A 至已知線與 AB, AC 之交點間之線段,則由 § 7,

$$\frac{1}{q}=\frac{1}{b}-\frac{na}{lbc},$$

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{c}-\frac{ma}{lbc}.$$

命 α' 爲由定點 (f, g, h) 至定線 (l, m, n) 之垂距, 則

$$(q^2+r^2-2qr\cos A)^{\frac{1}{2}}\cdot\alpha'+qg+rh=\frac{qr}{bc}(af+bg+ch),$$

或

$$\left(\frac{1}{q^2}+\frac{1}{r^2}-\frac{2\cos A}{qr}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\alpha'=\frac{af+bg+ch}{bc}-\frac{g}{r}-\frac{h}{q}$$

$$=\frac{a}{bc}\cdot f+\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{r}\right)g+\left(1-\frac{1}{q}\right)h$$

$$=\frac{a}{lbc}(lf+mg+nh).$$

又由 q, r 之值,得

$$\frac{1}{q}-\frac{\cos A}{r}=\frac{1}{b}-\frac{\cos A}{c}-(n-m\cos A)\frac{a}{lbc}.$$

同理，$\dfrac{1}{r}-\dfrac{\cos A}{q}=\dfrac{a(l\cos C+n\cos A-m)}{lbc}.$

$$\therefore\ \frac{1}{q^2}+\frac{1}{r^2}-\frac{2\cos A}{qr}$$

$$=\Big[\frac{a}{l^2b^2c^2}(lc-na)(l\cos B+m\cos A-n)$$

$$+(lb-ma)(l\cos C+n\cos A-m)\Big]$$

$$=\frac{a}{l^2b^2c^2}[l^2(c\cos B+b\cos C)+m^2a+n^2a$$

$$-2mna\cos A-nl(c+a\cos B-b\cos A)$$

$$-lm(b-c\cos A+a\cos C)].$$

化簡之爲

$$\frac{a^2}{l^2b^2c^2}(l^2+m^2+n^2-2mn\cos A-2nl\cos B-2lm\cos C).$$

故

$$\alpha'=\pm\frac{lf+mg+nh}{(l^2+m^2+n^2-2mn\cos A-2nl\cos B-2lm\cos C)^{\frac{1}{2}}}.$$

若定點 (f, g, h) 在定線 (l, m, n) 上，則上式之分子爲零，是亦理應如是.

自此式研究之，若 $l:m:n$ 愈趨近於 $a:b:c$，則分母之值愈減小；因之，此定點至定線之距離愈大．此又與

§ 14 所述之情形脗合。

習題

1. 求聯結基本三角形任何兩邊中點之線。次證明此線必平行於第三邊。

2. 求過基本三角形之各角頂，且各垂直於三定線

$$\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}=0,\quad \frac{\gamma}{c}+\frac{\alpha}{a}=0,\quad \frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}=0$$

之三直線之方程式。並證此三線相交於一點。

3. 設θ為兩定線 (l, m, n) 及 (λ, μ, ν) 之交角，試證

$$\cot\theta=\frac{l\lambda+m\mu+n\nu-(m\nu+n\mu)\cos A-(n\lambda+l\nu)\cos B-(l\mu+m\lambda)\cos C}{(m\nu-n\mu)\sin A+(n\lambda-l\nu)\sin B+(l\mu-m\lambda)\sin C}.$$

4. 以三角形 ABC 之三邊為相當邊，作相似三角形：$A'BC$, $AB'C$, ABC'. 使角 $BA'C=B'AC=BAC'$；角 $CB'A=C'BA=CBA'$；角 $AC'B=A'CB=ACB'$. 試證 AA', BB', CC' 相交於一點。

5. 試證：聯三角形 ABC 之內心至 BC 中點之線，必平行於聯 A 點至 BC 及 AB, AC 之延長線上之傍切圓心之線。

6. 於三角形 ABC 之三邊上 BC, CA, AB 各取兩點

B_1, C_1; C_2, A_2; A_3, B_3. 使 LC 與 B_3C_2 之交點，CA 與 C_1A_3 之交點；AB 與 A_2B_1 之交點三者共線．設 BC_2, CB_3 相交於 L；CA_3 與 AC_1 交於 M；AB_1, BA_2 交於 N；則 AL, BM, CN 相交於一點．證之．

7. 由三角形 ABC 之三角頂作三共點線 AP, BQ, CR；及三共點線 AP', BQ', CR'. P, P' 在 BC 線上；Q, Q' 在 CA 線上；R, R' 在 AB 線上．命 BQ, CR 各交 AP' 於 D_1, D_2; CR, AP 各交 BQ' 於 E_1, E_2; AP, BQ 各交 CR' 於 F_1, F_2; CD_1, BD_2 相交於 L; AE_1, CE_2 交於 M; BF_1, AF_2 交於 N. 則 AL, BM, CN 相交於一點．證之．

非調和比或複比
Anharmonic Ratio

19. 茲就複比及調和比之性質，簡略述之．蓋此項概念之知識，對於高等幾何之研究，甚有裨益也．

定義 1. 設四直線 OP, OQ, OR, OS 相交於 O 點，則稱下比

$$\frac{\sin POQ\cdot\sin ROS}{\sin POS\cdot\sin QOR}$$

為此束線 OP, OQ, OR, OS 之非調和比或複比，以

$\{O\cdot PQRS\}$* 表之.

定義 2. 設P, Q, R, S爲一直線上之四點，則稱

$$\frac{PQ\cdot RS}{PS\cdot QR}$$

爲此列點P, Q, R, S之複比. 以$[PQRS]$表之.

用此表記法時，宜注意諸線或諸點間之次序. 例如OP, OR, OQ, OS之複比，與OP, OQ, OR, OS之複比不同. 前者之複比爲$\frac{\sin POR\cdot\sin QOS}{\sin POS\cdot\sin QOR}$，後者爲

$$\frac{\sin POQ\cdot\sin ROS}{\sin POS\cdot\sin QOR}.$$

定義 3. 設若干共點線被另一直線所截，則稱此直線爲截線 (transversal).

20. 命題 設四直線相交O點，而被一截線截於P, Q, R, S；則束線OP, OQ, OR, OS之複比與列點P, Q, R, S之複比相等.

因 $$\frac{\sin POQ}{\sin POS}=\frac{\sin POQ}{\sin OPQ}\cdot\frac{\sin OPS}{\sin POS}=\frac{PQ}{OQ}\cdot\frac{OS}{PS},$$

而 $$\frac{\sin ROS}{\sin QOR}=\frac{\sin ROS}{\sin ORS}\cdot\frac{\sin ORQ}{\sin QOR}=\frac{RS}{OS}\cdot\frac{OQ}{QR}.$$

---

* 此符號似爲 Salmon 氏所創用者，見其所著之 Conic Sections (第六版) 第 297 頁.

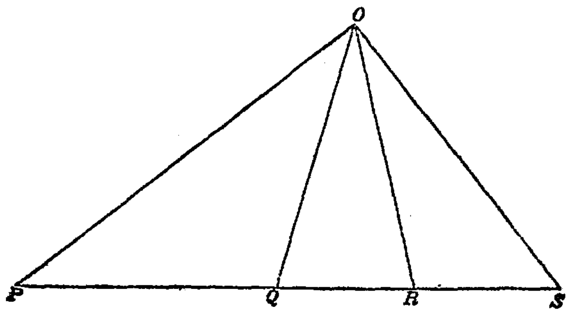


圖 9

$$\therefore\quad \frac{\sin POQ}{\sin POS}\cdot\frac{\sin ROS}{\sin QOR}=\frac{PQ\cdot RS}{PS\cdot QR}.$$

系 1. 由上之命題，可知若一束線被兩截線截於 P, Q, R, S 及 P', Q', R', S'；則兩列點 P, Q, R, S 及 P', Q', R', S 之複比相等. 蓋各等於束線 OP, OQ, OR, OS 之複比也.

系 2. 設聯結直線上之四點 P, Q, R, S 至線外兩點 O, O'，則所成兩束線 OP, OQ, OR, OS 及 $O'P, O'Q, O'R, O'S$ 之複比相等；蓋各等於列點 $PQRS$ 之複比也.

21. **定義** 若一束線之複比之值為 1 者，則稱之為調和束線 (harmonic pencil).

若一列點之複比爲 1 者，則此列點稱爲調和列點 (harmonic range). 而謂此列點所在之直線被諸點調和分割.

由前所示，可知若一調和束線被一截線所截，則諸交點成一調和列點. 又，聯一點至一調和列點之四直線必成一調和束線.

調和束線中，OS 稱爲 OP, OQ, OR 之第四調和線；而稱 S 爲調和列點中 P, Q, R 之第四調和點.

"調和"之稱，由於調和級數之性質. 蓋如 P, Q, R, S 成一調和列點，則如定義云云，PR 必爲 PQ 及 PS 的調和中項 (harmonic mean) 也.

因 $$PQ\cdot RS = PS\cdot QR.$$

$$\therefore\quad PQ(PS-PR) = PS(PR-PQ).$$

$$\therefore\quad PQ : PS = PR-PQ : PS-PR.$$

是即 PQ, PR, PS 成一調和級數也.

由此比例式，可見若 $PQ=QR$，則 $PS=\infty$. 故若 Q 爲 PR 之中點，則其第四調和點在無窮遠處. 或如下述之：若 Q 爲 PR 之中點，聯 P, Q, R 至其線外之任一點 O，則所成之束線，其第四調和線必平行於截線 PQR.

22. **命題**　兩直線及其交角之內外平分線，必成一調和束線。

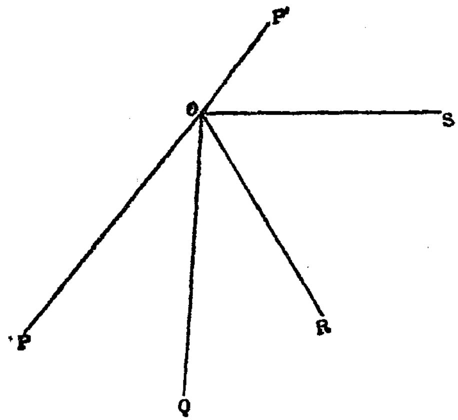


圖 10

設角 POR 之平分線爲 OQ. 引長 PO 至 P'；並設 OS 爲角 $P'OR$ 之平分線，則

$$\sin POQ = \sin QOR,$$

$$\sin POS = \sin P'OS$$

$$= \sin ROS.$$

$$\therefore \quad \frac{\sin POQ \cdot \sin ROS}{\sin POS \cdot \sin QOR} = 1.$$

本命題因此以證實。

23. 命題 設 ABC 為基本三角形，AD, AE 兩直線之方程式為

$$\beta-k\gamma=0,\ \beta+k'\gamma=0,$$

則此束線 AB, AD, AC, AE 之複比等於 $\frac{k'}{k}$.

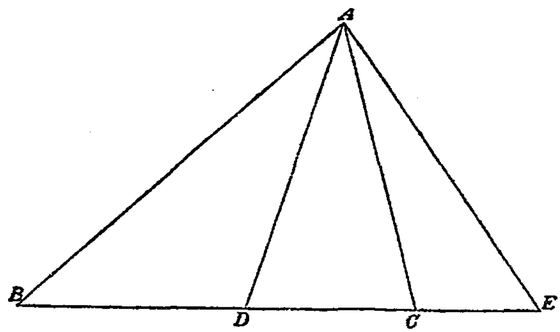


圖 11

設 BC 交 AD, AE 於 D, E；則因 D 為 $\beta-k\gamma=0$ 線上之點，故

$$\frac{BD}{CD}=\frac{\Delta ABD}{\Delta ACD}=\frac{c\gamma}{b\beta}=\frac{c}{bk}.$$

又因 E 為 $\beta+k'\gamma=0$ 線上之點，故

$$\frac{BE}{CE}=\frac{\Delta ABE}{\Delta ACE}=\frac{c\gamma}{-b\beta}=\frac{c}{bk'}.$$

$$\therefore\quad \frac{BD\cdot CE}{BE\cdot CD}=\frac{k'}{k}.$$

即 k, k' 爲列點 B, D, C, E 之複比；亦卽束線 AB, AD, AC, AE 之複比也。

系　此四直線 $\beta=0, \beta-k\gamma=0, \gamma=0, \beta+k\gamma=0$ 成一調和束線。

24.　由上之結果，可得求三定線之第四調和線之幾何作圖法如下：

設 AB, AD, AC 爲三共點線.求作一線 AE 使 AB, AD, AC, AE 成一調和束線。

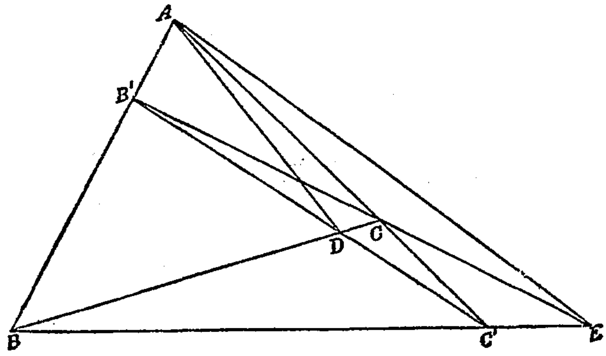


圖　12

過第二線上之任一點 D, 作兩截線 BDC 及 $B'DC'$ 交 AB 於 B 及 B'；交 AC 於 C 及 C'. 作 $B'C$ 及 BC'；並引長之，命其交點爲 E, 則 AE 爲所求之第四調和線矣。

因，取 ABC 爲基本三角形．並設直線 AD 之方程式爲 $\beta-k\gamma=0$，直線 $B'C'$ 之方程式爲 $\lambda\alpha+\beta-k\gamma=0$.

則　BC' 之方程式爲　$\lambda\alpha-k\gamma=0$,

　　$B'C$ 之方程式爲　$\lambda\alpha+\beta=0$,

　　AE 之方程式爲　$\beta+k\gamma=0$.

故　AE 即爲所求之第四調和線。

25. 設已知一三角形 ABC 及一定點 P. AD 爲 AB,

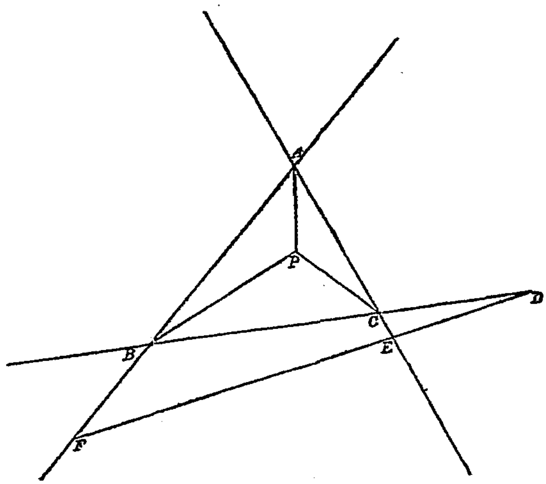


圖 13

AP, AC 之第四調和線，交 BC 於 D；BE 爲 BC, BP, BA 之第四調和線，交 CA 於 E；CF 爲 CA, CP, CB 之第四

調和線，交 AB 於 F，則 D, E, F 在同一直線上。

設 P 之位標爲 f, g, h. 則 AP 之方程式爲

$$\frac{\beta}{g}-\frac{\gamma}{h}=0.$$

因之，AD 之方程式爲

$$\frac{\beta}{g}+\frac{\gamma}{h}=0.$$

同理，BE 之方程式爲

$$\frac{\gamma}{h}+\frac{\alpha}{f}=0,$$

CF 之方程式爲

$$\frac{\alpha}{f}+\frac{\beta}{g}=0.$$

今由諸式之形，可見此直線 $\frac{\alpha}{f}+\frac{\beta}{g}+\frac{\gamma}{h}=0$ 必通過 D, E, F 三點。故知此三點共線。

系　同理，可證其逆理亦眞。

點 P 及直線 DEF，關於三角形 ABC，互稱爲調和元素。

合此定理及 §22 之定理，則可說明 §6 所述之事實。即：三角形三外角之平分線，交其各對邊之點在同一直線上；一內角及其他兩外角之平分線，交其各對邊之點，亦

同在一直線上。

此四直線之方程式各爲

$$\alpha+\beta+\gamma=0, \quad \beta+\gamma-\alpha=0,$$

$$\gamma+\alpha-\beta=0, \quad \alpha+\beta-\gamma=0.$$

應稱之性質
On Involution

26. **定義** 設 O 爲定線上之一點。在此直線上取

$$P, P', Q, Q'. R, R', \ldots\ldots$$

諸點，使 $OP \cdot OP' = OQ \cdot OQ' = OR \cdot OR' = \ldots\ldots$

$$= \text{一常數，設爲 } k^2.$$

則謂諸點$P, P', Q, Q', R, R', \ldots\ldots$構成一應稱點組 (system of points in involution).

若 $OK^2=k^2$，則稱 K 點爲此應稱點組之焦點 (focus).

設 k^2 爲正，則有兩焦點，各在 O 之異側．若 k^2 爲負(因之 k 爲虛數)，則不能得實焦點。

O 點稱爲此應稱點組之中心 (center).

如上式之關係，兩點如 P, P' 者，互稱爲共軛點 (conjugate points).

由是可知，每一焦點必爲自共軛點。中心之共軛點在無

窮遠處.又,互爲共軛之兩點,同在中心之一側,或各在中心之異側,全視乎焦點之爲實點或虛點而定.

應稱點組可由下列諸條件決定之:(1) 已知其兩交點;(2) 一焦點及中心;或 (3) 已知兩對之共軛點;如下:

設 p, p', q, q' 爲一直線上四點至同線上一任意點之距離,x 爲由中心至此任意點之距離.則由定義

$$(p-x)(p'-x)=(q-x)(q'-x).$$

$$\therefore\quad x=\frac{pp'-qq'}{p+q'-q-q'}.$$

由此則中心可定矣.

27. 命題　一直線上四點之複比,等於其共軛點之複比.

因,設 $OP=p, OQ=q, OR=r, OS=s$,

則 $$[PQRS]=\frac{(q-p)(s-r)}{(s-p)(r-q)},$$

而 $$[P'Q'R'S']=\frac{\left(\frac{k^2}{q}-\frac{k^2}{p}\right)\left(\frac{k^2}{s}-\frac{k^2}{r}\right)}{\left(\frac{k^2}{s}-\frac{k^2}{p}\right)\left(\frac{k^2}{r}-\frac{k^2}{q}\right)}$$

$$=\frac{(p-q)(r-s)}{(p-s)(q-r)}$$

$$=[PQRS].$$

系　由此可易知　$[PQRP'] = [P'Q'R'P]$.

28.　命題　任何兩共軛點與兩焦點成一調和列點.

設　K_1, K_2 爲兩交點，則

$$K_1P = p - k, \quad K_2P = p + k,$$

$$K_1P' = \frac{k^2}{p} - k, \quad K_2P' = \frac{k^2}{p} + k.$$

故　$$K_1P \cdot K_2P' = (p-k)\left(\frac{k^2}{p} + k\right) = \frac{k}{p}(p^2 - k^2),$$

$$K_1P' \cdot K_2P = \left(k - \frac{k^2}{p}\right)(k + p) = \frac{k}{p}(p^2 - k^2).$$

$$\therefore \quad K_1P \cdot K_2P' = K_1P' \cdot K_2P,$$

卽此四點成一調和列點也.

反之，設一直線上若干對之點，有次之關係：其每對之點皆與此線上之兩定點成一調和列點；則諸對之點，構成一應稱點組，以兩定點爲其焦點.

29.　相交於一點之若干直線，仍可依直線上之點之法討論之. 以各兩線間之角之正弦，代替兩點間之互相距離之關係. 由 § 20 之命題，可知設若干直線成一應稱線組，而被一直線所截，則諸交點仍成一應稱點組.

第二章

特殊之二次方程式

Special Forms of the Equation of the Second Degree

1. 今進而研究二次方程式之圖象 先證明凡二次方程式必代表一圓錐曲線.其次,在未討論二次方程式之通式之前,先就數特殊簡易之二次形研究之.

命題 凡二次方程式所表示之圖象,與一直線之交點有二.此二點爲實點,或疊合,或爲虛點.

凡二次方程式,可通用

$$u\alpha^2+v\beta^2+w\gamma^2+2u'\beta\gamma+2v'\gamma\alpha+2w'\alpha\beta=0$$

表之.欲求此方程式之圖象,與直線

$$l\alpha+m\beta+n\gamma=0$$

之交點,可先就此二式消去 α, 次由所得之二次式以定 $\dfrac{\beta}{\gamma}$ 之兩值. 此兩值或爲不等之實數,或爲相等之數, 或爲虛

數.且對於每一 $\frac{\beta}{\gamma}$ 之値,則有一 α 之値與之相當.由是可知此直線與此曲線相交於兩點——實點,密合點,或虛點.

故此圖象之性質,與用笛卡氏位標所表出者之二次方程式之圖象同.故為一圓錐曲線.

2. 次,設已知一圓錐曲線之方程式中之係數間有某種之關係,以求此圓錐曲線與基本三角形之關係.

先設 u, v, w 皆為零.

則此二次式呈 $u'\beta\gamma+v'\gamma\alpha+w'\alpha\beta=0$

之形.今改書之為 $\lambda\beta\gamma+\mu\gamma\alpha+\nu\alpha\beta=0.$

設命 $\alpha=0$*,則此式變為

$$\lambda\beta\gamma=0.$$

因之,必須 $\beta=0$ 或 $\gamma=0.$

由是,可見此曲線必過基本三角形之兩角頂 (B, C). 同理,可證此圓錐曲線亦必通過第三點.故方程式

$$\lambda\beta\gamma+\mu\gamma\alpha+\nu\alpha\beta=0,$$

或

$$\frac{\lambda}{\alpha}+\frac{\mu}{\beta}+\frac{\nu}{\gamma}=0,$$

為一外接於基本三角形之圓錐曲線.

* 蓋欲求此圓錐曲線與 BC 之交點也.

3　玆研究直線

$$\frac{\beta}{\mu}+\frac{\gamma}{\nu}=0$$

與此圓錐曲線之關係.

設命此圓錐曲線之方程式中之 $\frac{\beta}{\mu}+\frac{\gamma}{\nu}$ 等於零，卽命 $\mu\gamma+\nu\beta=0$，則此圓錐曲線之方程式成為

$$\lambda\beta\gamma=0.$$

由是可見此直線 $\frac{\beta}{\mu}+\frac{\gamma}{\nu}=0$ 與此圓錐曲線之兩交點，適卽為其與兩直線 $\beta=0$ 及 $\gamma=0$ 之兩交點也. 但此兩交點，顯見其密合. 蓋此直線通過 $\beta=0$ 與 $\gamma=0$ 之交點也. 是以知直線 $\frac{\beta}{\mu}+\frac{\gamma}{\nu}=0$ 與此圓錐曲線

$$\frac{\lambda}{\alpha}+\frac{\mu}{\beta}-\frac{\nu}{\gamma}=0,$$

相交於兩密合點，卽二者相切於 A 點也.

同理，B, C 兩點上此圓錐曲線之切線之方程式各為

$$\frac{\gamma}{\nu}+\frac{\alpha}{\lambda}=0$$

及

$$\frac{\alpha}{\lambda}-\frac{\beta}{\mu}=0.$$

4. 求此圓錐曲線之中心之位置.

過基本三角形之角頂 A, B, C 各作切線 EAF, FBD 及 DCE. 平分 AC 及 AB 於 H 及 I. 作 EH, FI; 並引長之，使相交於一點 O. 因過切線之交點且平分其切點弦 (chord of contact) 之直線，必過中心，故知 O 即圓錐曲線之中心.

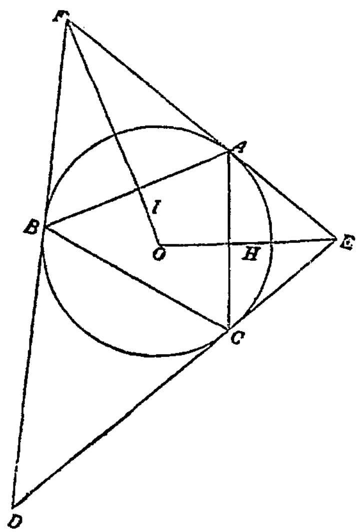


圖 14

就 E 點視之，得 $$\frac{\alpha}{\lambda}=-\frac{\beta}{\mu}=\frac{\gamma}{\nu};$$

而於 H 點，得 $$\beta=0,\ c\gamma=a\alpha.$$

故 EH 之方程式為

$$\lambda a\left(\frac{\alpha}{\lambda}+\frac{\beta}{\mu}\right)=\nu c\left(\frac{\beta}{\mu}+\frac{\gamma}{\nu}\right),$$

或 $$\frac{1}{\nu c}\left(\frac{\alpha}{\lambda}+\frac{\beta}{\mu}\right)=\frac{1}{\lambda a}\left(\frac{\beta}{\mu}+\frac{\gamma}{\nu}\right).$$

同理，FI 之方程式爲

$$\frac{1}{\lambda a}\left(\frac{\beta}{\mu}+\frac{\gamma}{\nu}\right)=\frac{1}{\mu b}\left(\frac{\gamma}{\nu}+\frac{\alpha}{\lambda}\right).$$

故於 O 點上，得

$$\frac{1}{\lambda a}\left(\frac{\beta}{\mu}+\frac{\gamma}{\nu}\right)=\frac{1}{\mu b}\left(\frac{\gamma}{\nu}+\frac{\alpha}{\lambda}\right)=\frac{1}{\nu c}\left(\frac{\alpha}{\lambda}+\frac{\beta}{\mu}\right),$$

或
$$\frac{\frac{\alpha}{\lambda}}{-\lambda a+\mu b+\nu c}=\frac{\frac{\beta}{\mu}}{\lambda a-\mu b+\nu c}=\frac{\frac{\gamma}{\nu}}{\lambda a+\mu b-\nu c}.$$

此式則可定中心之位置矣.

系　今可由是以定 λ, μ, ν 之關係，使此圓錐曲線爲一拋物線.

因拋物線之中心在無窮遠處，其位標必須適合次式

$$a\alpha+b\beta+c\gamma=0.$$

故得

$$\lambda^2a^2+\mu^2b^2+\nu^2c^2-2\mu\nu bc-2\nu\lambda ca-2\lambda\mu ab=0,$$

或其等式
$$\pm(\lambda a)^{\frac{1}{2}}\pm(\mu b)^{\frac{1}{2}}\pm(\nu c)^{\frac{1}{2}}=0,$$

此爲圓錐曲線爲一拋物線之必須且充分之條件.

5.　求一直線與此圓錐曲線相切之條件.

欲此圓錐曲線與直線 (l, m, n) 相切，則由

$$\lambda\beta\gamma+\mu\gamma\alpha+\nu\alpha\beta=0$$

及
$$l\alpha+m\beta+n\gamma=0,$$

消去 α 之後所得 $\beta:\gamma$ 之兩值必相等。

今消去 α, 得

$$-\lambda l\beta\gamma+(\mu\gamma+\nu\beta)(m\beta+n\gamma)=0.$$

由此得 $\beta:\gamma$ 兩值相等之條件為

$$4\mu n\nu m-(\mu m+\nu n-\lambda l)^2=0,$$

或 $\lambda^2l^2+\mu^2m^2+\nu^2n^2-2\mu\nu mn-2\nu\lambda nl-2\lambda\mu lm=0.$

此式又等於 $\pm(\lambda l)^{\frac{1}{2}}\pm(\mu m)^{\frac{1}{2}}\pm(\nu n)^{\frac{1}{2}}=0,$

是卽直線 (l, m, n) 與圓錐曲線 $\lambda\beta\gamma+\mu\gamma\alpha+\nu\alpha\beta=0$ 相切之條件也。

試與 §4 中之圓錐曲線為一拋物線之條件比較之。可見此拋物線能滿足切於 $a\alpha+b\beta+c\gamma=0$ 之條件.故謂凡拋物線必切於無窮遠線.

6. 求基本三角形之外接圓之方程式.

此可由外接圓心之性質推得之。蓋外接圓心之位標與 $\cos A, \cos B, \cos C$ 成比例 (見第一章 §2 下之題 2).或獨立研究之如下:

作此圓之切線 EAF, FBD, DCE; 則

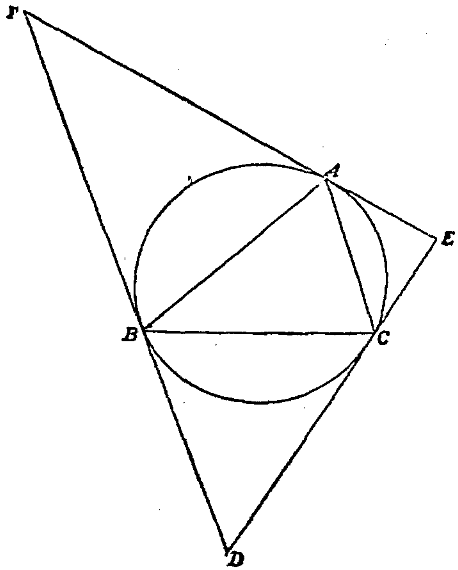


圖 15

$$角\ EAC = 角\ ABC,$$

$$角\ FAB = 角\ ACB.$$ (歐氏幾何 III,32)

故切線 EAF 之方程式爲

$$\frac{\beta}{\sin B}+\frac{\gamma}{\sin C}=0,$$

或

$$\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}=0.$$

同理,他兩切線 FBD 及 DCE 之方程式各爲

$$\frac{\gamma}{c}+\frac{\alpha}{a}=0 \text{ 及 } \frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}=0.$$

就此三式與本章§3之切線之方程式比較之，得外接圓之方程式爲

$$\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta}+\frac{c}{\gamma}=0,$$

或
$$\frac{\sin A}{\alpha}+\frac{\sin B}{\beta}+\frac{\sin C}{\gamma}=0.$$

7. 茲可進而探求與三基線相切之圓錐曲線之方程式矣.

圓錐曲線

$$u\alpha^2+v\beta^2+w\gamma^2+2u'\beta\gamma+2v'\gamma\alpha+2w'\alpha\beta=0$$

與直線 $\alpha=0$ 相切之條件爲：此式之左端，當 $\alpha=0$ 時，能成一完全平方式者. 質言之，即欲此圓錐曲線與直線 $\alpha=0$ 相切，必須

$$u'^2=vw,$$

或
$$u'=\pm(vw)^{\frac{1}{2}}.$$

同理，
$$v'=\pm(wu)^{\frac{1}{2}},$$
$$w'=\pm(uv)^{\frac{1}{2}},$$

爲此圓錐曲線切於直線 $\beta=0, \gamma=0$ 之條件.

所宜注意者，卽若此圓錐曲線切於三基線時，上列三式之符號，宜皆取其負者，或兩負而一正者．蓋非是則此圓錐曲線之方程式之左端，自成一完全平方式，此可直接代入驗知之，而此圓錐曲線縮成一直線，或兩疊合之直線矣．

茲皆取負者，並以 L^2, M^2, N^2 代替 u, v, w；則此切於三基線之圓錐曲線，其方程式成爲

$$L^2\alpha^2+M^2\beta^2+N^2\gamma^2-2MN\beta\gamma-2NL\gamma\alpha-2LM\alpha\beta=0,$$

亦卽 $$\pm(L\alpha)^{\frac{1}{2}}\pm(M\beta)^{\frac{1}{2}}\pm(N\gamma)^{\frac{1}{2}}=0.$$

由是可見點 (l, m, n) 在曲線上之條件，與線 (l, m, n) 之切於外接圓錐曲線 $L\beta\gamma+M\gamma\alpha+N\alpha\beta=0$ 之條件同．

參閱 § 5 此後將復參證之．

8.　求此圓錐曲線之中心．

命 D, E, F 各爲 BC, CA, AB 諸邊上之切點．聯 EF, FD 及 DE. 平分 FD 於 H, DE 於 I. 作 BH 及 CI；並引長之，使相交於一點 O.

則 O 爲此圓錐曲線之中心 (§ 4).

今須求 BH 及 CI 之方程式．次由其交點以定 O.

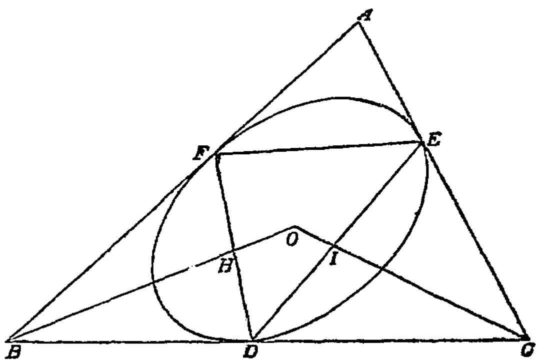


圖 16

設 f_1, g_1, h_1 為 D 點之位標，則 $f_1=0$，而 g_1, h_1 各為下式

$$M^2\beta^2+N^2\gamma-2MN\beta\gamma=0$$

中之 β 及 γ 之值.

此式化簡之為 $$M\beta-N\gamma=0.$$

又 $$b\beta+c\gamma=2\Delta,$$

故得 $$g_1=\frac{N}{Nb+Mc}\cdot 2\Delta$$

$$=\frac{\frac{1}{M}}{\frac{b}{M}+\frac{c}{N}}\cdot 2\Delta.$$

設 f_2, g_2, h_2 為 E 點之位標，則依同法，可得

$$f_2=\frac{\frac{1}{L}}{\frac{a}{L}+\frac{c}{N}}\cdot 2\Delta,\quad g_2=0.$$

今就 I 點,——因之,亦即 CI 線上之各點——視之,得

$$\frac{\alpha}{\frac{1}{2}(f_1+f_2)}=\frac{\beta}{\frac{1}{2}(g_1+g_2)}.$$

故 CI 之方程式為

$$L\alpha\left(\frac{a}{L}+\frac{c}{N}\right)=M\beta\left(\frac{b}{M}-\frac{c}{N}\right),$$

或

$$\frac{\alpha}{Nb+Mc}=\frac{\beta}{Lc+Na}.$$

同理,BH 之方程式為

$$\frac{\gamma}{Ma+Lb}=\frac{\alpha}{Nb+Mc}.$$

故於 O 點上,得

$$\frac{\alpha}{Nb+Mc}=\frac{\beta}{Lc+Na}=\frac{\gamma}{Ma+Lb}.$$

由此式與　$a\alpha+b\beta+c\gamma=2\Delta,$

則可定 O 點之位標矣.

系　由此且可得圓錐曲線為一拋物線之條件如下.

因拋物線之中心在無窮遠處,其位標必適合次之關係式

$$a\alpha+b\beta+c\gamma=0.$$

因得 $$Lbc+Mca+Nab=0,$$

或 $$\frac{L}{a}+\frac{M}{b}+\frac{N}{c}=0,$$

爲所求之條件.

參閱 § 9, 可知此與圓錐曲線切於 $a\alpha+b\beta+c\gamma=0$ 之條件相同.故復得知"凡拋物線必切於無窮遠線"之事實(§ 7)矣.

9. 求此圓錐曲線切於一已知直線之條件.

若直線 (l, m, n) 爲此圓錐曲線之切線，則消去 α 之後所得方程式中之 $\beta:\gamma$ 之二值必相等.爲簡便計,取

$$\pm(L\alpha)^{\frac{1}{2}}\pm(M\beta)^{\frac{1}{2}}\pm(N\gamma)^{\frac{1}{2}}=0,$$

爲此圓錐曲線之方程式. 由此式與 $l\alpha+m\beta+n\gamma=0$ 消去 α, 得

$$L(m\beta+n\gamma)+l\{(M\beta)^{\frac{1}{2}}\pm(N\gamma)^{\frac{1}{2}}\}^2=0,$$

或 $$(Lm+Ml)\beta+(Ln+Nl)\gamma\pm2l(MN\beta\gamma)^{\frac{1}{2}}=0.$$

視此式爲 $\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}$ 之二次式.若其兩根相等,則

$$(Lm+Ml)(Ln+Nl)-l^2MN=0,$$

或 $$Lmn+Mnl+Nlm=0.$$

此式又可書之爲

$$\frac{L}{l}+\frac{M}{m}+\frac{N}{n}=0.$$

可見直線 (l, m, n) 切於圓錐曲線

$$\pm(L\alpha)^{\frac{1}{2}}\pm(M\beta)^{\frac{1}{2}}\pm(N\gamma)^{\frac{1}{2}}=0$$

之條件與點 (l, m, n) 在此曲線上

$$\frac{L}{\alpha}+\frac{M}{\beta}+\frac{N}{\gamma}=0$$

之條件同。此結果與第一章 § 13 相類似。

10. 求切於三基線之四圓之方程式。

此可應用 § 8 之中心之式以求之。如，設問題爲：求 L, M, N 之比值，使此圓錐曲線爲一內切圓，則在此圓心上，

$$\alpha=\beta=\gamma.$$

故由 § 8 之結果，得

$$Nb+Mc=Lc+Na=Ma+Lb.$$

欲解此式，命各節之值爲 r，則得

$$\frac{M}{b}+\frac{N}{c}=\frac{r}{bc},$$

$$\frac{N}{c}+\frac{L}{a}=\frac{r}{ca},$$

$$\frac{L}{a}+\frac{M}{b}=\frac{r}{ab}.$$

就後兩式相加，並以第一式之値代入之，得

$$L=\frac{r}{2}\cdot\frac{(b+c-a)}{bc}.$$

同法以得 M, N 之式．故

$$L:M:N=\frac{b+c-a}{bc}:\frac{c+a-b}{ca}:\frac{a+b-c}{ab}$$

$$=\cos^2\frac{A}{2}:\cos^2\frac{B}{2}:\cos^2\frac{C}{2}.$$

故所求內切圓之方程式爲

$$\cos\frac{A}{2}\cdot\alpha^{\frac{1}{2}}+\cos\frac{B}{2}\cdot\beta^{\frac{1}{2}}+\cos\frac{C}{2}\cdot\gamma^{\frac{1}{2}}=0.$$

同理，三傍切圓之圓心各爲

$$-\alpha=\beta=\gamma,\ \alpha=-\beta=\gamma,\ \alpha=\beta=-\gamma$$

者，其方程式各爲

$$\cos\frac{A}{2}\cdot(-\alpha)^{\frac{1}{2}}+\sin\frac{B}{2}\cdot\beta^{\frac{1}{2}}+\sin\frac{C}{2}\cdot\gamma^{\frac{1}{2}}=0,$$

$$\sin\frac{A}{2}\cdot\alpha^{\frac{1}{2}}+\cos\frac{B}{2}(-\beta)^{\frac{1}{2}}+\sin\frac{C}{2}\cdot\gamma^{\frac{1}{2}}=0,$$

$$\sin\frac{A}{2}\cdot\alpha^{\frac{1}{2}}+\sin\frac{B}{2}\cdot\beta^{\frac{1}{2}}+\cos\frac{C}{2}(-\gamma)^{\frac{1}{2}}=0.$$

因 BC 線上之傍切圓內之點，其 α 爲負，故 $(-\alpha)^{\frac{1}{2}}$ 爲實

值.同理, $(-\beta)^{\frac{1}{2}}, (-\gamma)^{\frac{1}{2}}$ 亦皆為實值*.

11. 次所欲論者,仍為一特殊之二次式.設其中諸項 $2\beta\gamma, 2\gamma\alpha, 2\alpha\beta$ 之係數 u', v', w' 皆為零者.於是此方程式呈如下之形:

$$u\alpha^2+v\beta^2+w\gamma^2=0.$$

若此式代表一實曲線,則 $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ 之係數,不能皆同號.先設 α^2 之係數之符號,異於其餘之兩項.以 L^2, $-M^2$, $-N^2$ 代 u, v, w,則此方程式呈

$$L^2\alpha^2-M^2\beta^2-N^2\gamma^2=0$$

之形.

12. 今研究此圓錐曲線與基本三角形之關係位置.

命 $\beta=0$,則得　　$L\alpha=\pm N\gamma.$

此式之意義,可如下解釋之:聯 B 點至此圓錐曲線與 CA 之交點,得兩直線與 BC, BA 成一調和束線.

* 如化之為有理式,並將 $\frac{A}{2}, \frac{B}{2}, \frac{C}{2}$ 之正餘弦之值,以其邊之關係式表之,則得:

$$a^2(s-a)^2\alpha^2+b^2(s-b)^2\beta^2+c^2(s-c)^2\gamma^2-2bc(s-b)(s-c)\beta\gamma$$
$$-2ca(s-c)(s-a)\gamma\alpha-2ab(s-a)(s-b)\alpha\beta=0,$$

$$a^2s^2\alpha^2+b^2(s-c)^2\beta^2+c^2(a-b)^2\gamma^2-2bc(s-b)(s-c)\beta\gamma$$
$$+2cas(s-b)\gamma\alpha+2abs(s-c)\alpha\beta=0,$$

………………………………

同理,可證:聯 C 點至此圓錐曲線與 AB 之兩交點之直線,與 C ,CB 成一調和束線。

設置 $\alpha=0$,則得 $M\beta=\sqrt{(-1)}\cdot N\gamma.$

表示 BC 交此圓錐曲線於兩虛點。惟此時調和性之情形,仍能適合而存在。

13. 次求過 A, B, C 所作之切線之方程式。

設於此圓錐曲線之方程式中,命 $L\alpha=N\gamma$, 則得 $\beta=0.$ 卽此直線 $L\alpha-N\gamma=0$ 交此圓錐曲線於兩密合點也。故相切。

同理, $L\alpha+N\gamma=0, L\alpha-M\beta=0, L\alpha-M\beta=0$

亦爲此曲線之切線。

至於過 A 點所作之切線,可用下式表之:

$$M\beta=\sqrt{(-1)}N\gamma, M\beta=-\sqrt{(-1)}N\gamma,$$

此兩式顯示其切線爲虛線。卽 A 點在此圓錐曲線之凹入之部內也。

14. 因過 B 點所作之切線,交此圓錐曲線於 CA 線上之點。故 CA 卽爲切點弦。或卽 CA 爲 B 點關於此圓錐曲線之極線也 B 爲 CA 之極點。同理,C 點與 AB,關於此圓錐曲線,亦互在極對之關係位置。

又因 AB 之極點爲 C；AC 之極點爲 B. 故 BC 爲 AB 與 AC 之交點之極線. 換言之，卽 A 爲 BC 之極點，而 BC 爲 A 點之極線也.

因得結論如次：若二次方程式中不含有 $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ 之項者，則其所代表之圓錐曲線，與基本三角形有如是之關係：每一基線乃其對頂點之極線*.

此種情形，恆謂此三角形對於此圓錐曲線而言，或關於此圓錐曲線，爲自共軛三角形. 或謂其三角頂成三自共軛點.

此圓錐曲線之幾何性質，旣如上定之矣. 此後硏究時，爲保持對稱式計，特以 $-L^2$ 代 L^2, 使此圓錐曲線之方程式爲

$$L^2\alpha^2+M^2\beta^2+N^2\gamma^2=0.$$

惟須緊記，L, M, N 三者之一爲虛數.

15. 兩圓錐曲線，其方程式爲

$$L^2\alpha^2+M^2\beta^2+N^2\gamma^2=0$$

及
$$L'^2\alpha^2+M'^2\beta^2+N'^2\gamma^2=0$$

---

* 若 β^2, γ^2 之係數相等，且基本三角形之 A 角爲直角，則此方程式之形將顯示 A 點爲此曲線之焦點，BC 爲準線.

者，其間有甚切要之關係，討論於下.

此兩曲線相交於四點，或實，或虛. 先假定其四交點皆爲實點，命之爲 P, Q, R, S.

今此方程式

$$(L^2M'^2-L'^2M^2)\beta^2+(L^2N'^2-L'^2N^2)\gamma^2=0^*$$

之軌跡，顯見其通過此四點 P, Q, R, S. 而此式可分解爲兩一次因式. 故其軌跡爲兩直線.

設此兩直線爲 PQ 及 RS. 其交點隱含在此兩式中：

$$(L^2M'^2-L'^2M^2)^{\frac{1}{2}}\beta=(L'^2N^2-L^2N'^2)^{\frac{1}{2}}\gamma,$$

$$(L^2M'^2-L'^2M^2)^{\frac{1}{2}}\beta=-(L'^2N^2-L^2N'^2)^{\frac{1}{2}}\gamma.$$

由此二式，得 $\beta=0, \gamma=0$. 因知 PQ, RS 相交於 A.

同理，PR, QS 相交於 B；PS, QR 相交於 C. 是卽：設聯兩圓錐曲線之交點，則所得之直線，兩兩相交於基本三角形之三角頂. 又，設若干圓錐曲線外接於此四角形†，其對角線相交於 A，他兩對邊之延長線相交於 B, C 之時，則 A, B, C 關於諸外接圓錐曲線成一自共軛三角形. 此三點

* 此式係由上之兩式消去 α 所得者.

† 所以用四角形而不謂爲四邊形者，蓋以四角形爲由四點而成，而四邊形則係由四邊而成者，以示區別.

A, B, C 可稱爲此四角形之頂點，或此外接圓錐曲線組之頂點.

由前之研究，可知若任何兩圓錐曲線相交於四實點，則可選定一適當之基本三角形，使其方程式呈如次之形

$$L^2\alpha^2+M^2\beta^2+N^2\gamma^2=0.$$

其他之任何情形，亦得依同法化簡之.惟宜記住若此兩圓錐曲線之四交點中有兩虛點，則基本三角形有兩角頂爲虛點，而僅他一角頂爲實點耳.又，若四交點皆爲虛點，則圓錐曲線之頂點爲實點.此諸事實，待後詳證之.

16. 求一直線與此圓錐曲線相切之條件.

設直線之方程式爲

$$l\alpha+m\beta+n\gamma=0.$$

此直線與圓錐曲線相交時，得

$$L^2(m\beta+n\gamma)^2+l^2(M^2\beta^2+N^2\gamma^2)=0.$$

命 $\beta:\gamma$ 之兩值相等，則得

$$(L^2m^2+M^2l^2)(L^2n^2+N^2l^2)=L^4m^2n^2.$$

故得 $$M^2N^2l^2+N^2L^2m^2+L^2M^2n^2=0,$$

或 $$\frac{l^2}{L^2}+\frac{m^2}{M^2}+\frac{n^2}{N^2}=0,$$

爲所求之條件。

17. 求此圓錐曲線爲一拋物線之條件。

因，凡拋物線必與 $a\alpha+b\beta+c\gamma=0$

相切，故所求之條件爲

$$\frac{a^2}{L^2}+\frac{b^2}{M^2}+\frac{c^2}{N^2}=0.$$

18. 求此圓錐曲線之中心之位標。

設 CA 交此圓錐曲線於 B_3, B_1 兩點。平分 B_3B_1 於 Q，則 BQ 必通過中心。

今設 $f_3, 0, h_3$ 爲 B_3 之位標；

$f_1, 0, h_1$ 爲 B_1 之位標。

則 Q 點之位標爲 $\frac{f_3+f_1}{2}, 0, \frac{h_3+h_1}{2}.$

因得 BQ 之方程式爲

$$\frac{\gamma}{h_3+h_1}=\frac{\alpha}{f_3+f_1}.$$

又，f_3，及 f_1 之値，亦卽下列之方程式組中 α 之値：

$$\begin{cases} L^2\alpha^2+M^2\beta^2+N^2\gamma^2=0, \\ \beta=0, \\ a\alpha+b\beta+c\gamma=2\Delta \end{cases}$$

消去 β,γ；得　$L^2c^2\alpha^2+N^2(a\alpha-2\Delta)^2=0$.

故　$$f_3+f_1=\frac{4\Delta\cdot N^2a}{L^2c^2+N^2a^2}.$$

同理，得　$$h_3+h_1=\frac{4\Delta\cdot L^2c}{N^2a^2+L^2c^2}.$$

故 BQ 之方程式為

$$\frac{\gamma}{L^2c}=\frac{\alpha}{N^2a},$$

或　$$\frac{N^2\gamma}{c}=\frac{L^2\alpha}{a}.$$

此為中心所在之一直線．同理，可證此中心亦在此線上

$$\frac{L^2\alpha}{a}=\frac{M^2\beta}{b}.$$

故中心之位標，可由下式得之

$$\frac{L^2\alpha}{a}=\frac{M^2\beta}{b}=\frac{N^2\gamma}{c}.$$

就此式與　$a\alpha+b\beta+c\gamma=2\Delta$

聯立解之，得中心之位標為

$$2\Delta\cdot\frac{\dfrac{a}{L^2}}{\dfrac{a^2}{L^2}+\dfrac{b^2}{M^2}+\dfrac{c^2}{N^2}},\ 2\Delta\frac{\dfrac{b}{M^2}}{\dfrac{a^2}{L^2}+\dfrac{b^2}{M^2}+\dfrac{c^2}{N^2}},\ 2\Delta\cdot\frac{\dfrac{c}{N^2}}{\dfrac{a^2}{L^2}+\dfrac{b^2}{M^2}+\dfrac{c^2}{N^2}}.$$

若此圓錐曲線為拋物線，則上三值皆成無窮大．此乃理

應如是者.

'19. 基本三角形關於一圓爲自共軛三角形，求此圓之方程式*.

聯圓心至任一點之直線，必垂直於該點之極線.此爲圓之一特性.是以聯圓心至 A 點之直線

$$\frac{M^2\beta}{b}-\frac{N^2\gamma}{c}=0,$$

必垂直於 $\alpha=0$. 由此，得 (第一章 § 5)

$$\frac{M^2}{b\cos B}=\frac{N^2}{c\cos C}.$$

同理，因聯圓心至 B 及 C 之直線，各垂直於

$$\beta=0 \text{ 及 } \gamma=0.$$

故得 $$\frac{N^2}{c\cos C}=\frac{L^2}{a\cos A},\ \frac{L^2}{a\cos A}=\frac{M^2}{b\cos B}.$$

故所求之圓之方程式爲

$$a\cos A\ \alpha^2+b\cos B\cdot\beta^2+c\cos C\cdot\gamma^2=0,$$

或 $$\sin 2A\ \alpha^2+\sin 2B\cdot\beta^2+\sin 2C\cdot\gamma^2=0.$$

由此且可知除非 $\sin 2A$, $\sin 2B$, $\sin 2C$ 三者之中有一負值，否則此圓必爲虛圓.質言之，若 $2A$, $2B$, $2C$ 之中，有

* 此圓稱爲自共軛圓，或極圓.

一值大於二直角者；或,若基本三角形爲一鈍角三角形時,則得一實圓,否則爲一虛圓.

系　參閱§18所示之圓錐曲線之中心之位標式,可見於圓心上,有　$\alpha\cdot\cos A=\beta\cdot\cos B=\gamma\cdot\cos C$ 之關係.

或,設基本三角形關於一圓爲自共軛三角形.過其兩角頂作垂直於各對邊之直線,則其交點與此圓之圓心密合.此亦可由幾何上之關係視知之.

20.　求切兩基線於兩角頂上之圓錐曲線之方程式.

設圓錐曲線切 AB 及 AC 於 B 及 C. 今須求此方程式

$$L\alpha^2+M\beta^2+N\gamma^2+2\lambda\beta\gamma+2\mu\gamma\alpha+2\nu\alpha\beta=0$$

中諸常數之關係,使當 $\beta=0$ 時,α 之兩值皆爲零.且當 $\gamma=0$ 時,α 之兩值亦等於零.

故此兩方程式:

$$L\alpha^2+N\gamma^2+2\mu\gamma\alpha=0,$$

$$L\alpha^2+M\beta^2+2\nu\alpha\beta=0,$$

當 $\alpha=0$ 時,必皆恆可滿足之.且此外不能更有其他之值可適合之者.因之,必須

$$N=0,\ \mu=0,\ M=0,\ \nu=0.$$

故原式成爲　$$L\alpha^2+2\lambda\beta\gamma=0.$$

若以 $-k^2$ 代 $\frac{L}{2\lambda}$，則可書之爲

$$k^2\alpha^2=\beta\gamma.$$

此式僅含一任意常數，乃理應如是者．蓋若已知一切線及其切點時，則此圓錐曲線已受制於兩條件矣．今已知其兩切線及各該切點，是此圓錐曲線受制於四條件也．故其方程式只能含一任意常數．

21. 設由 A 點作一直線，交此圓錐曲線於 P 及 Q；並設此直線之方程式爲

$$\beta=n^2\gamma.$$

則 BP 及 BQ 之方程式各爲

$$k\alpha=n\gamma \text{ 及 } k\alpha=-n\gamma.$$

由諸式之形，則可知 BA, BP, BC, BQ 成一調和束線．換言之，卽：圓錐曲線之弦，必被其圓錐曲線自身，及弦上之任一點，及此點關於此圓錐曲線之極線等，分成調和比．

22. 兩直線之方程式爲

$$k\alpha=\omega\beta \text{ 及 } k\alpha=\frac{1}{\omega}\gamma$$

者，不論 ω 爲值若何，必相交於此圓錐曲線上之點．故此

圓錐曲線上之任何點，皆可用 $\frac{k\alpha}{\beta}$* 或 $\frac{\gamma}{k\alpha}$ 表之.

設 ω 為某點上此比之一值，則該點可直接用 ω 記之. 聯兩點 ω, ω' 之直線，稱為 $\omega\omega'$ 線.

23. 求 $\omega\omega'$ 線之方程式.

命所求之方程式為

$$k\alpha+m\beta+n\gamma=0.$$

今定 m, n 之值如下:

因 $$k\alpha=\omega\beta,\quad k\alpha=\frac{1}{\omega}\gamma,$$

故得 $$1+\frac{m}{\omega}+n\omega=0.$$

同理，得 $$1+\frac{m}{\omega'}+n\omega'=0.$$

故 $$m=\frac{\omega'-\omega}{\frac{\omega}{\omega'}-\frac{\omega'}{\omega}}=-\frac{\omega\omega'}{\omega+\omega'},\quad n=-\frac{1}{\omega+\omega'}.$$

故直線 $\omega\omega'$ 之方程式為

$$\omega\omega'\beta+\gamma=(\omega+\omega')k\alpha.$$

24. 求 ω 點上之切線之方程式.

---

* 此表記法係由 Salmon 氏在其所著之 Conic Sections 一書所用者.

由上節之結果，以 $\omega'=\omega$ 代入之，則得矣。因得所求之方程式爲

$$\omega^2\beta+\gamma=2\omega\cdot k\alpha.$$

25. 求 $\omega\omega'$ 之極點。

因 $\omega\omega'$ 之極點乃係 ω, ω' 兩點上之切線之交點。故可由下之兩式

$$2\omega\cdot k\alpha-\omega^2\beta-\gamma=0,$$

$$2\omega'\cdot k\alpha-\omega'^2\beta-\gamma=0$$

定之，得 $$\frac{k\alpha}{\omega^2-\omega'^2}=\frac{\beta}{2(\omega-\omega')}=\frac{\gamma}{2\omega\omega'(\omega-\omega')},$$

或 $$\frac{2k\alpha}{\omega+\omega'}=\beta=\frac{\gamma}{\omega\omega'}.$$

26. 求一已知直線與此圓錐曲線相切之條件。

設已知直線之方程式爲

$$l\alpha+m\beta+n\gamma=0.$$

則由 §24，可知若此直線與此圓錐曲線相切，則必可化成如下之形

$$-2\omega k\alpha+\omega^2\beta+\gamma=0.$$

$$\therefore\quad -\frac{2\omega k}{l}=\frac{\omega^2}{m}=\frac{1}{n}.$$

故得 $$l^2=4k^2mn,$$

爲所求之條件。

此直線上切點之位標，可由次式定之：

$$-l\alpha=2m\beta=2n\gamma.$$

系　設以 a, b, c 替代此條件式中之 l, m, n；則可得此圓錐曲線爲一拋物線之條件爲

$$a^2=4k^2bc.$$

或謂，切 AB, AC 於 B 及 C 之拋物線，其方程式爲

$$a^2\alpha^2=4bc\beta\gamma.$$

27.　求此圓錐曲線之中心。

此圓錐曲線既切 AB 及 AC 於 B 及 C，則過 A 點且平分 BC 之直線，必通過中心．此直線之方程式爲

$$b\beta-c\gamma=0.$$

設 f_1, g_1, h_1；及 f_2, g_2, h_2 爲此直線與圓錐曲線之兩交點之位標，則其中心之位標爲

$$\frac{f_1+f_2}{2},\ \frac{g_1+g_2}{2},\ \frac{h_1+h_2}{2}.$$

而 $f_1, f_2, g_1, g_2, h_1, h_2$ 各皆爲下列之方程式組中 α, β, γ 之値.

$$k^2\alpha^2 - \beta\gamma = 0,$$

$$b\beta \quad c\gamma = 0,$$

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 2\Delta.$$

消去γ及α,得

$$a \ b\beta^2 = 4k^2c(b\beta - \Delta)^2.$$

故 $$\frac{g_1 + g_2}{2} = \frac{4k^2c \cdot \Delta}{4k^2bc - a^2}.$$

同理, $$\frac{h_1 + h_2}{2} = \frac{4k^2b \cdot \Delta}{4k^2bc - a^2}.$$

此爲中心之β及γ之值.代入

$$a\alpha + b\beta + \cdot\gamma = 2\Delta,$$

則得α之值爲 $$\frac{-2a \cdot \Delta}{4k^2bc - a^2}.$$

若 $4k^2bc = a^2$, 則此三值皆成無窮大. 蓋如 § 24 所示, 此時此圓錐曲線成一拋物線,故當如是也.

習 題

1. 一三角形內接於圓錐曲線,其各頂上之切線與其各對邊之交點必在一直線上.證之.

2. 設一三角形外切於一圓錐曲線,則聯各角頂至對

邊上之切點之三線,必相交於一點.證之.

3. 求圓錐曲線 $\lambda\beta\gamma+\mu\gamma\alpha+\nu\alpha\beta=0$ 在基本三角形各角頂上之法線 (normal) 之方程式.並證明若

$$\frac{\lambda}{a}(\mu^2-\nu^2)+\frac{\mu}{b}(\nu^2-\lambda^2)+\frac{\nu}{c}(\lambda^2-\mu^2)=0,$$

則此三法線相交於一點.

4. 一圓錐曲線外接於基本三角形.若三角頂上之三法線相交於一點,則此圓錐曲線之中心之軌跡,爲由曲線:

$$\frac{\alpha}{a}(\beta^2-\gamma^2)+\frac{\beta}{b}(\gamma^2-\alpha^2)+\frac{\gamma}{c}(\alpha^2-\beta^2)=0$$

及基本三角形三邊上中點之聯線,二者聯合之軌跡.證之.

5. 作三圓錐曲線各切三角形之兩邊於其兩角頂,且相交於一點;則此公共點上三圓錐曲線之切線,交各第三邊之點在一直線上,且每兩圓錐曲線之其他公切線,交其邊——切於諸對之圓錐曲線者——於共同之三點.

6. 四角形對邊之交點,及對角線之交點,成一三角形,關於此四角形之外接圓錐曲線,爲自共軛三角形.

7. 設 R 爲基本三角形之外接圓之半徑,ρ 爲另一圓

之半徑．對於此圓 ρ 而言，基本三角形爲自共軛三角形．試證　　$$\rho^2+4R^2\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C=0.$$

8. 設 BC, CA, AB 爲一圓錐曲線之三切線．P, Q, R 爲此曲線上之三點．命諸三角形 PBC, PCA, PAB 之面積各爲 p_1, p_2, p_3；QBC, QCA, QAB 之面積各爲 $q_1\ q_2, q_3$；RBC, RCA, RAB 之面積各爲 r_1, r_2, r_3．試證

$$(p_1q_2r_3)^{\frac{1}{2}}-(p_1q_3r_2)^{\frac{1}{2}}+(p_2q_3r_1)^{\frac{1}{2}}-(p_2q_1r_3)^{\frac{1}{2}}$$
$$+(p_3q_1r_2)^{\frac{1}{2}}-(p_3q_2r_1)^{\frac{1}{2}}=0.$$

9. 圓錐曲線之外切四邊形之對角線，及聯對邊上切點之線，相交於一點．

10. 一圓錐曲線組與三直線相切．若其一焦點沿一定直線上移動，則其他焦點之軌跡，爲一圓錐曲線外接於一三角形．證之．

由是證明：一拋物線上三切線之交點所定之圓，必過其焦點．

11. 由圓 $a\beta\gamma+b\gamma\alpha+c\alpha\beta=0$ 之圓周上一點 $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, 至基本三角形作三垂線；則過三垂趾之直線* 之方程式，可化如下形

* 即西姆遜線 (Simson line or Pedal line).

$$\frac{c\beta_1+b\gamma_1}{\beta_1\cos C-\gamma_1\cos B}a\alpha+\frac{a\gamma_1+c\alpha_1}{\gamma_1\cos A-\alpha_1\cos C}b\beta$$

$$+\frac{b\alpha_1+a\beta_1}{\alpha_1\cos B-\beta_1\cos A}c\gamma=0.$$

12.　試證：拋物線 $a^2\alpha^2=4bc\beta\gamma$ 之軸之方程式為

$$(c+b\cos A)\beta-(b+c\cos A)\gamma=\tfrac{1}{2}\left(\frac{b}{c}-\frac{c}{b}\right)a\alpha.$$

13.　設一拋物線切於此直線 $l\alpha+m\beta+n\gamma=0$ 及基本三角形之三邊，則其準線之方程式為

$$\alpha\cdot\cos A\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)+\beta\cdot\cos B\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{l}\right)$$

$$+\gamma\cdot\cos C\left(\frac{1}{l}-\frac{1}{m}\right)=0.$$

14.　設 $(l\alpha)\quad(m\beta)+(n\gamma)=0$ 為一拋物線，則其軸之方程式為

$$\frac{a^2\alpha}{l}\left(\frac{b^4}{m^2}-\frac{c^4}{n^2}\right)+\frac{b^2\beta}{m}\left(\frac{c^4}{n^2}-\frac{a^4}{l^2}\right)+\frac{c^2\gamma}{n}\left(\frac{a^4}{l^2}-\frac{b^4}{m^2}\right)=0.$$

第 三 章

一次方程式組之消去式

On Elimination between Linear Equations

1. 未討論二次方程之通式之圖象以前，請先述齊一次方程式組之消去式，並說明新近引入者之若干有關係之名詞。

雖然，本章所示者，仍僅爲若干初步之定理，爲此後討論時之需求計耳．至其詳細之研究，讀者可參閱下列諸書：Salmon 之 Lessons on Higher Algebra；Spottiswoode 之 On Determinants(第二版可於 Crelle's Journal 雜誌上得之，t. 51, 209, 328 頁) 及 (Boole, Sylvester, Cayley 諸氏在各雜誌上所發表之原著．

2. 設有 n 個 n 元之齊一次方程式如下：

$$
\begin{aligned}
a_1x_1+a_2x_2+\cdots\cdots+a_nx_n&=0,\\
b_1x_1+b_2x_2+\cdots\cdots+b_nx_n&=0,\\
&\vdots\\
k_1x_1+k_2x_2+\cdots\cdots+k_nx_n&=0.
\end{aligned}
$$

則諸未知數 $x_1, x_2, \cdots\cdots x_n$ 等，可由諸式間之關係消去之。且所得之結果，可由各方程式略去其未知數 $x_1, x_2\cdots\cdots x_n$ 等，而就諸係數依其原有之次序排列表之，如下：

$$\begin{vmatrix} a_1, a_2, \cdots\cdots a_n \\ b_1, b_2, \cdots\cdots b_n \\ \vdots \quad \vdots \qquad \vdots \\ k_1, k_2, \cdots\cdots k_n \end{vmatrix} = 0.$$

此式之左端，稱為上列方程式組之行列式 (determinant).

茲就其構成之規律研究之。

3. 先取兩方程式

$$a_1x_1 + a_2x_2 = 0,$$

$$b_1x_1 + b_2x_2 = 0.$$

以 b_2 乘前式，a_2 乘後式，減之，得

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0.$$

故
$$\begin{vmatrix} a_1, & a_2 \\ b_1, & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$$

次設從兩方程式

$$a_1\lambda_1 + b_1\lambda_2 = 0,$$

$$a_2\lambda_1 + b_2\lambda_2 = 0;$$

以消去 λ_1, λ_2, 則仍得相同之結果.

故謂 $$\begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1, & a_2 \\ b_1, & b_2 \end{vmatrix}.$$

此項性質,不論任何行列式皆眞.

4. 其次,設三方程式

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0,$$

$$b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0,$$

$$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = 0.$$

順次各以 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 乘之,再相加.並就所得之方程式中,設 x_2, x_3 之係數皆等於零爲條件,以求 $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3$ 之值.即設

$$\left.\begin{aligned} a_2\lambda_1 + b_2\lambda_2 + c_2\lambda_3 = 0 \\ a_3\lambda_1 + b_3\lambda_2 + c_3\lambda_3 = 0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (A)$$

於是所得之方程式爲

$$(a_1\lambda_1 + b_1\lambda_2 + c_1\lambda_3)x_1 = 0.$$

因之,必須

$$a_1\lambda_1 + b_1\lambda_2 + c_1\lambda_3 = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (B)$$

次以 a_3 乘 (A) 式中之前式,以 a_2 乘其後者,相減,得

$$(a_3b_2 - a_2b_3)\lambda_2 + (c_2a_3 - c_3a_2) = 0,$$

或 $$\frac{\lambda_2}{c_2a_3-c_3a_2}=\frac{\lambda_3}{a_2b_3-a_3b_2}$$
$$=\frac{\lambda_1}{b_2c_3-b_3c_2}\text{(對稱性質)}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (C)$$

再以 (C) 之各式除 (B) 之各項，得

$$a_1(b_2c_3-b_3c_2)+b_1(c_2a_3-c_3a_2)+c_1(a_2b_3-a_3b_2),$$

或 $$\begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3 \\ b_1, & b_2, & b_3 \\ c_1, & c_2, & c_3 \end{vmatrix}=a_1(b_2c_3-b_3c_2)+b_1(c_2a_3-c_3a_2)+c_1(a_2b_3-a_3b_2)$$

$$=a_1\begin{vmatrix} b_2, & b_3 \\ c_2, & c_3 \end{vmatrix}+b_1\begin{vmatrix} c_2, & c_3 \\ a_2, & a_3 \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} a, & a_3 \\ b_2, & b_3 \end{vmatrix}$$

$$=a_1\begin{vmatrix} b_2, & b_3 \\ c_2, & c_3 \end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix} a_2, & a_3 \\ c_2, & c_3 \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} a_2, & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

上述之步驟，實同於由 (A), (B) 兩式以消去 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

故謂 $$\begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3 \\ b_1, & b_2, & b_3 \\ c_1, & c_2, & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix}.$$

5　次就四方程式

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4=0,$$

$$b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+b_4x_4=0,$$

$$c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+c_4x_4=0,$$

$$d_1x_1+d_2x_2+d_3x_3+d_4x_4=0$$

論之.欲消去 x_1, x_2, x_3, x_4, 可依次以 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ 乘其各式.加之，並得 x_2, x_3, x_4 之係數，一一等置於零.於是，得

$$\left.\begin{aligned}a_2\lambda_1+b_2\lambda_2+c_2\lambda_3+d_2\lambda_4=0,\\ a_3\lambda_1+b_3\lambda_2+c_3\lambda_3+d_3\lambda_4=0,\\ a_4\lambda_1+b_4\lambda_2+c_4\lambda_3+d_4\lambda_4=0.\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(A')$$

因而 $$a_1\lambda_1+b_1\lambda_2+c_1\lambda_3+d_1\lambda_4=0\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(B')$$

欲求 $\lambda_1:\lambda_2:\lambda_3:\lambda_4$ 之值，可用 μ_2, μ_3, μ_4 各乘 (A') 之各式，並等置 λ_3, λ_4 之係數於零，則得

$$\left.\begin{aligned}c_2\mu_2+c_3\mu_3+c_4\mu_4=0\\ d_2\mu_2+d_3\mu_3+d_4\mu_4=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(C')$$

及 $$(a_2\mu_2+a_3\mu_3+a_4\mu_4)\lambda_1+(b_2\mu_2+b_3\mu_3+b_4\mu_4)\lambda_2=0.$$

故 $$\frac{\lambda}{b_2\mu_2+b_3\mu_3+b_4\mu_4}=\frac{\lambda_2}{-(a_2\mu_2+a_3\mu_3+a_4\mu_4)}$$

次，依處理 (A) 式之法以處理 (C')，則可得

$$\frac{\mu_2}{c_3d_4-c_4d_3}=\frac{\mu_3}{c_4d_2-c_2d_4}=\frac{\mu_4}{c_2d_3-c_3d_2},$$

或 $$\frac{\mu_2}{\begin{vmatrix}c_3, & d_3\\ c_4, & d_4\end{vmatrix}}=\frac{\mu_3}{\begin{vmatrix}c_4, & d_4\\ c_2, & d_2\end{vmatrix}}=\frac{\mu_4}{\begin{vmatrix}c_2, & d_2\\ c_3, & d_3\end{vmatrix}}.$$

故
$$\frac{\lambda_1}{b_2\begin{vmatrix} c_3, & d_3 \\ c_4, & d_4 \end{vmatrix}+b_3\begin{vmatrix} c_4, & d_4 \\ c_2, & d_2 \end{vmatrix}+b_4\begin{vmatrix} c_2, & d_2 \\ c_3, & d_3 \end{vmatrix}}$$

$$=-\frac{\lambda_2}{a_2\begin{vmatrix} c_3, & d_3 \\ c_4, & d_4 \end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix} c_4, & d_4 \\ c_2, & d_2 \end{vmatrix}+a_4\begin{vmatrix} c_2, & d_2 \\ c_3, & d_3 \end{vmatrix}}.$$

或
$$\frac{\lambda_1}{\begin{vmatrix} b_2, & c_2, & d_2 \\ b_3, & c_3, & d_3 \\ b_4, & c_4, & d_4 \end{vmatrix}}=-\frac{\lambda_2}{\begin{vmatrix} a_2, & c_2, & d_2 \\ a_3, & c_3, & d_3 \\ a_4, & c_4, & d_4 \end{vmatrix}}.$$

更由對稱性質之關係，可知其亦等於

$$\frac{\lambda_3}{\begin{vmatrix} a_2, & b_2, & d_2 \\ a_3, & b_3, & d_3 \\ a_4, & b_4, & d_4 \end{vmatrix}}=-\frac{\lambda_4}{\begin{vmatrix} a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \\ a_4, & b_4, & c_4 \end{vmatrix}},$$

可用式表之如下：

$$\frac{\lambda_1}{\begin{vmatrix} b_2, & b_3, & b_4 \\ c_2, & c_3, & c_4 \\ d_2, & d_3, & d_4 \end{vmatrix}}=\frac{\lambda_2}{-\begin{vmatrix} a_2, & a_3, & a_4 \\ c_2, & c_3, & c_4 \\ d_2, & d_3, & d_4 \end{vmatrix}}$$

$$=\frac{\lambda_3}{\begin{vmatrix} a_2, & a_3, & a_4 \\ b_2, & b_3, & b_4 \\ d_2, & d_3, & d_4 \end{vmatrix}}=\frac{\lambda_4}{-\begin{vmatrix} a_2, & a_3, & a_4 \\ b_2, & b_3, & b_4 \\ c_2, & c_3, & c_4 \end{vmatrix}}.$$

如以此式與 (B') 消去 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, 則得原方程式之消去式

$$\begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3, & a_4 \\ b_1, & b_2, & b_3, & b_4 \\ c_1, & c_2, & c_3, & c_4 \\ d_1, & d_2, & d_3, & d_4 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2, & b_3, & b_4 \\ c_2, & c_3, & c_4 \\ d_2, & d_3, & d_4 \end{vmatrix}$$

$$-b_1\begin{vmatrix} a_2, & a_3, & a_4 \\ c_2, & c_3, & c_4 \\ d_2, & d_3, & d_4 \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} a_2, & a_3, & a_4 \\ b_2, & b_3, & b_4 \\ d_2, & d_3, & d_4 \end{vmatrix}$$

$$-d_1\begin{vmatrix} a_2, & a_3, & a_4 \\ b_2, & b_3, & b_4 \\ c_2, & c_3, & c_4 \end{vmatrix}.$$

因上述之步驟,實等於由 (A') 及 (B') 以消去 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ 者.故謂

$$\begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3, & a_4 \\ b_1, & b_2, & b_3, & b_4 \\ c_1, & c_2, & c_3, & c_4 \\ d_1, & d_2, & d_3, & d_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1, & d_1 \\ a_2, & b_2, & c_2, & d_2 \\ a_3, & b_3, & c_3, & d_3 \\ a_4, & b_4, & c_4, & d_4 \end{vmatrix}$$

6. 行列式構成之規律,可以知之矣.設一行列式有 n 行及 n 列,則仍可依同法以證明

$$\begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3,\cdots\cdots a_n \\ b_1, & b_2, & b_3,\cdots\cdots b_n \\ c_1, & c_2, & c_3,\cdots\cdots c_n \\ \vdots & & \vdots \\ k_1, & k_2, & k_3,\cdots\cdots k_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1,\cdots\cdots k_1 \\ a_2, & b_2, & c_2,\cdots\cdots k_2 \\ a_3, & b_3, & c_3,\cdots\cdots k_3 \\ \vdots & & \vdots \\ a_n, & b_n, & c_n,\cdots\cdots k_n \end{vmatrix}$$

$$= a_1\begin{vmatrix} b_2, & b_3,\cdots\cdots b_n \\ c_2, & c_3,\cdots\cdots c_n \\ \vdots & \vdots \\ k_2, & k_3,\cdots\cdots k_n \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2, & a_3,\cdots\cdots a_n \\ c_2, & c_3,\cdots\cdots c_n \\ \vdots & \vdots \\ k_2, & k_3,\cdots\cdots k_n \end{vmatrix}$$

$$+ c_1\begin{vmatrix} a_2, & a_3,\cdots\cdots a_n \\ b_2, & b_3,\cdots\cdots b_n \\ \vdots & \vdots \\ k_2, & k_3,\cdots\cdots k_n \end{vmatrix} + \cdots\cdots$$

$$+(-1)^{n-1}\cdot k_1\begin{vmatrix} a_2, & a_3,\cdots\cdots \\ b_2, & b_3,\cdots\cdots \\ \vdots & \vdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{vmatrix}$$

又，吾人仍可證明：設有 $(n-1)$ 個之 n 元一次方程式組：

$$\begin{aligned}
&a_2\lambda_1+b_2\lambda_2+c_2\lambda_3+\cdots\cdots+k_2\lambda_n=0,\\
&a_3\lambda_1+b_3\lambda_2+c_3\lambda_3+\cdots\cdots+k_3\lambda_n=0,\\
&a_4\lambda_1+b_4\lambda_2+c_4\lambda_3+\cdots\cdots+k_4\lambda_n=0,\\
&\vdots\\
&a_n\lambda_1+b_n\lambda_2+c_n\lambda_3+\cdots\cdots+k_n\lambda_n=0;
\end{aligned}$$

則恆可求得 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots\cdots \lambda_n$ 等之比例值如下：

$$\frac{\lambda_1}{\begin{vmatrix} b_2, & c_2,\cdots\cdots k_2\\ b_3, & c_3,\cdots\cdots k_3\\ \vdots & \vdots\\ b_n, & c_n,\cdots\cdots k_n\end{vmatrix}}=\frac{\lambda_2}{-\begin{vmatrix} a_2, & c_2,\cdots\cdots k_2\\ a_3, & c_3,\cdots\cdots k_3\\ \vdots & \vdots\\ a_n, & c_n,\cdots\cdots k_n\end{vmatrix}}$$

$$=\frac{\lambda_3}{\begin{vmatrix} a_2, & b_2,\cdots\cdots k_2\\ a_3, & b_3,\cdots\cdots k_3\\ \vdots & \vdots\\ a_n, & b_n,\cdots\cdots k_n\end{vmatrix}}=\cdots\cdots=\frac{\lambda_n}{(-1)^{n-1}\begin{vmatrix} a_2, & b_2,\cdots\cdots\\ a_3, & b_3,\cdots\cdots\\ \vdots & \vdots\\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\end{vmatrix}}$$

今就行列式 $\begin{vmatrix} a_1, & a_2\\ b_1, & b_2\end{vmatrix}$ 及 $\begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3\\ b_1, & b_2, & b_3\\ c_1, & c_2, & c_3\end{vmatrix}$ 之展開式觀之.可見前者含有 $1\cdot2$ 或兩項,後者有 $1\cdot2\cdot3$ 或六項,同理可知設由 n 個齊一次方程式組以消去其 n 元,則所得之行

列式，必含 $(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots\cdots n)$ 項．因由 §§ 4, 5, 6 所示之 n 級及 $(n-1)$ 級之行列式之關係，可知若本定理對於 $(n-1)$ 級者爲眞，則對於 n 級者亦必眞．但已知三級者本定理已爲眞矣．故推知其無往而不眞也．

7. 行列式中之橫排之元稱爲"行"，縱者爲"列"．其展開式中之各項，皆爲 n 元之積；自不同行且不同列者各取一元相乘而得者．項之符號，正負參半．至任何一項之符號，則可依照下法定之．爲簡易計，先就三級者視之．

$$\begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3 \\ b_1, & b_2, & b_3 \\ c_1, & c_2, & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1.$$

由此可見(一)第一項 $a_1b_2c_3$ 係依字母之次序排列，且各字母之附數，亦係依照自然之次序，其符號爲正．(二)其他之項可由此項改易其相鄰之附數之位置以得之．

例如 $a_1b_3c_2$ 可由 $a_1b_2c_3$ 改易 2, 3 兩附數之位置以得之；$a_3b_1c_2$ 係就 $a_1b_2c_3$ 先改易 2, 3 之位置，次再改易 3, 1 之位置而得者．如是，凡改易兩相鄰附數之位置者，稱爲一易位．茲述其符號之規律如下，可直接驗知之：

凡由第一項經奇次之易位而得之項，其符號爲負．經偶

次之易位而得者，其符號爲正。

例如 $a_1b_3c_2$, $a_2b_1c_3$ 皆由第一項經一次之易位而得者，其符號爲負。$a_2b_3c_1$ 及 $a_3b_1c_2$ 經二次之易位而得之，故爲正。又 $a_3b_2c_1$ 係經三次之易位，故爲負。

同法，就四級之行列式視之。若 $a_1b_2c_3d_4$ 爲正，則 $a_2b_1c_4d_3$ 經二次之易位，故亦正；$a_4b_1c_2d_3$ 經三次之易位，故負。

8. 若互換行列式中之任何兩鄰行或列，則行列式變號。

因已知 $\begin{vmatrix} a_1, & a_2 \\ b_1, & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 = -(b_1a_2 - b_2a_1)$

$$= -\begin{vmatrix} b_1, & b_2 \\ a_1, & a_2 \end{vmatrix}$$

及

$$\begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3 \\ b_1, & b_2, & b_3 \\ c_1, & c_2, & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2, & b_3 \\ c_2, & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2, & a_3 \\ c_2, & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2, & a_3 \\ b_2, & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= -a_1\begin{vmatrix} c_2, & c_3 \\ b_2, & b_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2, & a_3 \\ b_2, & b_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2, & a_3 \\ c_2, & c_3 \end{vmatrix}$$

故由上之關係，

$$=-\begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3 \\ c_1, & c_2, & c_3 \\ b_1, & b_2, & b_3 \end{vmatrix}.$$

對於二級及三級之行列式，本定理已證明如上矣．且可用數學歸納法 (mathematical induction)，推廣之於任何級之行列式．

系　由是可知：若行列式中之兩行或列之各元相等，則此行列式之值必等於零．

因由本節之定理，得

$$\begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3 \\ b_1, & b_2, & b_3 \\ b_1, & b_2, & b_3 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3 \\ b_1, & b_2, & b_3 \\ b_1, & b_2, & b_3 \end{vmatrix},$$

故必等於零也．

9　因

$$\begin{vmatrix} ma_1, & a_2, & a_3 \\ mb_1, & b_2, & b_3 \\ mc_1, & c_2, & c_3 \end{vmatrix}=ma_1\begin{vmatrix} b_2, & b_3 \\ c_2, & c_3 \end{vmatrix}-mb_1\begin{vmatrix} a_2, & a_3 \\ c_2, & c_3 \end{vmatrix}+mc_1\begin{vmatrix} a_2, & a_3 \\ b_2, & b_3 \end{vmatrix}$$

$$=m\begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3 \\ b_1, & b_2, & b_3 \\ c_1, & c_2, & c_3 \end{vmatrix}.$$

故謂:該行列式中一行或列之諸元，各乘以同數，則其結果,等於此行列式乘以該數(即以該數爲此行列式之一因數也).

10. **定義** 由一已知行列式,去其若干行及若干列,以成其他之行列式，稱爲原行列式之子行列式(minors).視所去者爲一行一列或二行二列，……等等，而稱第一，第二,……子行列式.如

$$\begin{vmatrix} b_2, & b_3 \\ c_2, & c_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1, & a_3 \\ b_1, & b_3 \end{vmatrix}$$

皆爲 $\begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3 \\ b_1, & b_2, & b_3 \\ c_1, & c_2, & c_3 \end{vmatrix}$ 之第一子行列式.

11. 求 $L, M, N, \lambda, \mu, \nu$ 諸數間之關係,使二次式

$$L\alpha^2+M\beta^2+N\gamma^2+2\lambda\beta\gamma+2\mu\gamma\alpha+2\nu\alpha\beta$$

可分解爲兩一次因式.

設 $p\alpha+q\beta+r\gamma$ 爲一因式，則其他之一因式必爲

$$\frac{L}{p}\alpha+\frac{M}{q}\beta+\frac{N}{r}\gamma.$$

故　$$(p\alpha+q\beta+r\gamma)\left(\frac{L}{p}\alpha+\frac{M}{q}\beta+\frac{N}{r}\gamma\right)\equiv L\alpha^2+M\beta^2$$

$$+N\gamma^2+2\lambda\beta\gamma+2\mu\gamma\alpha+2\nu\alpha\beta$$

$$\therefore\quad M\frac{r}{q}+N\frac{q}{r}=2\lambda,$$

$$N\frac{p}{r}+L\frac{r}{p}=2\mu,$$

$$L\frac{q}{p}+M\frac{p}{q}=2\nu.$$

故得　$$L\frac{qr}{p}=\mu q+\nu r-\lambda p,$$

$$M\frac{rp}{q}=\nu r+\lambda p-\mu q,$$

$$N\frac{pq}{r}=\lambda p+\mu q-\nu r.$$

$$\therefore\quad LMN\cdot pqr$$

$$=(\mu q+\nu r-\lambda p)(\nu r+\lambda p-\mu q)(\lambda p+\mu q-\nu\gamma),$$

$$LML\lambda^2\cdot pqr=\lambda^2p^2(\mu q+\nu r-\lambda p),$$

$$M\mu^2\cdot pqr=\mu^2q^2(\nu r+\lambda p-\mu q),$$

$$N\nu^2\cdot pqr=\nu^2r^2(\lambda p+\mu q-\nu r).$$

$$\therefore\quad pqr(LMN-L\lambda^2-M\mu^2-N\nu^2)=-2\lambda p\cdot\mu q\cdot\nu r.$$

$$\therefore\quad LMN-L\lambda^2-M\mu^2-N\nu^2+2\lambda\mu\nu=0.$$

以行列式表之爲

$$\begin{vmatrix} L, & \nu, & \mu \\ \nu, & M, & \lambda \\ \mu, & \lambda, & N \end{vmatrix}=0.$$

此爲二次式可分解爲兩一次因式之必須之條件．其左節之式：

$$\begin{vmatrix} L, & \nu, & \mu \\ \nu, & M, & \lambda \\ \mu, & \lambda, & N \end{vmatrix}$$

稱爲原二次式之判別式 (discriminant).

12. 巴斯閣氏定理 (Pascal's theorem).

由本章 § 6 之結果，則可得巴斯閣氏定理之證明．此定理如下：

設六角形內接於一圓錐曲線，則其對邊之交點在一直線上．

設 $AFBDCE$ 爲一圓錐曲線．取 ABC 爲基本三角形，命此圓錐曲線之方程式爲

$$\frac{\lambda}{\alpha}+\frac{\mu}{\beta}+\frac{\nu}{\gamma}=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

設　AE 之方程式爲　$\beta=n_2\gamma$,

AF 之方程式爲　$\gamma=m_3\beta$,

BF 之方程式爲　$\gamma\quad l_3\alpha$,

BD 之方程式爲　$\alpha=n_1\gamma$,

CD 之方程式爲　$\alpha=m_1\beta$,

CE 之方程式爲　$\beta=l_2\alpha$.

則因　D 在此圓錐曲線上，　$\lambda+\mu m_1+\nu n_1=0$;

E 在此圓錐曲線上，　$\lambda l_2+\mu+\nu n_2=0$;

F 在此圓錐曲線上，　$\lambda l_3+\mu m_3+\nu=0$.

故得

$$\begin{vmatrix} 1, & m_1, & n_1 \\ l_2, & 1, & n_2 \\ l_3, & m_3, & 1 \end{vmatrix}=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

爲此六點 A, F, B, D, C, E 在一圓錐曲線上之必須條件。

又設其對邊之交點在一直線上。命此直線之方程式爲

$$p\alpha+q\beta+r\gamma=0.$$

則因 BF 與 CE 相交於此線上，

$$p+ql_2+rl_3=0;$$

CD 與 AF 相交於此線上，

$$pm_1+q+rm_3=0;$$

AE 及 BD 相交於此線上，

$$pn_1+qn_2+r=0.$$

故得
$$\begin{vmatrix} 1, & l_2, & l_3 \\ m_1, & 1, & m_3 \\ n_1, & n_2, & 1 \end{vmatrix}=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

爲三交點在一直線上之條係．但 (2) 及 (3) 實二而一者．故本定理由是證明．

13. 由巴氏定理，更可推得其他有趣之若干結果．例如，若 F 與 A 密合，D 與 B 密合，E 與 C 密合，則 AF, BD, CE 成爲 A, B, C 三點上之切線，因而得第二章中之習題 1. 又，設 D 與 B 密合，E 與 C 密合，則得下之定理："圓錐曲線之內接四邊形之對邊之交點，及對頂點上切線之交點，四者在一直線上"．

又，設 F 與 A 密合，則可得一幾何作圖法．卽若知圓錐曲線上之五點，則由此作圖法，可作其任一點上之切線．蓋此時 AF 成爲 A 點上之切線．故若引長 AE, DB 使相交於 G，引長 AB, EC 相交於 H; GH 與 CD 相交於 I，則

AI 卽爲 A 點上之切線矣.

習　題

1. 試證:

$$\begin{vmatrix} a, & b, & c, & d \\ b, & a, & d, & c \\ c, & d, & a, & b \\ d, & c, & b, & a \end{vmatrix} = (a+b+c+d)(a-b+c-d)$$
$$(a-b-c+d)(a+b-c-d).$$

2. 設 $\begin{vmatrix} b_2, & b_3 \\ c_2, & c_3 \end{vmatrix} = A_1$, $\begin{vmatrix} b_3, & b_1 \\ c_3, & c_1 \end{vmatrix} = A_2$,……等等.

試證: $$\begin{vmatrix} B_2, & B_3 \\ C_2, & C_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3 \\ b_1, & b_2, & b_3 \\ c_1, & c_2, & c_3 \end{vmatrix};$$

並證 $$\begin{vmatrix} A_1, & A_2, & A_3 \\ B_1, & B_2, & B_3 \\ C_1, & C_2, & C_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3 \\ b_1, & b_2, & b_3 \\ c_1, & c_2, & c_3 \end{vmatrix}^2.$$

3. 設 $\begin{vmatrix} b, & c \\ y, & z \end{vmatrix} = A$, $\begin{vmatrix} c, & a \\ z, & x \end{vmatrix} = B$, $\begin{vmatrix} a, & b \\ x, & y \end{vmatrix} = C$,

$$\begin{vmatrix} b', & c' \\ y, & z \end{vmatrix} = A', \begin{vmatrix} c', & a' \\ z, & x \end{vmatrix} = B', \begin{vmatrix} a', & b' \\ x, & y \end{vmatrix} = C'.$$

求證：$$\begin{vmatrix} B, & C \\ B', & C' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} C, & A \\ C', & A' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} A, & B \\ A', & B' \end{vmatrix}^2$$

$$= \begin{vmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ x, & y, & z \end{vmatrix}^2 (x^2+y^2+z^2).$$

4. 求證：$$\begin{vmatrix} 0, & 1, & 1, & 1, & \cdots\cdots \\ 1, & 0, & a+b, & a+\ , & \cdots\cdots \\ 1, & b+a, & 0, & b+\ , & \cdots\cdots \\ 1, & c+a, & c+b, & 0, & \cdots\cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

$$= abc\cdots\cdots\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\cdots\cdots\right).$$

5. 求證：

$$\begin{vmatrix} m+n-y+z, & -y+z-l, & -y+z-l \\ -z+x-m, & n+l-z+x, & -z+x-m \\ -x+y-n, & -x+y-n, & l+m-x+y \end{vmatrix} = 0.$$

6. 求證：

$$\begin{vmatrix} \frac{a}{b+c}, & \frac{b+c}{a}, & \frac{b+c}{a} \\ \frac{c+a}{b}, & \frac{b}{c+a}, & \frac{c+a}{b} \\ \frac{a+b}{c}, & \frac{a+b}{c}, & \frac{c}{a+b} \end{vmatrix} \qquad \frac{2(a+b+c)^3}{(b+c)(c+a)(a+b)}.$$

7　設

$$\begin{vmatrix} A, & c, & b, & a \\ c, & B, & a, & \beta \\ b, & a, & C, & \gamma \\ a, & b, & \gamma, & F \end{vmatrix} = 0.$$

求證:

$$\begin{vmatrix} A, & c, & b \\ c, & B, & a \\ b, & c, & C \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A, & c, & a \\ c, & B, & \beta \\ a, & \beta, & F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a, & A, & c \\ \beta, & c, & \beta \\ \gamma, & b, & a \end{vmatrix}^2.$$

8.　試證:

$$\begin{vmatrix} (m+n)^2, & n^2, & m^2 \\ n^2, & (n+l)^2, & l^2 \\ l^2, & m^2, & (l+m)^2 \end{vmatrix} = 2(mn+nl+lm)^2.$$

9.　試證:

$$2\begin{vmatrix} \alpha^6, & \alpha^3, & \alpha^2, & \alpha, & 1 \\ \beta^6, & \beta^3, & \beta^2, & \beta, & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \epsilon^6, & \epsilon^3, & \epsilon^2, & \epsilon, & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} \alpha^5, & \alpha^4, & \alpha^2, & \alpha, & 1 \\ \beta^5, & \beta^4, & \beta^2, & \beta, & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \epsilon^5, & \epsilon^4, & \epsilon^2, & \epsilon, & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)\cdots\cdots\{(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\gamma)^2+\cdots\cdots\}.$$

10. 設 $$\frac{x}{a+\alpha}+\frac{y}{b+\alpha}+\frac{z}{c+\alpha}=1,$$

$$\frac{x}{a+\beta}+\frac{y}{b+\beta}+\frac{z}{c+\beta}=1,$$

$$\frac{x}{a+\gamma}+\frac{y}{b+\gamma}+\frac{z}{c+\gamma}=1.$$

試求 x, y, z 之值；並證：

$$\frac{x}{a+\lambda}+\frac{y}{b+\lambda}+\frac{z}{c+\lambda}=1+\frac{(\alpha-\lambda)(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda)}{(a+\lambda)(b+\lambda)(c+\lambda)},$$

$$\frac{x}{(a+\alpha)^2}+\frac{y}{(b+\alpha)^2}+\frac{z}{(c+\alpha)^2}=\frac{(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)}{(a+\alpha)(b+\alpha)(c+\alpha)}.$$

第 四 章

二次方程式之圖象

On the Conic Represented by the General Equation of the Second Degree

1. 今可以論二次方程式矣.設二次方程之通式爲

$$u\alpha^2+v\beta^2+w\gamma^2+2u'\beta\gamma+2v'\gamma\alpha+2w'\alpha\beta=0.$$

簡記之爲 $$\phi(\alpha,\beta,\gamma)=0.$$

此方程式爲一圓錐曲線,如第二章 §1 所示.

2. 求過圓錐曲線上一定點且具定向之直線,與此圓錐曲線之另一交點.

設 f, g, h 爲圓錐曲線上一定點之位標; α, β, γ 爲任何他點之位標,則對於此兩點之聯線上之各點,下舉三者

$$\alpha-f,\ \beta-g,\ \gamma-h$$

之比值,恆爲一定.命其比爲 $p:q:r$. 並設

$$\frac{\alpha-f}{p}=\frac{\beta-g}{q}=\frac{\gamma-h}{r}=s.$$

欲求此直線與圓錐曲線之交點，須就圓錐曲線之方程式中，以 $f+ps$ 代 α, $g+qs$ 代 β, $h+rs$ 代 γ. 就代入之結果，依 s 之降冪序排列之，得

$$\phi(f,\ g,\ h)+2\{(up+w'q+v'r)f+(w'p+vq+u'r)g$$
$$+(v'p+u'q+ur)h\}s+\phi(p,q,r)s^2=0.$$

視之爲 s 之二次方程式，則其兩根卽爲此直線與圓錐曲線之兩交點矣.

由題設，已知 $(f,\ g\ h)$ 爲此曲線上之一點，故 $\phi(f,g,h)=0$. 因之，此方程式有一根爲零，卽相當於定點 $(f,\ g,\ h)$ 者.其他之根，相當於另一交點者爲

$$-2\frac{(up+w'q+v'r)f+(w'p+vq+u'r)g+(v'p+u'q+wr)h}{\phi(p,\ q,\ r)},$$

由此可求得 α,β,γ 之値矣.

此 s 之値，此後將用之爲參考之資料.

3.　求定點上之切線之方程式.

設一直線與一圓錐曲線之兩交點無限接近時，則 § 2 中之 s 之値必爲零.因得

$$(up+w'q+v'r)f+(w'p+vq+u'r)g+(v'p+u'q+wr)h=0,$$

或

$$(uf+w'g+v'h)p+(w'f+vg+u'h)q+(v'f+u'g+wh)r=0.$$

又因在此所求線上之任何點，恆有次之關係：

$$\frac{\alpha-f}{p}=\frac{\beta-g}{q}=\frac{\gamma-h}{r},$$

故得

$$(uf+w'g+v'h)\alpha+(w'f+vg+u'h)\beta+(v'f+u'g+wh)\gamma$$
$$=uf^2+vg^2+wh^2+2u'gh+2v'hf+2w'fg$$
$$=0. \qquad [\text{因 } (f,g,h) \text{ 在此圓錐曲線上}]$$

故 (f, g, h) 點上之切線之方程式爲

$$(uf+w'g+v'h)\alpha+(w'f+vg+u'h)\beta+(v'f+u'g+wh)\gamma=0.$$

【注意】 凡已習微分學者，可知此式可書爲

$$\frac{d\phi}{df}\alpha+\frac{d\phi}{dg}\beta+\frac{d\phi}{dh}\gamma=0.$$

4. 求一定線與圓錐曲線相切之條件.

設定線之方程式爲

$$l\alpha+m\beta+n\gamma=0.$$

並設 (f, g, h) 爲切線之位標.就此方程式與上節所得之切線之方程式比較之，可見

$$\frac{uf+w'g+v'h}{l}=\frac{w'f+vg+u'h}{m}=\frac{v'f+u'g+wh}{n}.$$

命其值爲 $-k$，則得

$$uf+w'g+v'h+lk=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$w'f+vg+u'h+mk=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$v'f+u'g+wh+nk=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

又因 (f, g, h) 爲此線上之點，故

$$lf+mg+nh=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

由 (1), (2), (3), (4) 以消去 f, g, h, k；得

$$\begin{vmatrix} u, & w', & v', & l \\ w', & v, & u', & m \\ v', & u', & w, & n \\ l, & m, & n, & 0 \end{vmatrix}=0,\text{ 或 }\begin{vmatrix} \frac{d^2\phi}{d\alpha^2}, & \frac{d^2\phi}{d\alpha d\beta}, & \frac{d^2\phi}{d\alpha d\gamma}, & l \\ \frac{d^2\phi}{d\beta d\alpha}, & \frac{d^2\phi}{d\beta^2}, & \frac{d^2\phi}{d\beta d\gamma}, & m \\ \frac{d^2\phi}{d\gamma d\alpha}, & \frac{d^2\phi}{d\gamma d\beta}, & \frac{d^2\phi}{d\gamma^2}, & n \\ l, & m, & n, & 0 \end{vmatrix}=0,$$

爲直線 (l, m, n) 切於圓錐曲線 $\phi(\alpha\ \beta,\gamma)=0$ 之必須條件。

展開之，得

$$\begin{aligned}(vw-u'^2)l^2+(wu-v'^2)m^2+(uv-w'^2)n^2 \\ +2(v'w'-uu')mn+2(w'u'-vv')nl \\ +2(u'v'-ww')lm=0.\end{aligned}$$

5. 上式中 $l^2, m^2, n^2, 2mn, 2nl, 2lm$ 之係數，各爲

$$\begin{vmatrix} u, & w', & v' \\ w', & v, & u' \\ v', & u', & w \end{vmatrix}$$

之子行列式，此後將常用之．故爲便利計，各以一字母代之如下：

命　$vw-u'^2=U,\quad wu-v'^2=V,\quad uv-w'^2=W,$

$$v'w'-uu'=U',\ w'u'-vv'=V',\ u'v'-ww'=W'.$$

於是§4之相切之條件，可書爲

$$Ul^2+Vm^2+Wn^2+2U'mn+2V'nl+2W'lm=0;$$

此式亦爲一點 (l, m, n) 在一圓錐曲線

$$U\alpha^2+V\beta^2+W\gamma^2+2U'\beta\gamma+2V'\gamma\alpha+2W'\alpha\beta=0$$

之條件．

6. 求此圓錐曲線爲一拋物線之條件．

因凡拋物線必與無窮遠線相切．故所求之條件，可由前節所得之條件式中，用 a, b, c 代 l, m, n 以求之．如是，得係數間之必須且充分之關係爲

$$\begin{vmatrix} u, & w', & v', & a \\ w', & u, & u', & b \\ v', & u', & w, & c \\ a, & b, & c, & 0 \end{vmatrix}=0,$$

或 $$Ua^2+Vb^2+Wc^2+2U'bc+2V'ca+2W'ab=0.$$

7. 求此圓錐曲線縮成爲兩直線(實線或虛線)之條件.

是卽 $\phi(\alpha, \beta, \gamma)$ 須能分解爲兩一次因式爲必須且充分之條件也.

由第三章 § 11, 得此條件爲

$$\begin{vmatrix} u, & w', & v' \\ w', & v, & u' \\ v', & u', & w \end{vmatrix}=0,$$

或 $$uvw+2u'v'w'-uu'^2-vv'^2-ww'^2=0.$$

8. 求一定點關於此圓錐曲線之極線之方程式.

設過此定點作任一直線,交圓錐曲線於兩點.於每一交點上,作圓錐曲線之切線,則此兩切線之交點之軌跡,卽爲此定點之極線也.

今求定點 (f, g, h) 之極線如下:

設過定點 (f, g, h) 之直線交圓錐曲線於兩點 f_1, g_1, h_1 及 f_2, g_2, h_2;則因此三點 (f, g, h),(f_1, g_1, h_1),(f_2, g_2, h_2) 在一直線上,

$$f(g_1h_2-g_2h_1)+g(h_1f_2-h_2f_1)+h(f_1g_2-f_2g_1)=0\cdots\cdots(1)$$

(見第一章 § 12).又 (f_1, g_1, h_1) 及 (f_2, g_2, h_2) 兩點上之切線之方程式爲

$$f_1(u\alpha+w'\beta+v'\gamma)+g_1(w'\alpha+v\beta+u'\gamma)$$
$$+h_1(v'\alpha+u'\beta+w\gamma)=0$$

及
$$f_2(u\alpha+w'\beta+v'\gamma)+g_2(w'\alpha+v\beta+u'\gamma)$$
$$+h_2(v'\alpha+u'\beta+w\gamma)=0.$$

相交時，得

$$\frac{u\alpha+w'\beta+v'\gamma}{g_1h_2-g_2h_1}=\frac{w'\alpha+v\beta+u'\gamma}{h_1f_2-h_2f_1}=\frac{v'\alpha+u'\beta+w\gamma}{f_1g_2-f_2g_1} \quad\cdots\cdots (2)$$

由 (1) 及 (2)，得

$$f(u\alpha+w'\beta+v'\gamma)+g(w'\alpha+v\beta+u'\gamma)$$
$$+h(v'\alpha+u'\beta+w\gamma)=0,$$

或
$$(uf+w'g+v'h)\alpha+(w'f+vg+u'h)\beta$$
$$+(v'f+u'g+wh)\gamma=0.$$

此關係式，於兩切線之交點上恆眞．且此式與 f_1, g_1, h_1 及 f_2, g_2, h_2 之值無關，故爲此兩切線之交點之軌跡．質言之，設過定點 (f, g, h) 之直線與圓錐曲線相交於兩點．於此兩交點上作切線，則其交點之軌跡，可用上式表之．故上式卽爲定點 (f, g, h) 之極線．

此式又可書之爲

$$\frac{d\phi}{df}\alpha+\frac{d\phi}{dg}\beta+\frac{d\phi}{dh}\gamma=0.$$

此方程式與前節 (§ 3) 之定點 (f, g, h) 上之切線之方程式雷同. 事實上, 若點 (f, g, h) 在圓錐曲線上,則此點上之切線與其極線密合.

9. 求一定直線之極點之位標.

設巳知直線之方程式爲

$$l\alpha+m\beta+n\gamma=0.$$

若 (f, g, h) 爲其極點之位標, 應用上節所得之定點 (f, g, h) 之極線之方程式,則必有次之關係:

$$\frac{uf+w'g+v'h}{l}=\frac{w'f+vg+u'h}{m}=\frac{v'f+u'g+wh}{n}.$$

命其値爲 $-k$, 則得

$$uf+w'g+v'h+lk=0,$$

$$w'f+vg+u'h+mk=0,$$

$$v'f+u'g+wh+nk=0.$$

因之,得

$$\frac{f}{\begin{vmatrix} w', & v', & l \\ v, & u', & m \\ u', & w, & n \end{vmatrix}}=\frac{g}{\begin{vmatrix} u', & w', & m \\ w, & v', & n \\ v', & u, & l \end{vmatrix}}=\frac{h}{\begin{vmatrix} v', & u', & n \\ u, & w', & l \\ w', & v, & m \end{vmatrix}}.$$

將此式與 $af+bg+ch=2\Delta$

合解之,則可得極點之位標矣:

$$\frac{f}{Ul+W'm+V'n}=\frac{g}{W'l+Vm+U'n}=\frac{h}{V'l+U'm+Wn}.$$

10. 求過圓錐曲線外一定點所作之兩切線之方程式.

就此方程式論之:

$$\phi(\alpha,\beta,\gamma)+k\{(uf+w'g+v'h)\alpha+(w'f+vg+u'h)\beta$$
$$+(v'f+u'g+wh)\gamma\}^2=0,$$

k 爲任意常數.

此式爲二次方程式,故其圖象爲一圓錐曲線.且此圓錐曲線與已知圓錐曲線 $\phi(\alpha,\beta,\gamma)=0$ 相交之兩點,亦即此圓錐曲線與直線

$$(uf+w'g+v'h)\alpha+(w'f+vg+u'h)\beta$$
$$+(v'f+u'g+wh)\gamma=0$$

相交之兩點.且除此兩點之外,不能更有其他之交點矣.

蓋就普通之情形論之,兩圓錐曲線相交於四點,故知此時其四交點兩兩密合. 是即此兩圓錐曲線相切於上述之直線上之兩交點也;或即此兩圓錐曲線有二重切點 (double contact).

欲定常數 k, 可令此圓錐曲線通過某一定點. 今設命此圓錐曲線通過聯兩切點之線之極點 (f, g, h). 於是,得

$$\phi(f, g, h)+k\{(uf+w'g+v'h)f+(w'f+vg+u'h)g + (v'f+u'g+wh)h\}^2=0,$$

以求 k 之値.由此式,得

$$k=-\frac{1}{\phi(f, g, h)}.$$

故此方程式

$$\phi(f, g, h)\ \phi(\alpha, \beta, \gamma)-\{(uf+w'g+v'h)\alpha + (w'f+vg+u'h)\beta+(v'f+u'g+wh)\gamma\}^2=0$$

代表一二次之曲線,通過定點 (f, g, h), 且切圓錐曲線 $\phi(\alpha, \beta, \gamma)=0$ 於其極線與後者之交點. 故此曲線顯見其密合於過定點 (f, g, h) 至 $\phi(\alpha, \beta, \gamma)=0$ 之兩切線矣.

此方程式又可用他式表之. 蓋若直接展開之,則得 α^2 之係數爲

$$u(uf^2+vg^2+wh^2+2u'gh+2v'hf+2w'fg)$$
$$\quad-(u^2f^2+w'^2g^2+v'^2h^2+2v'w'gh+2uv'hf+2uw'fg)$$
$$=(uv-w'^2)g^2+(wu-v'^2)h^2+2(uu'-v'w')gh$$
$$=Wg^2+Vh^2-2U'gh.$$

$2\beta\gamma$ 之係數爲

$$u'(uf^2+vg^2+wh^2+2u'gh+2v'hf+2w'fg)$$
$$\quad-(w'f+vg+u'h)(v'f+ug+wh)$$
$$=(uu'-v'w')f^2+(u'^2-vw)gh+(u'v'+ww')hf$$
$$\quad+(w'u'-vv')fg$$
$$=-U'f^2-Ugh+W'hf+V'fg.$$

同理，得 $\beta^2, \gamma^2, 2\gamma\alpha, 2\alpha\beta$ 等之係數，各呈相似之形。

故得過定點 (f, g, h) 之兩切線之方程式爲

$$(Wg^2+Vh^2-2U'gh)\alpha^2+(Uh^2+Wf^2-2V'hf)\beta^2$$
$$\quad+(Vf^2+Ug^2-2W'fg)\gamma^2$$
$$\quad-2(U'f^2+Ugh-W'hf-V'fg)\beta\gamma$$
$$\quad-2(V'g^2+Vhf-U'fg-W'gh)\gamma\alpha$$
$$\quad-2(W'h^2+Wfg-V'gh-U'hf)\alpha\beta$$
$$=0$$

若定點 (f, g, h) 在圓錐曲線內，則兩切線為虛線。

11. 求圓錐曲線之中心之位標.

設過圓錐曲線之中心作一弦，則其端點上之切線必互相平行。故知中心之極線必在無窮遠處。可用下式表之：

$$a\alpha+b\beta+c\gamma=0.$$

設 $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ 為中心之位標，則用與 §9 相似之法，得

$$\left.\begin{aligned} u\bar{\alpha}+w'\bar{\beta}+v'\bar{\gamma}+ak=0, \\ w'\bar{\alpha}+v\bar{\beta}+u'\bar{\gamma}+bk=0, \\ v'\bar{\alpha}+u'\bar{\beta}+w\bar{\gamma}+ck=0. \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

由是，得

$$\frac{\bar{\alpha}}{\begin{vmatrix} w', & v', & a \\ v, & u', & b \\ u', & w, & c \end{vmatrix}}=\frac{\bar{\beta}}{\begin{vmatrix} u', & w', & b \\ w, & v', & c \\ v', & u, & a \end{vmatrix}}=\frac{\bar{\gamma}}{\begin{vmatrix} v', & u', & c \\ u, & w', & a \\ w', & v, & b \end{vmatrix}}$$

$$=\frac{-k}{\begin{vmatrix} u, & w', & v' \\ w', & v, & u' \\ v', & u', & w \end{vmatrix}},$$

或

$$\frac{\bar{\alpha}}{Ua+W'b+V'c}=\frac{\bar{\beta}}{W'a+Vb+U'c}=\frac{\bar{\gamma}}{V'a+U'b+Wc}$$

$$=-\frac{k}{uvw+2u'v'w'-uu'^2-vv'^2-ww'^2}.$$

而中心於以定矣.

12. 求漸近線 (asymptotes) 之方程式.

命 $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ 爲 § 10 中之 f, g, h. 並顧及 § 11 之 (A) 式, 則可得兩漸近線之方程式爲

$$\phi(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma})\cdot\phi(\alpha, \beta, \gamma)-\{(a\alpha+b\beta+c\gamma)^2\}\cdot k^2=0,$$

或 $$\phi(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma})\cdot\phi(\alpha, \beta, \gamma)-(2\Delta)^2\cdot k^2=0.$$

以 $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ 依次各乘 (A) 之各式,再加之,得

$$\phi(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma})+2\Delta\cdot k=0.$$

故兩漸近線可用下式

$$\phi(\alpha, \beta, \gamma)-\phi(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma})=0,$$

或 $$\phi(\alpha, \beta, \gamma)+2\Delta\cdot k=0$$

表之.此式又可用齊次式表之爲

$$(a\bar{\alpha}+b\bar{\beta}+c\bar{\gamma})\cdot\phi(\alpha, \beta, \gamma)+k(a\alpha+b\beta+c\gamma)^2=0.$$

但由 § 11 之最後之結果,知

$$\frac{a\bar{\alpha}+b\bar{\beta}+c\bar{\gamma}}{k}=-\frac{Ua^2+Vb^2+Wc^2+2U'bc+2V'ca+2W'ab}{uvw+2u'v'w'-uu'^2-vv'^2-ww'^2}.$$

故漸近線之方程式成爲

$$(Ua^2+Vb^2+Wc^2+2U'bc+2V'ca+2W'ab)\cdot\phi(\alpha,\beta,\gamma)$$
$$-(uvw+2u'v'w'-uu'^2-vv'^2-ww'^2)(a\alpha+b\beta+c\gamma)^2=0.$$

又可書之爲

$$\begin{vmatrix} u, & w', & v', & a \\ w', & v, & u', & b \\ v', & u', & w, & c \\ a, & b, & c, & 0 \end{vmatrix}\cdot\phi(\alpha,\beta,\gamma)+\begin{vmatrix} u, & w', & v' \\ w', & v, & u' \\ v', & u', & w \end{vmatrix}(a\alpha+b\beta+c\gamma)^2=0.$$

系　由上可知若 $\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\gamma}$ 爲圓錐曲線

$$\phi(\alpha,\beta,\gamma)=u\alpha^2+v\beta^2+w\gamma^2+2u'\beta\gamma+2v'\gamma\alpha+2w'\alpha\beta=0$$

之中心，則

$$\phi(\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\gamma})=-\frac{\begin{vmatrix} u, & w', & v' \\ w', & v, & u' \\ v', & u', & w \end{vmatrix}\cdot 4\Delta^2}{\begin{vmatrix} u, & w', & v', & a \\ w', & v, & u', & b \\ v', & u', & w, & c \\ a, & b, & c, & 0 \end{vmatrix}}$$

13. 求一圓錐曲線爲等軸雙曲線 (rectangular hyperbola) 之條件.

設兩漸近線之方程式爲

$$l\alpha+m\beta+n\gamma=0,$$

$$l'\alpha+m'\beta+n'\gamma=0;$$

則此兩直線互相垂直之條件爲

$$ll'+mm'+nn'-(mn'+m'n)\cos A-(nl'+n'l)\cos B$$

$$-(lm'-l'm)\cos C=0.$$

命 $Ua^2+Vb^2+Wc^2+2U'bc+2V'ca+2W'ab=D,$

$$uvw+2u'v'w'-uu'^2-vv'^2-ww'^2=K.$$

於是得 (參閱 § 12)

$$\frac{ll'}{Du-Ka^2}=\frac{mm'}{Dv-Kb^2}=\frac{nn'}{Dw-Kc^2}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}(mn'+m'n)}{Du'-Kbc}=\frac{\frac{1}{2}(nl'+n'l)}{Dv-Kca}=\frac{\frac{1}{2}(lm'+l'm)}{Dw'-Kab}.$$

故所求之條件爲

$$D(u+v+w-2u'\cos A-2v'\cos B-2w'\cos C)$$

$$-K(a^2+b^2+c^2-2bc\cos A-2ca\cos B-2ab\cos C)\equiv 0.$$

但 $a^2+b^2+c^2-2bc\cos A-2ca\cos B-2ab\cos C\equiv 0,$

故所求之條件爲

$$u+v+w-2u'\cos A-2v'\cos B-2w'\cos C=0.$$

系 由此可知基本三角形上之圓錐曲線

$$u'\beta\gamma+v'\gamma\alpha+w'\alpha\beta=0$$

成爲等軸雙曲線之條件爲

$$u'\cos A+v'\cos B+w'\cos C=0,$$

此卽圓錐曲線必通過下列之方程式所定之點

$$\alpha\cos A=\beta\cos B=\gamma\cos C.$$

此點（見第一章 §5）卽基本三角形之三高線之交點。因此得幾何命題如下："凡外接於基本三角形之等軸雙曲線必通過該三角形之垂心。"

又若 u', v', w' 皆等於零，則本節之條件成爲

$$u+v+w=0,$$

因以證明：設 $u\alpha^2+v\beta^2+w\gamma^2=0$ 爲一等軸雙曲線之方程式，則此雙曲線必通過四定點，其位標之關係如下：

$$\alpha=\beta=\gamma,\ -\alpha=\beta=\gamma,\ \alpha=-\beta=\gamma,\ \alpha=\beta=-\gamma.$$

換言之，設一等軸雙曲線與一三角形有如次之關係：對於此雙曲線而言，三角形之任一頂點皆爲其對邊之極點者，則此雙曲線必通過三角形之內心及三傍心。

14. 求二次方程之通式表示一圓之條件.

過一定點作一圓之弦，則所得兩線段之積爲一常數.此爲圓之特性，而爲吾人解此題時所將據爲研究之資料者.

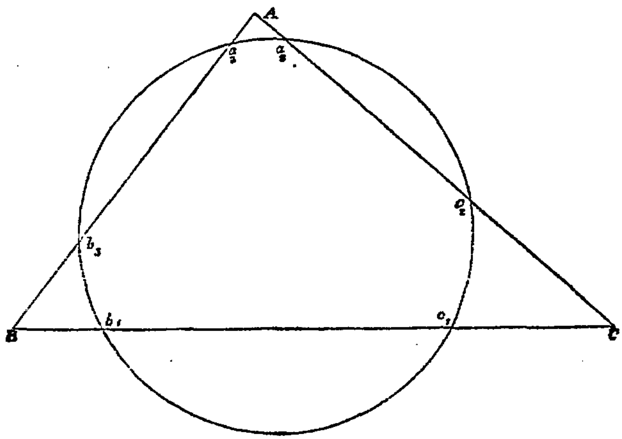


圖 17

設二次曲線

$$u\alpha^2+v\beta^2+w\gamma^2+2u'\beta\gamma+2v'\gamma\alpha+2w'\alpha\beta=0,$$

交 BC 於 b_1, c_1;交 CA 於 c_2, a_2;交 AB 於 a_3, b_3.

若此圓錐曲線爲圓，則

$$Ac_2\cdot Aa_2=Aa_3\cdot Ab_3,\quad Ba_3\cdot Bb_3=Bb_1\cdot Bc_1,$$

$$Cb_1\cdot Cc_1=Cc_2\cdot Ca_2.$$

命 h, h' 爲由 c_2, a_2 至 AB 之垂距; g, g' 爲由 a_3, b_3 至 AC 之垂距.以 $\sin^2 A$ 乘上列之第一式,得

$$hh' = gg'.$$

而 h, h' 之值係由原二次方程式中命 $\beta = 0$ 所得之 γ 之值.又當 $\beta = 0$ 時,得 $a\alpha + c\gamma = 2\Delta$.

由是,得 $u(c\gamma - 2\Delta)^2 + wa^2\gamma^2 + 2av'\gamma(2\Delta - c\gamma) = 0,$ 以定 γ 之值.

由方程式論,知

$$hh' = \frac{u \cdot 4\Delta^2}{uc^2 + wa^2 - 2v'ca}.^{*}$$

同理,得 $$gg' = \frac{u \cdot 4\Delta^2}{va^2 + ub^2 - 2w'ab}.$$

又因 $Ac_2 \cdot Aa_2 = Aa_3 \cdot Ab_3$, 故得

$$uc^2 + wa^2 - 2v'ca = va^2 + ub^2 - 2w'ab.$$

同理,由 $Ba_3 \cdot Bb_3 = Bb_1 \cdot Bc_1$ 之關係,得

$$va^2 + ub^2 - 2w'ab = wb^2 + vc^2 - 2u'bc.$$

由 $Cb_1 \cdot Cc_1 = Cc_2 \cdot Ca_2$ 之關係,得

$$wb^2 + vc^2 - 2u'bc = uc^2 + wa^2 - 2v'ca,$$

後之一式又可由前兩式推得之.故得

* 二次方程式中,兩根之積,等於常數項除以二次項之係數.

$$wb^2+vc^2-2u'bc=uc^2+wa^2-2v'ca=va^2+ub^2-2w'ab$$

爲二次方程式爲圓之必須條件．此條件有二，故又爲充分之條件．

15.　求圓與無窮遠線之交點．

因無窮遠線上之點，皆適合 $a\alpha+b\beta+c\gamma=0$. 故如以

$$\alpha^2=-\frac{c\gamma\alpha+b\alpha\beta}{a},$$

$$\beta^2=-\frac{a\alpha\beta+c\beta\gamma}{b},$$

$$\gamma^2=-\frac{b\beta\gamma+a\gamma\alpha}{c}$$

等代入下之二次式

$$u\alpha^2+v\beta^2+w\gamma^2+2u'\beta\gamma+2v'\gamma\alpha+2w'\alpha\beta=0,$$

則得
$$\left(2u'-\frac{vc}{b}-\frac{wb}{c}\right)\beta\gamma+\left(2v'-\frac{wa}{c}-\frac{uc}{a}\right)\gamma\alpha$$
$$+\left(2w'-\frac{ub}{a}-\frac{va}{b}\right)\alpha\beta=0;$$

或以 abc 乘之，得

$$(2u'bc-vc^2-wb^2)a\beta\gamma+(2v'ca-wa^2-uc^2)b\gamma\alpha$$
$$+(2w'ab-ub^2-va^2)c\alpha\beta=0,$$

若此曲線爲圓，則此式成爲

$$a\beta\gamma+b\gamma\alpha+c\alpha\beta=0,$$

此式顯示凡圓必皆交無窮遠線於相同之兩點，——如基本三角形之外接圓。質言之，即同平面上之諸圓，必皆交無窮遠線於相同之兩點。此兩點爲虛點。

由此可知凡圓必可用下兩式中之一式表之：

$$a\beta\gamma+b\gamma\alpha+c\alpha\beta+(l\alpha+m\beta+n\gamma)(a\alpha+b\beta+c\gamma)=0,$$

$$\sin 2A\cdot\alpha^2+\sin 2B\cdot\beta^2+\sin 2C\cdot\gamma^2$$
$$+(\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma)(a\alpha+b\beta+c\gamma)=0.$$

16. 仿 § 14 之幾何方法，可證明若 ρ_1, ρ_2, ρ_3 爲圓錐曲線內過中心之半直徑 (semi-diameter) 平行於基本三角形之三邊者，則

$$\rho_1^2(wb^2+vc^2-2u'bc)=\rho_2^2(uc^2+wa^2-2v'ca)$$
$$=\rho_3^2(va^2+ub^2-2w'ab).$$

故若兩圓錐曲線相似且在相似之位置時，則此兩圓錐曲線上之比值：

$$wb^2+vc^2-2u'bc : uc^2+wa^2-2v'ca : va^2+ub^2-2w'ab$$

必相等.

故仿 § 15 之法，可知兩圓錐曲線相似且在相似之位置者，必交無窮遠線於相同之兩點。

此兩點爲實點，密合點，或虛點，視乎圓錐曲線之爲雙曲線，拋物線，或橢圓而定.

若兩相似之圓錐曲線在相似之位置且同心者，則必相切於無窮遠線上之交點.

17. 求兩相似之圓錐曲線且在相似之位置者之等冪軸或根軸(radical axis).

設以任意常數乘其一圓錐曲線之方程式，加之於其他之方程式，則所得之方程式爲通過此兩圓錐曲線之四交點之圓錐曲線組.如選定一適當之常數，則可使此方程式之圖象，成爲聯四交點之直線中之一對直線.若兩圓錐曲線相似，且在相似之位置時，則必可求得一常數值，使所得之方程式分解爲兩一次因式.其一因式，令成爲方程式時，卽爲無窮遠線；他一因式之方程式卽所求之根軸之方程式矣.

故若

$$u\alpha^2+v\beta^2+w\gamma^2+2u'\beta\gamma+2v'\gamma\alpha+2w'\alpha\beta=0$$

及
$$p\alpha^2+q\beta^2+r\gamma^2+2p'\beta\gamma+2q'\gamma\alpha+2r'\alpha\beta=0$$

爲兩相似圓錐曲線在相似之位置者，則可定一常數 k 使

$$(u+kp)\alpha^2+(v+kq)\beta^2+(w+kr)\gamma^2+2(u'+kp')\beta\gamma$$
$$+2(v'+kq')\gamma\alpha+2(w'+kr')\alpha\beta$$
$$\equiv(a\alpha+b\beta+c\gamma)\left(\frac{u+kp}{a}\alpha+\frac{v+kq}{b}\beta+\frac{w+kr}{c}\gamma\right).$$

等置兩端 $\beta\gamma, \gamma\alpha, \alpha\beta$ 之係數，得

$$2(u'+kp')=(v+kq)\frac{c}{b}+(w+kr)\frac{b}{c},$$

$$2(v'+kq')=(w+kr)\frac{a}{c}+(u+kp)\frac{c}{a},$$

$$2(w'+kr')=(u+kp)\frac{b}{a}+(v+kq)\frac{a}{b}.$$

$$\therefore\quad k=-\frac{wb^2+vc^2-2u'bc}{rb^2+qc^2-2p'bc}=-\frac{uc^2+wa^2-2v'ca}{pc^2+ra^2-2q'ca}$$
$$=-\frac{va^2+ub^2-2w'ab}{qa^2+pb^2-2r'ab}.$$

（上式中 k 之三個等值乃由相似之條件確定者.）

k 之值又可書爲

$$-\frac{\dfrac{u}{a^2}+\dfrac{v}{b^2}+\dfrac{w}{c^2}-\dfrac{u'}{bc}-\dfrac{v'}{ca}-\dfrac{w'}{ab}}{\dfrac{p}{a^2}+\dfrac{q}{b^2}+\dfrac{r}{c^2}-\dfrac{p'}{bc}-\dfrac{q'}{ca}-\dfrac{r'}{ab}}.$$

故根軸之方程式成爲

$$\frac{\dfrac{u\alpha}{a}+\dfrac{v\beta}{b}+\dfrac{w\gamma}{c}}{\dfrac{u}{a^2}+\dfrac{v}{b^2}+\dfrac{w}{c^2}-\dfrac{u'}{bc}-\dfrac{v'}{ca}-\dfrac{w'}{ab}}=\frac{\dfrac{p\alpha}{a}+\dfrac{q\beta}{b}+\dfrac{r\gamma}{c}}{\dfrac{p}{a^2}+\dfrac{q}{b^2}+\dfrac{r}{c^2}-\dfrac{p'}{bc}-\dfrac{q'}{ca}-\dfrac{r'}{ab}}.$$

13. 今取次之定理，以為此式之應用之一例．

三角形之九點圓(卽過三角形三邊中點之圓)與內切圓及三傍切圓相切．

設內切圓及九點圓之根軸之方程式為

$$\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma=0,$$

則九點圓之方程式為(見第二章 § 10)

$$\begin{aligned}a^2(s-a)^2\alpha^2+b^2(s-b)^2\beta^2+c^2(s-c)^2\gamma^2\\-2bc(s-b)(s-c)\beta\gamma-2ca(s-c)(s-a)\gamma\alpha\\-2ab(s-a)(s-b)\alpha\beta+(\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma)(a\alpha+b\beta+c\gamma)=0.\end{aligned}$$

若此式表示一九點圓，則當 $\alpha=0$ 及 $b\beta=c\gamma$ 時，必能適合．故得

$$(s-b)^2+(s-c)^2-2(s-b)(s-c)+2\left(\frac{\mu}{b}+\frac{\nu}{c}\right)=0,$$

或
$$\frac{\mu}{b}+\frac{\nu}{c}=\frac{(b-c)^2}{2}.$$

同理，得

$$\frac{\nu}{c}+\frac{\lambda}{a}=\frac{(c-a)^2}{2}.$$

及
$$\frac{\lambda}{a}+\frac{\mu}{b}=\frac{(a-b)^2}{2}.$$

$$\therefore\quad \frac{2\lambda}{a}=\frac{(c-a)^2+(a-b)^2-(b-c)^2}{2}$$

$$=(a-b)(a-c).$$

$$\therefore\quad \lambda=\tfrac{1}{2}a(a-b)(a-c).$$

同理，
$$\mu=\tfrac{1}{2}b(b-c)(b-a),$$

$$\nu=\tfrac{1}{2}c(c-a)(c-b).$$

由此得根軸之方程式爲

$$\frac{a\alpha}{b-c}+\frac{b\beta}{c-a}+\frac{c\gamma}{a-b}=0.$$

欲知此直線是否切於內切圓，可應用第二章§9之條件式，以檢視

$$\frac{b-c}{a}\cos^2\frac{A}{2}+\frac{c-a}{b}\cos^2\frac{B}{2}+\frac{a-b}{c}\cos^2\frac{C}{2},$$

或
$$\frac{s}{abc}\{(b-c)(s-a)+(c-a)(s-b)+(a-b)(s-c)\}$$

之值．此值等於零，故知此根軸切於內切圓．因之可知內切圓與九點圓相切矣．同理，可證此九點圓亦與三傍切圓相切．

19.　九點圓之方程式，可用上節之 λ,μ,ν 之值代入

推得之，或利用此曲線

$$u\alpha^2+v\beta^2+w\gamma^2+2u'\beta\gamma+2v'\gamma\alpha+2w'\alpha\beta=0$$

通過三邊中點之一事實，並聯合所得之方程式及 § 14 之結果以求之．較爲明晰．

依第一法，得

$$vc^2+wb^2+2u'bc=0,$$

$$wa^2+uc^2+2v'ca=0,$$

$$ub^2+va^2+2w'ab=0.$$

故由 § 14，得　$u'bc=v'ca=w'ab.$

設 $u'=-a$，則得

$$\frac{v}{b^2}+\frac{w}{c^2}=\frac{2a}{bc}$$

及其他兩類似之式．

故
$$\frac{u}{a^2}=\frac{b^2+c^2-a^2}{abc}=\frac{2\cos A}{a}.$$

$$\therefore\quad u=2a\cdot\cos A.$$

故九點圓之方程式爲

$$a\cos A\cdot\alpha^2+b\cdot\cos B\cdot\beta^2+c\cos C\cdot\gamma^2$$
$$-a\beta\gamma-b\gamma\alpha-c\alpha\beta=0.$$

系　由是可知九點圓必通過其三角形之外接圓與自共

軛圓 (self-conjugate circle) 之交點；或卽諸圓共軸也.

20. 在 § 10 中，已求得過定點 (f, g, h) 所作圓錐曲線之切線之方程式矣. 若此兩切線互相垂直，則可視之爲等軸雙曲線之極限形. 故必須適合 § 13 所得之方程式. 因得互相垂直之兩切線之交點之軌跡爲

$$\begin{aligned}
&Wg^2+Vh^2-2U'gh+Uh^2+Wf^2\\
&\quad-2V'hf+Vf^2+Ug^2-2W'fg\\
&\quad+2(U'f^2+Ugh-V'fg-W'hf)\cos A\\
&\quad+2(V'g^2+Vhf-W'gh-U'fg)\cos B\\
&\quad+2(W'h^2+Wfg-U'hf-V'gh)\cos C=0.
\end{aligned}$$

此式可證其爲一圓 (見 § 1)，如吾人所熟知者.

此式又可用如下之形表之：

$$\begin{aligned}
(af+bg+ch)\Big(&\frac{V+W+2U'\cos A}{a}f+\frac{W+U+2V'\cos B}{b}g\\
&+\frac{U+V+2W'\cos C}{c}h\Big)
\end{aligned}$$

$$-\left(\frac{Ua^2+Vb^2+Wc^2+2U'bc+2V'ca+2W'ab}{abc}\right)(agh+bhf+cfg)$$

$$=0.$$

若圓錐曲線爲一拋物線，則此式分解爲兩因式，其一爲

無窮遠線，其一即其準線．蓋即拋物線上兩互相垂直之切線之交點之軌跡也．

上述之結果，謂必含有無窮遠線爲其一因式之理由，可解釋之如下：因凡拋物線必切於無窮遠線．而此線又適合其垂直於任何直線之一條件．蓋不論 l, m, n 之值如何，

$$al+bm+cn-(bn+cm)\cos A-(cl+an)\cos B$$
$$-(am+bl)\cos C$$

恆等於零故也．故必爲兩垂直切線之交點之軌跡之一部分．而此兩切線即無窮遠線及任何之一切線也．

故得拋物線之準線之方程式爲

$$\frac{V+W+2U'\cos A}{a}\alpha+\frac{W+U+2V'\cos B}{b}\beta$$
$$+\frac{U+V+2W'\cos C}{c}\gamma=0.$$

21.　求圓錐曲線兩軸之長．

設 $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ 爲中心之位標．命

$$\alpha-\bar{\alpha}=x,\ \beta-\bar{\beta}=y,\ \gamma-\bar{\gamma}=z.$$

設 r 爲由中心至 α, β, γ 之半直徑 (semi-diameter)，則得(見第一章 § 3)

$$r^2=\frac{abc}{4\Delta^2}(a\cos A\cdot x^2+b\cos B\cdot y^2+c\cos C\cdot z^2)\cdots\cdots(1)$$

又由圓錐曲線之方程式，得

$$0=\phi(\alpha,\beta,\gamma)=\phi(\bar{\alpha}+x,\bar{\beta}+y,\bar{\gamma}+z)$$

$$=\phi(\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\gamma})+2x(u\bar{\alpha}+w'\bar{\beta}+v'\bar{\gamma})$$

$$+2y(w'\bar{\alpha}+v\bar{\beta}+u'\bar{\gamma})$$

$$+2z(v'\bar{\alpha}+u'\bar{\beta}+w\bar{\gamma})+\phi(x,y,z).$$

由本章之§11，得

$$\frac{u\bar{\alpha}+w'\bar{\beta}+v'\bar{\gamma}}{a}=\frac{w'\bar{\alpha}+v\bar{\beta}+u'\bar{\gamma}}{b}=\frac{v'\bar{\alpha}+u'\bar{\beta}+w\bar{\gamma}}{c}.$$

又

$$ax+by+cz=a(\alpha-\bar{\alpha})+b(\beta-\bar{\beta})+c(\gamma-\bar{\gamma}=0\cdots\cdots(2)$$

$$\therefore\quad \phi(x,y,z)=-\phi(\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\gamma}),$$

或 $$ux^2+vy^2+wz^2+2u'yz+2v'zx+2w'xy$$

$$=\frac{\begin{vmatrix} u, & w', & v' \\ w', & v, & u' \\ v', & u', & w \end{vmatrix}\cdot(2\Delta)^2}{\begin{vmatrix} u, & w', & v', & a \\ w', & v, & u', & b \\ v', & u', & w, & c \\ a, & b, & c, & 0 \end{vmatrix}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(見§13之系)

因圓錐曲線之兩半軸之長，即其最大及最小之半直徑．故宜取

$$\frac{4\Delta^2}{abc}r^2 = a\cos A\cdot x^2 + b\cos B\cdot y^2 + c\cos C\cdot z^2 \cdots\cdots(4)$$

之極大値或極小値．式中之 x, y, z 由 (2) 及 (3) 之關係得之．

今以 2μ 乘 (2)，λ 乘 (4)，並加之於 (3)，再求其微分．更將諸微分係數等置於零，得

$$\left.\begin{aligned} ux + w'y + v'z + \lambda a\cos A\cdot x + \mu a &= 0 \\ w'x + vy + u'z + \lambda b\cos B\cdot y + \mu b &= 0 \\ v'x + u'y + wz + \lambda c\cos C\cdot z + \mu c &= 0 \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(5)$$

以 x, y, z 依次乘此三式，加之，得

$$\frac{\begin{vmatrix} u, & w', & v' \\ w', & v, & u' \\ v', & u', & w \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u, & w', & v', & a \\ w', & v, & u', & b \\ v', & u', & w, & c \\ a, & b, & c, & 0 \end{vmatrix}} + \lambda\frac{r^2}{abc} = 0.$$

以此 λ 之值代入 (5) 式．並聯合 (2) 式以消去 x, y, z, μ

則可得一二次式

$$\begin{vmatrix} \left(\dfrac{as\cos A}{r^2}-u\right), & -w', & -v', & a \\ -w', & \left(\dfrac{bs\cos B}{r^2}-v\right), & -u', & b \\ -v', & -u', & \left(\dfrac{cs\cos C}{r^2}-w\right), & c \\ a, & b, & c, & 0 \end{vmatrix}=0,$$

以定 $1/r^2$ 之值.式中之

$$s=\frac{abc\begin{vmatrix} u, & w', & v' \\ w', & v, & u' \\ v', & u', & w \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u, & w', & v', & a \\ w', & v, & u', & b \\ v', & u', & w, & c \\ a, & b, & c, & 0 \end{vmatrix}}.$$

兩半軸於是定矣。

22. 求圓錐曲線之面積。

上式中 $1/r^4$ 之係數爲

$$-abcs^2(a\cos B\cos C+b\cos C\cos A+c\cos A\cos B),$$

卽等於

$$-\frac{a^2b^2c^2s^2}{2\Delta}(\sin A\cos B\cos C+\sin B\cos C\cos A$$

$$+\sin C\cos A\cos B)$$

$$=-\frac{a^2b^2c^2s^2}{2\Delta}\cdot\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C=-4\Delta^2s^2.$$

不含 r^2 之項爲

$$\begin{vmatrix} u, & w', & v', & a \\ w', & v, & u', & b \\ v', & u', & w, & c \\ a, & b, & c, & 0 \end{vmatrix}$$

故 r^2 之兩値之積等於

$$-\frac{4\Delta^2s^2}{\begin{vmatrix} u, & w', & v', & a \\ w', & v, & u', & b \\ v', & u', & w, & c \\ a, & b, & c, & 0 \end{vmatrix}}.$$

故此圓錐曲線之面積爲

$$2\pi\cdot\Delta abc\frac{\begin{vmatrix} u, & w', & v' \\ w', & v, & u' \\ v', & u', & w \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u, & w', & v', & -a \\ w', & v, & u', & -b \\ v', & u', & w, & -c \\ a, & b, & c, & 0 \end{vmatrix}^{\frac{3}{2}}}.$$

由上之研究，又可得一方法，以爲橢圓或雙曲線之檢定之準則．因雙曲線中 r^2 之兩值異號，故圓錐曲線之爲橢圓或爲雙曲線，視乎

$$\begin{vmatrix} u, & w', & v', & a \\ w', & v, & u', & b \\ v', & u', & w, & c \\ a, & b, & c, & 0 \end{vmatrix}$$

之爲負或正而定；或即視乎

$$Ua^2+Vb^2+Wc^2+2U'bc+2V'ca+2W'ab$$

之爲正或負而定．

習 題

1. 設聯三角形之各頂點至兩定點，則諸聯線各交其

對邊之六點在一圓錐曲線上。

2. 一圓錐曲線切於三定線且過一定點。試證其中心之軌跡爲一圓錐曲線。

試用幾何學之辭意，表述此定點與諸定線之互相關係之位置，使其中心之軌跡能爲一圓。

並求此定點之軌跡，使其中心之軌跡爲一等軸雙曲線。

3. 四定線中每三線所成之三角形，關於四定圓中之各相當圓爲自共軛三角形。試證此四圓共軸。

4. 設六點 A, B, C, A', B', C' 之聯線 $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ 對於一圓錐曲線而言，各爲 A, B, C 之極線。試證：此三線 AA', BB', CC' 相交於一點。

又 BC 與 $B'C'$ 之交點，CA 與 $C'A'$ 之交點，AB 與 $A'B'$ 之交點，三者在一直線上。

5. 若兩三角形外接於同一圓錐曲線，則其六頂點在另一圓錐曲線上。

6. 設一圓錐曲線外接於基本三角形；r_1、r_2、r_3 爲各平行於基線之半直徑。試證其方程式爲

$$\frac{a}{r_1^2\alpha}+\frac{b}{r_2^2\beta}+\frac{c}{r_3^2\gamma}=0.$$

7. 設一圓錐曲線恆切於一三角形之邊。試證：

若已知其兩軸之平方和，則其中心之軌跡爲一圓．此圓之圓心，即該三角形之垂心。

8. 設 θ 爲二次方程之通式所代表之圓錐曲線之兩漸近線間之角，試證：

$$\begin{vmatrix} 0, & \sin A, & \sin B, & \sin C \\ \sin A, & u, & w', & v' \\ \sin B, & w', & v, & u' \\ \sin C, & v', & u', & w \end{vmatrix} - (u+v+w-2u'\cos A - 2v'\cos B - 2w'\cos C)^2 \cdot \tan^2\theta = 0.$$

9. 無窮遠線之兩環點 (circular points)，可用下式表之

$$-\alpha = \beta\epsilon^{-\sqrt{-1}C} = \gamma\epsilon^{\sqrt{-1}B},$$

$$-\alpha = \beta\epsilon^{\sqrt{-1}C} = \gamma\epsilon^{-\sqrt{-1}B}$$

10. 試證：基本三角形之內切圓錐曲線之面積，與基本三角形之面積之比，等於

$$2\pi : \left(\frac{a}{d_1} + \frac{b}{d_2} + \frac{c}{d_3}\right);$$

d_1, d_2, d_3 爲平行於 a, b, c 之半直徑。

11. 基本三角形中，角 BAC 之內外平分線，各交 BC

於 L_1 及 L_2; 同理, M_1, M_2 及 N_1, N_2 各爲 CA 及 AB 線上之點. 以 L_1L_2, M_1M_2, N_1N_2 爲直徑作三圓, 則此三圓有共同之根軸, 其方程式爲

$$(b^2-c^2)bc\alpha+(c^2-a^2)ca\beta+(a^2-b^2)ab\gamma=0.$$

12. 試證: 三角形之外接圓, 自共軛圓及九點圓三者共軸.

13. 試證: 由九點圓外一點所作切線之平方之二倍, 等於由同點至外接圓及自共軛圓之兩切線之平方和.

第五章

三角位標*

Triangular Co-ordinates

1. 茲略述一他種之位標系，與前數章所用者不同．點之位標，由另一方面解釋之．卽一點 P 之位置，視爲此三個三角形 PBC, PCA, PAB 之面積與基本三角形 ABC 之面積之比所定者．設 x, y, z 各爲諸面積 $PBC : ABC$, $PCA : ABC, PAB : ABC$ 之比值，則可得次之關係式

$$x+y+z=1.$$

2. 在此位標系中，凡一次方程式皆表示一直線；二次方程式爲一圓錐曲線，與三線位標之情形同．

又因 $x : a\alpha :: y : b\beta :: z : c\gamma$，故若同一直線而用兩種位標系表之，如

$$l\alpha+m\beta+n\gamma=0$$

* 又或稱爲積位標 (areal co-ordinates).

及　　$l'x+m'y+n'z=0.$

則　　$l:l'a::m:m'b::n:n'c.$

故三線位標系中之係數間之關係式，可僅用 la, mb, nc 等各代 l, m, n，則可得三角位標系中諸係數間之關係式矣。同理，在圓錐曲線中，如以

$$ua^2, vb^2, wc^2, u'bc, v'ca, w'ab$$

等代替　　$u, v, w, u', v', w',$

則可由三線位標系中之公式，化成三角位標系中之式矣。

又因　　$U=vw-u'^2,$

故宜以 b^2c^2U 代 U；同理，以 c^2a^2V 代 V，以 a^2b^2W 代 W.

又　　$U'=v\,w'-uu,$

故以 a^2bcU' 代 U'，以 b^2caV' 代 V'，以 c^2abW' 代 W'.

於是得諸公式之綱要如下：

由三角形之角頂至各對邊之中點之直線，其方程式爲

$$y-z=0,\ z-x=0,\ x-y=0.$$

三角形之內角之平分線之方程式各爲

$$\frac{y}{b}-\frac{z}{c}=0,\ \frac{z}{c}-\frac{x}{a}=0,\ \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0.$$

三高線之方程式各爲

$$y\cot B-z\cot C=0,\ z\cot C-x\cot A=0,$$
$$x\cot A-y\cot B=0.$$

兩點間之距離爲

$$\{a^2(y-y')(z'-z)+b^2(z-z')(x'-x)+c^2(x-x')(y'-y)\}^{\frac{1}{2}},$$

或

$$\left\{\frac{(b^2+c^2-a^2)(x-x')^2+(c^2+a^2-b^2)(y-y')^2+(a^2+b^2-c^2)(z-z')^2}{2}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

兩直線 $lx+my+nz=0$ 及 $l'x+m'y+n'z=0$ 互相平行之條件爲

$$\begin{vmatrix} 1, & l, & l' \\ 1, & m, & m' \\ 1, & n, & n' \end{vmatrix}=0,$$

或 $$mn'-m'n+nl'-n'l+lm'-l'm=0.$$

互相垂直之條件爲

$$\begin{aligned}2ll'a^2+2mm'b^2+2nn'c^2-(mn'+m'n)(b^2+c^2-a^2)&\\ -(nl'+n'l)(c^2+a^2-b^2)&\\ -(lm'+l'm)(a^2+b^2-c^2)&=0,\end{aligned}$$

或 $$\begin{aligned}&\{(l-m)(l'-n')+(l-n)(l'-m')\}a^2\\ &+\{(m-n)(m'-l')+(m-l)(m'-n')\}b^2\\ &+\{(n-l)(n'-m')+(n-m)(n'-l')\}c^2=0.\end{aligned}$$

由一點 (x, y, z) 至一直線 $lx+my+nz=0$ 之垂距爲

$$\frac{(lx+my+nz)\cdot 2\Delta}{\{(l-m)(l-n)a^2+(m-n)(m-l)b^2+(n-l)(n-m)c^2\}^{\frac{1}{2}}}.$$

無窮遠線之方程式爲 $x+y+z=0$.

3. 關於圓錐曲線之公式如下:

若
$$\begin{vmatrix} u, & w', & v', & 1 \\ w', & v, & u', & 1 \\ v', & u', & w, & 1 \\ 1, & 1, & 1, & 0 \end{vmatrix}=0,$$

或若 $$U+V+W+2U'+2V'+2W'=0,$$

則圓錐曲線爲一拋物線.

若 $$ua^2+vb^2+wc^2-u'(b^2+c^2-a^2)-v'(c^2+a^2-b^2)$$
$$-w'(a^2+b^2-c^2)=0,$$

或若 $$(u+u'-v'-w')a^2+(v+v'-w'-u')b^2$$
$$+(w+w'-u'-v')c^2=0,$$

則此圓錐曲線爲一等軸雙曲線.

若 $$\frac{v+w-2u'}{a^2}=\frac{w+u-2v'}{b^2}=\frac{u+v-2w'}{c^2},$$

則此圓錐曲線爲一圓.

圓錐曲線之中心爲

$$\frac{\bar{x}}{\begin{vmatrix} w', & v', & 1 \\ v, & u', & 1 \\ u', & w, & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\bar{y}}{\begin{vmatrix} u', & w', & 1 \\ w, & v', & 1 \\ v', & u, & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\bar{z}}{\begin{vmatrix} v', & u', & 1 \\ u, & w', & 1 \\ w', & v, & 1 \end{vmatrix}},$$

或 $$\frac{\bar{x}}{U+V'+W'} = \frac{\bar{y}}{V+W'+U'} = \frac{\bar{z}}{W+U'+V'}.$$

漸近線之方程式爲

$$\begin{vmatrix} u, & w', & v', & 1 \\ w', & v, & u', & 1 \\ v', & u', & w, & 1 \\ 1, & 1, & 1, & 0 \end{vmatrix} \phi(x,y,z) + \begin{vmatrix} u, & w', & v' \\ w', & v, & u' \\ v', & u', & w \end{vmatrix} \cdot (x+y+z)^2 = 0.$$

兩圓 $ux^2+vy^2+wz^2+2u'yz+2v'zx+2w'xy=0$

及 $px^2+qy^2+rz^2+2p'yz+2q'zx+2r'xy=0$

之根軸爲

$$\frac{ux+vy+wz}{u+v+w-u'-v'-w'} = \frac{px+qy+rz}{p+q+r-p'-q'-r'}.$$

無窮遠處之環點爲

$$\frac{x}{a} = \epsilon^{\pm\sqrt{-1}B}\frac{y}{b} = \epsilon^{\pm\sqrt{-1}C}\frac{z}{c}.$$

內切圓之方程式爲

$$(s-a)^2x^2+(s-b)^2y^2+(s-c)^2z^2-2(s-b)(s-c)yz$$
$$-2(s-c)(s-a)zx-2(s-\ )(s-b)xy=0.$$

由一點 (x, y, z) 至圓 $ux^2+\cdots\cdots+2u'yz+\cdots\cdots=0$ 之切線之平方等於

$$\frac{1}{2}\frac{a^2+b^2+c^2}{u+v+w-u'-v'-w'}(ux^2+vy^2+wz^2+2u'yz+2v'zx$$
$$+2w'xy).$$

其他之公式，可依同法修改求得之。

第六章

互對極線*

Reciprocal Polars

1. 互對極性之理論，乃研究關於一圓錐曲線之若干點之極線及諸線之極點二者之關係也．視一圓錐曲線爲一動點之軌跡，則此動點關於一已知圓錐曲線之極線所切之圓錐曲線，其性質可直接由該動點之軌跡之性質推得之．斯卽本章之目的也．若已知之圓錐曲線爲一圓，則互對極理論之爲用尤廣．

2. 兩已知直線之交點之極線，爲此兩直線之極點之聯線．此可由幾何上之極點及極線之定義直接推知之．或用解析法證之如次：

設兩直線之方程式爲

$$l_1\alpha+m_1\beta+n_1\gamma=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

---

* 在本章內"線"之一字，係就廣義而言，卽直線或曲線也．

及 $$l_2\alpha+m_2\beta+n_2\gamma=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

則在其交點上，

$$\frac{\alpha}{m_1n_2-m_2n_1}=\frac{\beta}{n_1l_2-n_2l_1}=\frac{\gamma}{l_1m_2-l_2m_1}.$$

此交點關於圓錐曲線

$$L\alpha^2+M\beta^2+N\gamma^2=0$$

(因吾人恆可選定一適當之基本三角形，使此圓錐曲線之方程式呈如上之形)之極線之方程式爲

$$(m_1n_2-m_2n_1)L\alpha+(n_1l_2-n_2l_1)M\beta$$
$$+(l_1m_2-l_2m_1)N\gamma=0\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

但關於此圓錐曲線，(1) 及 (2) 之極點各爲

$$\frac{L\alpha}{l_1}=\frac{M\beta}{m_1}=\frac{N\gamma}{n_1}$$

及 $$\frac{L\alpha}{l_2}=\frac{M\beta}{m_2}=\frac{N\gamma}{n_2}.$$

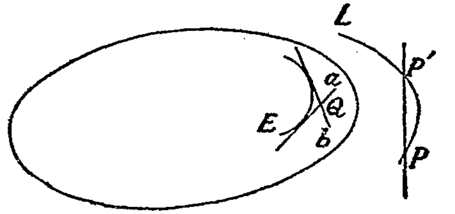
此兩點皆在 (3) 之直線上. 本定理因以證明.

3. 設一點移動，則其極線亦隨之而移動. 且其極線所切之曲線〔稱爲<u>包線</u>(envelope)〕與該動點之軌跡恆有一定之關係. 此動點之軌跡及其極線之包線，互稱爲<u>互對極線</u>. 蓋此動點之軌跡可由其極線之包線而生，一如包線

之可由動點之軌跡而得也."互"字之稱,實由於此.此項性質,可證之如次.爲簡便計,命此動點之軌跡爲 L, 其極線之包線爲 E.

設 P, P' 爲 L 線上之兩點,則弦 PP' 之極點爲 E 線上兩切線之交點(卽 P, P' 關於圓錐曲線之極線之交點也).設 P' 沿 L 線上漸次趨近以至於 P, 則 PP' 之極限位置,成爲 L 線上 P 點之切線;且 P, P' 之極線漸趨漸近,以至於疊合,而其交點成爲 E 線上之一點矣.但 Q* 爲 PP' 之極點,故 E 線上任何點之極線,必爲 L 線上之切線.卽,設一點沿 E 線上移動,則其極線包成 L 線.換言之,L 之可由 E 而生,一如 E 之可從 L 而得也.曲線間之互對極性,實存乎此.

上述之法,從 L 以得 E, 或從 E 以得 L 者,稱爲對極投法.



4. 設曲線L被任一直線所截，則諸交點之極線，必爲E線上過該直線之極點者之若干切線．逆之，由一定點至L所作之若干切線，其極點必爲此定點之極線與E之諸交點．

設兩已知曲線經對極投法，則此兩已知曲線上之公共點之極線，必爲其兩互對極線上之公切線；兩已知曲線上之公切線之極點，必爲其兩互對極線上之交點．是故任何兩曲線之交點之個數，與其兩互對極線上之公切線之數同；又兩曲線上之公切線之數，與其兩互對極線之交點之數同．

若兩曲線相切，則其中之兩交點密合爲一．故其兩互對極線上之兩公切線疊合爲一，而此兩互對極線亦相切矣．

5. 由上所述，可見由一點(不在E或L線上)至E或L之切線(實線或虛線)之總數，等於一直線(非切線者)與L或E之交點(實點或虛點)之數．

設由一點至一曲線可作n切線，則此曲線稱爲n級曲線(n^{th} class). 可用上之命題表述之如次：一曲線之次數與其互對極線之級數同；又一曲線之級數與其互對極線之次數同．

6. 由一定點至一圓錐曲線之切線（實或虛）有二，故一圓錐曲線之互對極線仍必交一直線於兩點（實或虛）．是以一圓錐曲線之互對極線，仍爲一圓錐曲線．

7. 此命題可用解析法證之如次．

定義 極點及極線所關之圓錐曲線，稱爲輔圓錐曲線 (auxiliary conic).

在第二章 § 15 中，已知任何圓錐曲線可用僅含變數之平方者之方程式表之．今設輔圓錐曲線之方程式爲

$$L\alpha^2+M\beta^2+N\gamma^2=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

並設將施行對極投法者之圓錐曲線之方程式爲

$$l\alpha^2+m\beta^2+n\gamma^2=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

設 (f, g, h) 爲所求之曲線上之一點，則此點關於 (1) 之極線之方程式爲

$$Lf\alpha+Mg\beta+Nh\gamma=0.$$

若此直線切於 (2)，則必須（見第二章 § 16）

$$\frac{L^2}{l}f^2+\frac{M^2}{m}g^2+\frac{N^2}{n}h^2=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

視 f, g, h 爲一動點之位標，則 (3) 式即爲 (2) 式關於 (1) 式之互對極線矣．

系　由是可見：關於兩已知圓錐曲線而成一自共軛三角形之三點，關於其一圓錐曲線對於他一圓錐曲線之互對極線，仍成一自共軛三角形.

8. 求圓錐曲線

$$u\alpha^2+v\beta^2+w\gamma^2+2u'\beta\gamma+2v'\gamma\alpha+2w'\alpha\beta=0$$

關於 $$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=0$$

之互對極線.

（此圓錐曲線 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ 爲一虛曲線.但於求一定點之極線或一定線之極點之法無關.質言之，卽不問此輔圓錐曲線之爲虛或實，此法恆可適用.祇須其係數爲實數耳.）

設 f, g, h 爲所求軌跡上之點。此點關於該輔圓錐曲線之極線爲

$$f\alpha+g\beta+h\gamma=0.$$

若此直線切於已知圓錐曲線，則必（第四章 § 4）

$$\begin{vmatrix} 0, & f, & g, & h \\ f, & u, & w', & v' \\ g, & w', & v, & u' \\ h, & v', & u', & w \end{vmatrix}=0,$$

或 $$(vw-u'^2)f^2+(wu-v'^2)g^2+(uv-w'^2)h^2$$

$$+2(v'w'-uu')gh+2(w'u'-vv')hf+2(u'v'-ww')fg\quad 0.$$

如用第四章之表記法，則可書之爲

$$Uf^2+Vg^2+Wh^2+2U'gh+2V'hf+2W'fg=0.$$

此卽所求之方程式也.

同法可證：若 $\phi(\alpha,\beta,\gamma)=0$ 及 $\psi(\alpha,\beta,\gamma)=0$ 爲兩圓錐曲線之方程式，則前者關於後者之互對極線之方程式爲

$$\begin{vmatrix} 0, & \frac{d\psi}{d\alpha}, & \frac{d\psi}{d\beta}, & \frac{d\psi}{d\gamma} \\ \frac{d\psi}{d\alpha}, & \frac{d^2\phi}{d\alpha^2}, & \frac{d^2\phi}{d\alpha d\beta}, & \frac{d^2\phi}{d\alpha d\gamma} \\ \frac{d\psi}{d\beta}, & \frac{d^2\phi}{d\beta d\alpha}, & \frac{d^2\phi}{d\beta^2}, & \frac{d^2\phi}{d\beta d\gamma} \\ \frac{d\psi}{d\gamma}, & \frac{d^2\phi}{d\gamma d\alpha}, & \frac{d^2\phi}{d\gamma d\beta}, & \frac{d^2\phi}{d\gamma^2} \end{vmatrix}=0.$$

9. 因圓錐曲線上直徑兩端之切線互相平行，故中心之極線，必在無窮遠處. 逆之，無窮遠線經對極投法之後，成爲輔圓錐曲線之中心. 因此可知：平行線經對極投法之後，得同在一直線上者之點，此直線通過輔圓錐曲線之中心. 又，任一圓錐曲線之漸近線，因其爲過無窮遠線上之交點之切線，故投成爲互對極線上由輔圓錐曲線之中

心所作之切線之若干切點.

夫雙曲線之漸近線既爲實線,而橢圓之漸近線爲虛線,故由輔圓錐曲線(暫假定其爲實線)之中心至互對極線之切線,或爲實線,或爲虛線,視乎已知曲線之爲雙曲線或橢圓而定.若已知圓錐曲線爲拋物線,則其互對極線必通過此曲線之中心.此與前說之凡拋物線必切於無窮遠線一語脗合.逆之,設一已知圓錐曲線關於另一圓錐曲線以施運對極投法,則其互對極線爲一橢圓,或拋物線,或雙曲線,全視乎其輔圓錐曲線之中心之在於此已知圓錐曲線內,或在其線上或線外而定.

10.　綜合前數節所得之結果,吾人已得有充分之材料,以資易換幾何上之性質之命題——卽僅論及點,線之位置關係,而不問其大小之量者矣.在未繼續討論之前,請先舉數例,以示此法應用之一斑.

先以此命題爲例:"設一三角形之兩頂點,各移動於兩定直線上,且其三邊各通過在一直線上之三定點,則此三角形之第三點之軌跡爲一直線,通過他兩頂點所移動之二直線之交點".

此三角形三邊之互對極線爲三點,可視之爲另一三角

形之三頂點，稱爲互對極之三角形。原三角形三頂點之互對極線，乃其互對極之三角形之三邊。其兩頂點所移動之直線，在互對極圖形中爲兩定點，互對極之三角形之兩邊通過之。原三角形中三邊所通過之三定點，在對極圖形中爲三共點線。互對極之三角形之三頂點，卽係沿此三線上而移動者。故上述命題之題設，由對極投法成爲“設一三角形之兩邊，各通過一已知點，且其三頂點各沿共點之三直線以移動”。至原命題中之題斷所述之第三頂點，此命題中則相當於互對極之三角形之第三邊。原命題中所決定之第三頂點之軌跡，則相當於一點，與兩已知點共線，且其第三邊恆通過之。故在上述情形之下，其互對極之命題之題斷爲“其第三邊恆過一定點，在他兩邊所通過之兩已知點之聯線上”*。

* 上述之定理，可用字母表記之，敍述如次：

設 PQR 爲一已知三角形．Q 點移動於一定線上 OX；R 點移動於另一定線上 OY．並設 QR 恆過一定點 F，RP 恆過一定點 G，PQ 恆過一定點 H；且 F, G, H 三點共線．則 P 點之軌跡爲過 O 點之直線．

今設將此圖象，關於一圓錐曲線施運對極投法．並以表記點者之字母，附加一撇以表其極線．例如命 P 點之極線爲 P'．如是，則兩線 P'，Q' 之交點，將以 $P'Q'$ 表記之．且此點亦卽 PQ 之極點也．因此得一三角形，其三邊爲 P'，Q'，R'．Q' 恆過定點 $O'X'$；R' 恆過定點 $O'Y'$．又點 $Q'R'$ 恆

今反觀第二章之習題 5，而研究其互對極之定理．原題中“於每兩頂上其兩邊之三圓錐曲線”一語，在對極定理中爲“三圓錐曲線，各通過三角形之每兩頂點，且各切於聯此兩頂點至第三頂點之兩直線（此兩直線實卽三角形之邊也）”．又“交於一點”之一條件，在對極定理中爲“切於一直線”，故對極定理中之題設爲“三圓錐曲線，各於一三角形之每兩頂上切其兩邊，且切於同一直線”．

題斷中之部分，吾人須先研究“此三角形中交各圓錐曲線者之邊（不與之相切者）”之對極線爲何．卽“不在各圓錐曲線上之諸頂點”也．又“公共點上之公切線”，在互對極之圖形中爲“諸公切線上之三切點”．“切線交各邊之點”之一語，在互對極之圖形內爲“聯切點至頂點之直線”．故題斷中之前部爲“聯三角形不在圓錐曲線上者之三頂點至諸公切線上三切點之直線，相交於一點”．

又，“每兩圓錐曲線上之其他公切線”，在互對極中爲

沿定線 F' 以移動；$R'P'$ 恆沿 G' 以移動；$P\,Q'$ 恆沿 H' 以移動．此三線 F', G', H' 且共點．於是，在對極定理中之題斷爲“P' 邊恆通過一定點在 Q' 線上”．

上述記號之易換法，以字母代表一直線，而由表兩直線之兩字母以代表其交點．可使讀者對於互對極性之研究，較爲熟識．

“每兩圓錐曲線上之其他之交點”.而“三角形之邊——切於此若干對之圓錐曲線者”,則變成爲三角形之頂點——此若干對之圓錐曲線所公有者”.故題斷中之第二部分爲“此三直線各爲聯結每兩圓錐曲線上其他之交點至三頂點——每兩圓錐曲線所共有者之直線”.

11.　經相當之練習之後,則可見對極投法,不過僅以原定理中之點易爲線,交點易爲聯線,動點之軌跡易以切線之包線,等等耳.反之亦然.至於“圓錐曲線”一詞,則仍舊不變.

12.　**白里安璪氏定理** (Brianchon's theorem)

巴斯閣氏之定理 (第三章 § 12) 依對極投法,則得白里安璪氏之定理如下:

“設一六邊形外切於一圓錐曲線,則其三對角線必相交於一點”*.

讀者可應用對極投法,易換第三章 § 13 之巴氏定理之諸特例.並求一幾何作圖法,使若已知一圓錐曲線之五切線時,則可依此作圖法,以求其切點,其爲用甚廣.

---

* 此重要之定理,茲獨立證之如次:

取六邊形之三邊爲基線.設其餘三邊之方程式爲

$$\alpha+m_1\beta+n_1\gamma=0,\quad l_2\alpha+\beta+n_2\gamma=0,\quad l_3\alpha+m_3\beta+\gamma=0.$$

故此圓錐曲線方程式爲　$(L\alpha)^{\frac{1}{2}}+(M\beta)^{\frac{1}{2}}+(N\gamma)^{\frac{1}{2}}=0.$

13. 設四相交直線成一束線，則其複比等於其四極點之複比。

諸直線與此圓錐曲線相切之條件爲

$$L+\frac{M}{m_1}+\frac{N}{n_1}=0,$$

$$\frac{L}{l_2}+M+\frac{N}{n_2}=0,$$

$$\frac{L}{l_3}+\frac{M}{m_3}+N=0.$$

故

$$\begin{vmatrix} 1, & \frac{1}{m_1}, & \frac{1}{n_1} \\ \frac{1}{l_2}, & 1, & \frac{1}{n_2} \\ \frac{1}{l_3}, & \frac{1}{m_3}, & 1 \end{vmatrix}=0.$$

又聯此兩直線 $\beta=0$ 及 $(l_3, m_3, 1)$ 之交點至此兩直線 $\gamma=0$ 及 $(l_2, 1, n_2)$ 之交點之直線，其方程式爲 $\alpha+\frac{\beta}{l_2}+\frac{\gamma}{l_3}=0.$

同理，他兩對角線之方程式各爲

$$\frac{\alpha}{m_1}+\beta+\frac{\gamma}{m_3}=0 \text{ 及 } \frac{\alpha}{n_1}+\frac{\beta}{n_2}+\gamma=0.$$

若此三對角線相交於一點，則必

$$\begin{vmatrix} 1, & \frac{1}{m_1}, & \frac{1}{n_1} \\ \frac{1}{l_2}, & 1, & \frac{1}{n_2} \\ \frac{1}{l_3}, & \frac{1}{m_3}, & 1 \end{vmatrix}=0,$$

與上之結果相符。

證之如下：

設 OP, OQ, OR, OS 爲四共點線．其極點各爲 P', Q', R', S'．此四點必在同一直線上．並設 P, Q, R, S 爲截線 $P'Q'R'S'$ 與此束線之交點．

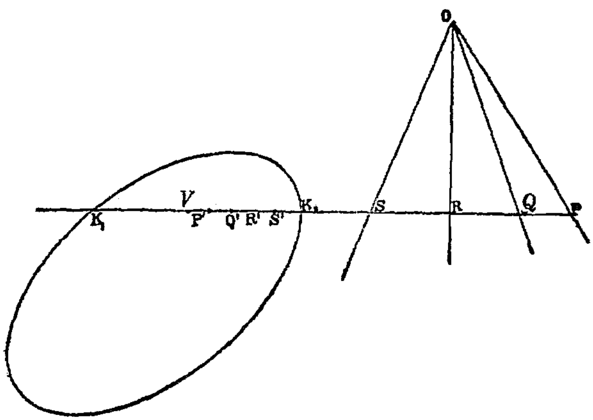


圖 18

命此截線與圓錐曲線之交點爲 K_1 及 K_2．平分 K_1K_2 於 V．因 $PK_1P'K_2$ 被 P, K_1, P', K_2 諸點分成調和比(見第二章 § 21)．故

$$PK_1 \cdot P'K_2 = PK_2 \cdot P'K_1.$$

因之，
$$(VP - VK_1)(VK_2 + VP')$$
$$= (VP + VK_2)(VK_1 - VP'),$$

又因　$$VK_1=VK_2.$$

故此式化爲　$$VP\cdot VP'=VK_1^2.$$

由同理，可知亦必等於

$$VQ\cdot VQ'=VR\cdot VR'=VS\cdot VS'.$$

故知此八點 $P, Q, R, S, P', Q', R', S'$ 成一應稱點組.其中 K_1, K_2 爲焦點. 故由第一章 § 27, 得知

$$\{O\cdot PQRS\}=[P'Q'R'S'].$$

14. 在第一章 § 13, 已知三點 (l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2) (l_3, m_3, n_3) 共線與三線 (l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2), (l_3, m_3, n_3) 共點之條件相同.今由互對極法且知諸點及諸線，關於此圓曲錐線(虛)

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=0$$

互爲極點及極線矣.

是卽，互對極之理論，對於三點共線及三線共點之條件相同之一事實，亦足以說明之. 卽第二章中 §§ 7, 9 所得之諸條件，亦可由此解釋之.

因圓錐曲線

$$\lambda^2\alpha^2+\mu^2\beta^2+\nu^2\gamma^2-2\mu\nu\beta\gamma-2\nu\lambda\gamma\alpha-2\lambda\mu\alpha\beta=0\cdots(1)$$

關於　$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=0$$

之互對極綫爲 $\lambda\beta\gamma+\mu\gamma\alpha+\nu\alpha\beta=0$……………………(2)

且點 (f, g, h) 之極綫爲 $f\alpha+g\beta+h\gamma=0$.

故若此直綫切於 (1), 則點 (f, g, h) 必在 (2) 之曲綫上; 因得二者相切之條件式爲

$$\frac{\lambda}{f}+\frac{\mu}{g}+\frac{\nu}{h}=0.$$

又若此直綫 $f\alpha+g\beta+h\gamma=0$ 切於 (2), 則點 (f, g, h) 必在 (1) 之曲綫上. 此時相切之條件爲

$$\lambda^2f^2+\mu^2g^2+\nu^2h^2-2\mu\nu gh-2\nu\lambda hf-2\lambda\mu fg=0$$

與前所得者同.

凡拋物綫必切於無窮遠綫. 而此綫之極點之位標與 a, b, c 成比例. 故若二次方程之通式代表一拋物綫, 則點 (a, b, c) 必在其互對極之圓錐曲綫上. 由是得二次方程之通式代表一拋物綫之條件爲

$$Ua^2+Vb^2+Wc^2+2U'bc+2V'ca+2W'ab=0,$$

與前所得者亦同.

15. 命題 凡由一定點 A 所作之任何直綫, 必被任一圓錐曲綫, 及該定點 A 及 A 點關於此圓錐曲綫之極綫, 分成調和比.

此命題可證之如次：

設過 A 點之直線交圓錐曲線於 P 及 Q；交 A 點之極線於 B. 命此直線之極點為 C. 並以 ABC 為基本三角形．於是此圓錐曲線，關於此三角形，為一自共軛圖形，且可用

$$u\alpha^2+v\beta^2+w\gamma^2=0$$

表之．故直線 CP 及 CQ——即此圓錐曲線之兩切線——可用下式表之：　$u\alpha^2+v\beta^2=0.$

由是可知 CP, CQ 與 CA, CB 成一調和束線，而本定理因以證明矣．

16.　直線 CB 可視為 A 點關於此兩直線 CP 及 CQ* 之極線．因在 A 點上，β 及 γ 皆等於 0；且 CP, CQ 之方程式為 $u\alpha^2+v\beta^2=0$. 故得其極線之方程式為 $\alpha=0$, 是即 A 點之極線即為 BC 也．

17.　若四直線成一束線，則其中每對之直線，關於他對之直線為自對極線．

因，如採用 §8 之方程式於僅含兩變數者，則可得 $\alpha\beta=0$, 關於 $u\alpha^2+v\beta^2=0$ 之互對極線為

---

* 因可謂為一特殊之圓錐曲線也．

$$\begin{vmatrix} 0, & u\alpha, & v\beta \\ u\alpha, & 0, & 1 \\ v\beta, & 1, & 0 \end{vmatrix}=0,$$

或 $$uv\alpha\beta=0.$$

逆之，此曲線 $u\alpha^2+v\beta^2=0$ 關於 $\alpha\beta=0$ 之互對極線爲

$$\begin{vmatrix} 0, & \beta, & \alpha \\ \beta, & u & 0 \\ \alpha, & 0, & v \end{vmatrix}=0,$$

或 $$u\alpha^2+v\beta^2=0,$$

此定理因得證明如上．

18. 由是可推得兩對之直線成一調和束線之條件．先設四直線相交於 A 點．於是此兩對之直線之方程式各

爲 $$u\alpha^2+v\beta^2+2w'\alpha\beta=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

及 $$p\alpha^2+q\beta^2+2r'\alpha\beta=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

故 (1) 關於 (2) 之互對極線之方程式爲

$$\begin{vmatrix} 0, & p\alpha+r'\beta, & r'\alpha+q\beta \\ p\alpha+r'\beta, & u, & w' \\ r'\alpha+q\beta, & w' & v \end{vmatrix}=0,$$

或 $$u(r'\alpha+q\beta)^2+v(p\alpha+v'\beta)^2$$

$$-2w'(r'\alpha+q\beta)(p\alpha+r'\beta)=0.$$

今設命　$u\alpha^2+v\beta^2+2w'\alpha\beta\equiv u(\alpha+k_1\beta)(\alpha+k_2\beta)$,

卽設　$$v=uk_1k_2,$$

則　$$w'=u(k_1+k_2).$$

又在此兩直線 $\alpha+k_1\beta=0$ 及 $\gamma=0$ 之交點上,

$$\frac{\alpha}{k_1}=-\beta,\ \gamma=0.$$

今取此交點關於曲線 (2) 之極線,得

$$(pk_1-r')\alpha+(r'k_1-q)\beta=0.$$

若此直線與 $\alpha+k_2\beta=0$ 疊合,則必

$$pk_1-r'=\frac{r'k_1-q}{k_2},$$

或　$$pk_1k_2-2v'(k_1+k_2)+q=0.$$

$$\therefore\quad pv-2r'w'+qu=0,$$

是爲所求之條件式.

此方程式之對稱性,顯示 (2) 式之線關於 (1) 爲自對極線.此乃理應如是者.

19.　其次,設四直線之交點,不與基本三角形之任一角頂密合,則吾人祇須探求此四直線與任一基線,如 $\gamma=0$ 之交點成調和列點之條件足矣.苟如是,則聯 C 點

至四交點之直線，將成一調和束線。且可得同上之方程式

$$pv-2r'w'+qu=0.$$

20. 若輔圓錐曲線爲一圓，則由互對極之理論所得之結果又如何？此乃吾人所將研究者。在此情形之下，對極理論之爲用尤顯 蓋吾人可由是以獲得關於量之命題——卽線及角之量度——之易換也。

設 PQ 爲 T 點關於一圓之極線，圓之半徑爲 k，圓心爲 S. 則 ST 垂直於 PQ. 設 ST 交 PQ 於 V，則

$$ST\cdot SV=k^2.$$

故，任何直線之極點至輔圓之圓心之距離，與其極線至此圓心之距離成反比例．逆之，由一點之極線至輔圓心之距離，與該點至圓心之距離成反比例．

21. 設兩直線 TX, TY；其極點各爲 P 及 Q，則因 $SP\perp TX$, $SQ\perp TY$，故角 PSQ 等於角 XTY 或其補角；故任何兩直線間之角，等於聯其極點至輔圓心之兩直線所成之角或其補角．

22. 由本章之 §15 及前數節之結果，可知欲求一已知圓錐曲線關於一圓之互對極線，可依下述兩法之一得之。

第一法　作此曲線之切線．由輔圓心 S 作 SY 垂直於此切線．並於 SY 線上或其引長線上取一點 Q，令

$$SQ \cdot SY = k^2.$$

則 Q 點之軌跡，卽爲所求之互對極線矣．

第二法　在此已知曲線上任取一點 P. 聯 SP，並於其線上或其引長線上取一點 Z，令

$$SP \cdot SZ = k^2.$$

過 Z 點作一直線垂直於 SP，則此直線之包線卽爲所求之互對極線矣．

23.　輔圓半徑之大小，僅能影響於互對極線上之線之絕對值耳，而不影響其間之關係位置，或其相關之量．且大多數之定理，亦與絕對值無關者．故吾人討論之時，常略去其輔圓之半徑，而僅就圓心言之．是以在對極投法中，恆謂"關於點 S"之互對極線，而不稱爲"關於圓心爲 S 者之圓"之互對極線．讀者其注意之．S 可稱爲對極中心 (center of reciprocation)，k 爲對極常數 (constant of reciprocation).

24.　今以"三角形之三高線相交於一點"爲例，以示此法之爲用．此定理可述之爲"設 O, A, B, C 四定點中，

OB 垂直於 CA, OC 垂直於 AB;則 OA 亦必垂直於 BC".

將此圖象關於任一點 S 對極投之,則由 O, A, B, C 四點得四直線 abc, $ab'c'$, $a'bc'$, $a'b'c$. 於是 "$OB \perp CA$" 之一事實,可用"兩直線 b 及 b' 各於 S 點上張一直角"代之,或謂角 bSb' 爲一直角. 又 "$OC \perp AB$" 一語,可用"角 cSc' 爲一直角"表之.於是對極定理之題斷爲"角 aSa' 亦必爲一直角". 再簡單述之於下;即 aa', bb', cc' 爲此四直線所成之完全四邊形之對角線. 故若已知一完全四邊形之兩對角線於一點上各張一直角,則其他之對角線,亦必於此點上張一直角.換言之,以完全四邊形之三對角線爲直徑所作之三圓必具共同根軸.

此軸之兩端,稱爲此完全四邊形之焦點*

25. 設以 O, A, B, C 四點中之任一點如 O,爲對極中心,以行對極投法,則所得之三角形與三角形 ABC 必相似,且在相似之位置.

因,設在 OA, OB, OC 線上(或其延長線上),各取一點 A', B', C'. 令

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = OC \cdot OC';$$

* 此名稱爲 Clifford 氏在 Messenger of Mathematics 所倡用者.

並過 A', B', C' 各作 YZ, ZX, XY 垂直於 OA', OB', OC'；則 YZ, ZX, XY 各平行於 BC, CA, AB；或則三角形 XYZ 與 ABC 相似，且在相似之位置。

又因 X 點為 B 及 C' 之兩極線之交點，故必為 BC 之極點。因之，OX 必垂直於 BC，亦即垂直於 YZ。同理，OY，OZ 各垂直於 ZX 及 XY。故 O 為由 X, Y, Z 至 YZ, ZX, XY 之三垂線之交點。為便利計，因稱三角形三高線之交點為該三角形之垂心 (ortho entre)，或稱為其三頂點之垂心。於是吾人可謂"設一三角形關於其垂心以行對極投法，則所得之互對極之三角形必與原三角形相似，且在相似之位置；且二者同一垂心"。

由 §19，可知任何三點及其垂心，關於任一點 S 之互對極線為一四邊形，以 S 為焦點。

26. 設將圓錐曲線外之一點為對極中心，則所得之雙曲線，其兩漸近線之交角，與由 S 點至原圓錐曲線之兩切線之交角相等，或相補（見本章之 §9）。

逆之，雙曲線關於任一點 S 之互對極線為一圓錐曲線，於 S 點上張對一角，與雙曲線之漸近線所成之角互補。

27. 由上節，可知一拋物線關於其準線上一點 S 之

互對極線，爲過 S 點之等軸雙曲線。

設一等軸雙曲線，以其上之一點 S 爲對極中心，則得一拋物線，其準線通過 S 點。

又，設一圓錐曲線關於一圓 S 之向圓 (director circle) (即 S 圓上垂直切線之交點之軌跡也) 以行對極投法，則得一等軸雙曲線。

設一等軸雙曲線，以不在其線上之任一點 S 爲對極中心，則得一圓錐曲線，其向圓通過 S 點。

28. 凡過兩等軸雙曲線之四交點之圓錐曲線，亦必爲一等軸雙曲線。此四點中之任一點爲其餘三點之垂心。凡此皆爲已知之事實。故若以此四交點中之任一點爲對極中心，則得互對極定理爲"設一拋物線與兩已知之拋物線之三公切線相切，則其準線必過兩已知拋物線之準線之交點。即通過三公切線所成之三角形之垂心也"。換言之："設若干拋物線與三定直線相切，則諸準線必皆過此三定線之三角形之垂心"。

設將諸等軸雙曲線，關於任一點 S 行對極投法，則可得"凡切於四定直線之圓錐曲線，必於此四定線所成之四邊形之焦點上張一直角"。或"與四定直線相切之若干圓錐

曲線之向圓，必有共同之根軸．此根軸為切於此四直線之拋物線之準線”．

29. 求一圓關於任何一點之互對極線．

由前所示，可知其互對極線必為一圓錐曲線．今試研究其形態及位置．

設 S 為對極中心，k 為對極半徑，MPM' 為所將施行互對極投法之圓，O 為其圓心，MM' 為過 S 點之直徑，ρ 為半徑，並設 $OS=c$.

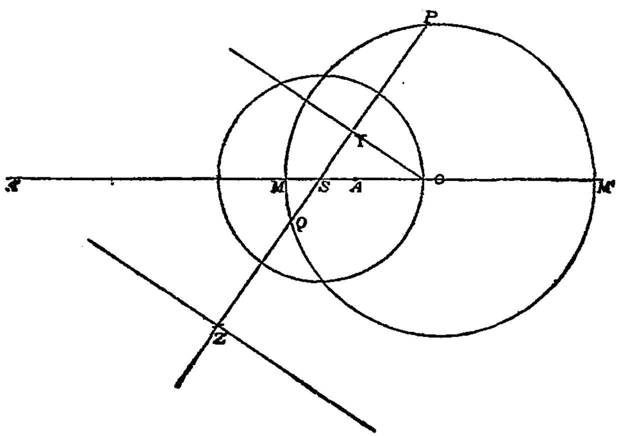


圖 19

過 S 作一直線交 MPM' 於 P 及 Q. 在 SPQ 線上，或其延長線上取兩點 Y 及 Z，令

$$SP\cdot SY=SQ\cdot SZ=k^2,$$

則過 Y 及 Z 且各垂直於 SP 之兩直線，必爲其互對極線上之切線。

今 $$SY\cdot SZ=\frac{k^4}{SP\cdot SQ}=\frac{k^2}{\rho^2-c^2},$$ 爲一常數。

故所求之互對極線爲一圓錐曲線，具如下之性質：由 S 至兩平行切線之距離之積爲一常數。故爲一以 S 爲焦點者之圓錐曲線，其短軸等於 $\frac{2k^2}{(\rho^2-c^2)^{\frac{1}{2}}}$. 此圓錐曲線爲橢圓，或拋物線，或雙曲線，視乎 ρ 之大於，等於，或小於 c 而定，即視乎對極中心之在於已知圓內，或圓上，或圓外而定。此結果與 §9 所示者脗合。

命此圓錐曲線之兩軸爲 $2a$ 及 $2b$，其通徑 (latus-rectum) 爲 $2l$；離心率爲 e.

今求其值如次：

其長軸(major-axis)必在 SO 線上。設 A, A' 爲其端點，

則 $$\frac{2}{l}=\frac{1}{SA}+\frac{1}{SA'}=\frac{SM+SM'}{k^2}=\frac{2\rho}{k^2}.$$

故 $l=\frac{k^2}{\rho}$，或即其通徑與已知圓之半徑成反比例。

又 $$a=\frac{b^2}{l}=\frac{k^2\rho}{\rho^2-c^2},$$

$$\begin{aligned} e^2 &= 1-\frac{b^2}{a^2} \\ &= 1-\frac{k^4}{\rho^2-c^2}\cdot\frac{(\rho^2-c^2)^2}{k^4\rho^2} \\ &= \frac{c^2}{\rho^2}, \end{aligned}$$

或
$$e=\frac{c}{\rho}.$$

故離心率與由圓心至對極中心之距離成正比，而與已知圓之半徑成反比。

設 d 爲 S 至準線之距離，則

$$d=\frac{l}{e}=\frac{k^2}{\rho}\cdot\frac{\rho}{c}=\frac{k^2}{c},$$

卽，準線卽圓心之極線也。

30. 如是，吾人可由圓之性質以推得圓錐曲線之焦點之性質。試以歐氏幾何第三卷命題 21 爲例。此命題可表述之爲"設於一圓周上取兩定點及任何一點，則聯此點至兩定點之二直線，恆成一定角"。此命題之對極定理爲"設於一圓錐曲線上作兩定切線及一動切線，則此動切線被截於兩定切線之線段，必於焦點上張一定角"。如將歐氏之卷三之二十對極投之，則可見此角與其準線被兩定切線所截之線段於焦點上所張之半角互補。

又'設一圓切於兩同心圓，則其半徑等於兩同心圓之半徑之半和或半差；其圓心之軌跡仍爲一圓，與同心圓同心；半徑等於原同心圓之半徑之半差或半和".凡此事實，皆甚易知之.

由是推得定理如下:"設兩已知圓錐曲線有共同之焦點及準線.命其通徑各爲 $2l, 2l'$ 作另一圓錐曲線，具同此焦點，且與此兩已知圓錐曲線相切，則其通徑等於 $\frac{4ll'}{l\pm l'}$；且其準線之包線仍爲一圓錐曲線.以原有之焦點及準線爲其焦點及準線，而通徑等於 $\frac{4ll'}{l\mp l'}$".

今且就尋常橢圓之定義研究之."設一動點移動，與兩定點之距離之和恆爲一定數者，其軌跡爲一橢圓".此實等於"由任一焦點至兩平行切線之切點之距離之和爲一定數".其對極定理爲"設過一點作圓之弦，並於其端點上作兩切線，則由定點至此兩切線之垂距之逆數和，爲一定値".

由此法，可從"圓上兩切線與切點弦成等角"之一性質，得同等之定理如下:"設由一圓錐曲線外之一定點作兩切線，則在兩切線上，由定點至切點之各線段，於焦點上張對等角".又由"凡圓皆相交於無窮遠處之兩環點"之事

實，得"凡具同一焦點之若干圓錐曲線，必有一對共同之虛切線，通過此焦點".更普遍推廣言之，凡相似且在相似位置之圓錐曲線，其互對極線爲一圓錐曲線組，具有兩共同之切線.

31. 設一曲線上之一點，與其互對極線上之一點，有如次之關係者：此點上之切線即爲他點之極線，則此兩點互稱爲<u>對應</u>.同理，若一曲線上之切線，爲其互對極線上切點之極線者，則此兩切線互稱爲對應.

任一點之動徑 (radius vector)(即由對極中心至該點之線)與該點上之切線所成之角，等於其對應點之動徑與對應切線所成之角.

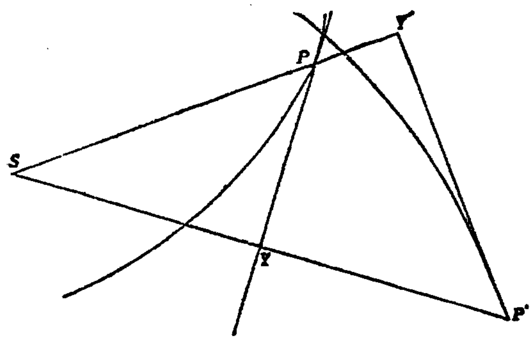


圖 20

因，設 P 為定點，PY 為 P 點上之切線，S 為對極中心。$SY\perp PY$. 並設 P' 為 PY 之極點，$P'Y'$ 為 P 之極線，則 P' 必在 SY 之線上，或其延長線上。又若 $SY'\perp P'Y'$，則 SY 必通過 P 點。但因 SP, PY 各垂直於 $P'Y'$ 及 SP'. 故知兩角 SPY 與 $SP'Y'$ 相等。

32. 在第四章 § 10 中，已求得由一定點 (f, g, h) 至一圓錐曲線之兩切線之方程式矣。設在此方程式中之右端，以 $\omega(a\alpha+b\beta+c\gamma)^2$ 代 0, ω 為任意之常數；則將得一普遍之方程式，代表以此兩線為漸近線者之圓錐曲線組。但以定點 (f, g, h) 為對極中心之圓錐曲線，其兩漸近線各垂直於過定點 (f, g, h) 之切線。故所得之圓錐曲線組，必與之相似。

33. 求二次方程之通式所代表之圓錐曲線之焦點之位標。

因圓錐曲線關於其一焦點之互對極線為一圓。故設 (f, g, h) 為一焦點，則由 § 32 所得之圓錐曲線組，亦必為圓。今應用第四章 § 14 之圓錐曲線為圓之條件式，可知其中含 ω 者之項，皆自消滅，而得其條件為

$$(Uh^2+Wf^2-2V'hf)c^2+(Vf^2+Ug^2-2W'fg)b^2$$

$$+2(U'f^2+Ugh-W'hf-V'fg)bc$$

$$=(Vf^2+Ug^2-2W'fg)a^2+(Wg^2+Vh^2-2U'gh)c^2$$

$$+2(W'h^2+Wfg-V'gh-U'hf)ab,$$

或 $$(Vb^2+Wc^2+2U'bc)f^2-2(V'c+W'b)f(bg+ch)$$

$$+U(bg+ch)^2$$

$$=(Wc^2+Ua^2+2V'ca)g^2-2(W'a+U'c)g(ch+af)$$

$$+V(ch+af)^2$$

$$=(Ua^2+Vb^2+2W'ab)h^2-2(U'b+V'a)h(af+bg)$$

$$+W(af+bg)^2.$$

又因 $af+bg+ch=2\Delta$，故可書之爲

$$(Ua^2+Vb^2+Wc^2+2U'bc+2V'ca+2W'ab)f^2$$

$$-4\Delta(V'c+W'b+Ua)f+4U\cdot\Delta^2$$

$$=(Ua^2+Vb^2+Wc^2+2U'bc+2V'ca+2W'ab)g^2$$

$$-4\Delta(W'a+U'c+Vb)g+4V\cdot\Delta^2$$

$$=(Ua^2+Vb^2+Wc^2+2U'bc+2V'ca+2W'ab)h^2$$

$$-4\Delta(U'b+V'a+Wc)h+4W\cdot\Delta^2.$$

由此式與　　$af+bg+ch=2\Delta$，

則可定其焦點之位標矣。f, g, h 之值有四，其中兩值爲實數，兩值爲虛數。

若此圓錐曲線爲拋物線，則應用第四章 §6 之條件，得

$$(V'c+W'b+Ua)f-U\cdot\Delta=(W'a+U'c+Vb)g-V\cdot\Delta$$
$$=(U'b+V'a+Wc)h-W\cdot\Delta,$$

由此得其焦點.

若此方程式 $ux^2+vy^2+wz^2+2u'yz+2v'zx+2w'xy=0$, 以三角位標表之，則焦點之位標，得由下諸式定之:

$$\frac{(U+V+W+2U'+2V'+2W')f^2-2(V'+W'+U)f+U}{a^2}$$
$$=\frac{(U+V+W+2U'+2V'+2W')g^2-2(W'+U'+V)g+V}{b^2}$$
$$=\frac{(U+V+W+2U'+2V'+2W')h^2-2(U'+V'+W)h+W}{c^2},$$

或，設圓錐曲線爲拋物線，則

$$\frac{2(V'+W'+U)f-U}{a^2}=\frac{2(W'+U'+V)g-V}{b^2}$$
$$=\frac{2(U'+V'+W)h-W}{c^2}.$$

34. 設兩次施運對極投法，則時或可得甚有味之結果，舉例如下:“半圓上之圓周角等於一直角”一定理，可更述如“於圓周上一定點張一直角之弦，必通過圓心”. 今依此定點爲互對極中心，則得“拋物線上兩垂直切線之交點之軌跡即其準線”.

次再以任一點為對極中心，則得"於圓錐曲線上一已知點張一直角之弦，必通過一定點"。

再以歐氏幾何卷三之 21 為例．此命題可如下表述之："設於圓內作弦，於圓周上之一定點 O 張一定角，則此弦必恆切於一同心圓"．以 O 為對極中心，則得"設一拋物線之兩切線恆成一定角，則其交點之軌跡為一圓錐曲線，以原拋物線之焦點及準線為其焦點及準線"．更以此圖象關於任一點對極投之，則得"設作一已知圓錐曲線之弦，於其線上之一定點張一定角，則此弦恆切於一圓錐曲線，與已知圓錐曲線有重切點 (double contact)"．

習　題

1. 已知一圓錐曲線之一焦點及其線上之兩定點，則此兩定點上之切線之交點之軌跡，為過此焦點之兩垂直線．證之．

2. 求證：以一定點為焦點，可作四圓錐曲線通過三已知點，且其中之一通徑，等於其餘三通徑之和．

3. 在一圓錐曲線之定切線上取一定點 A，及他兩點 P, Q，令 AP, AQ 各於另一定點 O 上張對等角；則由 P 及

Q 所作兩切線之交點之軌跡爲一直線.

4. 於圓錐曲線上作兩切線,使截此曲線上之一已知切線之線段,於一定點上張對一直角.試證如是所作之兩切線之交點之軌跡爲一直線.

又設此定點爲焦點,則其軌跡卽其準線.

5. 作圓錐曲線之若干弦，各於一定點上張一直角.求證諸弦皆切於一圓錐曲線,以定點爲一焦點.

6. 設三直線 BC, CA, AB 被另兩定線各截於 A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2; 則可作一圓錐曲線切於此六直線 AA_1, AA_2, BB_1, BB_2, CC_1, CC_2. 證之.

7. A, B, C, S 爲四定點. 作 $SD\perp SA$, 交 BC 於 D; $SE\perp SB$, 交 CA 於 E; $SF\perp SC$, 交 AB 於 F; 則 D, E, F 在一直線上. 證之.

並證:以 S 爲焦點,且各與諸三角形 ABC, AEF, BFD, CDE 之三邊相切之四圓錐曲線，其通徑皆等.

8. 兩圓錐曲線有一共同之焦點，且其準線各爲定線. 求證:若其通徑之逆數和爲一定値,則其公切線必切於一圓錐曲線.

9. 一圓錐曲線切於三已知直線 BC, CA, AB, 且由

一定點 O 所作之兩切線互相垂直．試證此圓錐曲線必恆切於另一線．又設此直線交 BC, CA, AB 於 D, E, F；則諸角 AOD, BOE, COF 皆爲直角．

並證：O 點關於圓錐曲線之極線，必恆切於一圓錐曲線，以 O 爲焦點．

10. 兩圓錐曲線有一公共焦點 S；OA, OB 爲其公切線，CA, CB 爲其一交點上之兩切線；BD 及 AE 爲兩切線，交 CA, CB 於 D 及 E. 試證 S, D, E 在一直線上．

11. 一三角形關於一已知圓錐曲線爲自共軛三角形．求證：以已知圓錐曲線之中心爲焦點且切於此三角形之三邊之圓錐曲線，其短軸必爲一定數．

12. 兩橢圓有一公共焦點者，其交點不能多於二．證之．

13. 設一圓錐曲線組通過四定點，則可求得四直線使此組中之任一圓錐曲線所截之弦，於此定點中之一張一直角．

14. 設一拋物線關於任一圓行對極投法，則所得之互對極線之圓錐曲線在原點上之曲率半徑 (radius of curvature)，與拋物線之通徑成反比例．

15. 設兩對之直線之方程式爲

$$u\alpha^2+v\beta^2+2w'\alpha\beta=0$$

及
$$p\alpha^2+q\beta^2+2r'\alpha\beta=0$$

成一調和束線，且其中每對之直線非共軛線者；則

$$(uq+vp-2w'r')^2=36(uv-w'^2)(pq-r'^2).$$

證之。

第七章

切式位標
Tangential Co-ordinates

1. 前六章所述之位標系，任何點之位置，皆係直接或間接由該點至三已知直線之距離以定之者．而視一曲線爲點之集合，其位標皆適合某一方程式者．然則吾人亦可視一直線爲由此直線至三定點之三距離而定者矣．因仍稱此三距離爲此直線之位標．而視一曲線爲直線之包線，其位標皆適合於某一方程式．

此種位標，與對極之理論，關係甚切．事實上，由對極之理論所得之方程式，此種位標實爲一良好之解釋之工具，且甚易求得其結果．其方程式皆爲第五章中所得者關於 $x^2+y^2+z^2=0$ 之互對極式．

如是，吾人可謂一直線之位標爲由三定點 A, B, C 至該線之距離．以 p, q, r 記之．並同前，命 BC, CA, AB 各等

於 a, b, c; 以 A, B, C 爲基本三角形之角頂;並命其面積爲 Δ.

2. 設一直線與 BC 之交點介在 B, C 之間者,則兩位標 q, r 異號.反是則同號.例如,A 之內角平分線之兩位標 q, r 異號,其外角平分線之兩位標同號.同理,p 與 q 及 p 與 r 符號之異同,準此定之.

設 D 爲 BC 線上之任一點;q, r 爲過 D 點之直線之位標.設 $BD=a_1$, $CD=a_2$; 以 BC 線上由 B 至 C 之向爲正,反是爲負;則得

$$\frac{q}{a_1}=\frac{r}{a_2}.$$

此式爲過 D 點之直線之位標,故可視爲 D 點之方程式 (equation of the point D).

若 D 爲 BC 之中心,則 $a_1=-a_2$. 故基本三角形三邊中點之方程式各爲

$$q+r=0,\ r+p=0,\ p+q=0.$$

同理,可證其內角平分線與各對邊之交點爲

$$bq+cr=0,\ cr+ap=0,\ ap+bq=0.$$

外角平分線與各對邊之交點爲

$$bq-cr=0,\ cr-ap=0,\ ap-bq=0.$$

由角頂至各對邊之垂趾各爲

$$q\tan B+r\tan C=0,\ r\tan C+p\tan A=0,$$

$$p\tan A+q\tan B=0.$$

內切圓之三切點各爲

$$\frac{q}{s-b}+\frac{r}{s-c}=0,\ \frac{r}{s-c}+\frac{p}{s-a}=0,$$

$$\frac{p}{s-a}+\frac{q}{s-b}=0,\ 2s=a+b+c.$$

3.　次證命題如下：設 O 爲 ABC 三角形內之任一點，則凡過 O 點之直線 QPR 之位標 p,q,r (其符號規定如上)恆有次之關係：

$$\Delta BOC\cdot p+\Delta COA\cdot q+\Delta AOB\cdot r=0.$$

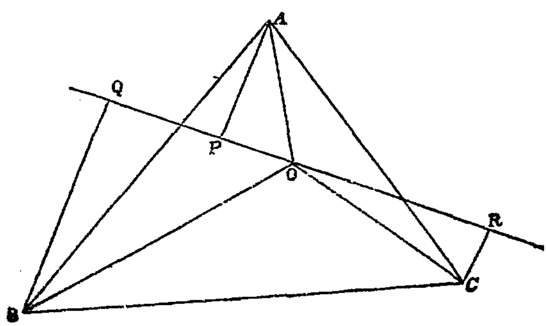


圖 21

設 QPR 之方程式，以三角位標表之為

$$lx+my+nz=0.$$

並設 O 點之三線位標為 ξ,η,ζ；則

$$\xi:\eta:\zeta::\Delta BOC:\Delta COA:\Delta AOB.$$

但因 O 點在 QPR 直線上，

$$l\xi+m\eta+n\zeta=0.$$

又因 p 為點 $(1,0,0)$ 至直線 (l,m,n) 之距離。

$$\therefore\quad (l\cdot 2\Delta)^2=\{(l-m)(l-n)a^2+(m-n)(m-l)b^2 + (n-l)(n-m)c^2\}\cdot p^2.$$

同理，可得 Q, R 之類似之式．故

$$\frac{p}{l}=\frac{q}{m}=\frac{r}{n},$$

或
$$p\xi+q\eta+r\zeta=0.$$

由是，得 $\Delta BOC\cdot p+\Delta COA\cdot q+\Delta AOB\cdot r=0.$

此式可視為 O 點之方程式．

若 O 點在 ABC 三角形之外，則仍可依同理求得類似之式．惟須注意若 O 與 A 各在 BC 之異側，則宜以 BOC 為負．

下列諸式，為與基本三角形關係甚切者之若干點之方

程式：

重心：$$p+q+r=0;$$

外心：$$p\cdot\sin 2A+q\cdot\sin 2B+r\cdot\sin 2C=0;$$

內心：$$ap+bq+cr=0;$$

傍心：$$-ap+bq+cr=0,$$

$$ap-bq+cr=0,$$

$$ap+bq-cr=0;$$

垂心：$$p\cdot\tan A+q\cdot\tan B+r\cdot\tan C=0.$$

4. 今進而研究任何直線之位標間之關係。

設任一直線交基本三角形之兩邊 AB 及 AC 於 D 及 E. 由 A, B, C 各作 AP, BQ, CR 垂直於此直線；則

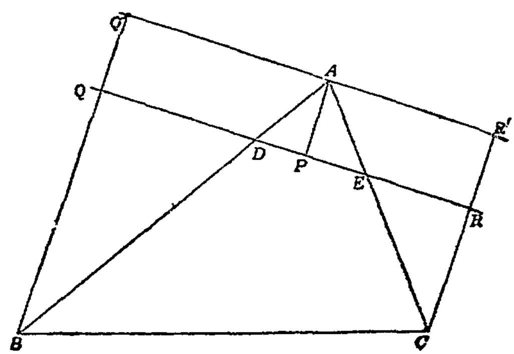


圖 22

$$BQ=q,\ CR=r,\ AP=-p.$$

設 RPQ 之三角位標之方程式爲(以 ABC 爲基本三角形)

$$lx+my+nz=0.$$

則由前節所示,得

$$(l\cdot 2\Delta)^2=\{(l-m)(l-n)a^2+(m-n)(m-l)b^2+(n-l)(n-m)c^2\}\cdot p^2.$$

同理,可得 q^2 及 r^2 之類似之式.

$$\therefore\quad \frac{p^2}{l^2}=\frac{q^2}{m^2}=\frac{r^2}{n^2}$$

$$=\frac{(2\Delta)^2}{(l-m)(l-n)a^2+(m-n)(m-l)b^2+(n-l)(n-m)c^2}.$$

故得

$$(p-q)(p-r)a^2+(q-r)(q-p)b^2+(r-p)(r-q)c^2=4\Delta^2,$$

爲任何直線之位標間之關係式.以行列式表之爲

$$\begin{vmatrix} 0, & 1, & 1, & 1, & 0 \\ 1, & 0, & c^2, & b^2, & p \\ 1, & c^2, & 0, & a^2, & q \\ 1, & b^2, & a^2, & 0, & r \\ 0, & p, & q, & r, & 1 \end{vmatrix}=0.$$

系　無窮遠線可視爲與 A, B, C 三點等距離者.因得以

$p=q=r$ 表之.

5. 求由一點 $lp+mq+nr=0$ 至直線 (p_1, q_1, r_1) 之距離.

由前所示,可知此點之三角位標爲

$$\frac{l}{l+m+n},\ \frac{m}{l+m+n},\ \frac{n}{l+m+n}.$$

而此直線之方程式爲

$$p_1x+q_1y+r_1z=0.$$

故設 δ 爲所求之距離,則

$$\delta=\frac{p_1l+q_1m+r_1n}{(l+m+n)\{(p_1-q_1)(p_1-r_1)a^2+(q_1-r_1)(q_1-p_1)b^2+(r_1-p_1)(r_1-q_1)c^2\}^{\frac{1}{2}}}\cdot 2\Delta.$$

系　設圓之半徑爲 ρ,圓心之方程式爲 $lp+mq+nr=0$,則因此圓乃一直線至圓心有等距離者之包線,故其方程式爲

$$(p-q)(p-r)a^2+(q-r)(q-p)b^2+(r-p)(r-q)c^2$$

$$=\left(\frac{2\Delta}{\rho}\right)^2\left(\frac{lp+mq+nr}{l+m+n}\right)^2.$$

6. 高於一次之方程式,其圖象可視爲由切線所包之曲線,其切線之位標,皆適合此曲線之方程式.依此觀點,則凡能同時適合兩方程式之 $p:q:r$ 之值者,必爲此

兩方程式之曲線之公切線之位標．又由一已知方程式及一一次方程式聯立而得之値，必表示一直線，過此一次方程式所代表之點，且與已知曲線相切．由此可見凡 n 次之方程式必爲一曲線，由任一點至此曲線可作 n 切線（實線或虛線）．換言之，卽此曲線必爲一 n 級曲線．

故凡二次方程式必表一圓錐曲線．

今先討論若干有趣之特殊之二次式．

7. 求切於基本三角形之三邊之圓錐曲線之方程式．

基本三角形三邊之位標如下：

BC: $q=0,\ r=0;$

CA: $r=0,\ p=0;$

AB: $p=0,\ q=0.$

故若 p, q, r 中之任何兩値等於零時，所求之圓錐曲線之方程式必可適合．故所求之式，必呈如次之形

$$Lqr+Mrp+Npq=0.$$

又三切點之方程式爲

$$\frac{q}{M}+\frac{r}{N}=0,$$

$$\frac{r}{N}+\frac{p}{L}=0,$$

$$\frac{p}{L}+\frac{q}{M}=0.$$

證之如次：設於原式中命 $Mr+Nq=0$，則得 $q=0$，或 $r=0$. 故由此點 $Mr+Nq=0$ 所作之兩切線必通過此點 $q=0$，或點 $r=0$.

但此三點 $Mr+Nq=0, q=0, r=0$ 在一直線上，故由 $Mr+Nq=0$ 所作之兩切線疊合．故為 $p=r=0$ 之切點．其他兩切點倣此．

於是，由 § 2 之內切圓之切點之方程式，可見內切圓可用方程式

$$(s-a)qr+(s-b)rp+(s-c)pq=0$$

表之．

同理，三傍切圓之方程式各為

$$-sqr+(s-c)rp+(s-b)pq=0,$$

$$(s-c)qr-srp+(s-a)pq=0,$$

$$(s-b)qr+(s-a)rp-spq=0.$$

8. 求基本三角形之外接圓錐曲線之方程式．

基本三角形三頂點之方程式為 $p=0, q=0, r=0$. 因此

三點皆在所求之圓錐曲線上，故由其頂點所作之兩切線必疊合.故設命其中之一值爲零，則所得之方程式必有等根，卽所求之方程式，必呈如下之形

$$L^2p^2+M^2q^2+N^2r^2-2MNqr-2NLrp-2LMpq=0$$

也.

其三頂上之切線之位標各爲

$$p=0,\ Mq-Nr=0;$$

$$q=0,\ Nr-Lp=0;$$

$$r=0,\ Lp-Mq=0.$$

故若此圓錐曲線爲一圓，則 A 點上之切線，由下式定之：

$$p=0,\ \frac{q}{c\sin C}=\frac{r}{b\sin B},$$

後之一式，與 $b^2q-c^2r=0$ 通.

同理，可得其他兩頂上之切線之類似式.故基本三角形之外接圓之方程式爲

$$a^4p^2+b^4q^2+c^4r^2-2b^2c^2qr-2c^2a^2rp-2a^2b^2pq=0,$$

或化之爲
$$\pm ap^{\frac{1}{2}}\pm bq^{\frac{1}{2}}\pm cr^{\frac{1}{2}}=0.$$

9. 由四章§8之法，可證知一直線 (f,g,h) 關於圓錐曲線

$$\phi(p, q, r) = up^2 + vq^2 + wr^2 + 2u'qr + 2v'rp + 2w'pq = 0$$

之極點之方程式為

$$(uf + w'g + v'h)p + (w'f + vg + u'h)q + (v'f + u'g + wh)r = 0.$$

又因圓錐曲線之中心為無窮遠線 $p = q = r$ 之極點，故中心之方程式為

$$(u + v' + w')p + (u' + v + w')q + (u' + v' + w)r = 0.$$

若圓錐曲線為拋物線，則切於無窮遠線．故圓錐曲線為拋物線之條件為

$$u + v + w + 2u' + 2v' + 2w' = 0.$$

10.　此圓錐曲線被線 (f, g, h) 所截之兩點，由下式

$$4\phi(f, g, h)\cdot\phi(p, q, r) - \left(p\frac{d\phi}{df} + q\frac{d\phi}{dg} + r\frac{d\phi}{dh}\right)^2 = 0$$

定之(見第四章 § 10).

故圓錐曲線與無窮遠線之兩交點，可由

$$(u + v + w + 2u' + 2v' + 2w')(up^2 + vq^2 + wr^2 + 2u'qr + 2v'rp + 2w'pq)$$
$$- \{(u + v' + w')p + (u' + v + w')q + (u' + v' + w)r\}^2 = 0$$

定之．

因可求得圓所通過之無窮遠線上之兩環點之方程式．

蓋不論何圓，此兩點恆同。今且就基本三角形之內切圓言之。此兩點可命

$$u=v=w=0,\ 2u'=s-a,\ 2v'=s-b,\ 2w'=s-c$$

以求之。得其方程式爲

$$4s\{(s-a)qr+(s-b)rp+(s-c)pq\}-(ap+bq+cr)^2=0,$$

或 $$a^2p^2+b^2q^2+c^2r^2-2bcqr\cos A-2carp\cos B$$
$$-2abpq\cos C=0,$$

又可書之爲

$$a^2(p-q)(p-r)+b^2(q-r)(q-p)+c^2(r-p)(r-q)=0,$$

是卽無窮遠線上之兩環點之方程式也。

由是又可得二次方程式

$$up^2+vq^2+wr^2+2u'qr+2v'rp+2w'pq=0$$

爲一圓之條件如下：因就此式與 § 5 之系比較之，可知

$$\frac{a^2-l^2}{u}=\frac{b^2-m^2}{v}=\frac{c^2-n^2}{w}$$

$$=\frac{a^2-b^2-c^2-2mn}{2u'}=\frac{b^2-c^2-a^2-2nl}{2v'}$$

$$=\frac{c^2-a^2-b^2-2lm}{2w'}.$$

命各等於 k，則得

$$a^2-uk=l^2,\ b^2-vk=m^2,\ c^2-wk=n^2,$$

$$bc\cos A+u'k=-mn,\ ca\cos B+v'k=-nl,$$

$$ab\cos C+w'k=-lm.$$

由諸式,得

$$(b^2-vk)(c^2-wk)=(bc\cos A+u'k)^2,$$

或

$$(vw-u'^2)k^2-(vc^2+wb^2+2u'bc\cos A)k+b^2c^2\sin^2 A=0.$$

且　$$(a^2-uk)(bc\cos A+u'k)$$
$$+(ca\cos B+v'k)(ab\cos C+w'k)=0,$$

或　$$(v'w'-uu')k^2+\{a(au'+b\cos C\cdot v'$$
$$+c\cos B\cdot w')-bc\cos A\cdot u\}k$$
$$+a^2bc\sin B\cdot\sin C=0.$$

因　$$b^2c^2\sin^2 A=a^2bc\sin B\sin C=(2\Delta)^2,$$

故此二式可書爲

$$(vw-u'^2)k^2-(vc^2+wb^2+2u'bc\cos A)k+4\Delta^2=0$$

及

$$(v'w'-uu')k^2+\{a(au'+bv'\cos C$$
$$+cw'\cos B)-bc\cos A\cdot u\}k+4\Delta^2=0.$$

聯合此兩式及其他四類似之式,可得

$$\{wu-v'^2+uv-w'^2-2(v'w'-uu')\}k$$
$$-\{u(b^2+c^2-2bc\cos A)+va^2+wa^2+2a^2u'$$
$$+2av'(c\cos B+b\cos C)+2aw'(b\cos C+c\cos B)\}$$
$$=0,$$

或 $$\frac{wu-v'^2+uv-w'^2-2(v'w'-uu')}{(u+v+w+2u'+2v'+2w')a^2}=\frac{1}{k}.$$

同理,可得 k 之等值之他兩相當式,故所求之條件爲

$$\frac{wu-v'^2+uv-w'^2-2(v'w'-uu')}{a^2}$$
$$=\frac{uv-w'^2+vw-u'^2-2(w'u'-vv')}{b^2}$$
$$=\frac{vw-u'^2+wu-v'^2-2(u'v'-ww')}{c^2}.$$

11. 基本三角形關於一圓錐曲線爲自共軛三角形。求此圓錐曲線之方程式。

因基本三角形之各頂點,關於此圓錐曲線爲其對邊之極點.故此圓錐曲線之方程式,呈如次之形:

$$up^2+vq^2+wr^2=0.$$

由上節之結果,可知自共軛圓之方程式爲

$$\frac{p^2}{b^2+c^2-a^2}+\frac{q^2}{c^2+a^2-b^2}+\frac{r^2}{a^2+b^2-c^2}=0,$$

或 $$\frac{p^2}{bc\cos A}+\frac{q^2}{ca\cos B}+\frac{r^2}{ab\cos C}=0.$$

此式又可書爲

$$p^2\tan A+q^2\tan B+r^2\tan C=0.$$

習　題

1. 一拋物線外接於一三角形，且其角頂上之切線，平行於對邊.試證：由三角頂至拋物線之一任何切線之距離之平方根，成一等差級數.

2. 一圓錐曲線外接於一三角形，且其每角頂上之切線，各平行於其對邊.設由三角頂至任一切線之三垂距爲 p, q, r. 求證

$$\pm p^{\frac{1}{2}}\pm q^{\frac{1}{2}}\pm r^{\frac{1}{2}}=0.$$

3. 求證此圓錐曲線之中心之方程式爲

$$p+q+r=0.$$

4. 設諸圓錐曲線各於一三角形之兩角頂上切其兩邊，且相交於一點；則此交點上諸圓錐曲線之切線，各交其第三邊之點，在同一直線上，且諸圓錐曲線之公切線，各交其相當邊於共同之三點.證之.

5. 一雙曲線組外接於一三角形.若其中之一漸近線恆過一定點，則其他之漸近線恆切於一定圓錐曲線——即以三角形之邊爲其切線者之圓錐曲線.

6. 一拋物線切一三角形於其一邊上之中點,延長他兩邊,則由三角頂至任一切線之垂線,成一調和級數.

7. 求證:基本三角形之九點圓之方程式爲

$$a(q+r)^{\frac{1}{2}}+b(r+p)^{\frac{1}{2}}+c(p+q)^{\frac{1}{2}}=0.$$

8. 設 ρ_1, ρ_2, ρ_3 爲三圓之半徑，則每兩圓之內公切線必切於一圓錐曲線,其切式方程式(以三圓心爲基本三角形之角頂)爲

$$a^2(p-q)(p-r)+b^2(q-r)(q-p)+c^2(r-p)(r-q)$$
$$+4\Delta^2\left(\frac{qr}{\rho_2\rho_3}+\frac{rp}{\rho_3\rho_1}+\frac{pq}{\rho_1\rho_2}\right)=0.$$

12. 關於切式位標系,除上述者外,尙有與尋常之笛卡位標系甚類似者,自成一系如下.

設 x, y 爲一點關於兩垂直軸之笛卡氏位標. 今以原點 (origin) 爲圓心, k 爲半徑,作一圓;則此點關於此圓之極線在兩軸上之截距 (intercepts) 各爲 $\frac{k^2}{x}, \frac{k^2}{y}$. 此兩截距可確定此極線之位置. 故其截距之逆數，可用爲該點之位

標，命為 ξ,η.

13.　在此位標系中，凡一次方程式，必代表一點。

設一次方程式為

$$a\xi+b\eta=1.$$

作兩垂直線 OX,OY. 於 OX 線上取一點 A, 命 $OA=a$; 於 OY 線上取一點 B, 命 $OB=b$.

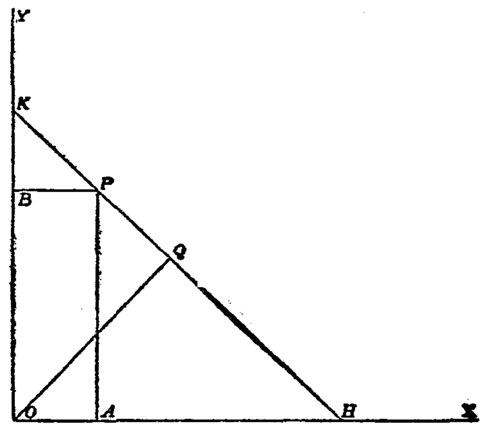


圖 23

作 AP 及 BP 各垂直於 OX 及 OY; 則

$$a\xi+b\eta=1$$

即為 P 點矣。

因設過 P 點，任作一直線交兩軸於 H 及 K. 若 ξ,η 為

此直線之位標，則

$$\frac{1}{OH}=\xi,\ \frac{1}{OK}=\eta.$$

故
$$a\xi=\frac{OA}{OH}=\frac{KP}{HK},$$

$$b\eta=\frac{OB}{OK}=\frac{HP}{HK}.$$

$$\therefore\quad a\xi+b\eta=1;$$

卽凡過 P 點之直線，其位標必皆能適合此式。故必爲 P 點之方程式矣。

14. 在此位標系中，與在本章前半所述者之情形同，凡一方程式必代表一曲線，此曲線之切線之位標皆適合其方程式。凡 n 次方程式必代表一 n 級曲線。

15、 命由 O 至 HK (圖 23) 之垂線 OQ 爲 p，角 QOX 爲 ϕ；則
$$\xi=\frac{\cos\phi}{p},\ \eta=\frac{\sin\phi}{p}.$$

故凡點皆可以方程式

$$a\cos\phi+b\sin\phi=p$$

表之。又設命 a^2+b^2 爲 c^2，$\frac{b}{a}$ 爲 $\tan\alpha$，則此式爲

$$p=c\cos(\phi-\alpha).$$

如是，可用一定點至切線之垂線，及此垂線與一定線之交角之關係，以表示一曲線。此式稱爲該曲線之切式位標之極方程式。在 Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics) 之卷一，210 頁，討論甚詳。

習　題

1. 求證：兩點 $a\xi+b\eta=1$ 及 $a'\xi+b'\eta=1$ 間之距離爲
$$\{(a'-a)^2+(b'-b)^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

2. 求證：兩直線 (ξ,η) 及 (ξ',η') 之交角之餘弦爲
$$\frac{\xi\xi'+\eta\eta'}{(\xi^2+\eta^2)^{\frac{1}{2}}(\xi'^2+\eta'^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

3. 由一點 $(a\xi+b\eta=1)$ 至直線 (ξ_1,η_1) 之距離爲
$$(a\xi_1+b\eta_1-1)(\xi_1^2+\eta_1^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

4. 方程式 $\xi^2+\eta^2+2P\xi+2Q\eta+R=0$ 之圖象，爲一圓錐曲線，其焦點在原點．證之．

其準線之位標爲何？離心率及通徑各若干？

5. 求證：$p=a+c\cos\phi$ 爲一圓；求其半徑．

6. 橢圓 $a^2\xi^2+b^2\eta^2=1$ 之漸縮線 (evolute) 之方程式爲
$$\frac{a^2}{\xi^2}+\frac{b^2}{\eta^2}=(a^2-b^2)^2.$$

第 八 章

關於兩圓錐曲線之交點之研究及投影法

On the Intersection of Conics, and On Projections

1. 茲略論兩圓錐曲線之交點之情形．於將來之研究，甚有稗益也．

因凡圓錐曲線必可用二次方程式表之．故任何兩圓錐曲線之交點有四，或 (1) 皆爲實點，或 (2) 兩實點，兩虛點，或 (3) 皆爲虛點．

2. 過此四交點，可作三對之直線．設命四交點爲 P, Q, R, S；則三對之直線爲 PQ, RS；PR, QS 及 PS, QR．若 PQ, RS 相交於 L；PR, QS 相交於 M；PS, QR 相交於 N；則稱（見第二章 § 15）L, M, N 爲四角形 $PQRS$ 之頂點．且 L, M, N 關於任何過此四點之圓錐曲線，成自共軛三角形．故每點關於各圓錐曲線之極線皆相同．

3.　今求此三對之直線 PQ, RS;……等（卽四角形之邊及其對角線）之方程式如下:

設兩圓錐曲線之方程式爲

$$\phi(\alpha,\beta,\gamma)=u\alpha^2+v\beta^2+w\gamma^2+2u'\beta\gamma+2v'\gamma\alpha+2w'\alpha\beta$$
$$=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

及　$$\psi(\alpha,\beta,\gamma)=p\alpha^2+q\beta^2+r\gamma^2+2p'\beta\gamma+2q'\gamma\alpha+2r'\alpha\beta$$
$$=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

則凡通過其四交點之圓錐曲線，可用下式表之

$$\phi(\alpha,\beta,\gamma)+k\psi(\alpha,\beta,\gamma)=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

若此式之左端，分解爲兩因式，則此圓錐曲線成爲兩線，實線或虛線。其條件爲

$$\begin{vmatrix} u+pk, & w'+r'k, & v'+q'k \\ w'+r'k, & v+qk, & u'+p'k \\ v'+q'k, & u'+p'k, & w+rk \end{vmatrix}=0 \cdots\cdots\cdots (4)$$

此式爲 k 之三次式，其三根皆爲實根，或一實根而兩虛根。設三根皆爲實根，則四角形之三頂點，亦卽 (3) 式中之圓錐曲線之中心，皆爲實點。若僅有一根爲實根，則四角形僅有一頂點爲實點。今進而研究三頂點 L, M, N 之爲實或虛，與四交點 P, Q, R, S 之連帶之關係。

4. 先設四交點 P, Q, R, S 皆爲實點，則三頂點亦皆爲實點，可知之矣.

5 其次，若兩點如 P, Q 爲實點；其他兩交點如 R, S 爲虛點；則直線 PR，除 P 點之外，不能更有其他之實點.蓋或有之，則必爲一實線.是卽，一實線與一實圓錐曲線相交於一實點及一虛點矣.此爲不可能之事實.

故 PR 線上之 M 點必爲虛點. 同理，PS 線上之 N 點亦必爲虛點.故唯一之實點，必爲 L，在 PQ 之線上者.

但 RS 爲一實線.蓋如視兩直線爲一軌跡，則當以 k 之實値相當於 L 點者代入之，則此兩直線可由 (3) 式表之.

故
$$\phi(\alpha, \beta, \gamma)+k\psi(\alpha+\beta+\gamma)$$
之一實因式，與 PQ 相當；他一因式，則相當於 RS，而爲一實因式.

6. 又次，設四交點皆爲虛點，則三頂點皆爲實點.

因如上所示，必有一頂點爲實點. 今以此實頂點爲基本三角形之 A 點，並設此點關於此兩圓錐曲線之極線爲 BC. B 爲此極線上之任一點，命其關於其一圓錐曲線之極線爲 AC，則此圓錐曲線之方程式爲

$$\alpha^2+v\beta^2+w\gamma^2=0. \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

設他一圓錐曲線之方程式爲

$$\alpha^2+q\beta^2+r\gamma^2+2p\,\beta\gamma=0.\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

因由題設，四交點皆爲虛點，故此二次方程式

$$(q-v)\beta^2+(r-w)r^2+2p'\beta\gamma=0$$

之二根爲虛數，故

$$(q-v)(r-w)>p'^2.\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

今設 $(0, g, h)$ 爲其一頂點之位標，則因此頂點關於該兩圓錐曲線之兩極線相同，故

$$vg\beta+wh\gamma=0$$

與　$$(qg+p'h)\beta+(p'g+rh)\gamma=0,$$

二者係代表同一直線．故

$$\frac{qg+p'h}{vg}=\frac{p'g+rh}{wh}.$$

由此式所得 $\frac{g}{h}$ 之兩值，則可定其兩頂點矣．而 $\frac{g}{h}$ 之爲實爲虛，全視乎

$$(qw-rv)^2+4vwp'^2\gtrless0$$

而定．

若 v, w 同號，則兩頂點爲虛點，而本節之理明矣．今設 v, w 異號，則由 (3)

$$qr-p'^2>qw+rv-vw.$$

以 $-4vw$ 乘之，

$$-4vw(qr-p'^2)>4vw(vw-qw-rv).$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad (qw+rv)^2-4vw(qr-p'^2)&>(qw+rv)^2\\&\quad+4v^2w^2-4vw(qw+rv)\\&>(qw+rv-2vw)^2\\&>0.\end{aligned}$$

$$\therefore\quad (qw-rv)^2+4vwp'^2>0.$$

故若四交點皆爲虛點，則三頂點皆爲實點.

7. 此三頂點關於該兩圓錐曲線，成自共軛點.設以之爲基本三角形之角頂.命此兩圓錐曲線之方程式爲

$$u\alpha^2+v\beta^2+w\gamma^2=0$$

及
$$p\alpha^2+q\beta^2+r\gamma^2=0.$$

則此兩圓錐曲線之諸公共弦爲

$$\pm\frac{\alpha}{(qw-rv)^{\frac{1}{2}}}=\pm\frac{\beta}{(ru-pw)^{\frac{1}{2}}}=\pm\frac{\gamma}{(pv-qu)^{\frac{1}{2}}}.$$

且因 $qw-rv,\ ru-pw,\ pv-qu$

三式中，必有兩式同號，故知其中至少有一對之公共弦爲實線.其餘之兩對，或爲實線，或爲虛線，則視乎四交點之

皆為實點或否而定。

8.　本章§3之方程式(4)，可書之為

$$
\begin{vmatrix} u, & w', & v' \\ w', & v, & u' \\ v', & u', & w \end{vmatrix}
+\left\{\begin{vmatrix} p, & w', & v' \\ r', & v, & u' \\ q', & u', & w \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} u, & r', & v' \\ w', & q, & u' \\ v', & p', & w \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} u, & w', & q' \\ w', & v, & p' \\ v', & u', & v \end{vmatrix}\right\}k
+\left\{\begin{vmatrix} u, & v', & q' \\ w', & q, & p' \\ v', & p', & r \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} p, & w', & q' \\ r', & v, & p' \\ q', & u', & r \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} p, & r', & v' \\ r', & q, & u' \\ q', & p', & w \end{vmatrix}\right\}k^2
+\begin{vmatrix} p, & r', & q' \\ r', & q, & p' \\ q', & p', & r \end{vmatrix}k^3=0.
$$

通常皆書為

$$\Delta+\Theta k+\Theta' k^2+\Delta' k^3=0.$$

Δ, Δ' 稱為該兩圓錐曲線之判別式 (discriminant). 此方程式之三根，乃為 k 之值，過此兩圓錐曲線之四交點之三對之直線所由生者。此值雖經位標之易換而仍不變，故

$\Delta, \Theta, \Theta', \Delta'$ 等之比，不因位標之易換而改變．因稱爲不變式 (invariants)．其性質頗有意味．但詳細之討論，因超出本書之範圍，故從略．在 Dr. Salmon 氏之書中，則論之甚詳．至其爲用，可以下之命題爲例，以示其一斑．

設 $S=0$, $S'=0$ 爲兩圓錐曲線之方程式；並設 $\Sigma=0$ 爲前者關於後者之互對極線；$\Sigma'=0$ 爲後者關於前者之互對極線；則

$$\Sigma-\Theta S'+\Theta' S-\Sigma'\equiv 0.$$

如以二次方程式之通式論之，則較爲尤繁．今設兩圓錐曲線之方程式，以其公共之自共軛點爲基本三角形之角頂，爲

$$S=u\alpha^2+v\beta^2+w\gamma^2=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (S)$$

$$S'=p\alpha^2+q\beta^2+r\gamma^2=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (S')$$

則 $$\Delta=uvw,\ \Theta=pvw+qwu+ruw,$$

$$\Delta'=pqr,\ \Theta'=uqr+vrp+wpq.$$

又

$$\Sigma=\begin{vmatrix} 0, & p\alpha, & q\beta, & r\gamma \\ p\alpha, & u, & 0, & 0 \\ q\beta, & 0, & v, & 0 \\ r\gamma, & 0, & 0, & w \end{vmatrix}=p^2vw\alpha^2+q^2wu\beta^2+r^2uw\gamma^2;$$

$$\Sigma' = u^2qr\alpha^2 + v^2rp\beta^2 + w^2pq\gamma^2,$$

$$\begin{aligned}\Theta'S - \Theta S' &= (uqr + vrp \quad wpq)(u\alpha^2 + v\beta^2 + w\gamma^2) \\ &\quad - (pvw + qwu + ruv)(p\alpha^2 + q\beta^2 + r\gamma^2) \\ &= (u^2qr - p^2vw)\alpha^2 + (v^2rp - q^2wu)\beta^2 \\ &\quad + (w^2pq - r^2uv)\gamma^2 \\ &= \Sigma' - \Sigma.\end{aligned}$$

故如命題云云：　$\Sigma - \Theta S' + \Theta' S - \Sigma' \equiv 0.$

但如前所述，Θ 及 Θ' 為不變式，故不問兩圓錐曲線以何式表之，均可得同一之結果。由此可知設兩圓錐曲線互對極投之，則所得之兩圓錐曲線之四交點及兩已知圓錐曲線之四交點等，在同一圓錐曲線上。

投　影
Projections

9.　**定義**　設一直線移動，恆與一已知曲線相交，且恆過此曲線所在之平面外之一定點；則如是所成之面，稱為圓錐 (cone).

此定點為圓錐之頂點 (vertex)，以 V 代之。

若一圓錐被任何兩平面所截，則其一之曲線，稱為其他之投影 (pro ection).

母線[(動線在任何位置者) generator]被兩平面所截之兩點，亦互爲投影。而稱此兩平面之交線爲非投影線(unprojected).

由是可知一曲線在已知平面上之投影，乃如置一光源於頂點上所得該曲線在此平面上之影也.

兩曲線之交點之投影，仍爲該兩曲線之投影之交點.

一直線之投影仍爲一直線；n 次曲線之投影，仍爲一 n 次曲線. 因一直線與 n 次曲線之交點有 n，故其投影上之交點，亦有 n 點也.

10. 設 AB 爲任一直線，並設一圓錐被一平行於 VAB 之平面所截，則 AB 之投影在無窮遠處. 由是可知，一圖形可如是投影，使其任一直線之投影在無窮遠處. 是謂無窮遠線之投影法.

11. 任何四邊形可投影爲平行四邊形.

因設 $ABCD$ 爲任何四邊形，引長 AB, CD 相交於 E；AD, BC 相交於 F；並將 EF 投影爲無窮遠線. 於是，因 AB 及 CD 之投影相交於無窮遠處，故必平行. 同理，AD, BC 亦必互相平行，故 $ABCD$ 經投影而成爲平行四邊形矣.

12. 角 EVF 爲 AB, BC 之投影之交角.

因設投影所在之平行交 VA, VB, VC, VD 於 A', B', C', D'; 則 A', B', C', D' 各爲 A, B, C, D 之投影. 又 V 及 E 在平面 $ABA'B'$ 上, 且因 A' 及 B' 所在之投影平面平行於 VEF, 故亦平行於 VE. 因之, $A'B'$ 亦平行於 VE 矣. 同理, $B'C'$ 平行於 VF, 故角 $A'B'C'$ 等於角 EVF.

13. 設以 EF 爲弦, 作一圓使含一定之圓周角, 並於此弓形上取任一點爲 V, 則角 EVF 可使之含有任何指定之值. 因之, 可知任何四邊形可由無數之方法以投影爲平行四邊形, 使其含有任何指定之角.

14. 今研究投影之理論對於二次曲線之應用.

任何曲線上之切線, 其投影亦必爲該曲線之投影之切線, 不難立知之.

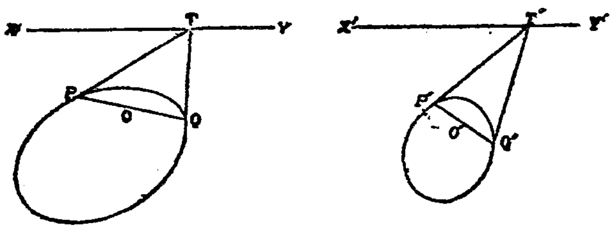


圖 24

又設一點與一直線，關於一已知圓錐曲線互爲極點及極線，則其投影關於該圓錐曲線之投影，亦互爲極點及極線.

因，設 O 爲定點，XY 爲 O 點關於已知圓錐曲線之極線. 在 XY 線上，圓錐曲線外一點 T，作兩切線 TP 及 TQ；則 PQ 必過 O 點. 今就此圖象投影之，並設 O',P', Q'. T',X',Y' 各爲 O,P,Q,T,X,Y 之投影；則 $T'P'$ 及 $T'Q'$ 必爲該圓錐曲線之投影之切線；$P'Q'$ 必過 O' 點. 因 T' 爲 $X'Y'$ 線上之任一點，故知 $X'Y'$ 爲 O' 之極線.

15. 由此命題，可知任何兩圓錐曲線可投影爲同心曲線. 因吾人至少可求得(§ 及 § 7)一實點，使此點關於該兩圓錐曲線之極線疊合. 次將此直線投影爲無窮遠線，則其共同之極點，成爲兩曲線之投影之中心矣.

16. 任兩圓錐曲線，可投影爲兩相似之曲線，且在相似之位置. 因吾人恆可求得兩直線 (§ 5, § 7) 使交此兩圓錐曲線於共同之兩點——實點或虛點. 次將其一直線投影於無窮遠處，則此兩圓錐曲線之投影之交點在無窮遠處，即投影爲兩相似且在相似位置之兩曲線矣. 此兩曲線爲橢圓，或雙曲線，視乎此投影於無窮遠處之直線與原圓

錐曲線之交點爲虛點或實點而定．若兩圓錐曲線有二重切點，則其投影之曲線仍同心．

17.　前兩節所述之投影，可由無數之法變更之．蓋任何點皆可用爲圓錐之頂點．又設此圓錐曲線所截之平面，平行於過頂點且含一欲投影於無窮遠處者之直線之平面，則所求之投影，亦隨之而改變矣．

18.　由是可知任何兩相交圓錐曲線，可投影爲雙曲線使具有定值之離心率．例如，設兩已知圓錐曲線相交於 A, B. 試投影之使成爲相似，且在相似位置之雙曲線，且令其漸近線間之交角爲 α 一題．取一點 V 使角 AVB 等於 α. 以 V 爲頂點，作兩圓錐過此兩已知圓錐曲線；則平行於 VAB 之平面與此兩圓錐之截線，必爲雙曲線，其漸近線各平行於 VA 及 VB. 故相似，且在相似之位置，且如所定之形．

19.　今進而討論投影理論中之最要而最難之點．卽由投影之理論，可從圓之性質以推得圓錐曲線之通性也．夫任兩圓錐曲線之可投影爲具有定值之雙曲線，已示之於前矣．此項投影之可能性，旣可由幾何之方法示知之，則亦必可用代數之法以證之者，實無可疑義．且因代數符

號之連續性，討論時，更無須受制於任何之條件，如幾何中之相交於實點或如投影曲線之離心率大於1者等條件之限制．故由代數之方法，可變換任兩圓錐曲線之方程式，使爲具有任何指定之離心率者之方程式．因之，亦可變換之使成爲一圓．至已知圓錐曲線上之公共點及公切線，則變易爲其投影曲線上之公共點及公切線．極點及極線之性質，則仍舊不變．

因任何圓必皆通過無窮遠線上之兩共同之點，故凡圓皆可經投影而變易爲過兩同點之圓錐曲線組，且有一公共弦．又因拋物線皆切於無窮遠線，故拋物線投影爲切於同一直線之圓錐曲線組．又拋物線及圓所成之曲線組，則投影爲另一曲線組，其中諸已知圓之投影爲同過兩點之圓錐曲線，而諸拋物線之投影爲以此兩點之聯線爲公切線者之圓錐曲線．

20. 在第六章中討論實焦點及虛焦點之位標之時，已知由四焦點中之任一焦點所作之兩虛切線，適合其爲圓之漸近線之條件式．故此兩切線亦必交無窮遠線於兩環點．逆之，設由無窮遠線上之兩環點，至一圓錐曲線作兩對之切線，則成一虛四邊形外接於此圓錐曲線，其四角頂

爲此曲線之四焦點.

故凡具同一焦點之圓錐曲線，其投影必爲具有同一對之公切線者之圓錐曲線.又共焦點之圓錐曲線 (confocal conics) 投影爲內切於同一四邊形之圓錐曲線.

因準線爲焦點之極線，故若兩圓錐曲線同一焦點及準線,則其投影爲以切點弦爲公切線者之兩圓錐曲線.換言之,卽有二重切點.

21. 一束線或列點之複比,不因投影而改變.

設截線 $PQRS$ 交束線 OP, OQ, OR, OS 於 P, Q, R, S. 取平面外一點 V. 作 VO, VP, VQ, VR, VS. 並設諸直線截任一平面於 O', P', Q', R', S';則

$$
\begin{aligned}
\{O'\cdot P'Q'R'S'\} &= [P'Q'R'S'] \\
&= \frac{P'Q'\cdot R'S'}{P'R'\cdot Q'S'} \\
&= \frac{\sin P'VQ'\cdot\sin R'VS'}{\sin P'VR'\cdot\sin Q'VS'} \\
&= \frac{\sin PVQ\cdot\sin RVS}{\sin PVR\cdot\sin QVS} \\
&= \frac{PQ\cdot RS}{PR\cdot QS} = [PQRS] \\
&= \{O\cdot PQRS\}.
\end{aligned}
$$

卽此束線或列點之複比等於其投影之束線或列點之複比也.

22. 下之命題,對於角度之投影定理,爲用甚大.

設兩直線間之交角爲 A, 則此兩線與聯其交點至無環點之兩線,成一束線,其複比爲 $\epsilon^{(\pi-2A)\sqrt{-1}}$.

此兩已知線卽束線中之第一線及第三線. 是可不言而喩者.

以此兩線爲基本三角形之兩邊, 並設其方程式各爲 $\beta=0$ 及 $\gamma=0$. 聯其交點至兩環點之直線,可由無窮遠線之方程式及基本外接圜之方程式中以消去 α 求之. 卽由

$$a\alpha+b\beta+c\gamma=0 \text{ 及 } \frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta}+\frac{c}{\gamma}=0.$$

消去 α 以求之,得

$$\beta^2+2\beta\gamma\cos A+\gamma^2=0.$$

但
$$(\beta-k\gamma)(\beta+k'\gamma)=0$$

所代表之兩直線與 $\beta=0$ 及 $\gamma=0$ 成一束線, 其複比爲 k'/k (第一章 § 23). 而在本題中

$$k=-\epsilon^{A\sqrt{-1}},\ k'=\epsilon^{-A\sqrt{-1}}.$$

故其複比爲

$$-\frac{\epsilon^{A\sqrt{-1}}}{\epsilon^{-A\sqrt{-1}}}=-\epsilon^{2A\sqrt{-1}}=\epsilon^{(\pi-2A)\sqrt{-1}}$$

系　若兩已知線成一直角，則 $A=\frac{\pi}{2}$，而複比之值爲 1. 卽此四直線成一調和束線.

23.　由圓之性質，"同弧上之圓周角皆相等"，可得圓錐曲線中之複比之重要之性質. 此定理可更述如下："設 A, B 爲圓周上兩定點，O 爲圓周上之任一點，則角 AOB 爲一定值." 將此圓投影爲一圓錐曲線. 設 A', B', O' 爲 A, B, O 之投影；H, K 爲兩環點之投影，則由上節之結果，得知　　$\{O'\cdot A'B'HK\}$ 爲一定值.

或謂聯圓錐曲線上任一點至其上四定點之束線，其複比爲一定.

由第七章 §13，施對極投法，則得互對極定理爲"設一圓錐曲線上之切線被四直線所截，則所得之列點之複比爲一定."

24.　設 P, Q, R 爲一直線上之三點；p, q, r 各爲其投影；s 爲 PQR 直線上之無窮遠點之投影；則

$$[pqrs]=\frac{PQ}{QR}.$$

因 $$[pqrs]=\frac{pq\cdot rs}{ps\cdot qr}=\frac{PQ\cdot RS}{PS\cdot QR},$$

S 爲 PQR 線上之無窮遠點。

又 $RS:PS$ 之値爲 1，故

$$[pqrs]=\frac{PQ}{QR}.$$

25. 設 P, P', Q, Q', R, R' …… 爲一應稱組之若干點；p, p', q, q', r, r' …… 等，各爲其投影。因 $[PQRS]=[P'Q'R'S']$ (見第一章 § 27)，且 $[PQRS]=[pqrs]$，$[P'Q'R'S']=[p'q'r's']$ (見本章 § 21)。故

$$[pqrs]=[p'q'r's']$$

卽 p, p', q, q', r, r'……等仍成一應稱組。故

凡應稱組之投影仍爲一應稱組.

若 P 與 P' 密合，則 p' 與 p 亦密合。卽其焦點仍投影爲其應稱組之焦點。但中心之投影則未必仍爲其投影後之中心耳。

26. 設一圓組通過兩定點 A, A'；並設其中之一圓交一已知直線於 P 及 P'. 引長 AA' 使交已知直線於一點 O，則 $$OP\cdot OP'=OA\cdot OA'.$$

或卽，凡過兩定點 A, A' 之圓，此値 $OP\cdot OP'$ 恆爲一定。

故謂，通過兩定點之圓組與一已知直線之交點成應稱點組。今將此圓組投影爲過四定點之圓錐曲線組，則可見"凡過四定點之圓錐曲線組與一直線之交點成一應稱點組."

在此圓錐曲線組中，可作一圓錐曲線，使其交此直線之一點在無窮遠處.換言之，卽可使其一漸近線平行於此已知直線.其他之一交點，卽此應稱點組之中心.

又(參閱第九章 § 3) 過此四定點，可作兩圓錐曲線切於已知直線.兩切點爲應稱點組之兩焦點.

將諸命題施行對極投法，則可知內切於已知四邊形之圓錐曲線組，仍具有類似之性質.更投影之，則又可從而獲得共焦點之圓錐曲線組之類似之性質矣.

27. 設投影之頂點在無窮遠處，則此圓錐成爲一圓柱(cylinder).稱此種投影爲正投影(orthogonal).正投影中，無窮遠線恆在無窮遠處，而兩平行線則仍投影爲兩平行線.任何面積，與其投影之面積，恆有一定之比值；又一直線上三定點間距離之關係比，與其投影上三點間之距離之互相關係之比相同.圓之兩垂直直徑，因各平行於他直徑端點上之切線，故其投影爲橢圓之兩共軛直徑 (conjugate diameters). 利用此投影法，圓錐曲線之性質，可由圓之性質推得之．且以關於共軛直徑者爲尤易．

習題

1. 設三角形 XYZ 移動時，其一邊 YZ 恆過一定點 P; ZX 恆通過一定點 Q, XY 恆通過一定點 R. 並設 Y 之軌跡爲過 R 及 P 之一已知圓錐曲線, Z 之軌跡爲過 P 及 Q 之一已知圓錐曲線．試證 X 之軌跡爲一圓錐曲線，通過 Q, R 及兩已知圓錐曲線之其他之三交點．

2. 設作兩直線與一已知圓錐曲線相切，且使其交一已知直線之點與此已知直線上之兩定點成調和列點；則如是所作之兩切線之交點之軌跡，爲過兩定點之一圓錐曲線．

3. 一圓錐曲線組與四定直線相切．試證：任一直線關於其中之任何圓錐曲線之極點之軌跡爲一直線．

若此直線投影於無窮遠處，使交四定線中之兩線之點，投影爲兩環點，則此定理如何?

4. 一圓錐曲線組外接於一已知四角形．試證：任一直線關於其中之一圓錐曲線之極點之軌跡，爲一圓錐曲

線，通過四角形之頂點.

5.　一圓錐曲線組與三角形之三邊相切，由一定點至各圓錐曲線作兩切線.設其一切點之軌跡為一直線，則其他一切點之軌跡為已知三角形之外接圓錐曲線.

6.　一圓錐曲線以 S 及 H 為其焦點.此曲線上一點 P 之切線交其兩共軛直徑於 T 及 t.求證三角形 SPT 與 HPt 相似.

7.　兩拋物線共一頂點，且其兩軸互相垂直.求證：其一關於其他之互對極線為一等軸雙曲線，以兩拋物線之兩軸為其漸近線.

第 九 章

雜 命 題

Miscellaneous Propositions

五幾何條件所定之圓錐曲線
On the Determination of a Conic from five given Geometrical Conditions

1. 設就一圓錐曲線所受之五獨立條件，一一以代數學之術語表之，則可得五方程式，以定其中之任意常數.故五獨立之條件，則足以確定一圓錐曲線矣.但所得之方程式，時或有高於一次者，則此任意常數之值有幾；因之能適合諸條件之圓錐曲線之個數多於一.但仍有限.

最常見之幾何條件，厥爲過定點，切於定線，以及其他之可由斯二者而推得者.今就各種之情形，研究其圓錐曲線可能之個數.

2. 設已知一圓錐曲線上之五點.

此時可僅以各點之位標，一一代入圓錐曲線之方程式中之 α, β, γ. 於是可得單簡之方程式五，以定常數之值。在此情形之下，僅可得一圓錐曲線，以適合此條件。

3. 設已知四點及其一切線。

取其中之三點爲基本三角形之角頂。命其餘一點之位標爲 f, g, h. 並設已知切線之方程式爲

$$l\alpha+m\beta+n\gamma=0.$$

所求之圓錐曲線之方程式爲

$$\frac{\lambda}{\alpha}+\frac{\mu}{\beta}+\frac{\nu}{\gamma}=0.$$

於是得
$$\frac{\lambda}{f}+\frac{\mu}{g}+\frac{\nu}{h}=0$$

及
$$\lambda^2l^2+\mu^2m^2+\nu^2n^2-2\mu\nu mn-2\nu\lambda nl-2\lambda\mu lm=0,$$

以定 $\lambda:\mu:\nu$ 之值。

由此兩方程式，得 $\lambda:\mu:\nu$ 之值二。是即能適合此條件之圓錐曲線亦有二也。

4. 設已知三點及兩切線。

取三已知點爲基本三角形之角頂，並設此兩切線之方程式爲
$$l\alpha+m\beta+n\gamma=0$$

及
$$l'\alpha+m'\beta+n'\gamma=0.$$

設所求之圓錐曲線之方程式爲

$$\frac{\lambda}{\alpha}+\frac{\mu}{\beta}+\frac{\nu}{\gamma}=0,$$

則可得兩方程式

$$\lambda^2l^2+\mu^2m^2+\nu^2n^2-2\mu\nu mn-2\nu\lambda nl-2\lambda\mu lm=0$$

及

$$\lambda^2l'^2+\mu^2m'^2+\nu^2n'^2-2\mu\nu m'n'-2\nu\lambda n'l'-2\lambda\mu l'm'=0,$$

以定 $\lambda:\mu:\nu$ 之值.

此兩方程式爲二次式.故 $\lambda:\mu:\nu$ 之值有四.卽可適合此條件之圓錐曲線有四也.

5. 設已知兩點及三切線.

取三已知切線爲基線,設兩已知點之位標爲 f, g, h;及 f', g', h'. 並設所求之圓錐曲線之方程式爲

$$\lambda^2\alpha^2+\mu^2\beta^2+\nu^2\gamma^2-2\mu\nu\beta\gamma-.\nu\lambda\gamma\alpha-2\lambda\mu\alpha\beta=0.$$

以 f, g, h 及 f', g', h' 之值代入式中之 α, β, γ, 得兩二次方程式以定 $\lambda:\mu:\nu$ 之值;得四圓錐曲線.

6. 設已知一點及四切線.

任取三已知切線爲基線, 則由切於第四已知線之一條件;得一一次方程式.又由過一定點之一條件得一二次方

程式.故可得適合此條件之圓錐曲線二.

7. 設已知其五切線.

任取三切線爲基線.於是由所求之圓錐曲線切於其餘之兩已知線之條件,得兩一次方程式,卽僅可得一圓錐曲線適合此條件也.

§§ 5, 6, 7 之結果,可由 §§ 4,3,2 各由對極投法推得之.

8. 其他之條件,有可化爲通過定點及切於定線者.例如,已知其一切線及其切點之條件,實同於已知兩點——無限接近者之兩點;或可視之爲已知兩無限接近,幾於疊合者之兩切線.他如一圓錐曲線爲一拋物線之題設,實等於已知一圓錐曲線之切線.蓋凡拋物線皆切於無窮遠線也.又如圓錐曲線爲圓之一題設,實等於已知此圓錐曲線上之兩點,蓋任何圓皆交無窮遠線於兩環點也.由此且可說明任何三角形,可作四圓切於其三邊,惟僅可作一外接圓之理.同理,兩圓錐曲線相似且在相似之位置之一題設,實等於已知其兩點.又,已知一圓錐曲線之一漸近線之題設,等於已知其兩點;蓋漸近線可視爲一切線,且已知其切點者(該切點在無窮遠處).設已知其一漸近線之方向,則實等於已知其上之一點.蓋可由此以定該圓錐

曲線與無窮遠線之交點也.

9. 設已知三定點成自共軛點，則此題設卽等於已知三條件矣.蓋若以此三定點爲基本三角形之角頂，則圓錐曲線之方程式爲

$$u\alpha^2+v\beta^2+w\gamma^2=0.$$

故若再附以其他之兩條件，則可定此圓錐曲線矣.若其條件爲過兩定點，或切於兩定線，或過一定點且切於一定線，則可僅得一圓錐曲線.

若此圓錐曲線通過 (f, g, h)，則亦必通過此三點 $(-f, g, h)$，$(f, -g, h)$ 及 $(f, g, -h)$，不難立見之.若此圓錐曲線切於直線 (l, m, n)，則亦必切於此三直線 $(-l, m, n)$，$(l, -m, n)$ 及 $(l, m, -n)$.

過定點且切於定線之四條件之圓錐曲線組之中心之軌跡之問題

On the Locus of the Centre of A System of Conics which Satisfy Four Conditions, Expressed by Passing Through Points and Touching Straight Lines

10. 過 m 定點且切於 n 定線 $(m+n=4)$ 之圓錐曲

線之中心之軌跡，除兩情形之外，皆爲圓錐曲線，玆一一討論之於下：

11.　設此圓錐曲線組過四定點．

此種情形，以笛卡氏位標系討論之爲宜．

在此組之圓錐曲線中，有兩圓錐曲線爲拋物線．在此兩拋物線上，各取一直徑，使其端點上之切線平行於他一拋物線之軸．以此兩直徑爲位標軸．於是此兩拋物線之方程式各爲

$$x^2+2fy+h=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$y^2+2g'x+h'=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

該圓錐曲線組之方程式爲

$$x^2+\lambda y^2+2\lambda g'x+2fy+h+\lambda h'=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

λ 爲一任何乘數．

其中心由次之兩方程式定之：

$$x+\lambda g'=0,\ \lambda y+f=0.$$

消去 λ，則得一圓錐曲線

$$xy=fg \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

爲其中心之軌跡，其漸近線平行於拋物線 (1),(2) 之兩軸．

若四定點成一凸四角形，則兩拋物線爲實線；而 (4) 式

代表一雙曲線矣.若四角形爲凹四形角,則兩拋物線爲虛線;而中心之軌跡爲一橢圓.

曲線 (4) 平分四定點中每對之點之距離,且通過四角形之頂點.此可從幾何方面察知之.蓋就此圓錐曲線組之三對直線視之,諸頂點乃爲其中心.

由式 (3) 之形視之,可知此組中之任一圓錐曲線,必有一對之共軛直徑平行於拋物線 (1) 及 (2) 之軸.換言之,卽平行於 (4) 式之漸近線.

其離心率最小者之圓錐曲線,可用 $\lambda=1$ 以定之,得相等之共軛直徑.

若兩拋物線之兩軸互相垂直,則此四點在一圓周上.而 (3) 式中之各圓錐曲線之兩軸平行於位標軸;式 (4) 則爲一等軸雙曲線.

若此四點中之一,爲餘三點之垂心,則此圓錐曲線爲等軸雙曲線組;而 ( ) 爲諸定點之九點圓.

12. 設已知三點及一切線.

此種情形,可一望而知其軌跡爲一四次之曲線.蓋吾人可作四拋物線適合此條件.故其軌跡必含有四漸近線,各平行於拋物線之軸.

設以三定點爲基本三角形之角頂.並採用三角位標系.設此切線之方程式爲

$$lx+my+nz=0.$$

若此圓錐曲線組以方程式

$$\lambda yz+\mu zx+\nu xy=0$$

表之,則二者相切之條件爲

$$l^2\lambda^2+m^2\mu^2+n^2\nu^2-2mn\mu\nu-2nl\nu\lambda-2lm\lambda\mu=0.$$

其中心以

$$\mu z+\nu y=\nu x+\lambda z=\lambda y+\mu x$$

定之.設命其值爲 ρ, 則得

$$\lambda=\frac{y+z-x}{2yz}\rho,\ \mu=\frac{z+x-y}{2zx}\rho,\ \nu=\frac{x+y-z}{2xy}\rho;$$

故所求軌跡之方程式爲

$$\begin{aligned}l^2x^2(y+z-x)^2+m^2y^2(z+x-y)^2+n^2z^2(x+y-z)^2&\\-2mnyz(z+x-y)(x+y-z)&\\-2nlzx(x+y-z)(y+z-x)&\\-2lmxy(y+z-x)(z+x-y)&=0,\end{aligned}$$

一四次之方程式也.

以　$1-2x,\ 1-2y,\ 1-2z$ 等

各代替 $y+z-x,\ z+x-y,\ x+y-z.$

則上式中之四次項成爲

$$l^2x^2+m^2y^2+n^2z^2-2mny^2z^2-2nlz^2x^2-2lmx^2y^2.$$

故其漸近線平行於

$$\pm l^{\frac{1}{2}}x\pm m^{\frac{1}{2}}y\pm n^{\frac{1}{2}}z=0$$

之四直線.因而此四拋物線之軸,亦平行於此四直線矣.

13. 設已知其兩點及其兩切線.

此時仍可作四拋物線適合此條件.故仍望其軌跡爲一四次之曲線.但此時所得之四次式,分解爲兩二次因式.

以 $\alpha=0$ 爲聯兩定點之直線,並設他兩線爲 $\beta=0$, $\gamma=0$. 於是,此圓錐曲線組之方程式,可書爲

$$2\beta\gamma+(\lambda\alpha+m\beta+n\gamma)^2=0,$$

λ 爲一參變數.

m, n 之值,求之如下:

命 l, l' 爲 β/γ 之兩值,相當於 $\alpha=0$;則

$$(\beta-l\gamma)(\beta-l'\gamma)\equiv\beta^2+2\frac{mn+1}{m^2}\beta\gamma+\frac{n^2}{m^2}\gamma^2.$$

$$\therefore\quad l+l'=-2\frac{mn+1}{m^2},$$

$$ll'=\frac{n^2}{m^2}.$$

故
$$\frac{n}{m}=\pm(ll')^{\frac{1}{2}}.$$

又,於中心上,得

$$\lambda(\lambda\alpha+m\beta+n\gamma)=m(\lambda\alpha+m\beta+n\gamma)+\gamma$$
$$=n(\lambda\alpha+m\beta+n\gamma)+\beta.$$

$$\therefore\quad \lambda\alpha+m\beta+n\gamma=\frac{\beta-\gamma}{m-n}.$$

$$\therefore\quad \lambda=\frac{(m+n)(\lambda\alpha+m\beta+n\gamma)+\beta+\gamma}{2(\lambda\alpha+m\beta+n\gamma)}$$

$$=\frac{m+n}{2}+\frac{m-n}{2}\cdot\frac{\beta+\gamma}{\beta-\gamma}=\frac{m\beta-n\gamma}{\beta-\gamma}.$$

故所求之軌跡爲

$$\alpha\lambda\cdot\frac{m\beta-n\gamma}{\beta-\gamma}+m\beta+n\gamma=\frac{\beta-\gamma}{m-n},$$

或

$$(m-n)\alpha(m\beta-n\gamma)+(m-n)(\beta-\gamma)(m\beta+n\gamma)=(\beta-\gamma)^2.$$

$$\therefore\quad (m-n)\{m\beta^2-n\gamma^2-(n-m)\beta\gamma-n\gamma\alpha+m\alpha\beta\}$$
$$=(\beta-\gamma)^2.$$

又可書之爲

$$(m^2-mn-1)\beta^2+(n^2-mn-1)\gamma^2-(m^2-2mn+n^2-2)\beta\gamma$$
$$+(n^2-mn)\gamma\alpha+(m^2-mn)\alpha\beta=0.$$

以 m^2 除之，並以所得之 $\frac{n}{m}$ 之值代入之，則得

$$\left(1-\frac{l+l'}{2}\right)\beta^2+\left(ll'-\frac{l+l'}{2}\right)\gamma^2-(1+l+l'+ll')\beta\gamma$$
$$+ll'\gamma\alpha+\alpha\beta\pm(ll')^{\frac{1}{2}}(\gamma\alpha+\alpha\beta)=0.$$

故如上云云，得所求之軌跡爲兩圓錐曲線.

14. 設已知一點及三切線.

此時所求之軌跡爲一圓錐曲線．蓋能適合此條件之拋物線，僅有二耳.

取三切線爲基線；設 f, g, h 爲已知點之三角位標，則此圓錐曲線組之方程式爲

$$l^2x^2+m^2y^2+n^2z^2-2mnyz-2nlzx-2lmxy=0,$$

且受此條件

$$l^2f^2+m^2g^2+n^2h^2-2mngh-2nlhf-2lmfg=0$$

之限制.

又，於中心上，得

$$l(lx-my-nz)=m(\quad lx+my-nz)=n(-lx-my+nz)$$

$$\therefore\quad \frac{lx-my-nz}{mn}=\frac{-lx+my-nz}{nl}=\frac{-lx-my+nz}{lm},$$

或

$$\frac{lx}{l(m+n)}=\frac{my}{m(n+l)}=\frac{nz}{n(l+m)}.$$

$$\therefore\quad \frac{x}{m+n}=\frac{y}{n+l}=\frac{z}{l+m}.$$

$$\therefore\quad \frac{l}{y+z-x}=\frac{m}{z+x-y}=\frac{n}{x+y-z}.$$

故得中心之軌跡

$$\begin{aligned}f^2(y+z-x)^2+g^2(z+x-y)^2+h^2(x+y-z)^2&\\ -2gh(z+x-y)(x+y-z)&\\ -2hf(x+y-z)(y+z-x)&\\ -2fg(y+z-x)(z+x-y)&=0,\end{aligned}$$

爲一圓錐曲線，切於聯三基線之中心之聯線．其漸近線與

$$f^2x^2+g^2y^2+h^2z^2-2ghyz-2hfzx-2fgxy=0$$

之漸近線平行．

(i)　若

$$\begin{aligned}a^2f^2+b^2g^2+c^2h^2+(b^2+c^2-a^2)gh+(c^2+a^2-b^2)hf&\\ +(a^2+b^2-c^2)fg=0,&\quad (見第五章 §3)\end{aligned}$$

即若　$$\begin{aligned}(b^2+c^2-a^2)(g+h)^2+(c^2+a^2-b^2)(h+f)^2&\\ +(a^2+b^2-c^2)(f+g)^2=0,&\end{aligned}$$

則此圓錐曲線爲一等軸雙曲線.或謂:

設過此三定線之交點,各作一線平行於其第三線,成另一三角形.若定點 (f, g, h) 在一關於此三角形爲自共軛圓之圓周上,則上述所得之軌跡,爲一等軸雙曲線.

(ii) 若 $\left(\frac{g+h}{a}\right)^2=\left(\frac{h+f}{b}\right)^2=\left(\frac{f+g}{c}\right)^2$,

或若
$$\frac{f}{b+c-a}=\frac{g}{c+a-b}=\frac{h}{a+b-c}=\frac{1}{a+b+c};$$

$$\frac{-f}{a+b+c}=\frac{g}{a+b-c}=\frac{h}{c+a-b}=\frac{1}{a-b-c};$$

$$\frac{f}{a+b-c}=\frac{-g}{a+b+c}=\frac{h}{b+c-a}=\frac{1}{b-c-a};$$

$$\frac{f}{c+a-b}=\frac{g}{b+c-a}=\frac{-h}{a+b+c}=\frac{1}{c-a-b};$$

則上述之圓錐曲線之中心之軌跡爲一圓.

(iii) 若 $fgh(f+g+h)=0$, 卽若定點在無窮遠處,或在任一定線上,則上述所得之軌跡爲一拋物線.

15. 設已知四切線.

此時僅可作一拋物線.故可逆料其軌跡爲一直線.玆證之如下:

以此四切線所成四邊形之三對角線爲基線,並設此四

切線之方程式爲

$$\pm lx \pm my \pm nz = 0.$$

設此圓錐曲線之方程式爲

$$ux^2+vy^2+wz^2=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

則得

$$vwl^2+wum^2+uvn^2=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

又,(1) 之中心爲

$$ux=vy=wz;$$

故其軌跡爲

$$l^2x+m^2y+n^2z=0.$$

問題附錄
Supplementary Problems

16. 兩行列式之積仍爲一行列式.

先就二級者言之.

設

$$\left.\begin{aligned} a_1x_1+a_2x_2&=\xi_1 \\ b_1x_1+b_2x_2&=\xi_2 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

並設

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2&=0 \\ \beta_1\xi_1+\beta_2\xi_2&=0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

則由此兩式,可得

$$\alpha_1(a_1x_1+a_2x_2)+\alpha_2(b_1x_1+b_2x_2)=0,$$

$$\beta_1(a_1x_1+a_2x_2)+\beta_2(b_1x_1+b_2x_2)=0;$$

或

$$\left.\begin{array}{l}(\alpha_1 a_1+\alpha_2 b_1)x_1+(\alpha_1 a_1+\alpha_2 b_2)x_2=0\\(\beta_1 a_1+\beta_1 b_2)x_1+(\beta_1 a_2+\beta_2 b_2)x_2=0\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots(3)$$

若 (2) 式能適合，則 (3) 式亦必能適合.

若

$$\begin{vmatrix}\alpha_1, & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

或 ξ_1,ξ_2 皆各等於零，則(2)式卽可適合矣.就後者之一情形視之.若 ξ_1 ξ_2 皆各等於 0, 則由 (1), 得

$$\begin{vmatrix}a_1, & a_2\\ b_1, & b_2\end{vmatrix}=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

或 $x_1=x_2=0$. 設若 x_1,x_2 不等於 0, 則由 (3) 式可得

$$\begin{vmatrix}\alpha_1 a_1+\alpha_2 b_1, & \alpha_1 a_2+\alpha_2 b_2\\ \beta_1 a_1+\beta_2 b_1, & \beta_1 a_2+\beta_2 b_2\end{vmatrix}=0\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

故若 (4) 式與 (5) 式能適合，則 (6) 式亦必能適合. 以是 (6) 式之左端必含 (4),(5) 兩式左端之因式. 設更有其他之因式，則亦必僅爲一常數耳. 此常數因數，可由其兩端之相似項，如 $\alpha_1\beta_2 a_1 b_2$ 之係數，比較定之，得其值爲 1.

故於二級之行列式，本定理得證明如上.

同理，可證

$$\begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3 \\ b_1, & b_2, & b_3 \\ c_1, & c_2, & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3 \\ \beta_1, & \beta_2, & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2, & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_1 a_1+\alpha_2 b_1+\alpha_3 c_1, & \alpha_1 a_2+\alpha_2 b_2+\alpha_3 c_2, & \alpha_1 a_3+\alpha_2 b_3+\alpha_3 c_3 \\ \beta_1 a_1+\beta_2 b_1+\beta_3 c_1 & \beta_1 a_2+\beta_2 b_2+\beta_3 c_2, & \beta_1 a_3+\beta_2 b_3+\beta_3 c_3 \\ \gamma_1 a_1+\gamma_2 b_1+\gamma_3 c_1, & \gamma_1 a_2+\gamma_2 b_2+\gamma_3 c_2, & \gamma_1 a_3+\gamma_2 b_3+\gamma_3 c_3 \end{vmatrix}$$

n 級之行列式,依此類推.

17. 設三點 $(f, g, h), (f', g', h'), (f'', g'', h'')$ 關於圓錐曲線

$$\phi(x, y, z)=ux^2+vy^2+wz^2+2u'yz+2v'zx+2w'xy=0$$

成自共軛點,則

$$\begin{vmatrix} u, & w', & v \\ w', & v, & u' \\ v', & u', & w \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f, & g, & h \\ f', & g', & h' \\ f'', & g'', & h'' \end{vmatrix}^2$$

$$=\phi(f, g, h)\cdot\phi(f', g', h')\ \phi(f'', g'', h'').$$

因

$$\begin{vmatrix} u, & w', & v' \\ w', & v, & u' \\ v', & u', & w \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f, & g, & h \\ f', & g', & h' \\ f'', & g'', & h'' \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} uf+w'g+v'h, & uf'+w'g'+v'h', & uf''+w'g''+v'h'' \\ w'f+vg+u'h, & w'f'+vg'+u'h', & w'f''+vg''+u'h'' \\ v'f+u'g+wh, & v'f'+u'g'+wh', & v'f''+u'g''+wh'' \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \phi_f, & \phi_g, & \phi_h, \\ \phi_{f'}, & \phi_{g'}, & \phi_{h'}, \\ \phi_{f''}, & \phi_{g''}, & \phi_{h''}, \end{vmatrix},$$

其中 $\phi_f\equiv\frac{1}{2}\cdot\frac{d\phi}{df}$, 餘倣此。

故
$$\begin{vmatrix} u, & w', & v' \\ w', & v, & u' \\ v', & u', & w \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} f, & g, & h, \\ f', & g', & h', \\ f'', & g'', & h'', \end{vmatrix}^2$$

$$=\begin{vmatrix} f\phi_f+g\phi_g+h\phi_h, & f'\phi_f+g'\phi_g+h'\phi_h, & f''\phi_f+g''\phi_g+h''\phi_h \\ f\phi_{f'}+g\phi_{g'}+h\phi_{h'}, & f'\phi_{f'}+g'\phi_{g'}+h'\phi_{h'}, & f''\phi_{f'}+g''\phi_{g'}+h''\phi_{h'} \\ f\phi_{f''}+g\phi_{g''}+h\phi_{h''}, & f'\phi_{f''}+g'\phi_{g''}+h'\phi_{h''}, & f''\phi_{f''}+g''\phi_{g''}+h''\phi_{h''} \end{vmatrix}$$

但不論 f, g, h 之值如何，$f\phi_f+g\phi_g+h\phi_h=\phi(f, g, h)$，

且
$$f'\phi_f+g'\phi_g+h'\phi_h=0.$$

同理，其他各同形之項皆等於零.

故此定理證明如上。

18. 設一三角形內接於圓錐曲線.

$$ux^2+vy^2+wz^2+2u'yz+2v'zx+2w'xy=0,$$

且其中之兩邊各通過一定點 (f,g,h) 及 (f',g',h'). 試求其第三邊之包線.

命兩定點為 K 及 K';並設此三角形之頂點為 P,Q,R; RP 通過 K 點, PQ 通過 K' 點. 將此圓錐曲線投影為一圓,將直線 KK' 投影於無窮遠處,則 RP 及 PQ 之投影為兩直線,各與原線平行.故含一定角.因之, QR 之投影為一直線,恆切於與原圓同心者之圓.故此問題中所求之包線為一圓錐曲線,與已知之圓錐曲線具有重切線在 KK' 線上.其方程式為

$$\lambda\phi(x,y,z)+\begin{vmatrix} f, & g, & h \\ f', & g', & h' \\ x, & y, & z \end{vmatrix}^2=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

其中之 $\phi(x,y,z)$ 即 $ux^2+vy^2+wz^2+2u'yz+2v'zx+2w'xy$ 之略號, λ 為待定之常數.

今先就 λ 之因次 (dimensions) 研究之. λ 所含之 f,g,h 之因次為 2; f',g',h' 之因次為 2; u,v,w,u',v',w' 等之因次為 -1.

次設 QR 之軌跡中之兩連續之位置之交點為 V. 設於已知圓錐曲線內作一內接三角形,使其兩邊,各恆過 K'

點及 V，則其第三邊之包線，必通過 K 點．故若以 f, g, h 易 (1) 式中之 x, y, z；則 (1) 式亦必能適合．因得

$$\lambda\phi(f, g, h)+\begin{vmatrix} x, & y, & z \\ f', & g', & h' \\ f, & g, & h \end{vmatrix}^2=0,$$

λ 爲由 f, g, h 與 x, y, z 互易後之 λ 之值．故

$$\lambda\phi(x, y, z)=\lambda\phi(f, g, h).$$

故 λ 必含 $\phi(f, g, h)$ 以爲因式．同理可證 λ 亦必含 $\phi(f', g', h')$ 爲其因式．故

$$\lambda=\frac{\phi(f, g, h)\cdot\phi(f', g', h')}{\mu},$$

μ 爲 u, v, w, u', v', w' 等之三因次函數，蓋 λ 所含之 $u, v, w,$……等之因次爲 -1 也．於是，此方程式成爲

$$\phi(f, g, h)\cdot\phi(f', g', h')\cdot\phi(x, y, z)+\mu\begin{vmatrix} f, & g, & h \\ f', & g', & h' \\ x, & y, & z \end{vmatrix}^2=0.$$

欲定 μ 之值，可假定 K, K' 兩點各互在其極線上．蓋此與 K, K' 之位標無關也．如是，則 QR 之包線必過 KK' 之極點．此可由 KK' 投影於無窮遠處知之．蓋此時 QR 必

過圓錐曲線之中心。

故若 (f',g',h') 爲 KK' 之極點，則

$$\phi(f,g,h)\cdot\phi(f',g',h')\cdot\phi(f'',g'',h'')+\mu\begin{vmatrix} f, & g, & h \\ f', & g', & h' \\ f'', & g'', & h'' \end{vmatrix}^2=0.$$

由 §17，得

$$\mu=-\begin{vmatrix} u, & w', & v' \\ w', & v, & u' \\ v', & u', & w \end{vmatrix}.$$

故所求之包線爲

$$\phi(f,g,h)\cdot\phi(f',g',h')\cdot\phi(x,y,z)$$

$$=\begin{vmatrix} u, & w', & v' \\ w', & v, & u' \\ v', & u', & w \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} f, & g, & h \\ f', & g', & h' \\ f'', & g'', & h'' \end{vmatrix}^2.$$

19. 一三角形外接於圓錐曲線 $x^2+y^2+z^2=0$，且其兩頂點恆各在兩直線上 $lx+my+nz=0$ 及 $l'x+m'y+n'z=0$. 求證其第三頂點之軌跡之方程式爲

$$(ll'+mm'+nn')^2(x^2+y^2+z^2)+\begin{vmatrix} l, & m, & n \\ l', & m', & n' \\ x, & y, & z \end{vmatrix}^2=0.$$

由上節定理之互對極定理，可知所求之軌跡，與已知圓錐曲線有二重切點在兩已知直線之交點之極線上。故其方程式呈如次之形

$$\lambda(x^2+y^2+z^2)+\begin{vmatrix} l, & m, & n \\ l', & m', & n' \\ x, & y, & z \end{vmatrix}^2=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

今定 λ 之值如下：

設直線 $lx+my+nz=0$ 交已知圓錐曲線於 P 及 P'. 並設 T 爲 PP' 之極點。

今假定三角　之一邊成爲 P 點上之一切線，則過 P 點之他一切線，必與之疊合．故所求之軌跡，必過直線

$$l'x+m'y+n'z=0$$

與 P 點上之切線之交點，及與 P' 點上之切線之交點。

T 點之位標爲 l, m, n, 故此兩切線可由下式表之

$$(l^2+m^2+n^2)(x^2+y^2+z^2)-(lx+my+nz)^2=0\cdots\cdots(2)$$

故凡適合 (2) 之 x, y, z 之值，亦必能適合 (1) 式，且能使

$$l'x+m'y+n'z=0.$$

但

$$\begin{vmatrix} l, & m, & n \\ l', & m', & n' \\ x, & y, & z \end{vmatrix}^2$$

$$=\begin{vmatrix} l^2+m^2+n^2, & ll'+mm'+nn', & lx+my+nz \\ ll'+mm'+nn', & l'^2+m'^2+n'^2, & l'x+m'y+n'z \\ lx+my+nz, & l'x+m'y+n'z, & x^2+y^2+z^2 \end{vmatrix}.$$

若 $l'x+m'y+n'z=0$, 則上式右端成爲

$$\begin{vmatrix} l^2+m^2+n^2, & ll'+mm'+nn', & lx+my+nz \\ ll'+mm'+nn', & l'^2+m'^2+n'^2, & 0 \\ lx+my++nz, & 0, & x^2+y^2+z^2 \end{vmatrix}$$

$$=(l^2+m^2+n^2)(l'^2+m'^2+n'^2)(x^2+y^2+z^2)$$

$$-(ll'+mm'+nn')^2(x^2+y^2+z^2)$$

$$-(l'^2+m'^2+n'^2)(lx+my+nz)^2$$

$$=-(ll'+mm'+nn')^2(x^2+y^2+z^2),$$

若 (2) 式能適合.

故由 (1), 得　$\lambda-(ll'+mm'+nn')^2\equiv 0.$

故所求之軌跡之方程式爲

$$(ll'+mm+nn')^2(x^2+y^2+z^2)+\begin{vmatrix} l, & m, & n \\ l', & m', & n' \\ x, & y, & z \end{vmatrix}^2=0.$$

圓錐曲線之焦點之三線位標
Trilinear Co-ordinates of the Foci of A Conic

20. 本節中所討論之焦點之三線位標，絕不引入環點或虛切線之觀念。

圓錐曲線

$$u\alpha^2+v\beta^2+w\gamma^2+2u'\beta\gamma+2v'\gamma\alpha+2w'\alpha\beta=0$$

之焦點之三線位標，可依下法研究之。

作與 $\alpha=0$ 平行之兩切線。設 f_1,f_2 為此兩切線至 $\alpha=0$ 之距離。若 f, g, h 為一焦點之位標，則

$$(f-f_1)(f_2-f)=(\text{半短軸})^2.$$

設其一切線之方程式為

$$\alpha'(b\beta+c\gamma)=(2\Delta-a\alpha')\alpha,$$

此方程式代表一平行於 $\alpha=0$ 之直線，且其間之距離為 α' 者。於是，由此直線與圓錐曲線相切之條件，得 α' 之兩值，卽 f_1,f_2 也。

今二者相切之條件為

$$\begin{vmatrix} 0 & a'a-2\Delta, & ba' & ca' \\ aa'-2\Delta, & u, & w', & v' \\ ba', & w', & v, & u' \\ ca', & v', & u', & w \end{vmatrix}=0,$$

或 $$U(aa'-2\Delta)^2+V(ba')^2+W(ca')^2+2U'ba'\cdot ca'$$
$$+2V'ca'(aa'-2\Delta)$$
$$+2W'(aa'-2\Delta)ba'=0.$$

又可書之爲

$$(Ua^2+Vb^2+Wc^2+2U'bc+2V'ca+2W'ab)\alpha'^2$$
$$-4\Delta(Ua+W'b+V'c)\alpha'+4\Delta^2U=0.$$

故此方程式之左端恆等於

$$(Ua^2+Vb^2+Wc^2+2U'bc+2V'ca+2W'ab)(\alpha'-f_1)(\alpha'-f_2).$$

故半短軸之平方等於

$$-f^2+4\Delta\frac{(Ua+W'b+V'c)f-\Delta U}{Ua^2+Vb^2+Wc^2+2U'bc+2V'ca+2W'ab}.$$

同理，可得兩類似之式．而焦點得以由下式定之矣：

$$(Ua^2+Vb^2+Wc^2+2U'bc+2V'ca+2W'ab)f^2$$
$$-4\Delta(Ua+W'b+V'c)f+4\Delta^2U$$
$$=(Ua^2+Vb^2+Wc^2+2U'bc+2V'ca+2W'ab)g^2$$
$$-4\Delta(Vb+U'c+W'a)g+4\Delta^2V$$

$$=(Ua^2+Vb^2+Wc^2+2U'bc+2V'ca+2W'ab)h^2$$
$$-4\Delta(Wc+V'a+U'b)h+4\Delta^2W,$$

與第六章 § 33 之結果同.

雜 題
Miscellaneous Fxamples

1. 試證: 圓錐曲線 $\dfrac{1}{a\alpha}+\dfrac{1}{b\beta}+\dfrac{1}{c\gamma}=0$ 之中心, 與基本三角形之重心密合.

2. 證:
$$\begin{vmatrix} 0, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & 0, & z^2, & y^2 \\ 1, & z^2, & 0, & x^2 \\ 1, & y^2, & x^2, & 0 \end{vmatrix}=(x+y+z)(x-y-z)(y-z-x)(z-x-y).$$

3. 三角形之三角頂為 a, b, c. 求證其外接圓之半徑之平方等於
$$\frac{-\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 0, & ab^2, & ac^2 \\ ba^2, & 0, & bc^2 \\ ca^2, & cb^2, & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & 0, & ab^2, & ac^2 \\ 1, & ba^2, & 0, & bc^2 \\ 1, & ca^2, & cb^2, & 0 \end{vmatrix}}.$$

又設四面體之頂點為 a, b, c, d. 試求一類似之式以表示其外接球之半徑之平方。

4. S 為一圓錐曲線之焦點; PQ 為一弦,於 S 點上張一定角.作 SR, ST 各交 P, Q 兩點上之切線於 R 及 T 使角 PSR 及 QST 皆為定角.求證:

RT 恆切於一圓錐曲線,以 S 為其一焦點,且與已知圓錐曲線具共同之準線。

5. 若 $(l\alpha)^{\frac{1}{2}}+(m\beta)^{\frac{1}{2}}+(n\gamma)^{\frac{1}{2}}=0$ 為一拋物線。試證其焦點及準線各為

$$\frac{l\alpha}{a^2}=\frac{m\beta}{b^2}=\frac{n\gamma}{c^2},$$

$$\frac{l\alpha}{\tan A}+\frac{m\beta}{\tan B}+\frac{n\gamma}{\tan C}=0.$$

並由是以說明:若一拋物線切於三直線,則其準線恆過一定點.試就幾何上之意義,示此點與此三直線之位置之關係。

6. 作一拋物線組,使一已知三角形關於此組中之每一拋物線為自共軛三角形。求證 (1) 焦點之軌跡為一圓; (2) 準線恆通過此三角形之外心; (3) 每一拋物線皆切於聯已知三角形各邊中點之三直線。

7.　設 P 為圓周上之點，O 為一定點．試證 OP 之垂直平分線，與 P 點上之切線之交點之軌跡，為一直線．

8.　一等軸雙曲線外接於一三角形．試證其三邊之極點之軌跡為三直線，成另一三角形，其角頂在已知三角形之三高線之垂趾上．

9.　兩三角形 ABC, $A'B'C'$ 關於一圓錐曲線各為自共軛三角形；則可作另一圓錐曲線外接於此兩已知三角形．證之．

10.　設 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 為由一點至四已知線之距離，且

$$l\alpha+m\beta+n\gamma+p\delta=0.$$

試證：若一圓錐曲線外接於此四直線，則任一焦點之軌跡為一三次之曲線，其方程式為

$$\frac{l}{\alpha}+\frac{m}{\beta}+\frac{n}{\gamma}+\frac{p}{\delta}=0.$$

11.　求證：等軸雙曲線關於任一點 S 之互對極線為一圓錐曲線，其兩半軸之平方和等於由 S 至其中心之距離之平方．

12.　若兩已知圓錐曲線有如次之關係：其每一公切線皆於一定點上張一直角．設於此兩圓錐曲線上各取一點，使其聯線亦於此定點上張一直角．試證此聯線之包線為

一圓錐曲線，以該定點爲一焦點.

13. 設作一圓錐曲線 (A) 切於四已知圓錐曲線之準線，求證：一定點關於此圓錐曲線之極線，必切於另一圓錐曲線，以定點爲焦點，且切於三角形之三邊. 並證由定點至 (A) 之兩切線，互相垂直.

14. 設過一定點 O，作一直線交三角形 ABC 之兩邊 AB 及 AC 於 P 及 Q. 作 BQ 及 CP，則其交點之軌跡爲一圓錐曲線，外接於三角形 ABC.

15. 設 ρ_a, ρ_b, ρ_c 爲一圓錐曲線之半直徑，平行於基本三角形之邊者. 試證此圓錐曲線之面積爲

$$8\pi\frac{\rho^2{}_a\cdot\rho^2{}_b\cdot\rho^2{}_c}{\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C}\Sigma\left(\Sigma-\frac{\sin A}{\rho_a}\right)\left(\Sigma-\frac{\sin B}{\rho_b}\right)\left(\Sigma-\frac{\sin C}{\rho_c}\right),$$

$$\Sigma=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin A}{\rho_a}+\frac{\sin B}{\rho_b}+\frac{\sin C}{\rho_c}\right).$$

16. PQ 爲一圓錐曲線之弦. 其極點在 AB 弦上或其引長線上. 作 Qq 平行於 AB，而交圓錐曲線於 q；試證 Pq 平分 AB 弦.

17. 在三角形 ABC 之三邊上，作三相似圓弧，其凸出之部分向三角形內. 求證此三圓之根心［或等冪心(radical centre)］之軌跡爲一等軸雙曲線

$$\frac{\sin(B-C)}{\alpha}+\frac{\sin(C-A)}{\beta}+\frac{\sin(A-B)}{\gamma}=0.$$

18. 設 r 爲圓錐曲線

$$u\alpha^2+v\beta^2+w\gamma^2+2u'\beta\gamma+2v'\gamma\alpha+2w'\alpha\beta=0$$

之半軸，則 r 必爲方程式

$$\frac{a^2}{\left\{u+\frac{a}{bc}(au'-bv'-cw')\right\}r^2-as\cdot\cos A}$$

$$+\frac{b^2}{\left\{v+\frac{b}{ca}(bv'-cw'-au')\right\}r^2-bs\cdot\cos B}$$

$$+\frac{c^2}{\left\{w+\frac{c}{ab}(cw'-au'-bv')\right\}r^2-cs\cdot\cos C}=0,$$

$$s=\frac{abc\begin{vmatrix} u, & w', & v' \\ w', & v, & u' \\ v', & u', & w \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u, & w', & v', & a \\ w', & v, & u', & b \\ v', & u', & w, & c \\ a, & b, & c, & 0 \end{vmatrix}}.$$

19. 設一三角形關於一拋物線組中之每一拋物線爲共軛三角形，則聯其三邊中點之直線，必爲其切線。諸準

線皆通過一定點 O.——此點卽三角形之外心. 其焦點弦——O 點之極線,必包成一橢圓內切於已知三角形,且以九點圓爲輔圓.

20. 一圓錐曲線外接於三角形 ABC. 其頂點上之切線各交其對邊於三共線點 D, E, F. 聯 DEF 線上之任一點 P 至 A, B 及 C, 各交圓錐曲線於 A', B', C'. 試證: 三角形 ABC 必包一內切於 ABC 之圓錐曲線,與已知之圓錐曲線有二重點於 DEF 與此圓錐曲線之交點上. 並證 A', B', C' 三點上之已知圓錐曲線之切線,各交 $B'C', C'A', A'B'$ 於 DEF 直線上.

21. 聯兩圓錐曲線之四交點,至一圓錐曲線上任一點所成之一束線. 其複比等於由此點所作他圓錐曲線之切線,與四公切線之交點所成之列點之複比.

22. 設 $ax^2+2hxy+by^2=0$ 及 $a'x^2+2h'xy+b'y^2=0$ 所代表之兩對之直線成一調和束線, 且各對之直線非爲共軛線,則

$$(ab'+ba'-2hh')^2=3\ (ab-h^2)(a'b'-h'^2).$$

23. 兩圓錐曲線之四公切線,兩兩相交於其共同之自共軛三角形之三邊上.

24. 設一三角形之三傍心，關於其內切圓錐曲線成自共軛點，則此圓錐曲線之中心之軌跡爲一直線，平行於積位標系中之 $a\alpha+b\beta+c\gamma=0$. 證之.

25. 直角三角形 ABC 內，A 爲直角頂，內切於一等軸雙曲線. B, C 兩點上之切線相交於 P. 求證: AB, AP, AC 及 A 點上之切線成調和束線.

26. AB, CD 爲一圓錐曲線之兩定弦. 一直線 APQ 交 CD 於 P, 交圓錐曲線於 Q. 在 CQ 線上取一點 R, 使 PB 於 B 點上張一定角，則 R 之軌跡，爲過 B, C 之一圓錐曲線.

27. 若干圓錐曲線外接於一三角形. 且於頂點上具有一公切線，過此點作任一直線，交諸圓錐曲線. 求證諸交點上之切線相交於底邊上之點.

28. 一圓錐曲線切 OA 及 OB 於 A 及 B; 另一圓錐曲線切 OB, OC 於 B 及 C; 則此兩圓錐曲線之其他之公切線相交於 AC 直線上.

29. 以四定點之一爲中心，作一圓錐曲線使關於其他之三點爲自共軛曲線 (即此三點關於此圓錐曲線爲自共軛點也). 求證: 其漸近線平行於過此四點之兩拋物線之

軸.

30. 一等軸雙曲線,過一已知三角形之三頂點;一拋物線切於其三邊. 由拋物線之準線與雙曲線之一交點作此拋物線之切線. 試證:此兩切線各平行於雙曲線之漸近線.

其準線上之兩交點中,以何點爲宜? 若此兩點密合,則此兩曲線關於此兩密合點互爲互對極線. 證之.

31. 無窮遠處之兩環點之三角位標,由下式定之,

$$-\frac{x}{a}=\frac{y}{b\epsilon^{\pm\sqrt{-1}C}}=\frac{z}{c\epsilon^{\mp\sqrt{-1}B}}.$$

32. 設聯三角形之各頂點至其各對邊上被一圓錐曲線所截之點,則得六直線爲另一圓錐曲線之切線.

33. 以四定線中之每一線爲準線,作兩圓錐曲線,關於其餘之三線爲自共軛曲線. 求證:如是所得之四對之圓錐曲線,與各準線相當者,必有共同之焦點.

34. 設一三角形關於一等軸雙曲線爲自共軛三角形. 作一圓錐曲線切於其三邊,則此圓錐曲線之每一焦點,必在其他之焦點關於此等軸雙曲線之極線上.

35. 設 abc, def, 爲不在同一平面上之兩三角形. 試證

其兩面積之積與兩平面交角之餘弦之乘積爲

$$-\frac{1}{16}\begin{vmatrix} 0, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & ad^2, & ae^2, & af^2 \\ 1, & bd^2, & be^2, & bf^2 \\ 1, & cd^2, & ce^2, & cf^2 \end{vmatrix}$$

36. 一三角形內接於一圓錐曲線上而外切於另一圓錐曲線．求證：可作一圓錐曲線切於此三角形之一邊，及其對頂上之外圓錐曲線之切線；且通過此兩已知圓錐曲線之四交點．

37. 四定線中每三線所成之三角形之自共軛圓共一根軸．

一〇一六上

周

中華民國二十六年六月初版

(51229)

算學小叢書 三線位標 一册

Trilinear Coordinates

每册實價國幣陸角

外埠酌加運費匯費

原著者 N. M. Ferrers

譯述者 邱丕榮

發行人 王雲五 上海河南路

印刷所 商務印書館 上海河南路

發行所 商務印書館 上海及各埠

(本書校對者胡達聰)