萬有文庫
第一集一千種
王雲五主編

代數學
二次方程式

林鶴一　伊藤新重郎著
鄭心南譯

商務印書館發行

代數學
二次方程式

林鶴一　伊藤[illegible]著

鄭心南譯

算學小叢書

王雲五主編

萬有文庫

林鶴一 伊藤新重郎著

鄭心南譯

發行兼印刷者 商務印書館 上海寶山路

發行所 商務印書館 上海及各埠

中華民國十九年四月初版

此書有著作權翻印必究

The Complete Library
Edited by
Y. W. WONG

QUADRATIC EQUATIONS
By
HARGASHI and ITO
Translated by
S. CHENG

THE COMMERCIAL PRESS, LTD.
Shanghai, China
1930

All Rights Reserved

B一三八分

目　次

第一章　一元二次方程式之解法

一元二次方程式之定義……1
特別之解法……2
一般之解法……7
一元二次方程式根之公式……12
虛數……14
虛數之計算……16
練習問題 I……19

第二章　一元二次方程式根之研究

判別式……21
根及係數之關係……24
作既知二次方程式之根之對稱式或交代式……26
作適合於題之根之方程式……29
二根間有一定之關係時, 係數間所應存在之條件……33
練習問題 II……34

第三章　一元二次方程式之應用

二次三項式之因數分解……36
應用問題……38
練習問題 III……42

第四章　分數方程式

分數方程式, 整方程式……43
分數方程式之根……45
分數方程式之解法……45

分數方程式解法之別法……48
應用問題……54
練習問題 IV……56

第五章　無理方程式

無理方程式之定義……59
無理方程式之解法……60
應用問題……68
練習問題 V……70

第六章　高次方程式

重二次方程式……72
逆數方程式……77
二項方程式……81
三項方程式……87
視察法……88
練習問題 VI……90

第七章　聯立方程式

一個一次方程式及二次二元聯立方程式之解法……91
由二個二次方程式所成之聯立方程式……97
成對稱形之方程式……107
二元聯立高次方程式之特例……110
多元聯立方程式……112
練習問題 VII……120
聯立方程式應用問題……122
練習問題 VIII……126

答及解法指針

代數學——二次方程式

第　一　章

一元二次方程式之解法

1.　定義. 於含有一未知數x之方程式將各項移置左邊所得之式,如對於 x 爲二次整式時稱此方程式爲二次方程式.

例如

$$x^2=0$$
$$x^2-36=0$$
$$3x^2-10=0$$
$$7x^2+6x=0$$
$$6x^2-x-1=0$$

2.　二次方程式一般之形

二次方程式常可列爲如次之形

$$ax^2+bx+c=0$$

稱爲二次方程式一般之形. 但 a, b, c 爲任意之數 b, c 爲可等於 0 之數. 然 a 不可等於 0, 何則? 如 a 爲 0 則此方程式, 成爲 $bx+c=0$ 即成爲一次方程式故也.

3. $c=o$

此時方程式(1)成爲如次之形

$$ax^2+bx=o$$

卽　$$x(ax+b)=0$$

然欲使二數之積爲零，則其中任意一方之因數爲零，爲必要而且充分之條件

卽　$$x=0$$

或　$$ax+b=0$$

第二方程式移項後，以 a 除時，

$$x=-\frac{b}{a}$$

故方程式　$ax^2+bx=0$　有二組之根如下：

$$\begin{cases} x=o \\ x=-\dfrac{b}{a} \end{cases}$$

例　解　$7x^2+6x=0$

解　於此方程式，將 x 置於括弧外時

$$x(7x+6)=0$$

故　$$x=0$$

及　$$x=-\frac{6}{7}$$

［問 1］　解下列各方程式

(一)　$9x^2+5x=0$　　(二)　$10x^2-3x=0$

(三)　$13x^2-26x=0$　　(四)　$21x^2+49x=0$

(五)　$24x^2-11x$

4. $b=o$

此時方程式,成爲如次之形:

$$ax^2+c=o$$

移 c 於右

$$ax^2=-c$$

然 a 不等於 0, 故以 a 除時

$$x^2=-\frac{c}{a}$$

$-\frac{c}{a}$ 由 a, c 之値,而取種種之値,區別論之如次。

I $-\frac{c}{a}$ 爲完全平方數時

例 1. 解 $x^2-1=0$

解 移項 $x^2=1$

然平方爲 1 之數,爲 $+1$ 及 -1

故 $x=+1$ 及 $x=-1$.

總括記爲 $x=\pm 1$.

例 2. 解 $9x^2-49=0$

解 移項 $9x^2=49$

以 9 除時 $x^2=\frac{49}{9}$

然平方爲 $\frac{49}{9}$ 之數, 爲 $+\frac{7}{3}$ 及 $-\frac{7}{3}$

$$\therefore \quad x=\pm\frac{7}{3}$$

注意. 以上二例所示, 1 之平方根及 $\frac{49}{9}$ 之平方根,爲絕對値相等,而符號反對之二根.

［問 2.］ 解下列各方程式

(一) $x^2=25$　　(二) $x^2=36$

(三) $x^2=81$　　(四) $4x^2=1$

(五) $9x^2=25$　　(六) $7x^2-343=0$

(七) $8x^2-512=0$　　(八) $5x^2-80=0$

II. $-\frac{c}{a}$ 爲正數而不爲完全平方數時

例 1. 解　　$x^2-5=0$

解 移項　　$x^2=5$

然平方而能得 5 之數,不在整數及分數之範圍內,故此時如欲使此方程式有根,須設新數以 $\pm\sqrt{5}$ 表示平方而能得 5 之數,此種根數稱爲**不盡根數**,此時以

$$x=\pm\sqrt{5}$$

爲本題方程式之根.

注意 1. 欲求 5 之平方根,施行算術之開平方時得 2.23606…任如何運算不能開斷.

即

$$2<\sqrt{5}<3$$

$$2.2<\sqrt{5}<2.3$$

$$2.23<\sqrt{5}<2.24$$

$$2.236<\sqrt{5}<2.237$$

…………………………………………

故 $\sqrt{5}$ 雖非整數,亦非分數,然可盡量求其至近之值,即能無制限的接近於 $\sqrt{5}$, 使其差成爲所望之至小之數,而在二帶小數之間,此兩側之數稱爲近似值,小者爲不足之近似值,大者爲過剩之近似值.

注意 2. 方程式之根,得不盡根數時,通例照此放置而不開方.

注意 3. 以上三例所求方程式之根之絕對值 $1, \frac{7}{3}, \sqrt{5}$ 各稱爲 $1, \frac{49}{9}, 5$ 之算術的平方根；$\pm 1, \pm\frac{7}{3}, \pm\sqrt{5}$ 各稱爲 $1, \frac{49}{9}, 5$ 之代數的平方根.

例 2. 解　$3x^2-7=0$

解。移項　$3x^2=7$

兩邊各以 3 除之　$x^2=\frac{7}{3}$

$\therefore\quad x=\pm\sqrt{\frac{7}{3}}$

例 3. 解　$x^2=8$

解　$x=\pm\sqrt{8}$

二數之積之平方根，等於各因數平方根之積，故

$$\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

$$\therefore\quad x=\pm 2\sqrt{2}$$

[問 3.]　解下列各方程式。

(一)　$x^2=7$　(二)　$2x^2=6$

(三)　$3x^2=15$　(四)　$4x^2-24=0$

(五)　$7x^2-17=0$　(六)　$100x^2-13=0$

例 4. 解下列方程式，

$$(2x-3)^2+(3x+2)^2=15$$

解　解括弧。

$$4x^2-12x+9+4x^2+12x+4=15$$

簡約同類項

$$13x^2=2$$

兩邊以 13 除之

$$x^2=\frac{2}{13}$$

$\therefore \qquad x=\pm\sqrt{\dfrac{2}{13}}$

即 $\qquad x=\pm\dfrac{\sqrt{26}}{13}$

例 5. 解 $\dfrac{5x^2-1}{3}-\dfrac{3x^2+2}{7}=\dfrac{8}{21}$

解 以分母之最小公倍數 21 乘各項

$$7(5x^2-1)-3(3x^2+2)=8$$

解括弧.

$$35x^2-7-9x^2-6=8$$

即 $\qquad 26x^2=21$

$\therefore \qquad x^2=\dfrac{21}{26}$

$\therefore \qquad x=\pm\dfrac{\sqrt{546}}{26}$

[問 4.] 解下列各方程式

(一) $(4x+5)^2+(5x-4)^2=100$ (二) $(x+12)(x-12)=150$

(三) $(3x+2)(3x-2)=15$ (四) $(2x+1)(2x-1)=x^2$

(五) $(2x+1)(x-3)=6-5x$ (六) $(8x+4)^2-25=10+24x$

(七) $\dfrac{3(x^2+1)}{5}-\dfrac{2(2x^2-3)}{10}-\dfrac{43}{20}=0$

(八) $\dfrac{5(x^2+9)}{2}+\dfrac{3x^2-11}{16}=\dfrac{13(x^2-70)}{4}$

例 6. 解 $(x-5)^2=9$

解. 本題之方程式,視 $x-5$ 爲未知數時,

$$x-5=\pm3,$$

故 $\qquad x-5=+3, \qquad x=8$

$\qquad x-5=-3, \qquad x=2.$

$\therefore \qquad$ 8 及 2 爲所求之根.

驗算 如 $x=8$ 則本題之方程式

左邊 $=(8-5)^2=3^2=9$.

又如 $x=2$ 則

左邊 $=(2-5)^2=(-3)^2=9$.

卽 8 及 2 各能滿足.

[問 5.] 解下列各方程式

(一) $(x-5)^2=36$ (二) $(2x-3)^2=16$

(三) $(3x+7)^2=25$ (四) $(5x+4)^2=3$

(五) $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$ (六) $\left(x+\frac{2}{7}\right)^2=\frac{3}{5}$

III. $-\frac{c}{a}=o$. 時

此時 $x^2=0$

故 $x=0$

[問 6.] 解下列方程式

(一) $(7x-3)(7x+3)+9=0$ (二) $7(3x^2-5)=-35$.

(三) $\frac{2}{3}x^2+\frac{2(x^2+1)}{5}=\frac{2}{5}$

IV. $-\frac{c}{a}$ 爲負數時

例如 $x^2=-1$ 另節論之.

5. 一般之形

例 1. 解 $x^2-10x+16=0$

解 移既知項 16 於右邊

$$x^2-10x=-16$$

以 x 一次項之係數之半(卽 10 之半 5)之平方 25 加於兩邊

則 $x^2-10x+25=25-16$

卽 $(x-5)^2=9$

此與前節之例 6 所解之方程式相同

即　$x-5=\pm 3$

$\therefore$　$x=8$ 或 2

注意. 如上所述,移既知數於右邊,加 x 一次項之係數之半之平方使左邊成完全之平方式,稱爲完成平方.

例 2.　解. $15x^2+11x-12=0$

解　移既知項於右邊

$$15x^2+11x=12$$

以 x^2 之係數除各項

$$x^2+\frac{11}{15}x=\frac{12}{15}.$$

欲完成左邊之平方,加$\left(\frac{11}{30}\right)^2$於兩邊

$$x^2+\frac{11}{15}x+\left(\frac{11}{30}\right)^2=\frac{12}{15}+\left(\frac{11}{30}\right)^2$$

即　$\left(x+\frac{11}{30}\right)^2=\frac{841}{900}$

$\therefore$　$x+\frac{11}{30}=\pm\frac{29}{30}$

如　$x+\frac{11}{30}=+\frac{29}{30}$　則　$x=\frac{3}{5}$

如　$x+\frac{11}{30}=-\frac{29}{30}$　則　$x=-\frac{4}{3}$

故　$\frac{3}{5}$ 及 $-\frac{4}{3}$ 皆爲所求之根

驗算　於本題之方程式　如　$x=\frac{3}{5}$　則

左邊　$=15\left(\frac{3}{5}\right)^2+11\times\frac{3}{5}-12=\frac{27}{5}+\frac{33}{5}-12=0$

又如　$x=-\frac{4}{3}$　則

$$左邊=15\left(-\frac{4}{3}\right)^2+11\left(-\frac{4}{3}\right)-12=\frac{80}{3}-\frac{44}{3}-12=0$$

卽　$x=\frac{3}{5}$及$-\frac{4}{3}$俱滿足於本題之方程式

【法則】 欲解一元二次方程式,須先移未知項於左邊,旣知項於右邊,以x^2之係數兩邊除之,又因欲完成左邊之平方,加一次項係數之半之平方於兩邊,然後求兩邊之平方根,而解所得之二個一次方程式。

別解.　以上例1例2之方程式,適用因數分解法亦可解之.

先將　$x^2-10x+16=0$　之左邊分解爲因數,

則得　$(x-2)(x-8)=0$

欲使左邊爲0,則二因數中,須有一因數爲零,爲必要而且充分之條件.

如　$x-2=0$　則　$x=2$

$x-8=0$　則　$x=8$

故　2及8　爲　$x^2-10x+16=0$　之根

例2之方程式　$15x^2+11x-12=0$　之左邊分解爲因數則得

$$(5x-3)(3x+4)=0$$

如　$5x-3=0$　則　$x=\frac{3}{5}$

$3x+4=0$　則　$x=-\frac{4}{3}$

故　$\frac{3}{5}$及$-\frac{4}{3}$　爲　$15x^2+11x-12=0$　之根.

注意.　簡單之二次方程式,如上別解所示,每以用因數分解,較爲簡便.

〔問7.〕　下列各方程式,先由完成平方解之,次用因數分解法解之.

(一) $x^2-15x+56=0$　　(二) $x^2-10x+21=0$

(三) $x^2-19x+90=0$　　(四) $x^2+7x+10=0$

(五) $x^2-6x-27=0$　　(六) $x^2-3x-54=0$

(七) $x^2-5x-24=0$　　(八) $x^2-4x-45=0$

(九) $6x^2+x-2=0$　　(十) $14x^2-39x-35=0$

例 3. 解 $7x^2-13x+2=0$

解 移既知項於左邊，兩邊各以 7 除之。

$$x^2-\frac{13}{7}x=-\frac{2}{7}$$

加$\left(\frac{13}{14}\right)^2$於兩邊以完成左邊之平方時，

$$\left(x-\frac{13}{14}\right)^2=\frac{169}{196}-\frac{2}{7}$$

即 $$\left(x-\frac{13}{14}\right)^2=\frac{113}{196}$$

$\therefore$ $$x-\frac{13}{14}=\pm\frac{\sqrt{113}}{14}$$

故如 $x-\frac{13}{14}=+\frac{\sqrt{113}}{14}$ 則 $x=\frac{13}{14}+\frac{\sqrt{113}}{14}$

$x-\frac{13}{14}=-\frac{\sqrt{113}}{14}$ 則 $x=\frac{13}{14}-\frac{\sqrt{113}}{14}$

驗算. 於本題之方程式，如 $x=\frac{13}{14}+\frac{\sqrt{113}}{14}$ 則

$$7x^2-13x+2=(7x-13)x+2$$

$$=\left\{7\left(\frac{13+\sqrt{113}}{14}\right)-13\right\}\left(\frac{13+\sqrt{113}}{14}\right)+2$$

$$=\left(\frac{13+\sqrt{113}}{2}-13\right)\left(\frac{13+\sqrt{113}}{14}\right)+2$$

$$=\left(\frac{\sqrt{113}-13}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{113}+13}{14}\right)+2$$

$$=\frac{113-169}{28}+2$$

$$=\frac{113-169+56}{28}$$

$$=0$$

依同理　　$x=\frac{13}{14}-\frac{\sqrt{113}}{14}$亦滿足於本題方程式。

注意。　此後不一一驗算，學者宜自行之。

例 4. 解　　$(3x+5)^2-(4x-3)^2=(5x+2)(10x-1)$

解。　除去本題方程式之括弧。

$$9x^2+30x+25-16x^2+24x-9=50x^2+15x-2$$

移項而整理之，則

$$-57x^2+39x=-18$$

即　　$19x^2-13x=6$

$$\therefore\quad x^2-\frac{13}{19}x=\frac{16}{19}$$

欲完成左邊之平方，加$\left(\frac{13}{38}\right)^2$於兩邊，

$$\left(x-\frac{13}{38}\right)^2=\frac{625}{1444}$$

$$\therefore\quad x-\frac{13}{38}=\pm\frac{25}{38}$$

故如　　$x-\frac{13}{38}=\frac{25}{38}$　則 $x=\frac{13}{38}+\frac{25}{38}=1$

$x-\frac{13}{38}=-\frac{25}{38}$ 則 $x=\frac{13}{38}-\frac{25}{38}=-\frac{6}{19}$

即 1 及 $-\frac{6}{19}$ 爲所求之根。

例 5.　解 $\frac{7x^2-5x}{3}+\frac{x^2-5}{6}=\frac{7(x-1)}{12}$

解　以分母之最小公倍數 12 乘方程式之兩邊而除去分母時,

$$4(7x^2-5x)+2(x^2-5)=7(x-1)$$

解弧括並整理之，則

$$30x^2-27x=3$$

即　$$10x^2-9x=1$$

∴　$$x=\frac{9}{20}\pm\frac{11}{20}$$

故　$x=1$　及　$-\frac{1}{10}$　爲所求之根.

[問 8.]　解下列各方程式.

(一) $(5x-2)(6x-5)=3$　(二) $(2x-1)^2-(3x+5)+2=0$

(三) $x(16x+5)-3=7x^2-(x-45)$　(四) $x^2-3=\frac{1}{6}(x-3)$

(五) $\frac{x^2}{2}-\frac{x}{3}=2(x+2)$　(六) $\frac{2+x^2}{3}-\frac{x-x^2}{2}=1-x+x^2$

6. 一元二次方程式根之公式

如上所述一元二次方程式一般之形，爲

$$ax^2+bx+c=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

欲解此方程式可照前節例題之手續行之，先移 c 於右邊，則

$$ax^2+bx=-c$$

以 x^2 之係數 a 除兩邊，則得

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a} \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

爲使(2)之左邊成爲完全之平方式，加$\left(\frac{b}{2a}\right)^2$於兩邊，則得

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$$

即 $$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$\therefore$ $$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

(但 b^2-4ac 不爲負數)

故 $$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

即 $$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

此爲一元二次方程式根之公式，極爲重要。

例 1. 解 $15x^2+11x-12=0$ (前節例 2 再出)

解. 此方程式 $a=15$, $b=11$, $c=-12$ 故適用上之公式

$$x=\frac{-11\pm\sqrt{(-11)^2-4\times15\times(-12)}}{2\times15}$$

$$=\frac{-11\pm29}{30}$$

$$\therefore\quad x=\frac{3}{5}\quad 或 \quad -\frac{4}{3}.$$

例 2. 解 $(b-c)x^2+(c-a)x+a-b=0$

解. 適用公式.

$$x=\frac{-(c-a)\pm\sqrt{(c-a)^2-4(b-c)(a-b)}}{2(b-c)}$$

$$=\frac{-(c-a)\pm(c+a-2b)}{2(b-c)}$$

$$\therefore \qquad x=\frac{a-b}{b-c} \quad 或 \quad 1.$$

如於一元二次方程式之一般形 $ax^2+bx+c=0$ 中以 $2b'$ 代 b 時,則其形如次.

$$ax^2+2b'x+c=0$$

故此根
$$x=\frac{-2b'\pm\sqrt{(2b')^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-2b'\pm2\sqrt{b'^2-ac}}{2a}$$

卽
$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

此爲一元二次方程式中, x 一次項之係數爲偶數可適用之公式.

例 3. 解下列方程式

$$5x^2-56x+147=0$$

解. 由上公式.

$$x=\frac{28\pm\sqrt{28^2-5\times147}}{5}$$

$$=\frac{28\pm7}{5}$$

$$\therefore \qquad x=7 \quad 或 \quad \frac{21}{5}$$

[問 9.] 問 6 及問 7 試用公式解之.

7. 虛數

例如有 $x^2+3=0$ 之方程式, 移既知項於右邊時,則
$$x^2=-3$$

然無論何數之平方皆爲正數，故於通常數之範圍內此方程式無根，然爲使二次方程式之解法成普遍化，卽如此方程式亦使之有根時，則當設新數，卽平方爲負數之數稱爲**虛數**.平方等於-3之數以$\sqrt{-3}$表之.

對於虛數而言，稱正數，負數，零爲實數.

一切正數之平方根爲絕對值相等而符號反對之二數，負數亦如之. -3之平方根亦爲符號反對之二數，爲$+\sqrt{-3}$及$-\sqrt{-3}$.

故　$x^2=-3$　之根　爲

$$x=\pm\sqrt{-3}$$

依同理-5之平方根爲$\pm\sqrt{-5}$，$-\frac{7}{3}$之平方根，爲$\pm\sqrt{-\frac{7}{3}}$，故方程式$x^2=-5$，$x^2=-\frac{7}{3}$之根，各爲$\pm\sqrt{-5}$；$\pm\sqrt{-\frac{7}{3}}$.

因而-1之平方根爲$\pm\sqrt{-1}$此$\sqrt{-1}$特以i表之，稱爲**虛數單位**.

一切負數等於-1及其絕對值之積，故二數之積之平方根等於各數平方根之積一事假定爲可適用，則一切負數之平方根，等於i及實數之積.

例如　$\sqrt{-3}$　爲　$\sqrt{3}\,i$

$\sqrt{-5}$　爲　$\sqrt{5}\,i$

$$\sqrt{-\frac{7}{3}} \quad 爲 \quad \sqrt{\frac{7}{3}}\, i$$

又　$$\sqrt{-4} = 2i$$

$$\sqrt{-\frac{225}{9}} = \frac{15}{3} i$$

$$\sqrt{-12} = 2\sqrt{3}\, i$$

如是，虛數常得以 i 及實數之積表之，且可用如此記法.

8. 虛數之計算.

含有虛數之式之計算，於適當規約之下，可定爲與表示實數之式之計算，從同一之法則.

欲行含有虛數之式之計算，當先改爲 i 與實數之積而後行之，上述與表示實數之式之計算從同一之法則者，係指改從此形而言.

例如將 $\sqrt{-3}$, $\sqrt{-4}$, 照此形計算，有時不能從實數計算之法則.　今假定 a, b 皆爲正數，

$$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

若將此公式，用於 $\sqrt{-3}$, $\sqrt{-4}$ 之積，則得

$$\sqrt{-3}\sqrt{-4} = \sqrt{(-3)(-4)} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

然實際上

$$\sqrt{-3}\sqrt{-4} = \sqrt{3}\, i . 2i = 2\sqrt{3}\,(i)^2 = -2\sqrt{3}.$$

故知前之結果不正.

以下示虛數計算之例.

例 1.　$\sqrt{-9}+\sqrt{-4}=3i+2i=5i$

例 2.　$5\sqrt{-9}-3\sqrt{-4}=5\cdot3i-3\cdot2i=15i-6i=9i$

例 3.　$\sqrt{-36}\sqrt{-16}=6i\cdot4i=24i^2=-24.$

例 4.　$\sqrt{-36}\div\sqrt{-16}=6i\div4i=\frac{3}{2}.$

注意.　實數及虛數之代數和,稱爲複素數,例如 $3+2i$, $7-6i$ 等.

［問 10.］　試簡約下列各式.

(一)　$3\sqrt{-81}+5\sqrt{-1}+7\sqrt{-25}$

(二)　$(3-5i)(3+5i)$

(三)　$(7+6i)^2+(7-6i)^2$

(四)　$3\sqrt{-225}\times7\sqrt{-61}\times2\sqrt{-9}\times5\sqrt{-49}$

(五)　$\sqrt{-72}+\sqrt{-8}-\sqrt{-32}$

［問 11.］　試以單項式表下式.

$2\sqrt{-75}+3\sqrt{-30}-5\sqrt{-100}$

［問 12.］　求 $i^2, i^3, i^4, i^5, i^6, i^7, i^8, \cdots\cdots$ 之值.

*［問 13.］　改 $\frac{(a+bi)^2}{a-bi}-\frac{(a-bi)^2}{a+bi}$ 爲 $A+Bi$ 之形.

*［問 14.］　簡單 $\sqrt{3+4i}+\sqrt{3-4i}$

9. 方程式之根爲虛數時,稱爲**虛根**,對於虛根,稱實數之根爲**實根**.

例 1.　解　$25x^2+9=0$

解.　移項以 25 除之.

$$x^2=-\frac{9}{25}$$

$$\therefore\quad x=\pm\sqrt{-\frac{9}{25}}=\pm\frac{3}{5}i$$

驗算.　$25x^2+9=25\left(\pm\frac{3}{5}i\right)^2+9.$

$$=25\left(-\frac{9}{25}\right)+9$$

$$=-9+9$$

$$=0$$

例 2.　解　$x^2-3x+13=0$

解.　如適用求一元二次方程式之根之公式，則得

$$x=\frac{3\pm\sqrt{9-4\times13}}{2}$$

$$=\frac{3\pm i\sqrt{43}}{2}$$

驗算　$$x^2-3x+13=\left(\frac{3\pm i\sqrt{43}}{2}\right)^2-3\left(\frac{3\pm i\sqrt{43}}{2}\right)+13$$

$$=\frac{9\pm6i\sqrt{43}-43}{4}-\frac{9\pm3i\sqrt{43}}{2}+13$$

$$=\frac{9\pm6i\sqrt{43}-43-18\mp6i\sqrt{43}+52}{4}$$

$$=0.$$

［問 15.］　**解下列各方程式.**

(一)　$x^2+16=0$　　(二)　$x^2+81=0$

(三)　$x^2+625=0$　　(四)　$x^2+17=0$

(五)　$9x^2+49=0$　　(六)　$36x^2+729=0$

(七)　$10x^2+9=0$　　(八)　$x^2+x+1=0$

(九)　$x^2-x+1=0$　　(十)　$8x^2-5x+6=0$

(十一)　$3x^2+3\sqrt{3x}+10=0$

［問 16.］　試表示方程式　$x^2+2x+4=0$　之根與方程式　$x^2+x+1=0$　之根乘 2 者相等，又　$x^2-3x+9=0$　之根與　$x^2-x+1=0$　之根乘 3 者相等.

*10.　一元二次方程式，不能有多於二之根.

一元二次方程式　$ax^2+bx+c=0$

如假定有三個相異之根 α, β, γ, 時.則下列三個恆等式,當能成立.

$$a\alpha^2+b\alpha+c=0 \cdots\cdots (1)$$

$$a\beta^2+b\beta+c=0 \cdots\cdots (2)$$

$$a\gamma^2+b\gamma+c=0 \cdots\cdots (3)$$

由(1)減(2)

$$a(\alpha^2-\beta^2)+(\alpha-\beta)=0$$

然 α,β 爲相異之數 故 $\alpha-\beta\neq 0$

$\therefore$ 兩邊以 $\alpha-\beta$ 除之, 則得

$$a(\alpha+\beta)+b=0 \cdots\cdots (4)$$

又由(1)(3)依同法,可得

$$a(\alpha+\gamma)+b=0 \cdots\cdots (5)$$

由(4)減(5)

$$a(\beta-\gamma)=0$$

然 a 當然非零,而 $\beta-\gamma\neq 0$ 故此等式不成立.卽如(1) (2) (3)同時能成立時,便生如此矛盾之結果.

故一元二次方程式,不能有多於二個之根.

練習問題 1.

解下列各方程式.

(1) $x^2+10x=24$ (2) $x^2-4x+4=0$

(3) $3x^2-4x=7$ (4) $3x^2-10x+6=0$

(5) $5x^2-15x+1=0$ (6) $8x^2-15x-7=0$

(7) $5x(x-3)-2(x^2-6)=(x+3)(x+4)$

(8) $\frac{2}{5}\left(3x^2-x-5\right)-\frac{1}{3}(x^2-1)=2(x-2)^2$

(9) $x^2-2\sqrt{2}\,x-1=0$

(10) $a(x^2+1)=x(a^2+1)$

(11) $(ax-b)(bx-a)=c^2$

(12) $abx^2+(a^2+b^2)x+ab=0$

(13) $(1-a^2)(x+a)-2a(1-x^2)=0$

(14) $(3a^2+b^2)(x^2-x+1)=(3b^2+a^2)(x^2+x+1)$

(15) $(c+a-2b)x^2+(a+b-2c)x+(b+c-2a)=0$

(16) $\frac{ax^2}{d}+\frac{ax}{c}=\frac{bx}{d}+\frac{b}{c}$.

(17) $(x-a)^2+(x-b)^2=(a-b)^2$

第二章

一元二次方程式根之研究

(一) 判別式

11. 一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之根，爲

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

然此二根

〔1〕 如 $b^2-4ac>0$ 則爲實數而值不相等

〔2〕 如 $b^2-4ac=0$ 則爲實數而值相等

〔3〕 如 $b^2-4ac<0$ 則爲虛數.

如此，b^2-4bc 對於判別一元二次方程式根之種類極爲重要，稱爲判別式.

如方程式作 $ax^2+2b'x+c=0$ 卽 x 一次項之係數爲偶數時，則可以 b'^2-ac 爲判別式.

由此觀之，一元二次方程式縱不待解，而其根之性質已可預知，如此，不解而調査其性質稱爲討論.

例 1. 試判別 $9x^2+17x+4=0$ 之根之種類

解. 判別式 $=17^2-4\times9\times4$

$=145>0.$

$\therefore$ 本題之方程式有相異之二實根.

例 2. 試判別 $100x^2+20x+1=0$ 之根之種類.

解. 判別式 $=10^2-100\times1=0$

故本題之方程式有等根.

例 3. 試判別 $4x^2+11x+10=0$ 之根之種類.

解.　判別式 $=11^2-4\times4\times10=-39<0$

故本題之方程式有虛根。

［問 1.］　不解下列之方程式,試判別其根之種類。

(一)　$3x^2-3x-1=0$　　(二)　$54x^2-39x-8=0$

(三)　$20x^2+43x+21=0$　　(四)　$169x^2+52x+4=0$

(五)　$7x^2-3x+5=0$　　(六)　$12x^2-5x+8=0$

例 4.　於 $x^2+2(m+n)x+2(m^2+n^2)=0$ 之方程式，如 m,n 不等時,常有虛根,試證明之。

解.　於此方程式.

$$\begin{aligned}\text{判別式}&=(m+n)^2-2(m^2+n^2)\\&=m^2+2mn+n^2-2m^2-2n^2\\&=-(m^2-2mn+n^2)\\&=-(m-n)^2\end{aligned}$$

如 m 不等於 n，則不論 m，n 爲正爲負。而 $(m-n)^2$ 之值則常爲正，故 $-(m-n)^2$ 爲負。

故本題之方程式不論 m，n 之值如何常有虛根。

［問 2.］　試判別下列各方程式之根之種類。

(一)　$(a^2+b^2)x^2-2a^2bx+a^2b^2=0$

(二)　$(4q^2-q^2)x^2-8p^2qx+4p^2q^2=0$

(三)　$(b^2-4a)x^2+2(a+1)x-1=0$

［問 3.］　不拘 a 之值如何，$3x^2-2ax-7=0$ 必有實根，試證明之。

［問 4.］　如 $ac<0$ 則二次方程式 $ax^2+bx+c=0$,常有實根,試證明之。

［問 5.］　方程式 $(x-a)(x-b)=c^2$ 之根常爲實數,試證明之。

［問 6.］　方程式 $(x-p)(x-q)=5$ 常有實根,試證明之。

例 5.　$x^2-2m(x-4)-15=0$ 之根,欲使爲(甲)等根 (乙)實根時，m 之值如何?

解.　將本題之方程式,解括弧而整理之時

$$x^2-2mx+8m-15=0$$

(甲)　欲使此方程式有等根,其判別式須等於 0,

即　$$m^2-(8m-15)=0$$

或　$$m^2-8m+15=0$$

就 m 解此二次方程式時,

$$m=3 \quad 或 \quad 5.$$

驗算.　如 $m=3$ 則此方程式

$$x^2-6x+9=0$$

$$(x-3)^2=0$$

即　此方程式有 3 之等根

又　如 $m=5$ 則此方程式

$$x^2-10x+25=0$$

即　$$(x-5)^2=0$$

此方程式有 5 之等根.

(乙)　欲使此方程式有實根,則判別式必須爲負.

即　$$m^2-(8m-15)\overset{*}{\geqq}0$$

解括弧,將左邊分解爲因數,則得

$$(m-3)(m-5)\geqq 0$$

然欲使二因數之積爲負,以各因數不爲不同之符號,爲必要而且充分之條件.

然欲使　$m-3$,　$m-5$　各不爲負,則須

$$m\geqq 5$$

又欲使　$m-3$　$m-5$　各不爲正,則須

$$m\leqq 5$$

故本題之方程式於　$m\geqq 5$　或　$m\leqq 3$　時方有實根.

---

*　$\geqq$　爲左邊大於右邊或相等之略號.　$\leqq$　與之反對.

驗算.　學者當以較大於 5 或較小於 3 適宜之值,代入本題方程式之 m,而驗其有實根。

[問 7.]　於方程式 $ax^2+bx+c=0$, 欲使其根爲有理數,或無理數,或虛數時,其要件如何?

[問 8.]　方程式 $x^2-2(3k-1)x+1=0$ 有等根時. k 之值如何?

[問 9.]　方程式 $(12m+11)x^2-60x+12m=0$ 有等根時, m 應取如何之值?

[問 10.]　欲使下列方程式之根得實數時, a 所取之值之限界當如何定之?

$$x^2+2(a-1)x+5a-9=0$$

[問 11.]　方程式 $(a^2+1)x^2-(3a-2)x+2=0$ 有等根時之要件如何?

*[問 12.]　欲使下式等於 3,問 x 之值如何? 且試就 a 之範圍而討論之。

$$\frac{x^2-ax-12}{x^2+2}$$

(二)　一元二次方程式根及係數之關係

12.　一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之二根,如以 α, β 表之,則由前所述,知

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

故 $\alpha+\beta=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$$

又 $\alpha\beta=\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$

$$=\frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2}$$

$$=\frac{c}{a}$$

即 $$\begin{cases}\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}\\ \alpha\beta=\dfrac{c}{a}\end{cases}$$

由此觀之，一元二次方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

如以 x^2 之係數 a 除之.

以 $$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

表之時,則二根之和與 x 一次項之係數而變其符號者相等,二根之積與既知項相等,稱爲二次方程式之根與係數之關係.

如二次方程式以 $x^2+px+q=0$ 表之時，$-p$ 即爲二根之和，q 爲二根之積.

例如 方程式 $x^2+7x+10=0$ 二根之和爲 -7，二根之積爲 10.

又方程式 $7x^2-13x-9=0$ 二根之和爲$\frac{13}{7}$，二根之積爲$-\frac{9}{7}$.

又方程式 $mx^2+(m-1)x+m+n=0$ 二根之和爲 $-\frac{m-1}{m}$，二根之積爲 $\frac{m+n}{m}$.

13. 作所與二次方程式二根之對稱式及交代式

方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之二根爲 α, β 時.

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta=\frac{c}{a}$$

然 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$ 爲對於 α, β 之最簡單對稱式，用此可以作關於 α, β 之複雜對稱式或交代式,故如二次方程式既知之時，不俟解可求其二根之對稱式或交代式之値.

例 1. 方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之二根，如命爲 α, β 時,試以 a, b, c 表 (甲) $\alpha^2+\beta^2$, (乙) $\alpha^3+\beta^3$.

解. (甲) $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

然
$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$
$$=\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\frac{c}{a}$$
$$=\frac{b^2-2ac}{a^2}$$

(乙)
$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$$
$$=(\alpha+\beta)\{(\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta\}$$
$$=\left(-\frac{b}{a}\right)\left\{\left(-\frac{b}{a}\right)^2-3\frac{c}{a}\right\}$$
$$=\frac{3abc-b^3}{a^3}$$

例 2. $ax^2+bx+c=0$ 之二根,命爲 α, β 時

$$\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha}=\frac{3abc-b^2}{a^2c}$$

試證明之。

解。 由第 12 節

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a} \qquad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

然 $$\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha}=\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta}=\frac{\frac{3abc-b^3}{a^3}}{\frac{c}{a}}=\frac{3abc-b^2}{a^2c}$$ [參照例 1]

[問 13.] 求方程式 $7x^2-12x+3=0$ 二根之和及積。

[問 14.] 求方程式 $mx^2+2(m+1)x=1-m$ 二根之和及積。

[問 15.] $x^2+px+q=0$ 之二根,命爲 α, β 時,試以 p,q 表 $\alpha^2+\beta^2$, $\alpha^3+\beta^3$ 之值。

[問 16.] $ax^2+bx+c=0$ 之二根,如命爲 α, β 時,試證

$$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=\frac{b^2-ac}{a^2}$$

[問 17.] $x^2+px+q=0$ 之二根,如命爲 α, β 時,試證

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{p}{q}=0, \qquad \frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{p^2-2q}{q^2}$$

[問 18.] $ax^2+bx+c=0$ 之二根,命爲 α, β 時,試以 a, b, c 表下列各值。

(一) $\alpha^4+\beta^4$　　(二) $\alpha^3\beta+\beta^3\alpha$

(三) $\alpha^5+\beta^5$　　(四) $\alpha^6+\beta^6$

(五) $\dfrac{\beta}{\alpha^2}+\dfrac{\alpha}{\beta^2}$

例 3. 方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之二根,命爲 α, β 時,試以 a, b, c 表(甲) $\alpha-\beta$,(乙) $\alpha^2-\beta^2$。

解。 (甲)本題方程式之二根由假定命爲 α, β. 故

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\qquad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

然
$$\alpha-\beta=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$$
$$=\sqrt{\left(-\frac{b}{a}\right)^2-4\frac{c}{a}}$$
$$=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{a^2}}\qquad [但\ \alpha>\beta]$$

(乙)
$$\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$$
$$=\left(-\frac{b}{a}\right)\sqrt{\frac{b^2-4ac}{a^2}}$$
$$=-\frac{b}{a}\sqrt{\frac{b^2-4ac}{a^2}}$$

[問 19.]　方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之二根，命爲 α, β 時，下列各値如何？

(一) $\alpha^3-\beta^3$　　(二) $\alpha^2\beta-\beta^2\alpha$

(三) $\alpha^5-\beta^5$　　(四) $\alpha^6-\beta^6$

(五) $\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}$　　(六) $\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\alpha}{\beta}$

(七) $\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\beta^2}$　　(八) $\frac{\beta^2}{\alpha}-\frac{\alpha^2}{\beta}$

[問 20.]　方程式 $x^2-px+q=0$. 二根之差，等於 $x^2-3px+2p^2-q=0$ 二根之差，試證明之，

*[問 21.]　於 $ax^2+2bx+c=0$ 之方程式，a, b, c 雖變化而 $\frac{b^2-ac}{a^2}$ 不變化時，二根之差常有一定之値，試證明之。

例 4.　方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之二根，如命爲 α, β 時，試以 a, b, c 及 m, n 表 $(m\alpha+n\beta)(m\beta+n\alpha)$

解。　本題方程式之二根，旣假定命爲 α, β 故

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}\qquad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

然　$(m\alpha+n\beta)(m\beta+n\alpha)=m^2\alpha\beta+mn(\alpha^2+\beta^2)+n^2\alpha\beta$

$$=(m^2+n^2)\alpha\beta+mn(\alpha^2+\beta^2)$$

$$=(m^2+n^2)\alpha\beta+mn\left\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\right\}$$

$$=(m^2+n^2)\frac{c}{a}+mn\left\{\left(-\frac{b}{a}\right)^2-\frac{2ac}{a^2}\right\}$$

$$=\frac{(m^2+n^2)ac+mn(b^2+2ac)}{a^2}$$

〔問 22.〕　方程式 $x^2+px+q=0$ 之二根，命爲 α, β 時，試以 p, q 及 t 表 $(t-\alpha)(t-\beta)$.

〔問 23.〕　如前問試以不含 α, β 之式表下列各式。

(一)　$(3\alpha-5\beta)(5\alpha-3\beta)$　　(二)　$(7\alpha-2\beta+1)(7\beta-2\alpha+1)$

〔問 24.〕　方程式 $x^2-px+q=0$ 之二根，命爲 α, β 時，試以不含 α, β 之式表下列各式。

(一)　$\frac{n\alpha}{m\alpha+\beta}+\frac{n\beta}{m\beta+\alpha}$　　(二)　$\left(\frac{n\alpha}{m\alpha+\beta}\right)\left(\frac{n\beta}{m\beta+\alpha}\right)$

(三)　$\frac{5\alpha}{3\alpha+2\beta}+\frac{5\beta}{3\beta+2\alpha}$.

14. 作含有所與之根之二次方程式.

以 α, β 爲二根之方程式如下:

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0$$

即　$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$$

【法則】 欲作以所與之二數爲根之二次方程式當以二數之和變其符號爲 x 一次項之係數，作二數之積爲既知項之二次方程式.

例 1.　試作以 2 及 $-\frac{1}{2}$ 爲根之二次方程式.

解.　$$2+\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{2}$$

$$3\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}$$

故所求之方程式

$$x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}=0$$

或去分母得

$$2x^2-5x-3=0$$

［問 25.］ 作以下列各題爲根之二次方程式.

(一) $5,\quad -7$ (二) $\frac{1}{2},\quad \frac{1}{3}$

(三) $a+b,\quad a-b$ (四) $\sqrt{2}+\sqrt{3},\ \sqrt{2}-\sqrt{3}$

(五) $m+ni,\quad m-ni$

例 2. 如命 α, β 爲 $ax^2+bx+c=0$ 之根時，試求以 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$ 爲根之二次方程式.

解. α, β 爲 $ax^2+bx+c=0$ 之根, 故

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\qquad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

然所求之方程式,如爲 $x^2+px+q=0$ 時,

$$-p=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=\frac{-b}{c}$$

$$q=\frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{a}{c}$$

故所求之方程式,爲

$$x^2+\frac{b}{c}x+\frac{a}{c}=0$$

卽 $$cx^2+bx+a=0$$

例 3. 命 $x^2+px+q=0$ 之二根爲 α, β 試作以 $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\alpha}{\beta}$ 爲根之二次方程式

解。 α, β 爲 $x^2+px+q=0$ 之根，故

$$\alpha+\beta=-p,\quad \alpha\beta=q,$$

然所求之方程式，如爲 $x^2+mx+n=0$ 時，則

$$-m=\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{\frac{b^2-2ac}{a^2}}{\frac{c}{a}}=\frac{b^2-2ac}{ac}$$

$$n=\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\beta}{\alpha}=1$$

故 $$x^2-\frac{b^2-2ac}{ac}x+1=0$$

即 $$acx^2-(b^2-2ac)x+ac=0$$

［問 26.］ 試作以 $3x^2-10x+3=0$ 二根之平方爲根之二次方程式。

［問 27.］ 試作以 $3x^2+3ax-a^2=0$ 二根之和之平方及差之平方爲根之二次方程式。

［問 28.］ 命 $ax^2+bx+c=0$ 之二根爲 α, β 試作以 $\frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\beta^2}$ 爲根之二次方程式。

［問 29.］ 如前題，試作以 α^3, β^3 爲根之二次方程式。

［問 30.］ 命 $x^2+px+q=0$ 之二根爲 α, β 時，試作以 $\alpha+\beta, \frac{1}{\alpha+\beta}$ 爲根之方程式.

［問 31.］ 如前題，試作以 $\alpha+\beta, \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ 爲根之二次方程式。

［問 32.］ 命 $ax^2+bx+c=0$ 之二根爲 α, β 時，試作以 $\frac{\beta^2}{\alpha}, \frac{\alpha^2}{\beta}$ 爲根之二次方程式.

例 4. 命 α, β 爲 $ax^2+bx+c=0$ 之二根時，以 $\frac{1}{\alpha+2\beta}, \frac{1}{\beta+2\alpha}$

爲根之二次方程式，爲

$$(2b^2+ac)x^2+3abx+a^2=0$$

試證明之。

解.　α, β 爲方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之根，故

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a} \qquad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

然以 $\dfrac{1}{\alpha+2\beta}$, $\dfrac{1}{\beta+2\alpha}$ 爲根之二次方程式，如爲 $x^2+px+q=0$ 時，則

$$-p=\frac{1}{\alpha+2\beta}+\frac{1}{\beta+2\alpha}=\frac{\beta+2\alpha+\alpha+2\beta}{(\alpha+2\beta)(\beta+2\alpha)}$$

$$=\frac{3(\alpha+\beta)}{5\alpha\beta+2(\alpha^2+\beta^2)}$$

$$=\frac{3\left(-\frac{b}{a}\right)}{5\frac{c}{a}+2\frac{b^2-2ac}{a^2}}$$

$$=\frac{-3ab}{2b^2+ac}$$

$$q=\frac{1}{\alpha+2\beta}\times\frac{1}{\beta+2\alpha}=\frac{1}{5\alpha\beta+2(\alpha^2+\beta^2)}$$

$$=\frac{1}{5\frac{c}{a}+2\frac{b^2-2ac}{a^2}}$$

$$=\frac{a^2}{2b^2+ac}$$

如以此値代入 p, q, 則

$$x^2+\frac{3ab}{2b^2+ac}+\frac{a^2}{2b^2+ac}=0$$

卽　　$(2b^2+ac)x^2+3abc+a^2=0$

故本題得以證明。

〔問 33.〕 $ax^2+bx+c=0$ 之二根如命爲 α, β 時，試作以 $m\alpha+n\beta$, $n\alpha+m\beta$ 爲根之二次方程式.

〔問 34.〕 如命 α, β 爲 $x^2+px+q=0$ 之二根時，試作以 $3\alpha+\beta$, $\alpha+3\beta$ 爲根之二次方程式.

〔問 35.〕 $x^2+px+q=0$ 之二根如命爲 α, β 時，試作以 $\frac{\alpha}{3\alpha+\beta}$, $\frac{\beta}{3\beta+\alpha}$ 爲根之二次方程式.

15. 二根間如有一定之關係時，係數間應存在之條件.

例 1. $ax^2+bx+c=0$ 二根之比如爲 $m:n$ 時. 試證

$$mnb^2=(m+n)^2ac$$

解. 方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之二根，命爲 $m\alpha$, $n\alpha$ 時，

$$(m+n)\alpha=-\frac{b}{a} \qquad (1)$$

$$mn\alpha^2=\frac{c}{a} \qquad (2)$$

由 (1) $$\alpha^2=\frac{b^2}{a^2(m+n)^2}$$

由 (2) $$\alpha^2=\frac{c}{mna}$$

$$\therefore \quad \frac{b^2}{a^2(m+n)^2}=\frac{c}{mna}$$

$$\therefore \quad mnb^2=(m+n)^2ac.$$

例 2. $x^2-px+15=0$ 二根之差之平方爲 4. 時，問 p 之值如何?

解. 方程式 $x^2-px+15=0$ 之二根命爲 α, β 時，

$$\alpha+\beta=p, \qquad \alpha\beta=15$$

然　　$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$$=p^2-60$$

由題意　　$p^2-60=4$

$\therefore$　　$p^2=64$

$\therefore$　　$p=\pm 8$

驗算.　如 $p=+8$ 則本題之方程式如下

$$x^2-8x+15=0$$

此方程式之根為 3 及 5 故其差之平方為 4，適於題意. 就 -8 驗之亦然。

[問 36.]　方程式 $x^2+px+q=0$ 之一根如為他根之二倍時試證 $9q=2p^2$

[問 37.]　方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之一根如為他根之 m 倍時，其條件如何?

[問 38.]　$x^2-px-q=0$ 之根，如為連續整數，試證 $p^2-4q-1=0$。

練 習 問 題 II.

(1)　$(a+b)x^2-(a+b+c)x+\dfrac{c}{2}=0$ 有實根試證明之。

(2)　試定 a 值使 $ax^2-6x+1=0$ 之根相等。

(3)　欲使 $36x^2+12(5m-1)x+m(25m-12)=0$ 有實根，等根，虛根時條件如何?

(4)　欲使 $4x^2+(1+a)x+1=0$ 有等根時，問 a 之值當為若干?

(5)　如 p 不等於 q 則 $2x^2+2(p+q)x+p^2+q^2=0$ 無實根，試證明之。

(6)　於方程式 $5x^2+7x+1=0$ 求下列各數。

(一)　二根平方之和。

(二)　二根差之平方。

(三) 二根平方之差。

(四) 二根立方之和。

(7) 命 $ax^2+bx+c=0$ 之二根爲 α, β 時，求下列各值。

(一) $(2\alpha+\beta+5)(2\beta+\alpha+5)$

(二) $\left(\frac{\beta}{\alpha}-2\right)\left(\frac{\alpha}{\beta}-2\right)$

(8) $ax^2+bx+c=0$ 之二根爲正時之條件如何？ 又爲負時之條件如何？

(9) 欲使 $ax^2+bx+c=0$ 之二根，符號不同，且正根之絕對值大時其條件如何？

(10) 命 $ax^2+bx+c=0$ 之二根爲 α, β 時，試作以 $\frac{\alpha+\beta}{\alpha}$，$\frac{\alpha+\beta}{\beta}$ 爲根之方程式.

(11) 命 $x^2+px+q=0$ 之二根爲 α, β 試作以下列之値爲根之方程式.

(一) $3\alpha-2\beta$ $2\beta-2\alpha$

(二) $\frac{3\beta-1}{2\alpha}$， $\frac{3\alpha-1}{2\beta}$

(12) 命 $x^2+fx+g=0$ 之二根爲 α, β 時,試以 α, β 之項表 $x^2+gx+f=0$ 之二根.

(13) $x^2+px+144=0$ 二根之比爲 $9:4$ 時. 問 p 之值如何？

(14) $px^2+qx+r=0$ 二根之比爲 $m:n$ 時

$$\frac{q^2}{pr}=\frac{(m+n)^2}{mn}$$

試證明之.

(15) 甲乙二人各解 $x^2+mx+n=0$ 之二次方程式(甲)誤書第二項之係數,(乙)誤書第三項之係數,(甲)得 2 及 7 之根,(乙)得 1 及 -10 之根, 問正當之根如何？

第三章

二次方程式之應用

(一)二次三項式之因數分解

16. 關於 x 之二次式一般之形如下

$$ax^2+bx+c$$

卽由三個項數所成，稱爲二次三項式.

試將二次三項式 ax^2+bx+c 分解爲 x 之一次二項因數.

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

$$=a\left\{x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right\}$$

$$=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right)^2\right\}$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\times\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

$$=a\left(x-\frac{-b-\sqrt{b-^24ac}}{2a}\right)\times\left(x-\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

然 $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 爲將二次三項式 ax^2+bx+c 等於 0 時所得方程式之根，故由解二次方程式可將二次三項式分解爲因數，卽得法

則如下.

【法則】 欲將二次三項式 ax^2+bx+c 分解爲因數時，先以此式爲零所得之方程式 $ax^2+bx+c=0$ 解之，求其根 α, β 而作 $a(x-\alpha)(x-\beta)$.

如由上法所得 α, β 爲虛數時，則本題之二次三項式不能分解爲因數.

例 1. 試分解 $3x^2+5x+2$ 爲因數.

解. 使 $3x^2+5x+2=0$

則
$$\alpha=\frac{-5+\sqrt{25-24}}{6}=\frac{-5+1}{6}=-\frac{2}{3}$$

$$\beta=\frac{-5-\sqrt{25-24}}{6}=\frac{-5-1}{6}=-1$$

$$\therefore\quad 3x^2+5x+2=3\left(x+\frac{2}{3}\right)(x+1)=(3x+2)(x+1)$$

例 2. 試分解 $49x^2-70x+25$ 爲因數.

解. 使 $49x^2-70x+25=0$

$$\alpha=\frac{35+\sqrt{1225-1225}}{49}=\frac{35}{49}=\frac{5}{7}$$

依同理 $\beta=\frac{35}{49}=\frac{5}{7}$

$$\therefore\quad 49x^2-70x+25=49\left(x-\frac{5}{7}\right)\left(x-\frac{5}{7}\right)$$

$$=49\left(x-\frac{5}{7}\right)^2$$

$$=(7x-5)^2$$

由本例知以三項式爲零之方程式有等根時，則其三項式爲完全平方數.

例 3. 試分解 $3x^2-9x+5$ 爲因數.

解. 使 $3x^2-9x+5=0$

則 $\alpha=\dfrac{9+\sqrt{81-60}}{6}=\dfrac{9+\sqrt{21}}{6}$

$\beta=\dfrac{9-\sqrt{81-60}}{6}=\dfrac{9-\sqrt{21}}{6}$

$$3x^2-9x+5=3\left(x-\frac{9+\sqrt{21}}{6}\right)\left(x-\frac{9-\sqrt{21}}{6}\right)$$

注意. 由上所示知二次三項式 ax^2+bx+c 分解爲二項因數時,如 b^2-4ac 爲完全平方數,則兩因數爲有理數,如 b^2-4ac 非完全平方數,則兩因數含有不盡根,如 b^2-4ac 等於 0,則兩因數相等,而所設之二次三項式爲完全平方數,如 b^2-4ac 爲負則不能分解爲因數.

[問 1.] 試分解下列各式爲因數.

(一) $5x^2-8x-21$ (二) $36x^2-24x-35$

(三) $22x^2-35x+3$ (四) $5x^2-38x+48$

(五) $121x^2+110x+25$ (六) $12x^2-37x-144$

(七) $15x^2-11x-12$ (八) $x^2+30x-1296$

[問 2.] 試將下式先改爲關於 x 之二次三項式而後分解爲因數.

(一) $2x^2+5xy+3y^2+3x+4y+1$

(二) $2x^2+2xy+5x+3y+3$

(二) 應用問題

17. 欲解應用問題,先履行以下之手續.

〔1〕 先按問題作方程式.

〔2〕 解此方程式求根.

〔3〕 討論此根之數之性質可否採爲問題之答數,可用者採之,不可用者棄之.

〔4〕 **就最後所得之數而行檢驗.**

注意. 方程式之根爲虛數時, 則問題爲不可能.

例 1. 有二數其和爲 12 其平方之和爲 74. 問各數如何?

解. 所求之一數爲 x, 則他數爲 $12-x$

由題意可得下列之方程式.

$$x^2+(12-x)^2=74.$$

即 $$2x^2-24x+70=0.$$

解此方程式, 得 $x=7$ 或 $x=5$.

如 $x=7$ 則 $12-x=12-7=5$.

$x=5$ 則 $12-x=12-5=7$.

無論如何所求之數爲 7 與 5.

驗算. $7+5=12$, $7^2+5^2=49+25=74$.

即 7 與 5 適合題意.

例 2. 有二位之數. 表十位之數字之數較表一位之數字之數多 3. 而此數較表十位之數與表一位之數之積二倍多 5, 問此數如何?

解. 命 x 表一位之數, 則 $x+3$ 表十位之數. 故所求之數以 $10(x+3)+x$ 表之.

然由題意得方程式如下,

$$10(x+3)+x=2(x+3)x+5$$

解括弧而整頓之.

$$2x^2-5x-25=0$$

解之得 $x=5$ 或 $x=-\frac{5}{2}$

然表各位數字之數須爲正整數, $-\frac{5}{2}$ 不適於題意故當棄之.

故十位之數字爲 8 而所求之數爲 85.

驗算. $85=2\times8\times5+5$ 適合題意.

〔問 3.〕 有二數, 其和爲 15, 其積爲 56, 求各數.

[問 4.] 有二數，其和爲 13，其平方之和爲 89，求各數.

[問 5.] 有二數，其差爲 2，其積爲 143，求各數.

[問 6.] 有二數，其差爲 5，其平方之和爲 277，求各數.

[問 7.] 有甲，乙，丙三數，甲爲乙之半，乙爲丙之半，各數平方之和爲 189，求各數

[問 8.] 有三相鄰之整數，其平方之和爲 1454，求三數.

[問 9.] 有二正分數，其和爲 $\frac{5}{6}$，其差與其積相等，求此二分數.

[問 10.] 有二位之數，表十位之數，較表一位之數少 4，表各位之數之積較原數少 16，求原數.

[問 11.] 有二位之數，表十位之數，等於表一位之數之半，表各位之數之積之二倍加 20 等於顚倒數字之位置所得之數，求二位之數

[問 12.] 二整數之比爲 4:5 加 10 於各數之平方之差爲 141 問各數如何?

[問 13.] 有正方形之地所兩處，一邊之差爲 12尺，今於各地所如敷方一尺之石，則需石之和爲二千一百二十塊.問各邊之長如何?

例 3. 有兵若干，列爲方陣，如改爲各面四列之中空方陣時，則其外側一邊之人數，較前方陣外側一邊之人數當多 16 人，問兵數若干?

解. 方陣外側一邊之人數爲 x 人，則總人數爲 x^2，如將此人數列爲四列中空之方陣時，外側一邊之人數爲 $(x+16)$ 人，然此四列中空方陣之人數，如視爲外側一邊之人數減去 4 人，所得之差，卽 $(x+12)$ 人爲一列時，則此方陣由 16 列而成，故總人數爲 $16(x+12)$ 得方程式如下:

$$x^2=16(x+12)$$

解此方程式 得 $x=24$，或 $x=-8$.

一邊之人數當然爲正數，故 -8 不適於問題.所以只取 24，故總人數爲 $24^2=576$ 卽 576 人.

驗算. 學者試自行之.

例 4. 有金 1000 元,以一年之定期存於銀行,到期於利息中取出 30 元,其餘加入本金更以一年定期存之,到期,本利合計得銀 1134 元. 問年利率若干?

解. 命所求之年利率爲 x, 則 1000 元存一年時本利合計之元數,爲

$$1000(1+x)$$

第二年本金之元數,爲

$$1000(1+x)-30$$

故第二年末本利合計之元數,爲

$$\{1000(1+x)-30\}(1+x)$$

然由題意等於 1134, 故得方程式如下.

$$\{1000(1+x)-30\}(1+x)=1134$$

或 $$1000(1+x^2)-30(1+x)-1134=0$$

如視 $(1+x)$ 爲此方程式之未知數, 則

$$1+x=\frac{15\pm\sqrt{225+1134000}}{1000}$$

$$=\frac{15\pm1065}{1000}$$

$$\therefore\quad 1+x=\frac{1080}{1000}\quad 或\quad \frac{-1050}{1000}$$

然負數不適於題意, 故棄之, 如採 $\frac{1080}{1000}$ 爲 $1+x$ 之值, 則

$$1+x=1.08$$

$$x=0.08$$ 答 8 分

驗算. 假定年利 8 分, 則 1000 元一年間之本利合計爲 1080 元, 第二年之本金爲由此數減去 30 元, 卽 1050 元, 故第二年末本利合計爲 1050 元 $\times 1.08=1134$ 元,適合題意.

注意. 於本例當解方程式時, 如使變爲 x 之二次方程式之

形而解時，雖亦可得所求之答數. 然以 $1+x$ 視爲未知數而解時簡便實多.

[問 14.] 有兵一隊進軍時側面較前列多 14 人，及達敵前而展開，因前列增加 828 人，致側面人數減爲 5 人，問此隊兵若干人?

[問 15.] 有長 60 尺寬 40 尺矩形之地，圍繞此地有寬一樣之徑，其面積爲 1344 方尺，問寬若干尺.

但此徑不含於此地之內.

[問 16.] 有金 3000 元，以一年定期存於銀行，到期於利息內取出 80 元，其餘加入本金復存之，但年利率較前減少 5 釐；又一年取之，得本利合計金 3270 元五角；問前之利率如何?

練習問題 III.

試分解下列二項式爲因數.

(1) $7x^2-6x-1$ (2) $3x^2-9x+6$

(3) $5x^2+9x-72$ (4) $9x^2-2x-136$

(5) $3x^2-10x-25$ (6) $13x^2+24x+11$

(7) $x^2+2px+p^2-q^2$ (8) $m^2x^2+2mrx-n^2+r^2$

(9) 有父子二人，其年齡之和爲 100，其積之十分之一超過父之年齡爲 140，問父子之年齡各若干?

(10) 有一學生問其年齡時，答曰我年齡之自乘與五年前之年齡及八年後年齡之相乘積之七分六尙多 37，問此學生年齡如何?

(11) 有兩縣相距 320 哩，今由此縣遣甲使赴彼縣，同時彼縣亦遣使赴此縣，相向而行；甲使一日之行程較乙使一日之行程迅速 8 哩，又同時由二縣出發至相會之日數，等於乙使一日行程之哩數之中，問相遇之處距二縣各爲若干哩?

(12) 有直三面形之地，將夾直角之二邊之長比較之，一方長於他方 48 尺，其面積爲 1404 方尺，求二邊之長?

第 四 章

分 數 方 程 式

18. 定義. 含有未知數分數式之方程式稱爲**分數方程式.**

例如
$$\frac{6}{x}=10$$
$$\frac{x}{x-1}=\frac{4}{x+1}+\frac{1}{x^2-1}$$
$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}=0.$$

皆爲分母含有未知數 x 之分數式, 故爲分數方程式; 對於分數方程式而言, 以前所述之方程式稱爲**整方程式.**

在整方程式, 可集各項於左邊而改爲同値之方程式如下:

$$A=0$$

分數方程式如集一切之項於一邊爲一分數方程式時, 可改爲同値*之方程式, 其形如下:

$$\frac{A}{B}=0$$

但 A, B 就未知數而言爲整式.

19. 一分數式 $\frac{A}{B}$ 爲零時, 其分子不能不單獨爲零.

* 二方程式有同根時, 此二方程式稱爲同値.

先於一分數式 $\frac{A}{B}$，如 $A=0$, $B\neq0$, 則因以某數除零所得之商亦爲零,故 $\frac{A}{B}$ 等於零;如 $A\neq0$, $B=0$ 則無意義,何者,因分數者如以分母相乘則得分子之數也;然無論何數與 B 卽 0 相乘皆等於 0, 決不能得不等於 0 之 A 故也. 又如 $A=0$, $B=0$ 則分數之值一定, 何則, 因無論以何值與此分數式如與其分母 B 卽 0 相乘皆得其分子 A 卽 0 故也.

故欲使分數式之值爲 0, 須其分子單獨爲零.

20. **A 與 B 爲關於未知數之有理整式 兩式間無公約數時, 則分數方程式 $\frac{A}{B}=0$ 與整數方程式 $A=0$ 同值.**

證. 由假設知 A 與 B 無公約數,故使 A 爲 0 之根,不能使 B 爲 0, 故整方程式 $A=0$ 之根, 能使分數方程式 $\frac{A}{B}=0$ 滿足. 又分數方程式 $\frac{A}{B}=0$,只能使分子 A 等於零,故可使整方程式 $A=0$ 滿足.

故 $\frac{A}{B}=0$ 與 $A=0$ 同值.

例如 $\qquad A=x-3,\quad B=(x-1)(x-2)$ 時,

$$\frac{A}{B}=\frac{x-3}{(x-1)(x-2)}$$

然

$$\frac{x-3}{(x-1)(x-2)}=0$$

$$x-3=0 \qquad \text{同值.}$$

蓋因 $x-3=0$ 已能使分數式 $\frac{x-3}{(x-1)(x-2)}$ 之分子爲 0, 此外無能使分子爲 0, 故 $\frac{x-3}{(x-1)(x-2)}=0$ 之根爲 $x-3=0$ 之根,

$x-3=0$ 之根，爲 $\dfrac{x-3}{(x-1)(x-2)}=0$ 之根，故 $\dfrac{x-3}{(x-1)(x-2)}=0$ 與 $x-3=0$ 同値.

注意.　本書本專論關於二次方程式之事項，故本章亦應祇論能歸於二次方程式解法之方程式．然因如此於論分數方程式之解法之基礎上多有不便，故即歸於一次方程式之解法之分數方程式並論之．本章以下常有此例.

［問 1.］　求與下列分數方程式同値之整方程式.

(一)　$\dfrac{3x}{x+1}=0$　　(二)　$\dfrac{x+1}{(x+2)(x-1)}=0$

(三)　$\dfrac{x(x-2)}{5(x+4)(3x-2)}=0$

21.　分數方程式之根

分數方程式之根，乃將分數方程式各項集於一邊，化爲一分數式，然後使爲既約分數式，以此既約分數式等於零之根爲此方程式之根.

22.　分數方程式之解法

例 1.　試解 $\dfrac{7}{x}=6$

解.　先移項化爲一分數式，

$$\frac{7-6x}{x}=0$$

然 $\dfrac{7-6x}{x}$ 之分母子間無約數，即爲已約分數式，故此方程式與

$$7-6x=0$$

同値．將此一次方程式解之，得

$$x=\frac{7}{6}$$

即本題方程式之根.

驗算.
$$\frac{7}{x}=\frac{7}{\frac{7}{6}}=6.$$

例 2.　試解 $\dfrac{1}{2(x-1)}+\dfrac{3}{x^2-1}=\dfrac{1}{4}$.

解.　先移項集爲一分數式.

$$\frac{2(x+1)+12-(x^2-1)}{4(x-1)(x+1)}=0$$

或
$$\frac{x^2-2x-15}{4(x-1)(x+1)}=0$$

卽
$$\frac{(x-5)(x+3)}{4(x-1)(x+1)}=0$$

然左邊爲已約分數式,故此方程式與

$$(x-5)(x+3)=0$$

同値,故　$x=5$　或　$x=-3$.

驗算.　如　$x=5$

則
$$\frac{1}{2(x-1)}+\frac{3}{x^2-1}=\frac{1}{2(5-1)}+\frac{3}{25-1}=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$$

依同法知　$x=-3$　亦能滿足.

例 3.　試解下列方程式,

$$\frac{x}{(x+2)(2x+3)}=\frac{2x}{2x+3}-\frac{1}{x+2}$$

解.　移各項於左邊,

$$\frac{x}{(x+2)(2x+3)}-\frac{2x}{2x+3}+\frac{1}{x+2}=0$$

化爲一分數式,

$$\frac{x-2x(x+2)+2x+3}{(x+2)(2x+3)}=0$$

或
$$\frac{-x(2x+3)+(2x+3)}{(x+2)(2x+3)}=0$$

卽
$$\frac{(2x+3)(1-x)}{(x+2)(2x+3)}=0$$

因欲左邊化爲已約分數式，以 $2x+3$ 約之

$$\frac{1-x}{x+2}=0$$

此方程式之根爲 $1-x=0$ 之根卽 $x=1$.

驗算. 學者自行之.

例 4. 試解. $\frac{2x-3}{x-2}+\frac{2x+3}{3x-4}+\frac{10x^2-30x+26}{(x-2)(3x-4)}=0$

解. 化左邊爲一分數式.

$$\frac{18x^2-48x+32}{(x-2)(3x-4)}=0$$

以 2 除兩邊

$$\frac{9x^2-24x+16}{(x-2)(3x-4)}=0$$

卽

$$\frac{(3x-4)^2}{(x-2)(3x-4)}=0$$

化爲已約分數式.

$$\frac{3x-4}{x-2}=0$$

$$\therefore \quad 3x-4=0$$

$$\therefore \quad x=\frac{4}{3}$$

然欲行驗算，將 $x=\frac{4}{3}$ 代入原方程式時，分數式之分母爲 0，成無意義，然如前節所述分數方程式之根，係將各項集於一邊，化爲一分數式，次將已約分數式爲 0. 所得之根卽爲原方程式之根. 故 $x=\frac{4}{3}$ 能滿足最後之方程式 $\frac{3x-4}{x-2}=0$ 卽可

在上數例，不由此驗算法. 雖以根代入原方程式，分母亦不爲 0，此時因欲發見或有計算之誤卽於最初之方程式行驗算亦可.

例 5. 試解 $\frac{1}{x-3}=0$

解. 如前所述,欲使分數爲零,須其分子爲零,然 $\frac{1}{x-3}$ 之分子爲 1. 決不能爲零,故此方程式無根,卽此方程式不能成立.

[問 2.] 解下列方程式.

(一) $\frac{x-5}{x+6}=\frac{1}{12}$ (二) $\frac{3x-4}{2x-1}=\frac{4x+7}{6x-3}$

(三) $\frac{1}{1-x}=\frac{x^2}{1-x^2}$ (四) $\frac{x^2-x-1}{x^2-x}=\frac{1}{x}-\frac{2}{x-1}$

(五) $\frac{x^2-2x}{x^2-1}+\frac{1}{x-1}+2=0$

23. 解分數方程式之別法

前節所述分數方程式之解法,其方法雖完全,然不從上法如可由其他簡單方法而解分數方程式時,則亦可用,要在能達同一之結果而已.

如由他法所得之根反於第 21 節之規約時,則其解法歸於無效.此時非再將原方程式用前節所述之方法而求其根不可.

欲舉別法之前須先論一事請述如下:

以含有未知數之式乘方程式之兩邊所得之方程式通常不與原方程式同値.

例如有 $x=a$ ……………………………………(1)

之方程式,此方程式之根明知爲 a.

如以 $x-b$ 乘此兩項,則得

$$x(x-b)=a(x-b)$$

移項後括出共通之因數時,則得

$$(x-a)(x-b)=0 \text{……………………(2)}$$

此方程式之根明爲 a 及 b.

卽(1)之根爲 a, (2)之根爲 a 及 b, 故(1)與(2)不同値,因

乘 $x-b$ 而得(2)之方程式所多之根，爲使 $x-b$ 爲 0 而得之根.

依同理，如以 $(x-b)(x-c)$ 乘 $x=a$ 之兩邊，則得

$$x(x-b)(x-c)=a(x-b)(x-c)$$

解之可得 $x=a,\ b,\ c$ 而所多得之根 $b,\ c$ 卽爲使 $(x-b)(x-c)$ 爲 0 之根.

如斯以含有未知數之式乘方程式之兩邊，則導入使所乘之式爲 0 之根，稱爲無緣根；無緣根必爲使所乘之式爲 0 之根，決無他物，故**如以不等於零之式乘方程式之兩邊時，不致因此而導入無緣根。**

故得定理如下.

以含有未知數之式乘一方程式之兩邊，將所得之方程式解之，如其根不能使所乘之式爲零時，則此根爲原方程式之根。

24. 欲解方程式，多以分數之一切分母之最小公倍數乘兩邊，而將其所得之方程式解之. 卽可得所求之根。

例 1. 試解 $\frac{1}{2(x-1)}+\frac{3}{x^2-1}=\frac{1}{4}$ (再出)

解. 以分母之最小公倍數 $4(x-1)(x+1)$ 乘兩邊

$$2(x+1)+12=x^2-1$$

移項而整頓之，

$$x^2-2x-15=0$$

解之得 $x=5$ 或 $x=-3$.

然 $x=5$ 及 $x=-3$ 不能使所乘之式，即 $4(x+1)(x-1)$ 爲零故爲原方程式之根.

例 2. 試解 $\frac{x}{(x+2)(2x+3)}=\frac{2x}{2x+3}-\frac{1}{x+2}$.

解. 以分母之最小公倍數 $(x+2)(2x+3)$ 乘方程式之各項時，

$$x=2x(x+2)-(2x+3).$$

移項而整頓之

$$(2x+3)(x-1)=0.$$

$\therefore$ 如 $2x+3=0$ 則 $x=-\frac{3}{2}$

如 $x-1=0$ 則 $x=1.$

$x=1$ 不能使 $(x+2)(2x+3)$ 爲 0 故爲原方程式之根.

然 $x=-\frac{3}{2}$ 能使 $2x+3$ 即 $(2x+3)(x+2)$ 爲 0，故此根到底因以 $(2x+3)(x+2)$ 乘於兩邊所得之無緣根，抑爲原方程式之根，不能明瞭，故此解法歸於無効，將原方程式照第 21 節之方法求時僅得 $x=1$ 一根，故知 $x=-\frac{3}{2}$ 爲將 $(2x+3)(x+2)$ 乘時所得之無緣根.

例 3. 試解 $\frac{8x^2}{4x+3}-\frac{2x-1}{2(x-1)}+\frac{2x+5}{2(x-1)(4x+3)}=0.$

解. 以分母之最小公倍數 $2(4x+3)(x-1)$ 乘各項而除去分母時.

$$16x^2(x-1)-(2x-1)(4x+3)+2x+5=0.$$

$$16x^2(x-1)-8(x^2-1)=0.$$

即 $$(16x^2-8x-8)(x-1)=0.$$

$$8(2x^2-x-1)(x-1)=0.$$

即 $$(2x+1)(x-1)^2=0.$$

如 $2x+1=0$ 則 $x=-\frac{1}{2}.$

如 $(x-1)^2=0$ 則得 $x=1$ 之二等根.

今 $x=-\frac{1}{2}$ 不能使 $2(4x+3)(x-1)$ 等於 0，故爲原方程式之根.

然 $x=1$ 能使 $2(4x+3)(x-1)$ 爲 0 然不知其爲原方程式之根與否.

故須將原方程式集各項於一方,化爲已約分數式時,則得方程式如下:

$$\frac{(2x+1)(x-1)}{2(4x+3)}=0,$$

解之得 $x=-\frac{1}{2}$ 及 $x=1.$

故 $x=1$ 爲原方程式之根.

注意 1. 由本例觀之,可知 $x=1$ 雖能使原方程式之分母爲 0,然依第 21 節之規約,爲原方程式之根.

注意 2. 由本例觀之,使所乘之式爲 0 之根不能謂爲卽非原方程式之根.此乃學分數方程式所最感困難之處.上法雖計算稍見簡便,然得能使分母爲 0 之根時當重將原方程式解之亦見不便.

[問 3.] 解下列分數方程式.

(一) $\frac{1}{x-1}+7=\frac{x^2}{x-1}.$

(二) $\dfrac{x-1+\dfrac{6}{x-6}}{x-2+\dfrac{3}{x-6}}=3.$

(三) $\frac{3x-5}{x-1}-\frac{8}{x+1}+\frac{10x+6}{x^2-1}=3.$

(四) $\frac{3x-5}{9x}-\frac{6x}{3x-25}=\frac{1}{3}.$

(五) $\frac{3x-1}{(x-2)(x+3)}-\frac{3}{x-2}=\frac{2}{x+3}+\frac{2}{5}.$

(六) $6+\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x+1}=\frac{10x-8}{x^2-1}.$

(七) $\frac{x-1}{x+1}+\frac{2x+1}{x(x+1)}-\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x(x-2)}=0.$

(八) $\dfrac{3x}{(x-1)(x+2)}+\dfrac{x-1}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{x}{x-1}$.

(九) $\dfrac{x}{a}+\dfrac{a}{x}=\dfrac{x}{b}+\dfrac{b}{x}$.

25. 特種分數方程式之解法

例 1. 試解下列方程式.

$$\frac{1}{x-4}+\frac{1}{x-9}=\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-10}.$$

解. 移項如下.

$$\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-3}=\frac{1}{x-10}-\frac{1}{x-9},$$

或 $$\frac{x-3-(x-4)}{(x-4)(x-3)}=\frac{x-9-(x-10)}{(x-10)(x-9)},$$

即 $$\frac{1}{(x-4)(x-3)}=\frac{1}{(x-10)(x-9)}.$$

除去分母 $(x-10)(x-9)=(x-4)(x-3)$,

即 $x^2-19x+90=x^2-7x+12$,

即 $12x=78$,

$$x=\frac{39}{6}.$$

$\dfrac{39}{6}$ 不能使原方程式之分母爲 0, 故爲原方程式之根.

注意. 使分母爲 0 之式, 即使所乘之式爲 0, 故因除去分母, 所乘之式爲 0, 與原方程式之分母爲同一之事.

例 2. 試解下列方程式.

$$\frac{x-1}{x+1}+\frac{x+5}{x+7}=\frac{x+1}{x+3}+\frac{x+3}{x+5}.$$

解 此方程式逐次變形如下:

$$\frac{x+1-2}{x+1}+\frac{x+7-2}{x+7}=\frac{x+3-2}{x+3}+\frac{x+5-2}{x+5},$$

即 $$1-\frac{2}{x+1}+1-\frac{2}{x+7}=1-\frac{2}{x+3}+1-\frac{2}{x+5}.$$

兩邊各減 2 而變其符號.

$$\frac{2}{x+1}+\frac{2}{x+7}=\frac{2}{x+3}+\frac{2}{x+5}.$$

以 2 除之.

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+7}=\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+5}.$$

以下順次照前例.

$$\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}=\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x+7}.$$

$$\frac{2}{(x+1)(x+3)}=\frac{2}{(x+5)(x+7)}.$$

除去分母而解括弧

$$x^2+12x+35=x^2+4x+3.$$

$$8x=-32.$$

$$x=-4.$$

$x=-4$ 不能使原方程式之任何分母爲 0，故爲所求之根.

驗算. 學者可自行之.

例 3. 試解 $$\frac{a}{x+a}+\frac{b}{x+b}+\frac{c}{x+c}=3.$$

解. 此方程式得順次變化如下：

$$\frac{a}{x+a}-1+\frac{b}{x+b}-1+\frac{c}{x+c}-1=0.$$

或 $$\frac{a-(x+a)}{x+a}+\frac{b-(x+b)}{x+b}+\frac{c-(x+c)}{x+c}=0.$$

即 $$\frac{-x}{x+a}+\frac{-x}{x+b}+\frac{-x}{x+c}=0.$$

$$x\left(\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}+\frac{1}{x+c}\right)=0.$$

$\therefore$ $x=0$ ……………………………………… (1)

或　　$$\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}+\frac{1}{x+c}=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由(2)除，去分母，

$$(x+b)(x+c)+(x+a)(x+c)+(x+a)(x+b)=0$$

整頓之，則

$$3x^2+2(b+c+a)x+bc+ca+ab=0$$

$$\therefore\quad x=\frac{-(b+c+a)\pm\sqrt{(b+c+a)^2-3(bc+ca+ab)}}{3}\cdots\cdots(3)$$

此(1)(3)雙方之根，皆不使本題之方程式之分母爲0，故爲所求之根.

[問 4.]　試解下列方程式.

(一)　$$\frac{1}{x-7}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+7}=0.$$

(二)　$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-9}=\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-7}.$$

(三)　$$\frac{1}{x-25}+\frac{1}{x+4}=\frac{1}{x-24}+\frac{1}{x+3}.$$

(四)　$$\frac{x+3}{3-x}+\frac{x+6}{6-x}+\frac{x+9}{9-x}=3.$$

(五)　$$\frac{x-1}{x-2}-\frac{x-2}{x-3}=\frac{x-4}{x-5}-\frac{x-5}{x-6}.$$

26. 應用問題

例 1.　有甲乙之商船二艘，同時由同港出發，航行相隔 720 海里之某港，甲較乙早到八時間；但比較甲乙之速度，甲較乙每時間多行 3 海里，問兩船之速度如何？

解.　命甲船一時間之速度爲 x 海里，則乙船一時間之速度爲 $(x-3)$ 海里，故兩船航行 720 海里所要之時間爲 $\frac{720}{x}$ 時與 $\frac{720}{x-3}$ 時；此二船速度之差等於 8 時間，故得方程式如下：

$$\frac{720}{x-3}-\frac{720}{x}=8.$$

此方程式除去分母而整頓時,

$$x^2-3x-270=0.$$

$$\therefore \qquad x=18 \text{ 或 } x=-15.$$

二根不能使原方程式之分母爲 0,故爲原方程式之根.然欲爲所設問題之答數,非正數不可,故負根 -15 可棄,僅採 $x=18$.

故甲行 18 海里,乙行 15 海里.爲所要之答案.

驗算. $720\div15=48$, $720\div18=40$, $48-40=8$.

[問 5.] 有人行九哩之路,如於行三哩後,每時增一哩之速度,則較預定之時,早一時可達,求預定之時間如何?

[問 6.] 有甲乙二列車,直行 36 哩之鐵道線路,甲較乙因每時行速 15 哩,故比乙早到 12 分,問各列車每時間之速度如何?

[問 7.] 某次集會共用費 18 元,本應由各會員均攤,因會員二人不到,故一人多擔任三角,問會員之人數若干?

[問 8.] 有人於甲地將錢一元八角分配若干貧民,行至乙地又將同額之錢分配貧民,因人數比甲地多四十人,故每人少得六分;問各地貧民之數若干?

[問 9.] 白糖七斤之價比紅糖七斤之價貴二角一分,又白糖與紅糖各買二元四角時,白糖少紅糖四斤;問紅糖七斤之價若干?

例 2. 有盛滿酒之罎,不知其容積,今將酒取出八升,以水充滿之,又取出混合液四升,再以水充滿之,此時罎中酒與水之比爲 18 : 7.問此罎之容積若干?

解. 命罎之容積爲 x 升,自其中取酒 8 升.以水 8 升補之時.則混合液中之酒與水各爲全量之

$$\frac{x-8}{x}, \qquad \frac{8}{x}.$$

第二次取出混合液 4 升中,含有

$$酒\ \frac{4(x-8)}{x}\ 升. \quad 及 \quad 水\ \frac{4\times 8}{x}\ 升.$$

故酒與水之殘量,各如次:

$$(x-8)-\frac{4(x-8)}{x}; \qquad 8-\frac{32}{x}$$

以水 4 升充滿時,最後水之量爲 $\left(12-\frac{32}{x}\right)$ 升. 故得方程式如下:

$$\left\{x-8-\frac{4(x-8)}{x}\right\}:\left\{12-\frac{32}{x}\right\}=18:7.$$

解此方程式,得 $x=40$, 或 $x=\frac{20}{7}$.

此兩根雖能滿足原方程式,然罎之全量不能少於 8 升. 故 $\frac{20}{7}$ 不可採用. 故其答案爲 40 升.

驗算. 學者試自行之.

[問 10.] 有酒與水之混合液一石,如加酒一石時,則酒與水之比例等於加水一石時酒與水比例之九倍. 問此混合液中酒與水之量各如何?

[問 11.] 有酒精與水之混合液,如加同量之酒精於此混合液,則酒精與水分量之比等於加同量之水時之比之十倍. 問所設之混合液,含有酒精若干?

[問 12.] 有盛酒之桶,自其中取出九升,混入同量之水,又自其中取出九升再混入同量之水時,桶內酒與水之比例爲九與六之比. 問最初有酒若干?

練習問題 IV.

試解下列方程式.

(1) $\frac{2x-3}{3x-5}+\frac{3x-5}{2x-3}=\frac{5}{2}$

(2.) $$\frac{3x^2}{(3x+1)(x+1)}+\frac{x}{(x+1)}\left(1+\frac{1}{3x+1}\right)=1.$$

(3.) $$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}=0.$$

(4.) $$\frac{a-x}{b}-\frac{b}{a-x}=\frac{a}{b-x}-\frac{b-x}{a}.$$

(5.) $$\frac{a}{x+a}+\frac{b}{x+b}=\frac{a-c}{x+a-c}+\frac{b+c}{a+b+c}.$$

(6.) $$\frac{1}{x^2+11x-8}+\frac{1}{x^2+2x-8}+\frac{1}{x^2-13x-8}=0.$$

(7.) $$\frac{x+1}{x+1+\cfrac{1}{x-1+\cfrac{1}{x+1}}}=\frac{2x+5}{2x+9}.$$

(8.) $$\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-2}{x+2}+\frac{x-3}{x+3}+\frac{x+4}{x-c}=4.$$

(9.) 有一工作由甲乙二職工共作時比甲一人獨作早 12 日，比乙一人獨作早 27 日竣工，問二人須作幾日可竣.

(10) 合計男女有千一百人之職工，男工總員與女工總員同時日間能成同樣之工作；今男女工之人數，如相更易，則男工二十五日可成之工作女工當以三十六日間成之. 問男女工各幾人?

(11.) 有一工作，甲乙二人共作時，則某時間內可以完竣. 今以其事業之半由甲一人獨作時可早一時間. 由乙一人獨作時則後二時間可成. 問二人共同完成此工作，需若干時間?

(12.) 備有長椅若干個之奏樂室，可容八百人之聽衆，若將同樣之椅子增加二十個，則每椅一個所可坐之人數可比豫定減少二人，問所備椅子之數，及每椅所坐之預定人員若干?

(13.) 有一商船由甲港解纜向乙港行後一時間，有一軍艦自甲港拔錨與商船取同一之航路向乙港進行四十八海里追及商船，更逾二時間到達乙港. 問甲乙兩港間之航路爲若干海里?

(14.) 有船舶來往於甲,乙,丙三港,往時自甲直航至丙,歸時自丙經乙而返於甲,各兩港間之距離甲丙爲 120 海里,乙丙爲 78 海里,甲乙爲 56 海里.甲丙間每時航海之速度,較乙丙間遲一海里,較甲乙間遲二海里,而航海時間往復相等.問各兩港間航海所要之時間如何?

(15.) 有人以地價千四百四十元租借若干土地.其中留八畝自用,所餘每畝增加二元轉租於他人,其價悉足以相償,問此人共租地若干畝?

(16.) 有人以銀二十四元買布若干疋,其中留二疋自用,其餘每疋得利二角售出,共得銀二十五元二角,問其始所買之布幾疋?

(17.) 有人以二十七元買陶器若干個,每個以五分之利益賣之,因破損四個成爲廢物,故僅得利一元,問買時一個之價若干?

第 五 章

無理方程式

27. 含有關於未知數之無理式之方程式稱爲無理方程式.

例如
$$3\sqrt{x}=4,$$
$$\sqrt{5x-4}=2-\sqrt{x},$$
$$\sqrt{x-a}=\sqrt{x-b}+\sqrt{x-c},$$
$$\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{x-b}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-c}}=c,$$
$$\sqrt[3]{x-a}+\sqrt[3]{x-b}=c.$$

等皆爲無理方程式.

關於解無理方程式之必要定理揭之如次.

28. 將方程式之兩邊平方而得之方程式,通常不與原方程式同値.

例如有 $A=B$ ……………………… (1)

方程式,如將兩邊自乘,則得

$A^2=B^2$ ……………………… (2)

然將此方程式,移項而分解爲因數時,

$(A-B)(A+B)=0$ ……………………… (3)

$\therefore$ 如 $A-B=0$ 則 $A=B$

如 $A+B=0$ 則 $A=-B$

故知方程(3)於適於方程式(1)之根之外,尙有適於 $A=-B$ 之方程式之根. 故(3)與(1)不同値. 然(2)與(3)同値,故(2)不與(1)同値.

此事實得證明如次:

先將(1)移項,則得

$$A-B=0$$

兩邊各以 $A+B$ 乘之,則

$$(A-B)(A+B)=0$$

即得(3)之方程式.

如第23節所述,以含有未知數之式乘方程式之兩邊時,其所得之方程式,通常不與原方程式同值,而導入之無緣根,爲使所乘之式爲零之方程式.

依同理,如將(1)之兩邊三乘時,則得

$$A^3=B^3 \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

將此方程式移項而分解爲因數時,則得

$$(A-B)(A^2+AB+B^2)=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

而此方程式,爲由

$$\begin{cases} A-B=0 \\ A^2+AB+B^2=0 \end{cases}$$

二個方程式所得之根爲根.故於適於(1)之根外尙有適於

$$A^2+AB+B^2=0$$

之根.故(4)不與(1)同値.

依同理通常方程式之兩邊,如使高至同一乘羃時,所得之方程式不與原方程式同値.

此處所應注意者,於(3)與(5)使兩邊高至同乘羃時所得之方程式,雖導入無緣根,而原方程式之根無喪失之虞.

29. 無理方程式之解法

【法則】　欲解無理方程式,當適宜移項,使兩邊高至同一乘羃,而化作各項皆爲有理式之方程式,解此方程式將所得之根,代入原方程式之未知數,取其適

合者爲根.

由此法則所得之根,既如前節所述,不必盡爲原方程式之根,故將所得之根,一一驗算,爲當然之結果,與平時於解方程式之途中因恐誤算而行驗算大異其趣.

例 1. 解方程式 $\sqrt{x-1}=2$.

解. 將兩邊平方之.

$$x-1=4.$$

$$\therefore \qquad x=5.$$

驗算. $\sqrt{x-1}=\sqrt{5-1}=\sqrt{4}=2.$

即 5 爲原方程式之根.

例 2. 解下列方程式

$$2x-\sqrt{x^2-6x-12}=18.$$

解. 移項

$$2x-18=\sqrt{x^2-6x-12}.$$

平方之.

$$4x^2-72x+324=x^2-6x-12.$$

$$3x^2-66x+336=0.$$

$$x^2-22x+112=0.$$

$$\therefore \qquad x=11\pm\sqrt{121-112}=11\pm3.$$

故得 $x=14$ 或 $x=8$.

驗算. (i) 如 $x=14$

左邊 $=2\times14-\sqrt{14^2-6\times14-12}$

$=28-10=18.$

故 x 爲原方程式之根.

(ii) 如 $x=8$

左邊 $=2\times8-\sqrt{8^2-6\times8-12}=16-2=14.$

故 $x=8$ 非原方程式之根.

注意.　最初解 $2x-\sqrt{x^2-6x-12}=18$ 時先將有理式集於一邊，故平方後即能除去根號，如照原形而加平方則縱平方若干次，方程式益見複雜，決不能決去根號，總之凡解有理式與無理式混合之方程式時，須將有理式全部集於一處視如一數而處置之.

例 3.　解　$\sqrt{2x-3}=2\sqrt{x+2}-3$.

解.　先將兩邊自乘.

$$2x-3=4(x+2)-12\sqrt{x+2}+9.$$

約去同類項，集有理式於一邊，

$$12\sqrt{x+2}=2x+20.$$

以 2 除兩邊

$$6\sqrt{x+2}=x+10.$$

再將兩邊自乘

$$36(x+2)=x^2+20x+100.$$

即　$x^2-16x+28=0.$

即　$(x-2)(x-14)=0.$

故得　$x=2$　或　$x=14$.

驗算.　如　$x=2$，則　左邊 $=\sqrt{2\times2-3}=1$,

右邊 $=2\sqrt{2+2}-3=4-3=1$.

故 $x=2$ 爲原方程式之根.

如　$x=14$. 則　左邊 $=\sqrt{2\times14-3}=5$,

右邊 $=2\sqrt{14+2}-3=5$.

故 $x=14$ 亦爲原方程式之根.

[問 1.]　解下列方程式.

(一)　$\sqrt{10-x}=3$.　　(二)　$x+\sqrt{5x+10}=8$.

(三)　$x+\sqrt{x-4}=6$.　　(四)　$7\sqrt{x}-3x=2$.

例 4.　解下列方程式

$$\sqrt{2x-5}-\sqrt{3x+4}+\sqrt{x-3}=0.$$

解. 移項

$$\sqrt{2x-5}+\sqrt{x-3}=\sqrt{3x+4}.$$

兩邊自乘.

$$2x-5+x-3+2\sqrt{2x-5}\sqrt{x-3}=3x+4.$$

即 $$2\sqrt{2x-5}\sqrt{x-3}=12.$$

$$\sqrt{2x-5}\sqrt{x-3}=6.$$

再自乘 $$(2x-5)(x-3)=36.$$

解去括弧 $$2x^2-11x+15=36.$$

即 $$2x^2-11x-21=0.$$

$\therefore$ $$x=\frac{11\pm\sqrt{121+168}}{4}=\frac{11\pm17}{4}$$

$\therefore$ $$x=7 \quad 或 \quad x=-\frac{3}{2}.$$

驗算. (i) 如 $x=7$ 則左邊 $=\sqrt{2\times7-5}-\sqrt{3\times7+4}+\sqrt{7-3}$

$$=3-5+2=0.$$

故 $x=7$ 爲原方程式之根.

(ii) 如 $x=-\frac{3}{2}$ 則左邊 $=\sqrt{2\left(-\frac{3}{2}\right)-5}-\sqrt{3\left(-\frac{3}{2}\right)+4}$

$$+\sqrt{-\frac{3}{2}-3}$$

$$=2i\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i+\frac{3\sqrt{2}}{2}i$$

$$=3i\sqrt{2}$$

故 $x=-\frac{3}{2}$ 非原方程式之根.

[問 2.] 解下列方程式.

(一)　$\sqrt{x-2}+\sqrt{x+3}-\sqrt{6x-11}=0.$

(二)　$\sqrt{5x-1}-\sqrt{8-2x}=\sqrt{x-1}.$

(三)　$\sqrt{3x^2-4x+34}+\sqrt{3x^2-4x-11}=9$

(四)　$\sqrt{x+5}+\sqrt{3x+4}-\sqrt{12x+1}=0.$

(五)　$\sqrt{2x+9}+\sqrt{x-15}=\sqrt{7x+8}.$

(六)　$\sqrt{x+4}-\sqrt{x+20}=2\sqrt{x+11}.$

(七)　$\sqrt{2x-5}-\sqrt{3x+4}+\sqrt{x-3}=0.$

(八)　$\sqrt{a-x}+\sqrt{x-b}=\sqrt{a-b}.$

(九)　$\sqrt{a-bx}+\sqrt{c-bx}-\sqrt{a+c-(b+d)x}=0$

例 5.　$\sqrt{x+\sqrt{2x+4}}-1=\sqrt{x-1}.$

解.　移項

$$\sqrt{x+\sqrt{2x+4}}=\sqrt{x-1}+1.$$

平方　$x+\sqrt{2x+4}=x-1+1+2\sqrt{x-1}.$

卽　$\sqrt{2x+4}=2\sqrt{x-1}.$

再平方　$2x+4=4(x-1).$

得　$x=4.$

驗算.　以 $x=4$ 代入原方程式.

$$\text{左邊}=\sqrt{4+\sqrt{2\times4+4}}-1.$$

$$=\sqrt{4+2\sqrt{3}}-1=\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}-1.$$

$$=\sqrt{3}+1-1=\sqrt{3}.$$

$$\text{右邊}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}.$$

故 $x=4$ 爲原方程式之根.

[問 3.]　解下列方程式.

(一)　$\sqrt{3x+1-4\sqrt{x+1}}=2-\sqrt{3x-8}.$

(二) $\sqrt{3x-2\sqrt{3x-1}}=\sqrt{3x-1}-1$

(三) $\sqrt{2x+1+2\sqrt{4x-2}}-3=\sqrt{2x-8}$.

例 6. 解下列方程式.

$$\sqrt{a^2+bx}-\sqrt{b^2+ax}=a-b.$$

解. 先將兩邊平方.

$$a^2+bx+b^2+ax-2\sqrt{a^2+bx}\sqrt{b^2+ax}=a^2-2ab+b^2$$

約去同類項.

$$-2\sqrt{a^2+bx}\sqrt{b^2+ax}=-2ab-(a+b)x$$

再平方

$$4(a^2+bx)(b^2+ax)=4a^2b^2+4ab(a+b)x+(a+b)^2x^2$$

即 $4a^2b^2+4(a^3+b^3)x+4abx^2=4a^2b^2+4ab(a+b)x+(a+b)^2x^2$

即 $\{4(a+b)(a^2-ab+b^2)-4ab(a+b)\}x+\{4ab-(a+b)^2\}x^2=0$

$$4(a+b)(a-b)^2x-(a-b)^2x^2=0$$

假定 $a-b\neq 0$ 則

$$4(a+b)x-x^2=0$$

$\therefore$ $x=0$ 或 $x=4(a+b)$

驗算. (i) 如 $x=0$ 則 左邊 $=\sqrt{a^2}-\sqrt{b^2}$

如 a, b 俱爲正數則此式成爲 $a-b$ 能滿足原方程式，否則不滿足.

(ii) 如 $x=4(a+b)$ 則

$$\text{左邊}=\sqrt{a^2+4b(a+b)}-\sqrt{b^2+4a(a+b)}$$

$$=\sqrt{(a+2b)^2}-\sqrt{(b+2a)^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

$a+2b$, $b+2a$ 共爲負數時

$$(A)=-(a+2b)+(b+2a)=a-b.$$

可以適合，否則不適合.

注意. $\sqrt{}$ 常表平方根正負二者中之正者. 故如 $a>0$ 則

$\sqrt{a^2}=a$　如 $a<0$ 則 $\sqrt{a^2}=-a$.

［問 4.］　於例 6 驗算. (i) $x=0$ 試表示 $a>0$, $b<0$; $a<0$, $b>0$, $a<0$, $b<0$ 時不能適合.

［問 5.］　同上 (ii) $x=4(a+b)$ 試表示 $a+2b>0, b+2a>0$; $a+2b>0$, $b+2a<0$; $a+2b<0$, $b+2a>0$ 時, 不能適合.

［問 6.］　解下列方程式.

(一)　$\sqrt{a^2-x^2}+\sqrt{b^2+x^2}=a+b$

(二)　$\sqrt{ax+b^2}+\sqrt{bx+a^2}=a-b$

(三)　$\sqrt{3ax-x^2}-\sqrt{x^2-3bx}=\sqrt{3}\sqrt{(a-b)x}$.

*例 7.　試解方程式　$\sqrt[3]{a-x}+\sqrt[3]{b-x}=\sqrt[3]{a+b-2x}$.

解.　兩邊立方.

$$a-x+b-x+3\sqrt[3]{a-x}\sqrt[3]{b-x}(\sqrt[3]{a-x}+\sqrt[3]{b-x})=a+b-2x.$$

如以 $\sqrt[3]{a+b-2x}$ 代 $\sqrt[3]{a-x}+\sqrt[3]{b-x}$.

則　$3\sqrt[3]{a-x}\sqrt[3]{b-x}\sqrt[3]{a+b-2x}=0$.

由此得　$x=a$ 或 b 或 $\frac{a+b}{2}$

而此三根皆能滿足本方程式故爲原方程式之根.

［問 7.］　解下列方程式.

(一)　$\sqrt[3]{a-x}+\sqrt[3]{x-b}=\sqrt[3]{a-b}$

(二)　$\sqrt[4]{a-x}+\sqrt[4]{b-x}=\sqrt[4]{a+b-2x}$

(三)　$\sqrt[4]{a-x}+\sqrt[4]{x-b}=\sqrt[4]{a-b}$.

例 8.　解下列方程式.

$$x^2+3x+3\sqrt{x^2+3x-2}=6\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

解.　本方程式可變形如下:

$$x^2+3x-2+3\sqrt{x^2+3x-2}=4.$$

如以　$\sqrt{x^2+3x-2}=X$ 時.

則 $x^2+3x-2=X^2$.

故上方程式爲

$$X^2+3X-4=0.$$

$\therefore$ $(X+4)(X-1)=0.$

如 $X+4=0$ 則 $X=-4$.

如 $X-1=0$ 則 $X=1$.

因 X 表 $\sqrt{x^2+3x-2}$, 故爲正值,故不能取 -4.

$\therefore$ $X=1.$

即 $\sqrt{x^2+3x-2}=1$……………………(2)

平方 $x^2+3x-2=1.$

$\therefore$ $x^2+3x-3=0.$

$\therefore$ $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{21}}{2}$……………………($A$)

此根適於原方程式,故爲所求之根.

注意. 於本例在解 $\sqrt{x^2+3x-2}=1$ 之際,由兩邊平方而得根(A). 凡能使(2)滿足之根雖必能使(1)滿足,但因將平方所得之根(A)不能無疑其不爲無緣根. 然(A)即不經驗算,亦可知其必爲(2)之根. 其理由爲因得 $\sqrt{x^2+3x-2}=1$ 平方所能導入之無緣根必能使 $\sqrt{x^2+3x-2}=-1$ 即 $\sqrt{x^2+3x-2}+1=0$ 滿足,然雖以(A)代入於 $\sqrt{x^2+3x-2}$ 亦不能使得負值,故決不等於 -1. 故(A)不能使 $\sqrt{x^2+3x-2}+1=0$ 滿足. 故(A)爲(2)之根. 由是觀之.

方程式之兩邊各爲正值時,雖平方亦不導入無緣根.

[問 8.] 試解下列方程式.

(一) $6\sqrt{x^2-2x+6}=21+2x-x^2.$

(二) $x^2+\sqrt{x^2-7x+18}=24+7x.$

(三) $x^2-5x+\sqrt{x^2-5x+11}=19.$

(四) $\sqrt{x^2-5x+1}-4=\dfrac{5}{\sqrt{x^2-5x+1}}$.

例 9. 解下列方程式.

$$\frac{x+\sqrt{12a-x}}{x-\sqrt{12a-x}}=\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}.$$

解. 依比例之性質.

如 $$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}.$$

則 $$\frac{A+B}{A-B}=\frac{C+D}{C-D}.$$

如適用此性質於此方程式，則得

$$\frac{2x}{2\sqrt{12a-x}}=\frac{2\sqrt{a}}{2}.$$

以 2 約之，除去分母，則得

$$x=\sqrt{a}\sqrt{12-x}.$$

平方 $$x^2=12a^2-ax.$$

$\therefore$ $$x^2+ax-12a^2=0.$$

$\therefore$ $$x=3a \quad 或 \quad x=-4a.$$

將此二根代入於原方程式而行驗算，則知 $x=3a$ 雖能滿足，而 $-4a$ 不能滿足. 故所求之根爲 $3a$.

［問 9.］ 解下列方程式.

(一) $$\frac{x-\sqrt{3}+\sqrt{x^2-3}}{x-\sqrt{3}-\sqrt{x^2-3}}=\frac{3x+\sqrt{3}}{x-5\sqrt{3}}.$$

(二) $$\frac{\sqrt{x+2a}-\sqrt{x-2a}}{\sqrt{x+2a}+\sqrt{x-2a}}=\frac{x}{2a}.$$

(三) $$\frac{\sqrt{a^2-x^2}-\sqrt{b^2+x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}+\sqrt{b^2+x^2}}=\frac{c}{d}.$$

30. 應用問題

例 1.　某數與其平方根之和等於 90，試求此數.

解.　命所求之數爲 x，則其平方根爲 $\sqrt{x}$，故得方程式如下：

$$x+\sqrt{x}=90.$$

移項　$$\sqrt{x}=90-x.$$

平方　$$x=8100-180x+x^2.$$

卽　$$x^2-181x+8100=0.$$

$$(x-81)(x-100)=0.$$

$\therefore$　$$x=81 \quad \text{或} \quad x=100.$$

如　$x=81$　則　$81+\sqrt{81}=81+9=90$. 適合題意，如　$x=100$　則　$100+\sqrt{100}=110$　不適合題意，故 81 爲所求之答數.

〔問 10.〕　某數與其平方根之二倍之和，等於 143，試求此數.

〔問 11.〕　某數與其平方根之和，等於此數之五倍加 20 之平方根之二倍. 試求此數.

例 2.　三角形三邊之長各爲 2 尺，3 尺，4 尺時，問 4 尺之邊所對之高爲若干尺.

解.　命所求之高爲 x 尺時，應用畢達哥拉斯之定理得方程式如下：

$$\sqrt{2^2-x^2}+\sqrt{3^2-x^2}=4.$$

$$\sqrt{4-x^2}+\sqrt{9-x^2}=4.$$

移項而平方之

$$4-x^2=16-8\sqrt{9-x^2}+9-x^2.$$

再移項　$$8\sqrt{9-x^2}=21$$

平方　$$64(9-x^2)=441$$

由此得　$$x^2=\frac{135}{64}.$$

$$\therefore \qquad x=\pm\frac{\sqrt{135}}{8}.$$

負根不適於題意甚明. $x=\frac{\sqrt{135}}{8}$能使原方程式滿足,故爲所求之根,故知高爲$\frac{\sqrt{135}}{8}$尺.

［問 12.］　三角形三邊之長各爲 13 尺, 14 尺, 15 尺時,問 14 尺之邊所對之高爲若干尺.

練習問題 V.

解下列無理方程式.

1. $\sqrt{2x-1}=2\sqrt{x}-3.$

2. $\sqrt{5x+4}-1=2(\sqrt{3x+1}-1).$

3. $\sqrt{2x+8}-2\sqrt{x+5}=2.$

4. $\sqrt{4x+24}+\sqrt{4x+9}=15.$

5. $3\sqrt{x+4}-2\sqrt{2x-1}=3.$

6. $\sqrt{x}+\sqrt{(x+\sqrt{1-x})}=1.$

7. $\sqrt{x^2+7x+6}-\sqrt{x^2+5x-8}=2.$

8. $\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}=\sqrt{c}.$

9. $\sqrt{x}+\sqrt{4a+x}=2\sqrt{b+x}.$

10. $\sqrt{x(a+b-x)}+\sqrt{a(b+x-a)}+\sqrt{b(a+x-b)}=0.$

11. $\sqrt{(a+x)(x+b)}+\sqrt{(a-x)(x-b)}=2\sqrt{ax}.$

12. $x^2+3-\sqrt{(2x^2-3x+2)}=\frac{3}{2}(x+1).$

13. $(x-3)^2+3x-22=\sqrt{(x^2-3x+7)}.$

14. $\sqrt{1+x}-\frac{1}{\sqrt{1+x}}=\sqrt{2+x}.$

15. $$\frac{1}{x+\sqrt{2-x^2}}+\frac{1}{x-\sqrt{2-x^2}}=x.$$

16. 直線 AB 之外. 有 C, D 二點,自 C, D 引至 AB 之垂線之長各爲 9 尺, 10 尺, 其足間之距離 AB 爲 30 尺, 試於直線 AB 上求一點 E,使 CE, DE 之長之和等於 36 尺時間自 P 至 A, B 之距離如何?

第六章

高次方程式

31. 一般高次方程式之解法,當於高等代數學論之,在初等代數學範圍之外.本書所學之高次方程式,係就特殊之形而言,以結局可歸二次方程式之解法者爲限.

32. 重二次方程式.

由未知數之四次項與二次項及絕對項所成之方程式,稱爲**重二次方程式.**

例 1. 試解 $x^4-10x^2+9=0$

解. 如命 $x^2=y$ 則原方程式爲

$$y^2-10y+9=0$$

就 y 解之,得 $y=1$ 或 $y=9.$

如 $y=1$ 則 $x^2=1$ $\therefore$ $x=\pm1$

如 $y=9$ 則 $x^2=9$ $\therefore$ $x=\pm3.$

$\therefore$ $x=+1,\ -1,\ +3,\ -3$ 皆爲所求之根.

驗算. 學者請自別之.

例 2. 試解 $100x^4-9x^2-4=0.$

解. 如命 $x^2=y$ 則原方程式爲

$$100y^2-9y-4=0.$$

解之得 $y=\frac{1}{4}$ 或 $y=-\frac{4}{25}$

如 $y=\frac{1}{4}$ 則 $x^2=\frac{1}{4}$ $\therefore$ $x=\pm\frac{1}{2}$

如 $y=-\frac{4}{25}$ 則 $x^2=-\frac{4}{25}$ $\therefore$ $x=\pm\frac{2}{5}i$

$\therefore\quad \pm\frac{1}{2},\quad \pm\frac{2}{5}i$ 皆爲所求之根.

例 3. 解次之方程式且討論之.

$$ax^4+bx^2+c=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

解. 命 $x^2=y$ 則原方程式爲

$$ay^2+by+c=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\therefore\quad y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\therefore\quad x^2=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

故 $$x=\pm\sqrt{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

討論 (I) $b^2-4ac<o$

此時 y 爲虛數故(3)爲虛數. 故(1)之根皆爲虛數.

(II) $b^2-4ac=o$

此時(2)有等根,故(1)有各相等之二根. 卽

$$\sqrt{\frac{-b}{2a}}\quad 及 \quad -\sqrt{\frac{-b}{2a}}$$

因 $\frac{b}{a}$ 之值不同,而有三種區別.

(i) $\frac{b}{a}<0$ 時 $\sqrt{\frac{-b}{2a}}$ 爲實數,故(1)之四根爲實數. 二正二負其絕對値相等.

(ii) $\frac{b}{a}=0$ 時, 四根皆爲 0.

(iii) $\frac{b}{a}>0$ 時, $\sqrt{\frac{-b}{2a}}$ 爲虛數,四根爲 $i\sqrt{\frac{b}{2a}}$ 及 $-i\sqrt{\frac{b}{2a}}$.

(III) $b^2-4ac>o$

此時(2)之根爲相異之實數. 由(2)根之正負而(1)之根卽(3)之

根,或爲實數或爲虛數. 亦可別爲三.

(i) $-\frac{b}{a}>0$, $\frac{c}{a}>0$ 時,(2)之兩根各爲正數,〔何則?$-\frac{b}{a}$爲二根之和,$\frac{c}{a}$爲二根之積,二根之和與積各爲正數時,則二根亦爲正數〕故(1)之四根皆爲實數.

(ii) $-\frac{b}{a}<0$, $\frac{c}{a}>0$ 時,(2)之兩根各爲負數,故(1)之四根皆爲虛數.

(iii) $\frac{c}{a}<0$, 時 (2)之兩根一正一負,故(1)之根中二根爲實數二根爲虛數.

以上結果總括如下:

$$b^2-4ac<0 \qquad \text{四根皆虛數.}$$

$$b^2-4ac=0\begin{cases}-\frac{b}{a}>0 & \text{四根皆實數,每二根相等.}\\ -\frac{b}{a}<0 & \text{四根皆虛數.}\end{cases}$$

$$b^2-4ac>0\begin{cases}\frac{c}{a}>0 & \begin{cases}-\frac{b}{a}>0 & \text{四根皆實數.}\\ -\frac{b}{a}<0 & \text{四根皆虛數.}\end{cases}\\ \frac{c}{a}<0 & \begin{cases}\text{二根實數.}\\ \text{二根虛數.}\end{cases}\end{cases}$$

[問 1.] 試解下列方程式.

(一) $x^4-13x^2+36=0$ (二) $x^4-29x^2+100=0$

(三) $x^4-181x^2+8100=0$ (四) $49x^4-1765x^2+36=0$

[問 2.] 求 $x^4-3x^2+1=0$ 之根, 試改爲便於運算之式,計算至小數第二位.

[問 3.]　試解　$a^2x^4-(a^4+1)x^2+a^2=0.$

33. 與前節相同，無論 y 爲何式，如方程式爲

$$ay^2+by+c=0$$

之形時，先解此式求 y，而後可解所設之方程式.

例 1.　試解　$(x^2+x)^2-22(x^2+x)+40=0.$

解.　命　$x^2+x=y$　則原方程式爲

$$y^2-22y+40=0.$$

解之得　$y=2$　或　$y=20.$

故原方程式與下列方程式同值.

$$\begin{cases} x^2+x=2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ x^2+x=20 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$$

由(1)得　$x=1$　或　$x=-2.$

由(2)得　$x=4$　或　$x=-5.$

故所求之根爲　$1,\ -2,\ 4,\ -5.$

例 2.　試解　$(x^2+7x+5)^2=3x^2+21x+19.$

解.　原方程式得變形如下：

$$(x^2+7x+5)^2=3(x^2+7x+5)+4.$$

命　$y=x^2+7x+5$　則得

$$y^2=3y+4.$$

$\therefore$　$y^2-3y-4=0.$

由此得　$y=4$　或　$y=-1.$

故　$x^2+7x+5=-1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$

或　$x^2+7x+5=4 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$

由(1)　$x^2+7x+6=0.$

$\therefore$　$x=-1$　或　$x=-6.$

由(2)　$x^2+7x+1=0.$

$$\therefore \qquad x=\frac{-7\pm\sqrt{45}}{2}.$$

$\therefore \qquad x=-1,\ -6,\ \dfrac{-7\pm\sqrt{45}}{2}$, 皆爲所求之根.

[問 4.] 解下列方程式.

(一) $(x^2-x)^2-8(x^2-x)+12=0.$

(二) $(x^2+5)^2-x^2-25=0.$

(三) $(x^2+x)^2+4(x^2+x)-12=0.$

例 3. 試解下列方程式.

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)-120=0.$$

解. 原方程式得變形如下:

$$(x-1)(x-4)(x-2)(x-3)-120=0.$$

$$(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)-120=0.$$

命 $\qquad x^2-5x=X \qquad$ 則得

$$(X+4)(X+6)-120=0.$$

$$X^2+10X-96=0.$$

$\therefore \qquad X=-5\pm\sqrt{25+96}=-5\pm 11.$

$\therefore \qquad X=6$ 或 $X=-16$

$\therefore \qquad x^2-5x=6 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

$\qquad\qquad x^2-5x=-16 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

由(1) $\qquad x=6$ 或 $x=-1$

由(2) $\qquad x=\dfrac{5\pm i\sqrt{39}}{2}$

$\therefore \qquad 6,\ -1,\ \dfrac{5\pm i\sqrt{39}}{2}$ 皆爲所求之根.

[問 5.] 試解下列方程式.

(一) $(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)=144.$

(二) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=24.$

例 4. 試解下列方程式.

$$\frac{x}{x^2+1}+\frac{x^2+1}{x}=\frac{5}{2}.$$

解. 命 $\frac{x}{x^2+1}=X$ 則原方程式爲

$$X+\frac{1}{X}=\frac{5}{2}.$$

$\therefore$ $2X^2-5X+2=0.$

$\therefore$ $X=2$ 或 $X=\frac{1}{2}.$

$\therefore$ $$\frac{x}{x^2+1}=2 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

或 $$\frac{x}{x^2+1}=\frac{1}{2} \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由(1) $2x^2-x+2=0.$

故 $x=\frac{1\pm i\sqrt{15}}{4}.$

由(2) $x^2-2x+1=0.$

故 $x=1,\quad 1.$

此等皆不使原方程式之分母爲 0,故爲所求之根.

[問 6.] 解下列方程式.

(一) $$\frac{x^2}{x+1}+\frac{x+1}{x^2}=2.$$

(二) $$\frac{x^2+2}{x^2+4x+1}+\frac{x^2+4x+1}{x^2+2}=\frac{5}{2}.$$

34. 逆數方程式

例如 $$ax^3+bx^2+bx+a=0.$$

$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0.$$

$$ax^5+bx^4+cx^3-cx^2-bx-a=0.$$

集整方程式之各項於一邊,從未知數之次數順序

而排列時，由兩端計算同一位次之項其係數或相等或其絕對值相等時，稱為**逆數方程式**.

例 1. 解下列方程式.

$$ax^3+bx^2+bx+a=0.$$

解. 原方程式順次可改書如下：

$$a(x^3+1)+bx(x+1)=0.$$

或 $$(x+1)\{a(x^2-x-1)+bx\}=0.$$

∴ 如 $x+1=0$ 則 $x=-1$.

如 $a(x^2-x+1)+bx=0$.

則 $ax^2-(a-b)x+a=0.$

$$x=\frac{a-b\pm\sqrt{(a-b)^2-4a^2}}{2a}$$

$$=\frac{a-b\pm\sqrt{b^2-2ab-3a^2}}{2a}.$$

故 -1, $\dfrac{a-b\pm\sqrt{b^2-2ab-3a^2}}{2a}$ 為所求之根.

注意. 如以 $a-b-\sqrt{b^2-2ab-3a^2}$ 乘 $\dfrac{a-b+\sqrt{b^2-2ab-3a^2}}{2a}$ 之分母子則得

$$\frac{(a-b)^2-(b^2-2ab-3a^2)}{2a(a-b-\sqrt{b^2-2ab-3a^2})}=\frac{2a}{a-b-\sqrt{b^2-2ab-3a^2}}$$

即為 $\dfrac{a-b-\sqrt{b^2-2ab-3a^2}}{2a}$ 之逆數. 即例 1 之一根為他一根之逆數，故有逆數方程式之名；本節之方程式皆然.

[問 7.] 解下列方程式，

(一) $3x^2-7x^2-7x+3=0.$

(二) $10x^3-39x^2+39x-10=0.$

例 2. 解下列方程式.

$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0.$$

解. $x\neq0$ 故以 x^2 除方程式之兩邊則得

$$ax^2+bx+c+b\left(\frac{1}{x}\right)+a\left(\frac{1}{x^2}\right)=0.$$

或 $$a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0.$$

命 $x+\dfrac{1}{x}=X$ 則 此方程式爲

$$a(X^2-2)+bX+c=0$$

即 $$aX^2+bX+c-2a=0.$$

解此方程式所得之二根如命爲 X' X'' 時，則所求之根.

$$\begin{cases} x+\dfrac{1}{x}=X'. \\ x+\dfrac{1}{x}=X''. \end{cases}$$

即解 $\begin{cases} x^2-X'x+1=0 \\ x^2-X''x+1=0 \end{cases}$ 便可.

例 3. 解下列方程式.

$$6x^4+5x^3-38x^2+5x+6=0.$$

解. $x\neq0$ 甚明. 故以 x^2 除兩邊, 則得

$$6x^2+5x-38+5\left(\frac{1}{x}\right)+6\left(\frac{1}{x^2}\right)=0.$$

即 $$6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-38=0.$$

命 $x+\dfrac{1}{x}=X$ 則此方程式爲

$$6(X^2-2)+5X-38=0.$$

即 $$6X^2+5X-50=0.$$

$$X=\frac{-5\pm\sqrt{25+1200}}{12}=\frac{-5\pm35}{12}.$$

$$\therefore \qquad X=\frac{5}{2} \quad 或 \quad X=-\frac{10}{3}.$$

$$\therefore \qquad x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$或 \qquad x+\frac{1}{x}=-\frac{10}{3} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

由(1)
$$2x^2-5x+2=0.$$
$$(2x-1)(x-2)=0.$$

$$\therefore \qquad x=\frac{1}{2} \quad 或 \quad x=2.$$

由(2)
$$3x^2+10x+3=0.$$
$$(3x+1)(x+3)=0.$$

$$\therefore \qquad x=-\frac{1}{3} \quad 或 \quad x=-3.$$

故　$2,\ \frac{1}{2},\ -3,\ -\frac{1}{3}$　爲所求之根.

注意.　觀此例之根每二個各爲逆數.

[問 8.]　解下列方程式.

(一)　$6x^4-35x^3+62x^2-35x+6=0.$

(二)　$2x^4-5x^3+x^2-5x+2=0.$

(三)　$2x^4-9x^3+14x^2-9x+2=0.$

例 4.　解.　$5x^5-31x^4+26x^3+26x^2-31x+5=0.$

解.　此方程式得變形如下:

$$5(x^5+1)-31x(x^3+1)+26x^2(x+1)=0.$$

然
$$x^5+1=(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1).$$
$$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1).$$

故上列方程式可改如下:

$$(x+1)\{5(x^4-x^3+x^2-x+1)-31x(x^2-x+1)+26x^2\}=0.$$

即 $x+1=0$ ……………………………………(1)

或 $5x^4-36x^3+62x^2-36x+5=0$ …………(2)

由(1) $x=-1$

(2)為四次逆數方程式，準前例解之得 1，1，5，$\frac{1}{5}$.

故所求之根為 1，1，-1，5，$\frac{1}{5}$.

[問 5.] 解下列方程式.

(一) $2x^5-7x^4+5x^3+5x^2-7x+2=0.$

(二) $3x^5-7x^4-10x^3+10x^2+7x-3=0.$

35. 二項方程式

由一未知數之項與絕對項而成之方程式，稱為二項方程式.

例如 $x^3=1.$

$x^4-16=0.$

$64x^6-729=0.$

等皆為二項方程式.

例 1. 解 $x^3=1.$

解. 移 1 於左邊分解為因數時，

$$(x-1)(x^2+x+1)=0.$$

$\therefore$ $x-1=0$ …………………(1)

或 $x^2+x+1=0$ …………………(2)

由(1) $x=1.$

由(2) $x=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}.$

故所求之根為 1，$\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$.

注意. 解 $x^3=1$ 之方程式者求立方而得 1 之數也，卽求 1 之立方根也. 然如上例所得其根有三，一爲實數二爲虛數. 此二虛數稱爲立方虛根. 如以希臘字 ω，ω' 各表此二立方虛根 $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$，$\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ 時，則有種種之關係如下：

(i) $$1+\omega+\omega'=1+\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}+\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}=0.$$

(ii) $$\omega^2=\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1-2i\sqrt{3}-3}{4}=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}=\omega'.$$

依同理 $$\omega'^2=\omega.$$

(iii) $$\omega\omega'=\omega\omega^2=\omega^3=1.$$

故 $$\omega=\frac{1}{\omega'},\quad \omega'=\frac{1}{\omega}.$$

例 2. 解 $x^3=27$.

解. 先以 27 除兩邊，則得

$$\frac{x^3}{27}=1.$$

卽 $$\left(\frac{x}{3}\right)^3=1.$$

如視 $\frac{x}{3}$ 爲未知數則由例 1，知

$$\frac{x}{3}=1,\ \omega,\ \omega'.$$

$\therefore$ $x=3,\quad 3\omega,\quad 3\omega'$ 爲所求之根.

此解法不限於左邊爲 27 時，不論何數俱可.

例如於 $ax^3=b.$

之二項方程式，如以 a 除此兩邊，則得

$$x^3=\frac{b}{a}.$$

然不論 $\frac{b}{a}$ 爲正負實數之立方根，必有一個，如以 $\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ 表之，則上方程式變形如下：

$$\left(\frac{x}{\sqrt[3]{\frac{b}{a}}}\right)^3=1.$$

如於此方程式視 $\frac{x}{\sqrt[3]{\frac{b}{a}}}$ 爲未知數時，則得

$$\frac{x}{\sqrt[3]{\frac{b}{a}}}=1,\qquad \omega,\qquad \omega^2.$$

故 $\quad x=\sqrt[3]{\frac{b}{a}},\qquad \omega\sqrt[3]{\frac{b}{a}},\qquad \omega^2\sqrt[3]{\frac{b}{a}}.$

故得法則如下：

【法則】 欲解 $ax^3=b$ 之方程式(第一)先使變爲 $x^3=\frac{b}{a}$ 之形(第二)求 $\frac{b}{a}$ 之算術的立方根(實數之之方根) $\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ (第三)以 1 之立方根 1, ω, ω^2 乘之.

例 3. 解 $5x^3=-7$.

解 以 5 除兩邊，得

$$x^3=-\frac{7}{5}.$$

$-\frac{7}{5}$ 之算術的立方根爲 $-\sqrt[3]{\frac{7}{5}}$ 故所求之根，爲

$$-\sqrt[3]{\frac{7}{5}},\quad -\omega\sqrt[3]{\frac{7}{5}},\quad -\omega^2\sqrt[3]{\frac{7}{5}}.$$

[問 10.] 解下列方程式.

(一)　$x^3+1=0.$　　(二)　$x^3-8=0.$

(三)　$x^3+64=0.$　　(四)　$8x^3=125.$

(五)　$1000x^3+343=0.$

[問 11.]　試證 1 之六乘根爲 $\left\{\begin{matrix} 1, & \omega, & \omega^2 \\ -1, & -\omega, & -\omega^2 \end{matrix}\right.$ 次證此六根之中任其一例如 ω, 可示 $\omega^6=1$.

[問 12.]　於 $x^{12}=1$ 之方程式,命 $x^2=y$, 先求 y 之根因而求 1 之十二冪根.

例 4.　解 $x^4-1=0$.

解.　將左邊分解爲因數,則得

$$(x-1)(x+1)(x^2+1)=0.$$

$\therefore$ $$x-1=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$x+1=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$x^2+1=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

由(1)　$x=1$

由(2)　$x=-1$

由(3)　$x=\pm i$

故　± 1, $\pm i$ 爲所求之根.

注意. 由本例知 1 之四乘根有四.

例 5.　解 $x^4+1=0$

解.　欲使此方程式,左邊成爲完全之平方式時,須加 $2x^2$ 於兩邊,則得

$$x^4+2x^2+1=2x^2,$$

即 $$(x^2+1)^2=2x^2,$$

$\therefore$ $$x^2+1=\pm\sqrt{2}\,x.$$

$\therefore$ $$x^2+1=\sqrt{2}\,x \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$x^2+1=-\sqrt{2}\,x \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

由(1)　$$x^2-\sqrt{2}\,x+1=0.$$

$\therefore$ $$x=\frac{\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}}{2}$$

由(2) $$x^2+\sqrt{2}x+1=0.$$

$\therefore$ $$x=\frac{-\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}}{2},$$

故所求之根 $$x=\frac{\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}}{2},\quad \frac{-\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}}{2}.$$

[問 13.]　欲解 $x^4-16=0$ 先將 16 除兩邊，使變爲 $\left(\frac{x}{2}\right)^4-1=0$ 之形求 $\frac{x}{2}$ 而解之.

[問 14.]　欲解 $x^4+81=0$ 先將 81 除兩邊,使變爲 $\left(\frac{x}{3}\right)^4+1=0$ 之形求 $\frac{x}{3}$ 而解之.

[問 15.]　試做例 3 之法則解四次之二項方程式，並述其法則

[問 16.]　解下列方程式.

(一)　$x^4-625=0.$

(二)　$x^4+10000=0.$

例 6.　解　$x^5=1.$

解.　將原方程式移項，則得

$$x^5-1=0.$$

分解左邊爲因數

$$(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=0.$$

$\therefore$ $$x-1=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

或 $$x^4+x^3+x^2+x+1=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由(1) $$x=1.$$

因(2)爲逆方程式，順次變形如下：

$$x^2+x+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0.$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}\right)-1=0.$$

命 $x+\frac{1}{x}=X$, 則此方程式,為

$$X^2+X-1=0$$

$\therefore$ $$X=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

$\therefore$ $$x+\frac{1}{x}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

或 $$x+\frac{1}{x}=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

由(3) $$2x^2-(\sqrt{5}-1)x+2=0.$$

$\therefore$ $$x=\frac{1}{4}\left(\sqrt{5}-1\pm i\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)$$

由(4) $$2x^2+(\sqrt{5}+1)x+2=0.$$

$\therefore$ $$x=\frac{1}{4}\left(-\sqrt{5}-1\pm i\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)$$

此四根與最初所得之 1 合為五根.

注意. 由本例知 1 之五乘根有五,其一為實數,其他為虛數.

[問 17.] 欲解 $x^5=32$ 先以 32 除兩邊使變為 $\left(\frac{x}{2}\right)^5=1$ 之形,次求 $\frac{x}{2}$ 之根而解此方程式.並示 32 之五乘根為算術的五乘根 2 與 1 之五乘根之乘積相等.

[問 18.] 解下列方程式:

(一) $x^5+1=0$. (二) $x^5+243=0$.

(三) $x^{10}-1=0$.

就上數例所示二項方程式 $x^m=A$ 之解法總括如下:

【法則】 (第一)於 $x^m=A$ 先求 A 之算術的乘根

$\sqrt[m]{A}$,(第二)使原方程式變形為 $\left(\dfrac{x}{\sqrt[m]{A}}\right)^m=1$,(第三)解 $\left(\dfrac{x}{\sqrt[m]{A}}\right)^m=X^m=1$ 而求 1 之 m 乘根,(第四)各乘 $\sqrt[m]{A}$.

[問 19.] 解下列方程式:

(一)	$x^3=512.$	(二)	$10x^3+81=0.$
(三)	$x^4-390625=0.$	(四)	$7x^4-13=0.$
(五)	$9x^4+25=0.$	(六)	$x^5+1024=0.$

36. 三項方程式.

下形之方程式,稱為三項方程式.

$$ax^{2m}+bx^m+c=0.$$

於此方程式, 如命 $x^m=X$, 則得

$$aX^2+bX+c=0.$$

解此二次方程式,所得之值,命為 X_1, X_2 時,則所求之根,可由下列二項方程式得之.

$$x^m=X_1,$$
$$x^m=X_2.$$

例. 解 $x^6-9x^3+8=0.$

解. 命 $x^3=X$, 則原方程式,為

$$X^2-9X+8=0.$$

解之得 $X=1$ 或 $X=8.$

$\therefore$ $x^3=1$ ……………………(1)

$x^3=8$ ……………………(2)

由(1) $x=1,\ \omega, \omega^2.$

由(2) $x=2,\ 2\omega,\ 2\omega^2.$

[問 20.] 解下列方程式.

(一) $8x^6-217x^3+27=0.$ (二) $x^8-17x^4+16=0.$

(三) $x^{10}-33x^5+32=0.$

*37. 視察法

視察法者，由視察而求一根或數根以解方程式之法也。

例 1. 解 $x(x-1)(x-3)=12.$

解. 由觀察如 $x=4$ 則

$$4\times3\times1=12.$$

適合本題，故知 $x=4$ 爲原方程式之根，故將左邊實行乘法而整頓時，得

$$x^3-4x^2+3x+12=0$$

然此方程式之左邊如 $x=4$ 則化爲 0 者，有 $x-4$ 之因數之謂也．故以 $x-4$ 除左邊而省去 $x-4$ 之因數時，得式如下：

$$x^2+3=0.$$

解之得 $x=\pm i\sqrt{3}.$

故所求之根爲 $4,\ \ i\sqrt{3},\ \ -i\sqrt{3}.$

例 2. 解 $(x-a)(x-b)(x-c)+abc=0$

解. 由觀察 $x=0$ 則此方程式可以滿足．次因欲求他根，將括弧脫去而整頓之，得

$$x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x=0.$$

$\therefore$ $x=0.$

或 $x^2-(a+b+c)x+(ab+bc+ca)=0.$

由第二方程式．

$$x=\frac{1}{2}\left\{a+b+c\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2-2(ab+bc+ca)}\right\}.$$

[問 21.] 解下列方程式．

(一) $x^3+mx+m+1=0.$

(二)　$2x^3+3x^2-8x+3=0.$

(三)　$(x-1)(x-2)(x-3)=2\cdot3\cdot4.$

(四)　$(x-2)(x-5)(x-7)=8\cdot5\cdot3.$

(五)　$(x+a)(x+b)(x-a-b)+2ab(a+b)=0.$

[問 22.]　解 $x^5-10x^2+15x-6=0$. 但此方程式有三等根.

例 3.　解　$(a-x)^3+(b-x)^3=(a+b-2x)^3.$

解.　由觀察 $x=a$, $x=b$ 皆適合於原方程式故為根，故將原方程式之項集於左邊分解為因數而整頓時，則得

$$(a-x)(b-x)(a+b-2x)=0$$

故其他之根，由

$$a+b-2x=0$$

$$\therefore\quad x=\frac{a+b}{2}$$

故所求之根，為 a, b, $\frac{a+b}{2}$.

別解.　原方程式可變形如

$$(a-x)^3+(b-x)^3=\{(a-x)+(b-x)\}^3$$

展開右邊，則得

$$(a-x)^3+(b-x)^3=(a-x)^3+(b-x)^3$$
$$+3(a-x)(b-x)\{(a-x)+(b-x)\}$$

$$\therefore\quad (a-x)(b-x)(a-x+b-x)=0$$

$$\therefore\quad a-x=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

或　$$b-x=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

或　$$a+b-2x=0\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

由(1) 得　$x=a.$

由(2) 得　$x=b.$

由(3) 得　$x=\frac{a+b}{2}.$

[問 23.] 解下列方程式.

(一) $(x-3)^3+(x-2)^3=(2x-5)^3$.

(二) $(a-x)^4+(b-x)^4=(a+b-2x)^4$.

(三) $(a-x)^5+(b-x)^5=(a+b-2x)^5$.

[問 24.] 注意三次方程式僅有三根，且不能多於三根，試由觀察解下列方程式.

$$(x-a)^3(b-c)^3+(x-b)^3(c-a)^3+(x-c)^3(a-b)^3=0$$

練習問題 VI.

解下列方程式.

1. $3x^4-19x^2+28=0$.
2. $180x^4+41x^2+1=0$.
3. $64x^4+55x^2-9=0$.
4. $x^2+\dfrac{a^2b^2}{x^2}-(a^2+b^2)=0$.
5. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=5\cdot6\cdot7\cdot8$.
6. $(x+a)(x+3a)(x+5a)(x+7a)=384a^4$.
7. $14x^3+39x^2-39x-14=0$.
8. $8x^3-57x^2-57x+8=0$.
9. $6x^4+5x^3-38x^2+5x+6=0$.
10. $3x^4+16x^3+26x^2+16x+3=0$.
11. $216x^3=5$.
12. $10x^3+13=0$.
13. $x^5=59049$.
14. $(a-x)^5+(x-b)^5=(a-b)^5$.

第 七 章

聯 立 方 程 式

(一) 二元聯立二次方程式.

38. 就未知數言,含有二次式之二元聯立方程式,稱為聯立二次方程式.

例如
$$\begin{cases} x+y=3, \\ xy=2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=2, \\ x^2+y^2=10. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2-3xy+5x-12=0, \\ x^2-2xy-x+2=0. \end{cases}$$

等皆為二元聯立之二次方程式.

此等方程式之中,在初等代數學之範圍內能解之例順次示之如下:

39. 由一個一次方程式與一個二次方程式,所成聯立方程式之解法

就未知數 x, y, 言,其一為一次,其他為二次之二元聯立式方程式,一般之形如次.

$$lx+my+n=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

先自一次方程式即 (1) 將任意一未知數譬如 x 視作既知數同一處置而表 y 時.

$$y=-\frac{lx+n}{m}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

將(3)代入於(2)，則

$$ax^2+2bx\left(-\frac{lx+n}{m}\right)+c\left(-\frac{lx+n}{m}\right)^2+2dx+2e\left(-\frac{lx+n}{m}\right)+f=0.$$

欲使此方程式之左邊成爲整式乘 m^2 而整頓之時，

$$(am^2-2blm+cl^2)x^2+2(dm^2-bmn-elm+cln)x$$
$$+bn^2-2fmn+cm^2=0.$$

解此方程式得 x 之根二個，如命爲 x_1, x_2 時，將 x_1, x_2 代入於(3)可得對應之 y 之根，如命爲 y_1, y_2 時，則所求之根如下；

$$\begin{cases} x=x_1 \\ y=y_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=x_2 \\ y=y_2 \end{cases}$$

例 1.　解下列聯立方程式.

$$\begin{cases} 3x-y-1=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ x^2-3xy-y^2+5x-2y+8=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$$

解.　由(1)視 x 爲既知數而處理時.

$$y=3x-1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

將此值代入於(2)

$$x^2-3x(3x-1)-(3x-1)^2+5x-2(3x-1)+8=0.$$

脫去括弧而整頓時.

$$17x^2-8x-9=0.$$

解之得　　$x=1$ 或 $x=-\frac{9}{17}$

如　　$x=1$ 由(3) $y=3\times1-1=2.$

如　　$x=-\frac{9}{17}$ 由(3) $y=3\left(-\frac{9}{17}\right)-1=-\frac{44}{17}.$

$$\therefore \quad \begin{cases} x=1 \\ y=2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-\frac{9}{17} \\ y=-\frac{44}{17} \end{cases}$$

爲所求之根

驗算. 如 $x=1$, $y=2$ 則(1)之左邊 $=3\times1-2-1=0$ (2)之左邊 $=1-3\times1\times2-4+5\times1-2\times2+8=0$.

依同法第二組亦能滿足.

【法則】 欲解由一次與二次之二方程式所成之聯立方程式時，先由一次方程式將含有一未知數之式表他一未知數，而代入於二次方程式，誘出一元二次方程式，由此所得之二根可定對應之他未知數之值.

[問 1.] 解下列聯立方程式.

(一) $\begin{cases} xy=15, \\ 2x+y=13. \end{cases}$ (二) $\begin{cases} x+2y=7, \\ 2x^2-y^2=14. \end{cases}$

(三) $\begin{cases} 2x-5y-3=0, \\ x^2+xy-20=0. \end{cases}$ (四) $\begin{cases} 4x-2y=3, \\ 3x^2+5y=2xy. \end{cases}$

(五) $\begin{cases} 2y-3x=1, \\ 13x^2-8xy+3=0. \end{cases}$ (六) $\begin{cases} x^2-4y^2=8x+100, \\ x+3y=6(\text{至小數三位}). \end{cases}$

例 2. 解下列方程式.

$$\begin{cases} x+y=a\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ xy=b\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

解. 所設之方程式(1)爲一次(2)爲二次，故可與前例用同一方法解之，然用別法亦可.

將(1)之兩邊平方 $x^2+2xy+y^2=a^2$

將(2) 4 倍 $4xy \quad =4b$

$$(x-y)^2=a^2-4b$$

$$\therefore \quad x-y=\pm\sqrt{a^2-4b}.$$

故所求之二根，爲下列二組聯立方程式之根.

(i) $\begin{cases} x+y=a \\ x-y=\sqrt{a^2-4b} \end{cases}$　　(ii) $\begin{cases} x+y=a \\ x-y=-\sqrt{a^2-4b} \end{cases}$

由 (i) 得 $\begin{cases} x=\dfrac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2} \\ y=\dfrac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2} \end{cases}$　　由 (ii) 得 $\begin{cases} x=\dfrac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2} \\ y=\dfrac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2} \end{cases}$.

此二組卽爲所求之根.

別解.　將方程式(1) (2)視爲聯立方程式而解者,其結果卽求和等於 a 積等於 b 之數也.

然一元二次方程　$X^2-aX+b=0$ ………………… (3)

之二根其和爲 a 其積爲 b, 故如解(3)以代(1) (2)則所得(3)之一根爲 x 他根爲 y 可知.

然由 (3)　$X=\dfrac{a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$

$\therefore$　如　$x=\dfrac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$　則　$y=\dfrac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2}$.

$x=\dfrac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2}$　則　$y=\dfrac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$

[問 2.]　解下列聯立方程式:

(一) $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$　　(二) $\begin{cases} x+y=10 \\ xy=21 \end{cases}$

(三) $\begin{cases} x+y=9 \\ xy=20 \end{cases}$　　(四) $\begin{cases} x+y=33 \\ xy=90 \end{cases}$

(五) $\begin{cases} x+y=27 \\ xy=180 \end{cases}$

[問 3.]　照上例解下列方程式.

$\begin{cases} x-y=a \\ xy=b \end{cases}$

[問 4.] 解下列聯立方程式.

(一) $\begin{cases} x-y=1 \\ xy=56 \end{cases}$ (二) $\begin{cases} x-y=3 \\ xy=54 \end{cases}$

(三) $\begin{cases} x-y=13 \\ xy=30 \end{cases}$

例 3. 解下列方程式.

$$mx+ny=a\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$xy=b\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

解. 由(1)求 y 代入於(2)可照例 1 之方法解之又擴張例 2 之方法別解亦可.

先以 mn 乘(2)之兩邊.

$$mnxy=mnb$$

或 $$(mx)(ny)=mnb\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

命 $mx=X$, $ny=Y$ 時,則(1)及(2)如下:

$$X+Y=a$$

$$XY=mnb$$

故 X, Y 爲下列方程式之根.

$$z^2-az+mnb=0,$$

$$\therefore \qquad z=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4mnb}}{2}.$$

$$\therefore \begin{cases} X=mx=\dfrac{a+\sqrt{a^2-4mnb}}{2}, \\ Y=ny=\dfrac{a-\sqrt{a^2-4mnb}}{2}. \end{cases} \quad \begin{cases} X=mx=\dfrac{a-\sqrt{a^2-4mnb}}{2}, \\ Y=ny=\dfrac{a+\sqrt{a^2-4mnb}}{2}. \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x_1=\dfrac{a+\sqrt{a^2-4mnb}}{2m}, \\ y_1=\dfrac{a-\sqrt{a^2-4mnb}}{2n}. \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=\dfrac{a-\sqrt{a^2-4mnb}}{2m}, \\ y_2=\dfrac{a+\sqrt{a^2-4mnb}}{2m}. \end{cases}$$

[問 5.] 解 $7x+11y=29$.

$$xy=2.$$

[問 6.] 欲解 $mx-ny=a$, $xy=b$. 時先以 $-mn$ 乘第二方程式之兩邊使變為 $mx+(-ny)=a$, $mx(-ny)=-mnb$ 而後照上例解之.

例 4. 解下列聯立方程式.

$$\begin{cases} x+y=a \cdots\cdots (1) \\ x^2+y^2=b^2 \cdots\cdots (2) \end{cases}$$

解. 將(1)之兩邊平方減(2),則得

$$xy=\frac{a^2-b^2}{2} \cdots\cdots (3)$$

(1)與(3)聯立時與前例之別解相同, x, y 為下列方程式之根.

$$X^2-aX+\frac{a^2-b^2}{2}=0.$$

即 $$2X^2-2aX+a^2-b^2=0.$$

$\therefore$ $$X=\frac{a\pm\sqrt{2b^2-a^2}}{2}.$$

$$\therefore \begin{cases} x_1=\dfrac{a+\sqrt{2b^2-a^2}}{2}, & x_2=\dfrac{a-\sqrt{2b^2-a^2}}{2}, \\ y_1=\dfrac{a-\sqrt{2b^2-a^2}}{2}. & y_2=\dfrac{a+\sqrt{2b^2-a^2}}{2}. \end{cases}$$

別解. 照上法方,求 $2xy=a^2-b^2$, 由(2)邊邊相減而求 $x-y$, 與(1)聯立則得所求之根.

[問 7.] 解下列方程式.

(一) $\begin{cases} x+y=9, \\ x^2+y^2=41. \end{cases}$ (二) $\begin{cases} x+y=10, \\ x^2+y^2=68. \end{cases}$

(三) $\begin{cases} x+y=13, \\ x^2+y^2=85. \end{cases}$ (四) $\begin{cases} x-y=1, \\ x^2+y^2=221. \end{cases}$

(五) $\begin{cases} x-y=3, \\ x^2+y^2=45. \end{cases}$ (六) $\begin{cases} x+y=7, \\ x^2+xy+y^2=37. \end{cases}$

(七) $\begin{cases} x-y=5, \\ x^2-xy+y^2=39. \end{cases}$

例 5. 解 $\begin{cases} x+y=a \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x^2-y^2=b^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. 所設之方程式(2)可改書如下.

$$(x+y)(x-y)=b^2$$

以(1)之左邊 a 代$(x+y)$時,則得

$$a(x-y)=b^2$$

如 $a\neq 0$ 則 $x-y=\dfrac{b^2}{a}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

(1)與(3)聯立,則得

$$\begin{cases} x=\dfrac{a^2+b^2}{2a} \\ y=\dfrac{a^2-b^2}{2a} \end{cases}.$$

[問 8.] 解下列聯立方程式.

(一) $\begin{cases} x+y=3, \\ x^2-y^2=3. \end{cases}$ (二) $\begin{cases} x+y=7, \\ x^2-y^2=21. \end{cases}$

(三) $\begin{cases} x-y=6, \\ x^2-y^2=48. \end{cases}$ (四) $\begin{cases} 6(x+y)=5, \\ 36(x^2-y^2)=5. \end{cases}$

48. 由二個二次方程式所成之聯立二次方程式.

二個未知數 x, y 所成聯立二次方程式一般之形如下.

$$\begin{cases} ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ a'x^2+2h'xy+b'y^2+2g'x+2f'y+c'=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

兩方程式之左邊,如就 x 從乘冪順序列之時,

$$\begin{cases} ax^2+2(hy+g)x+by^2+2fy+c=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3) \\ a'x^2+2(h'y+g')x+b'y^2+2f'y+c'=0\cdots\cdots\cdots\cdots(4) \end{cases}$$

因欲簡單,命 $hy+g=m$. $h'y+g'=m'$.

$by^2+2fy+c=n$, $b'y^2+2f'y+c'=n'$.

時(3)與(4),變形如下:

$$\begin{cases} ax^2+2mx+n=0 \cdots\cdots (5) \\ a'x^2+2m'x+n'=0 \cdots\cdots (6) \end{cases}$$

各以 a', a 乘(5)(6)之兩邊,邊邊相減,則得

$$2(am'-a'm)x+an'-a'n=0.$$

$$\therefore \qquad x=-\frac{an'-a'n}{2(am'-a'm)} \cdots\cdots (7)$$

〔但 $am'-a'm\neq 0$〕

由(7)及(5),得

$$(an'-a'n)^2+4(am'-a'm)(m'n-mn')=0.$$

即

$$\begin{aligned} &\{a(b'y^2+2f'y+c')-a'(by^2+2fy+c)\}^2 \\ &+4\{a(h'y+g')-a'(hy+g)\}\{(h'y+g')(by^2+2fy+c) \\ &\qquad -(hy+g)(b'y^2+2f'y+c')\}. \\ &=0 \cdots\cdots (8) \end{aligned}$$

將(8)解去括弧而整頓之,則得關於 y 之四次方程式,故得 y 之根有四.代入於(7)則得對應之 x 之根.即所設之方程式有四組之根.然方程式(8)除特例外不在初等代數學所能解之範圍之內.以下可歸於二次方程式之解法之特例說明之.

第一 $\begin{cases} ax^2+2gx+2fx+c=0 \cdots\cdots (1) \\ a'x^2+2g'x+2f'x+c'=0 \cdots\cdots (2) \end{cases}$

之解法.

【法則】 於(1)與(2)之間消去 x^2 之項,使導入一次方程式,而後與(1)或(2)聯立,適用第39節例1之方法解之.

或於(1)(2)之間消去 y 項,求關於 x 之二次方程式而先求 x 之値.

例. 解下列之聯立方程式,

$$\begin{cases} 5x^2+6x-6y+1=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ 3x^2-4x+5y-9=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$$

解. 因欲消去 x^2 之項以 3 乘(1)以 5 乘(2)邊邊相減,則得

$$38x-43y+48=0$$

由此得 $$y=\frac{38x+48}{43} \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

以(3)代入(2)

$$3x^2-4x+5\left(\frac{38x+48}{43}\right)-9=0.$$

解之得 $$x_1=1,\quad x_2=-\frac{49}{43}.$$

故由(3)得 $$y_1=2,\quad y_2=-\frac{202}{1849}.$$

別解. 以 5 乘(1)以 6 乘(2)邊邊相減,則得

$$129x^2+18x-147=0.$$

由此得 $$x_1=1 \qquad x_2=-\frac{49}{43}$$

代入於(1)或(2),則得

$$y_1=2,\quad y_2=-\frac{202}{1849}.$$

第二. 下列聯立方程式之解法與第一同

$$\begin{cases} by^2+2gx+2fy+c=0, \\ b'y^2+2g'x+2f'y+c'=0. \end{cases}$$

[問 9.] 解下列聯立方程式.

(一) $\begin{cases} 3x^2+5x-7y+6=0, \\ 2x^2-3x+6y-11=0. \end{cases}$ (二) $\begin{cases} 2y^2-3x+y-7=0, \\ y^2-4x+3y-6=0. \end{cases}$

第三. $$\begin{cases} 2hxy+2gx+2fy+c=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ 2h'xy+2g'x+2f'y+c'=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$$

之解法.

【法則】 於(1)(2)之間消去 xy 項,使導入一次方程式,與(1)或(2)聯立解之.

例. 解下列方程式.

$$\begin{cases} 3xy+2x-4y+9=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ 4xy-5x+y-2=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$$

解. 以 4 乘(1)以 3 乘(2)邊邊相減,則得

$$23x-19y+42=0$$

$$\therefore \qquad y=\frac{23x+42}{19} \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

代入於(2),則得

$$4x\left(\frac{23x+42}{19}\right)-5x+\frac{23x+42}{19}-2=0.$$

去分母解括弧而整頓時,

$$92x^2+96x+4=0.$$

由此 $\qquad x_1=-1 \quad x_2=-\frac{1}{23}.$

由(3), $\qquad y_1=1 \quad y_2=\frac{41}{19}.$

[問 10.] 解下列之聯立方程式.

(一) $\begin{cases} xy-9y+2=0, \\ xy-x+2=0. \end{cases}$ (二) $\begin{cases} 5xy-3x-2y=0, \\ 4xy-15x+4y=0. \end{cases}$

(三) $\begin{cases} 2xy-13x-8y+49=0, \\ 3xy-9x-19y+77=0. \end{cases}$ (四) $\begin{cases} x+\dfrac{2}{y}=\dfrac{5}{2}, \\ y+\dfrac{3}{x}=4. \end{cases}$

(五) $\begin{cases} x+\dfrac{3}{y}=3, \\ y+\dfrac{2}{x}=4. \end{cases}$

第四. $\begin{cases} ax^2+2hxy+2gx+c=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ a'x^2+2h'xy+2g'x+c'=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$

或 $\begin{cases} by^2+2hxy+2fy+c=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ b'y^2+2h'xy+2f'y+c'=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$

之解法.

【法則】 於(1)與(2)之間消去 xy 項.則得關於一未知數之二次方程式,解之求一方之未知數,代入於(1)或(2)而求他未知數.

例. 解下列聯立方程式.

$$\begin{cases} x^2+3xy+x-8=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ 2x^2-xy+2x-2=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$$

解. 以 3 乘(2)與(1)相加,則得

$$7x^2+7x-14=0.$$

即 $\qquad x^2+x-2=0.$

$\therefore \qquad x_1=1,\ x_2=-2.$

由(1) $\qquad y_1=2,\ y_2=-1.$

[問 11.] 解下列聯立方程式:

$$\begin{cases} y^2-xy+2y-1=0, \\ 2y^2-3xy+3y+1=0. \end{cases}$$

第五. $\begin{cases} ax^2+by^2+2gx+c=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ a'x^2+b'y^2+2g'x+c'=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$

或 $\begin{cases} ax^2+by^2+2fy+c=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ a'x^2+b'y^2+2f'y+c'=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$

之解法.

【法則】 於(1)與(2)之間消去一未知數之二次項,先就他未知數之二次方程式解之.

但於第一組消去 y^2 項,於第二組消去 x^2 項.

[問 12.] 解下列聯立方程式.

(一) $\begin{cases} 2x^2-3y^2+9x+1=0, \\ x^2-y^2+4x-1=0. \end{cases}$

(二) $\begin{cases} 3x^2-y^2+2y-3=0, \\ x^2+y^2-3y+1=0. \end{cases}$

第六. $\begin{cases} ax^2+2hxy+by^2+c=0 \cdots\cdots (1) \\ a'x^2+2h'xy+by^2+c'=0 \cdots\cdots (2) \end{cases}$

之解法.

【法則】 於(1)與(2)之間消去絕對項,而求二次之同次方程式,由此求 x 與 y 之比.

例 1. 解下列聯立方程式.

$$\begin{cases} 3x^2-2xy+y^2=2 \cdots\cdots (1) \\ 2x^2+xy-y^2=2 \cdots\cdots (2) \end{cases}$$

解. 所設之方程式邊邊相減,則得

$$x^2-3xy+2y^2=0$$

即 $$(x-2y)(x-y)=0.$$

如 $$x-y=0,\text{ 則 } x=y \cdots\cdots (3)$$

如 $$x-2y=0 \text{ 則 } x=2y \cdots\cdots (4)$$

(3)與(1)聯立,於(1)如 $x=y$, 則

$$3y^2-2y^2+y^2=2.$$

$\therefore$ $2y^2=2$ $\therefore$ $y=\pm1$ $\therefore$ $x=\pm1$,

(3)與(1)聯立,於(1) 如 $x=2y$,則

$$3(2y)^2-2(2y)y+y^2=2.$$

即 $9y^2=2$ $\therefore$ $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{3}$ $\therefore$ $x=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

$\therefore \begin{cases} x_1=1 \\ y_1=1 \end{cases} \begin{cases} x_2=-1 \\ y_2=-1 \end{cases} \begin{cases} x_3=\frac{\sqrt{2}}{3} \\ y_3=\frac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases} \begin{cases} x_4=-\frac{\sqrt{2}}{3} \\ y_4=-\frac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases}$ 爲所求之根

注意. 於第六節二次之項，中缺乏何項，亦可適用上述之解法.

例 2. 解下列聯立方程式.

$$\begin{cases} 3x^2-5y^2=28 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 3xy-4y^2=8 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

解. 以 2 乘 (1)，以 7 乘(2)，遞遞相減，則得

$$2x^2-7xy+6y^2=0.$$

$$x=\frac{7y\pm\sqrt{49y^2-48y^2}}{4}=\frac{7y\pm y}{4}.$$

$\therefore$ $x=2y$, $x=\frac{3}{2}y$.

如 $x=2y$, 代入於(1)，則得

$y^2=4$ $\therefore$ $y=\pm2$ 故 $x=\pm4$,

如 $x=\frac{3}{2}y$ 代入於 (1)，則得

$y^2=16$ $\therefore$ $y=\pm4$ 故 $x=\pm6$,

$\therefore$ $\begin{cases} x_1=4 \\ y_1=2 \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=-4 \\ y_2=-2 \end{cases}$ $\begin{cases} x_3=6 \\ y_3=4 \end{cases}$ $\begin{cases} x_4=-6 \\ y_4=-4 \end{cases}$

爲所求之根.

[問 13.] 解下列聯立方程式.

(一) $\begin{cases} x^2+2xy=16, \\ 2y^2+xy=24. \end{cases}$ (二) $\begin{cases} x^2-xy=6, \\ x^2+y^2=61. \end{cases}$

(三) $\begin{cases} x^2-xy+y^2=21, \\ y^2-2xy+15=0. \end{cases}$ (四) $\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=3, \\ 2x^2+y^2=6. \end{cases}$

(五) $\begin{cases} x^2+xy=12, \\ xy-2y^2=1. \end{cases}$ (六) $\begin{cases} x^2-xy+4y^2=10, \\ y^2-5xy=6. \end{cases}$

第七. $\begin{cases} ax^2+2hxy+by^2+2gx=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ a'x^2+2h'xy+b'y^2+2g'x=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

或 $\begin{cases} ax^2+2hxy+by^2+2fy=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ a'x^2+2h'xy+b'y^2+2f'y=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

之解法.

【法則】 於(1)與(2)之間消去一次項,求二次之同次方程式,以下照第六之方法行之.

例, 解下列聯立方程式.

$$\begin{cases} x^2-3xy-7y^2+3y=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ 2x^2+5xy+y^2-y=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$$

解. 以 3 乘(2)與(1)邊邊相加,則得

$$7x^2+12xy-4y^2=0.$$

左邊分解爲因數時,則得

$$(7x-2y)(x+2y)=0.$$

$\therefore$ $$7x-2y=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

或 $$x+2y=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

由(3) $y=\frac{7}{2}x$ 代入於(1),

$$x^2-3x\left(\frac{7}{2}x\right)-7\left(\frac{7}{2}x\right)^2+3\left(\frac{7}{2}x\right)=0.$$

解括弧而整頓之 則得

$$x(127x-14)=0.$$

$\therefore$ $x=0$ 或 $127x-14=0.$

如 $x=0$ 則 $y=0.$

如 $127x-14=0$ 則 $x=\frac{14}{127}$ $\therefore y=\frac{7}{2}x=\frac{49}{127}$

次由(4) $x=-2y$ 代入於(1),

$$(-2y)^2-3(-2y)y-7y^2+3y=0.$$

卽 $$3y(y+1)=0.$$

故 $y=0$ 或 $y+1=0.$

如 $y=0$ 則 $x=0.$

如 $y+1=0$ 則 $y=-1$ $\therefore x=2,$

故 $\begin{cases} x_1=0 \\ y_1=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=\dfrac{14}{127} \\ y_2=\dfrac{49}{127} \end{cases}$ $\begin{cases} x_3=2 \\ y_3=-1 \end{cases}$

爲所求之根.

注意. 二次項之係數有時爲 0，亦可適用上法.

[問 14.] 解下列聯立方程式.

(一) $\begin{cases} x^2-2y^2=4y, \\ 3x^2+xy-2y^2=16y. \end{cases}$

(二) $\begin{cases} x^2-2xy+4y^2=2x, \\ 3x^2-4xy+10y^2=7x. \end{cases}$

第八 $\begin{cases} ax^2+2hxy+2gx+2fy=0, \\ a'x^2+2h'xy+2g'x+2f'y=0. \end{cases}$

或 $\begin{cases} by^2+2hxy+2gx+2fy=0, \\ b'y^2+2h'xy+2fx+2f'y=5. \end{cases}$

之解法.

【法則】 於第一組合,如將 y 之一次項消去,則可導入 $x=0$ 之根與一次方程式,於第二組合,如將 x 之一次項消去,則可導入 $y=0$ 之根與一次之方程式.

例. 解下列聯立方程式.

$$\begin{cases} x^2+2xy-3x-y=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ 2x^2-xy+4x-2y=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$$

解. 以 2 乘(1)之兩邊,邊邊相減,則得

$$5xy-10x=0 \qquad \therefore \quad 5x(y-2)=0.$$

$\therefore$ $x=0$ 或 $y-2=0$,

如 $x=0$ 代入於 (1) 得 $y=0$,

如 $y-2=0$ 即 $y=2$ 代入於(1)，得

$$x^2+x-2=0 \quad 故 \quad x=1, \ 或 \ x=-2$$

故所求之根如下:

$$\begin{cases} x_1=0, \\ y_1=0. \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=1, \\ y_2=2. \end{cases} \quad \begin{cases} x_3=-2, \\ y_3=2. \end{cases}$$

[問 15.] 解下列聯立方程式.

(一) $\begin{cases} x^2-xy+3x-y=0, \\ 2x^2+3xy-10x+y=0. \end{cases}$

(二) $\begin{cases} y^2-xy+2x-2y=0, \\ y^2-3xy-4x+2y=0. \end{cases}$

第九. $\dfrac{a'}{a}=\dfrac{h'}{h}=\dfrac{b'}{b}$ 時.

$$\begin{cases} ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ a'x^2+2h'xy+b'y^2+2g'x+2f'y+c'=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$$

之解法.

【法則】 (2)有 $k(ax^2+2hxy+by^2)+2g'x+2f'y+c'=0$ 之形,故以 k 乘(1)減(2)則二次項可以消去.

[問 16.] 解下列聯立方程式.

(一) $\begin{cases} x^2+xy+y^2+x-2y-4=0, \\ 2x^2+2xy+2y^2-3x-4y-3=0. \end{cases}$

(二) $\begin{cases} x^2-2xy-y^2+2x+y+2=0, \\ 2x^2-4xy-2y^2+3x+3y+4=0. \end{cases}$

第十. $\dfrac{b'}{b}=\dfrac{f'}{f}=\dfrac{c'}{c}$ (i) 或 $\dfrac{a'}{a}=\dfrac{g'}{g}=\dfrac{c'}{c}$ (ii) 時.

$$\begin{cases} ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ a'x^2+2h'xy+b'y^2+2g'x+2f'y+c'=0 \cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$$

之解法.

【法則】 從(i)或(ii)上列方程式,可變形如下:

(i) $\begin{cases} ax^2+2hxy+2gx+by^2+2fy+c=0, \\ a'x^2+2h'xy+2g'x+k(by^2+2fy+c)=0. \end{cases}$

(ii) $\begin{cases} by^2+2hxy+2fy+ax^2+2gx+c=0, \\ b'y^2+2h'xy+2f'y+k(ax^2+2gx+c)=0. \end{cases}$

故以 k 乘(1)邊邊相減,則歸於第八之例.

〔問 17.〕　解下列聯立方程式.

(一) $\begin{cases} x^2+xy-y^2+x-2y+3=0, \\ 3x^2-xy-2y^2+2x-4y+6=0. \end{cases}$

(二) $\begin{cases} x^2-xy+2y^2+3x-y-4=0, \\ x^2+5xy-4y^2+3x+2y-4=0. \end{cases}$

41. 對稱形之方程式.

例如 $\begin{cases} x+y=a \\ xy=b^2 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=a \\ x^2+y^2=b^2 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=a \\ x^2+xy+y^2=b^2 \end{cases}$

等就未知數 x, y 而論皆爲對稱.

【法則】 欲於關於 x, y 爲對稱之方程式, 先求 $x+y$ 及 xy 之値,而後照第38節例 2 解之.

凡成 $\begin{cases} x-y=a \\ xy=b \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x-y=a \\ x^2+y^2=b^2 \end{cases}$

之形之方程式,就 x, y 言,雖不爲對稱式,然如命 $-y=y'$ 時,則爲關於 x, y' 之對稱方程式,故亦適用上法.

例 1.　解 $\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ xy=b^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$

解.　所設之方程式雖可適用前節第六之例解之,然亦可照下法解.

以(2)之 2 倍與(1)相加,則得

$$(x+y)^2=a^2+2b.$$

$$\therefore \quad x+y=\pm\sqrt{a^2+2b^2} \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

故所求之根可由

$$\begin{cases} x+y=\sqrt{a^2+2b^2}, \\ xy=b^2. \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=-\sqrt{a^2+2b^2}, \\ xy=b^2. \end{cases}$$

二組得之,其根如次:

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{\sqrt{a^2+2b^2}+\sqrt{a^2-2b^2}}{2}, \\ y_1=\dfrac{\sqrt{a^2+2b^2}-\sqrt{a^2-2b^2}}{2}. \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=\dfrac{\sqrt{a^2+2b^2}-\sqrt{a^2-2b^2}}{2}, \\ y_2=\dfrac{\sqrt{a^2+2b^2}+\sqrt{a^2-2b^2}}{2}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3=\dfrac{-\sqrt{a^2+2b^2}+\sqrt{a^2-2b^2}}{2}, \\ y_3=\dfrac{-\sqrt{a^2+2b^2}-\sqrt{a^2-2b^2}}{2}. \end{cases} \quad \begin{cases} x_4=\dfrac{-\sqrt{a^2+2b^2}-\sqrt{a^2-2b^2}}{2}, \\ y_4=\dfrac{-\sqrt{a^2+2b^2}+\sqrt{a^2-2b^2}}{2}. \end{cases}$$

別解. 自(1)減(2)之 2 倍而求 $x-y$ 與 (3) 聯立解之亦可.

[問 18.] 解下列聯立方程式.

$$(一)\begin{cases} x^2+y^2=5, \\ xy=2. \end{cases} \qquad (二)\begin{cases} x^2+y^2=34, \\ xy=15. \end{cases}$$

例 2. 解 $\begin{cases} (x+y)^2-5(x+y)+6=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ x^2y^2-4xy+4=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$

解. 由(1)得 $x+y=2$ 或 $x+y=3$.

由(2)得 $xy=2$.

故所求之根,可由下列二組方程式得之.

$$(3)\quad \begin{cases} x+y=3, \\ xy=2. \end{cases} \qquad (4)\quad \begin{cases} x+y=2, \\ xy=2. \end{cases}$$

由(3) $\begin{cases} x_1=1, \\ y_1=2. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2=2, \\ y_2=1. \end{cases}$

由(4) $\begin{cases} x_3=1+\sqrt{-1}, \\ y_3=1-\sqrt{-1}. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_4=1-\sqrt{-1}, \\ y_4=1+\sqrt{-1}. \end{cases}$

例 3. 解 $\begin{cases}(x+y)^2-4(x+y)+2xy=1 \cdots\cdots(1)\\ 2(x+y)^2-5xy=12 \cdots\cdots(2)\end{cases}$

解. 命 $x+y=u$. $xy=v$ 則所設之方程式爲

$$u^2-4u+2v=1 \cdots\cdots(3)$$

$$2u^2-5v=12 \cdots\cdots(4)$$

以 5 乘(3)以 2 乘(4) 邊邊相加,則得

$$9u^2-20u=29.$$

即 $$(9u-29)(u+1)=0.$$

$\therefore$ $$u=-1 \quad 或 \quad u=\frac{29}{9}.$$

如 $u=-1$ 則 $v=-2$ $\therefore$ (5) $\begin{cases}x+y=-1,\\ xy=-2.\end{cases}$

如 $u=\frac{29}{9}$ 則 $v=\frac{140}{81}$ $\therefore$ (6) $\begin{cases}x+y=\frac{29}{9},\\ xy=\frac{140}{81}.\end{cases}$

由(5)與(6)得四組之根如下:

$$\begin{cases}x_1=-2,\\ y_1=1.\end{cases} \qquad \begin{cases}x_2=1,\\ y_2=-2.\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_3=\dfrac{261+\sqrt{22761}}{162},\\ y_3=\dfrac{261-\sqrt{22761}}{162}.\end{cases} \qquad \begin{cases}x_4=\dfrac{261-\sqrt{22761}}{162},\\ y_4=\dfrac{261+\sqrt{22761}}{162}.\end{cases}$$

[問 19.] 解下列聯立方程式.

(一) $\begin{cases}xy+x+y=1,\\ x^2y+xy^2=30.\end{cases}$ (二) $\begin{cases}x+y=8xy,\\ x^2+y^2-4x^2y^2.\end{cases}$

(三) $\begin{cases}(x+y)^2+(x+y)-2xy-4=0,\\ (x+y)^2-3xy-1=0.\end{cases}$ (四) $\begin{cases}2(x-y)+xy=7,\\ 3xy-(x-y)=7.\end{cases}$

(五) $\begin{cases}x^2+3xy+y^2+4(x+y)-13=0,\\ (3x^2-xy+3y^2+2(x+y)-9=0.\end{cases}$

(六) $\begin{cases} (x+y)^2+4(x-y)=37, \\ xy+4(x-y)=16. \end{cases}$

(二) 二元聯立高次方程式之特例.

42. 以下所述之例,都爲關於 x, y 之對稱式,故多如前節先求 $x+y$ 及 xy 而後解之.

例 1. 解下列聯立方程式.

$$\begin{cases} x+y=3 \cdots\cdots(1) \\ x^3+y^3=9 \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

解. (2)之左邊分解爲因數時.

$$(x+y)(x^2-xy+y^2)=9.$$

以(1)代入,則得

$$3(x^2-xy+y^2)=9.$$

$$\therefore \quad x^2-xy+y^2=3 \cdots\cdots(3)$$

將(1)之兩邊平方與(3)邊邊相減,則得

$$3xy=6 \quad \therefore \quad xy=2.$$

故與(1)聯立,得二組之根如下:

$$\begin{cases} x=1, \\ y=2. \end{cases} \qquad \begin{cases} x=2, \\ y=1. \end{cases}$$

[問 20.] 解下列聯立方程式.

(一) $\begin{cases} x+y=4, \\ x^3+y^3=28. \end{cases}$ (二) $\begin{cases} x+y=7, \\ x^3+y^3=188. \end{cases}$

(三) $\begin{cases} x+y=11, \\ x^3+y^3=407. \end{cases}$ (四) $\begin{cases} x-y=4, \\ x^3-y^3=124. \end{cases}$

(五) $\begin{cases} x-y=2, \\ x^3-y^3=488. \end{cases}$

例 2. 解下列聯立方程式:

$$\begin{cases} x+y=3 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ x^4+y^4=17 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$$

解. 將(1)兩邊平方,則得

$$x^2+y^2+2xy=9,$$

$$\therefore \quad x^2+y^2=9-2xy.$$

再平方,則得

$$x^4+y^4+2x^2y^2=81-36xy+4x^2y^2.$$

自此方程式之兩邊各減去(2)之兩邊.

$$2x^2y^2=64-36xy+4x^2y^2.$$

即 $$2x^2y^2-36xy+64=0.$$

即 $$(xy)^2-18(xy)+32=0.$$

就 xy 解此二次方程式,則得 $xy=16$ 或 $xy=2$.

故由 $\begin{cases} x+y=3, \\ xy=2. \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=1, \\ y=2. \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=2, \\ y=1. \end{cases}$

由 $\begin{cases} x+y=3, \\ xy=16. \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=\dfrac{3+i\sqrt{55}}{2}, \\ y=\dfrac{3+i\sqrt{55}}{2}. \end{cases}$ $\begin{cases} x=\dfrac{3-i\sqrt{55}}{2}, \\ y=\dfrac{3+i\sqrt{55}}{2}. \end{cases}$

[問 21.] 解下列聯立方程式.

(一) $\begin{cases} x+y=4, \\ x^4+y^4=82. \end{cases}$ (二) $\begin{cases} x+y=a, \\ x^4+y^4=b^4. \end{cases}$

***例 3.** 解下列聯立方程式:

$$\begin{cases} x+y=3 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ x^5+y^5=33 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$$

解. (2)之左邊分解爲因數.

$$(x+y)(x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4)=33.$$

以(1)代入

$$3(x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4)=33.$$

$$x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4=11.$$

此方程式,得逐次變化如下:

$$(x^2+y^2)^2-x^2y^2-xy(x^2+y^2)=11.$$

$$\{(x+y)^2-2xy\}^2-x^2y^2-xy\{(x+y)^2-2xy\}=11.$$

以(1)代入

$$(9-2xy)^2-x^2y^2-xy(9-2xy)=11.$$

解括弧而整頓之.

$$5x^2y^2-45xy+70=0.$$

$$x^2y^2-9xy+14=0.$$

$$(xy-2)(xy-7)=0.$$

$\therefore$ $xy=2$ 或 $xy=7$

故由 $\begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ $\begin{cases} x=2 \\ y=1. \end{cases}$

由 $\begin{cases} x+y=3 \\ xy=7 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=\dfrac{3+i\sqrt{19}}{2} & x=\dfrac{3-i\sqrt{19}}{2} \\ y=\dfrac{3-i\sqrt{19}}{2} & y=\dfrac{3+i\sqrt{19}}{2}. \end{cases}$

[問 22.] 解下列聯立方程式.

(一) $\begin{cases} x+y=1, \\ x^5+y^5=31. \end{cases}$ (二) $\begin{cases} x+y=a, \\ x^5+y^5=b^5. \end{cases}$ (三) $\begin{cases} x-y=1, \\ x^5-y^5=31. \end{cases}$

(三) 多元聯立方程式.

43. 由三個以上未知數所成之聯立二次方程式,通常不能解,玆舉著名之種類如下:

例. 解下列聯立方程式.

$$\begin{cases} xy=12\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ yz=20\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \\ xz=15\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3) \end{cases}$$

解. (1)(2)(3)各邊相乘.

$$x^2y^2z^2=3600$$

$$\therefore \quad xyz=\pm 60 \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

以(2)之兩邊除(4)之兩邊,則得 $x=\pm 3.$

以(3)之兩邊除(4)之兩邊,則得 $y=\pm 4.$

以(1)之兩邊除(4)之兩邊,則得 $z=\pm 5.$

從相應之符號得二組之根如下:

$$\begin{cases} x=3, \\ y=4, \\ z=5. \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-3, \\ y=-4, \\ z=-5. \end{cases}$$

[問 23.] 解下列聯立方程式.

(一) $\begin{cases} xy=3, \\ yz=15, \\ zx=5. \end{cases}$ (二) $\begin{cases} xy=70, \\ yz=110, \\ zx=77. \end{cases}$

例 2. 解下列聯立方程式.

$$\begin{cases} (x+m)(y+n)=a \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ (y+n)(z+p)=b \cdots\cdots\cdots\cdots (2) \\ (z+p)(x+m)=c \cdots\cdots\cdots\cdots (3) \end{cases}$$

解. (1), (2), (3) 邊邊相乘.

$$(x+m)^2(y+n)^2(z+p)^2=abc.$$

$$(x+m)(y+n)(z+p)=\pm\sqrt{abc}.$$

$$\begin{cases} x+m=\pm\dfrac{\sqrt{abc}}{b}, \\ y+n=\pm\dfrac{\sqrt{abc}}{c}, \\ z+p=\pm\dfrac{\sqrt{abc}}{a}, \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} x=\pm\dfrac{\sqrt{abc}}{b}-m, \\ y=\pm\dfrac{\sqrt{abc}}{c}-n, \\ z=\pm\dfrac{\sqrt{abc}}{a}-p. \end{cases}$$

但符號恆相對應;卽取上之符號,則全取上之符號;取下之符號.

時則全取下之符號，以下倣此.

〔問 24.〕　解下列聯立方程式.

(一) $\begin{cases}(x+2)(y+3)=15,\\(y+3)(z+4)=35,\\(z+4)(x+2)=21.\end{cases}$

(二) $x(y+1)=(y+1)(z+2)=(z+2)x=9.$

例 3.　解下列聯立方程式.

$$x(y+z)=16\cdots\cdots(1)$$
$$y(z+x)=21\cdots\cdots(2)$$
$$z(x+y)=25\cdots\cdots(3)$$

解.　(1) (2) (3) 邊邊相加.

$$2(xy+yz+zx)=62,$$
$$\therefore\quad xy+yz+zx=31\cdots\cdots(4)$$

由(4)減(1), (2), (3) 之兩邊，則得聯立如下；

$$\begin{cases}yz=15,\\zx=10,\\xy=6.\end{cases}$$

故由例 1 之方法解之，得

$$\begin{cases}x=2,\\y=3,\\z=5.\end{cases}\quad 或\quad \begin{cases}x=-2,\\y=-3,\\z=-5.\end{cases}$$

〔問 25.〕　解下列聯立方程式.

(一) $\begin{cases}x(y+z)=12,\\y(z+x)=40,\\z(x+y)=42.\end{cases}$　(二) $\begin{cases}2xz+3xy=12,\\7xy-5yz=-16,\\13yz+4xz=80.\end{cases}$

例 4.　解下列聯立方程式.

$$\begin{cases} (x+y)(x+z)=12\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ (y+z)(y+x)=15\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \\ (z+x)(z+y)=20\cdots\cdots\cdots\cdots(3) \end{cases}$$

解. (1), (2), (3) 邊邊相乘.

$$(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2=3600,$$

$$\therefore \quad (x+y)(y+z)(z+x)=\pm 60\cdots\cdots\cdots(4)$$

$$(4)\div(1) \quad y+z=\pm 5\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

$$(4)\div(2) \quad z+x=\pm 4\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

$$(4)\div(3) \quad x+y=\pm 3\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

但符號正負相對應. 故邊邊相加以 2 除之,

$$x+y+z=\pm 6\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

由(8)減(5), (6), (7)之兩邊,則得根如下:

$$\begin{cases} x=1, \\ y=2, \\ z=3. \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-1, \\ y=-2, \\ z=-3. \end{cases}$$

例 5.] 解下列聯立方程式.

$$\begin{cases} xy+x+y=5\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ yz+y+z=11\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \\ zx+z+x=7\cdots\cdots\cdots\cdots(3) \end{cases}$$

解. (1), (2), (3)之兩邊,各加 1, 則得

$$xy+x+y+1=6.$$

$$yz+y+z+1=12.$$

$$zx+z+x+1=8.$$

分解左邊爲因數.

$$\begin{cases} (x+1)(y+1)=6, \\ (y+1)(z+1)=12, \\ (z+1)(x+1)=8. \end{cases}$$

解之,得 $x=\pm1,\ y=\pm2,\ z=\pm3$. 但符號相對應.

[問 27.] 解下列聯立方程式.

(一) $\begin{cases} xy+x+y=23, \\ xz+x+z=5, \\ yz+y+z=15. \end{cases}$ (二) $\begin{cases} xy+x+y=19, \\ yz+y+z=29, \\ zx+z+x=23. \end{cases}$

(三) $\begin{cases} yz=a(y+z)=\alpha, \\ zx=a(z+x)+\beta, \\ xy=a(x+y)+\gamma. \end{cases}$ (四) $\begin{cases} yz-f^2=cy+bz, \\ zx-g^2=az+cx, \\ xy-h^2=bx+ay. \end{cases}$

例 6. 解下列聯立方程式.

$$\begin{cases} xy=6y-4x \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ xz=8x-12z \cdots\cdots\cdots\cdots (2) \\ yz=6z-4y \cdots\cdots\cdots\cdots (3) \end{cases}$$

解. 由視察知 $x=0,\ y=0,\ z=0$ 能滿足所設之方程式,故為所求之根. 次因欲求他根各以 $xy,\ xz,\ yz$ 除 (1),(2),(3) 時.

$$\begin{cases} 1=\frac{6}{x}-\frac{4}{y} \cdots\cdots\cdots\cdots (4) \\ 1=\frac{8}{z}-\frac{12}{x} \cdots\cdots\cdots\cdots (5) \\ 1=\frac{6}{y}-\frac{4}{z} \cdots\cdots\cdots\cdots (6) \end{cases}$$

如視 $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$ 為未知數時,則此方程式為一元之聯立方程式.

(6)X2+(5) $\qquad 3=\frac{12}{y}-\frac{12}{x} \cdots\cdots\cdots (7)$

即 $\qquad 1=\frac{4}{y}-\frac{4}{x}$.

(7)+(4) $\qquad 2=\frac{6}{x}-\frac{4}{x}$.

$\therefore\quad x=1$ 故由 (1)及(2) $y=\frac{4}{5}$, $z=\frac{8}{13}$.

故所求之根. $x=y=z=0$ 及 $x=1, y=\frac{4}{5}$, $z=\frac{8}{13}$.

[問 28.]　解下列聯立方程式.

(一) $\begin{cases} yz=y-2z, \\ xz=6z-x, \\ xy=x-y. \end{cases}$　(二) $\begin{cases} xy=a(x+y), \\ yz=b(y+z), \\ xz=c(z+x). \end{cases}$

例 7.　解下别聯立方程式.

$$\begin{cases} x^2-(y-z)^2=a^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ y^2-(z-x)^2=b^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \\ z^2-(x-y)^2=c^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3) \end{cases}$$

解.　(1)(2)(3)之左邊分解爲因數時.

$$\begin{cases} (x-y+z)(x+y-z)=h^2 \cdots\cdots\cdots\cdots(4) \\ (y-z+x)(y+z-x)=b^2 \cdots\cdots\cdots\cdots(5) \\ (z-x+y)(z+x-y)=c^2 \cdots\cdots\cdots\cdots(6) \end{cases}$$

(4)(5)(6)邊邊相乘而開平方.

$$(x-y+z)(x+y-z)(y+z-x)=\pm abc \cdots\cdots\cdots(7)$$

(7)與(4),(5),(6)聯立.

$$\begin{cases} -x+y+z=\pm\frac{bc}{a}, \\ x-y+z=\pm\frac{ca}{b}, \\ x+y-z=\pm\frac{ab}{c}. \end{cases}$$

解之得根如下:

$$x=\pm\frac{1}{2}\left(\frac{cb}{b}+\frac{ab}{c}\right),$$

$$y=\pm\frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a}+\frac{ab}{c}\right),$$

$$z=\pm\frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\right).$$

[問 29.] 欲解下列聯立方程式，由(2)與(3)之和減(1)導於本例之形而後解之.

$$\begin{cases} x(y+z-x)=a \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ y(z+x-y)=b \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \\ z(x+y-z)=c \cdots\cdots\cdots\cdots(3) \end{cases}$$

例 8. 解下列聯立方程式.

$$\begin{cases} (x+2y+3z)(3x-y+z)=56 \cdots\cdots(1) \\ (2x-3y+5z)(3x-y+z)=44 \cdots\cdots(2) \\ (3x+4y-2z)(3x-y+z)=20 \cdots\cdots(3) \end{cases}$$

解. 命 $3x-y+z=K$ $K\neq 0$ 故 (1)(2)(3) 爲,

$$x+2y+3z=\frac{56}{K} \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

$$2x-3y+5z=\frac{44}{K} \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

$$3x+4y-2z=\frac{20}{K} \cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

解之得

$$x=\frac{4}{K}, \quad y=\frac{8}{K}, \quad z=\frac{12}{K}.$$

故 $\frac{12}{K}-\frac{8}{K}+\frac{12}{K}=K.$ $\therefore$ $K=\pm 4.$

$\therefore$ $x=\pm 1,$ $y=\pm 2,$ $z=\pm 3.$

[問 30.] 解下列聯立方程式.

(一) $\begin{cases} x=a\sqrt{x+y+z}, \\ y=b\sqrt{x+y+z}, \\ z=c\sqrt{x+y+z}. \end{cases}$ (二) $\begin{cases} ax=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}, \\ by=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}, \\ cz=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}. \end{cases}$

例 9. 解下列聯立方程式.

$$\begin{cases} x+y+z=6 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x^2+y^2+z^2=14 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \\ yz=6 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3) \end{cases}$$

解. 將(1)平方.

$$x^2+y^2+z^2+2x(y+z)+2yz=36\cdots\cdots\cdots (4)$$

由(1) $$y+z=6-x\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

故以(2), (3), (5)代入於(4)

$$14+2x(6-x)+12=36,$$

卽 $$2x^2-12x+10=0,$$

卽 $$x^2-6x+5=0,$$

$$(x-1)(x-5)=0,$$

$\therefore$ $x=1$ 或 $x=5$.

如 $x=1$ 則 $y+z=5$, 故與(3)聯立, 則

得 $\begin{cases} y=2, \\ z=3. \end{cases}$ $\begin{cases} y=3, \\ z=2. \end{cases}$

又如 $x=5$ 則 $y+z=1$, 故與 (3) 聯立, 則得

$$\begin{cases} y=\dfrac{1\pm i\sqrt{23}}{2}, \\ z=\dfrac{1\mp i\sqrt{23}}{2}. \end{cases}$$

故 $\begin{cases} x=1, \\ y=2, \\ z=3. \end{cases}$ $\begin{cases} x=1, \\ y=3, \\ z=2. \end{cases}$ $\begin{cases} x=5, \\ y=\dfrac{1\pm i\sqrt{23}}{2}, \\ z=\dfrac{1\mp i\sqrt{23}}{2}. \end{cases}$

爲所求之根.

[問 31.] 解下列聯立方程式.

(一) $\begin{cases} x+y+z=4, \\ yz+zx+xy=-4, \\ yz=2x^2. \end{cases}$ (二) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=21, \\ x+y+z=5, \\ xz=4. \end{cases}$

(三) $\begin{cases} x-y-z=2, \\ x^2+y^2-z^2=28, \\ xy=6. \end{cases}$ (四) $\begin{cases} x-y=1, \\ x^2+y^2+z^2=5, \\ yz-zx+xy=2. \end{cases}$

練習問題 VII.

解下列聯立方程式.

(1) $\begin{cases} 2x-y=1, \\ x^2-4y^2+x+8y=1. \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 4x-5y-1=0, \\ 2x^2-xy+3x^2+3x-4y-17=0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x+\dfrac{3}{y}=3, \\ y+\dfrac{2}{x}=4. \end{cases}$ (4) $\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{3}{y+3}+\dfrac{3}{x+2}+\dfrac{2}{y+3}=1.$

(5) $\begin{cases} x-y+5=0, \\ x^2-y^2+35=0. \end{cases}$ (6) $\begin{cases} 15(x-y)=19, \\ 225(x^2-y^2)=589. \end{cases}$

(7) $\begin{cases} x^2+2xy-3y^2=5, \\ 2x^2-xy+y^2=7. \end{cases}$ (8) $\begin{cases} \sqrt{4x^2-12xy+9y^2}=x, \\ y^2-3xy=36. \end{cases}$

(9) $\begin{cases} (x+2y)(x-3y)=20, \\ \dfrac{2y-5}{y-x}=\dfrac{x+3y}{2y+5}. \end{cases}$ (10) $\begin{cases} x^2y^2+400=41xy, \\ (2x-y)^2=xy. \end{cases}$

(11) $\begin{cases} (x+y)^2+(x+y)-2xy=2, \\ (x+y)^2-3xy=1. \end{cases}$ (12) $\begin{cases} x^2-xy=2x+5, \\ xy-y^2=2y+2. \end{cases}$

(13) $\begin{cases} x^2+x+y^2=15, \\ 2xy+y=15. \end{cases}$ (14) $\begin{cases} x^2+xy=4x-2, \\ y^2+xy=4y-1. \end{cases}$

(15) $\begin{cases} x+y=13, \\ x^3+y^3=559. \end{cases}$ (16) $\begin{cases} x^2-xy+y^2=13, \\ x^3+y^3=91. \end{cases}$

(17) $\begin{cases} x^3+y^3=9, \\ x^2-xy+y^2=3. \end{cases}$ (18) $\begin{cases} x+y+\sqrt{x+y}=12, \\ x^3+y^3=189. \end{cases}$

(19) $\begin{cases} \dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{y^3}=91, \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=1. \end{cases}$ (20) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=18, \\ x+y=12. \end{cases}$

(21) $\begin{cases} x^2y+y^2x=30, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6}. \end{cases}$ (22) $\begin{cases} x^2-xy+y^2=7, \\ x^4+x^2y^2+y^4=133. \end{cases}$

(23) $\begin{cases} (x+7)^3+(5-y)^3=9, \\ x-y=5. \end{cases}$ (24) $\begin{cases} x^3-y^3=26, \\ x^2y-y^3=6. \end{cases}$

(25) $\begin{cases} \dfrac{y}{x}+\dfrac{1}{xy}=\dfrac{20}{3}, \\ xy+\dfrac{x}{y}=\dfrac{5}{3}. \end{cases}$ (26) $\begin{cases} x+y^2=ax, \\ x^2+y=by. \end{cases}$

(27) $\begin{cases} \dfrac{a}{x}-\dfrac{b}{y}=\dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{a^2}{x^2}+\dfrac{b^2}{y^2}=\dfrac{5}{9}. \end{cases}$ (28) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{10}{3}, \\ x+y=10. \end{cases}$

(29) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{5}=5, \\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{y}=\dfrac{5}{6}. \end{cases}$ (30) $\begin{cases} \dfrac{2x}{y+2}+\dfrac{y}{x+1}=\dfrac{z}{2}, \\ x+\dfrac{y}{2}=2, \\ y+\dfrac{z}{3}=3. \end{cases}$

(31) $\begin{cases} x(2y-z)=3, \\ y(z+x)=2, \\ z(2x+3y)=4. \end{cases}$ (32) $\begin{cases} \dfrac{a^2}{yz}+\dfrac{b^2}{zx}=1, \\ \dfrac{b^2}{zx}+\dfrac{c^2}{xy}=1, \\ \dfrac{c^2}{xy}+\dfrac{a^2}{yz}=1. \end{cases}$

(33) $\begin{cases} y+z=\dfrac{1}{x}, \\ z+x=\dfrac{1}{y}, \\ x+y=\dfrac{1}{z}. \end{cases}$ (34) $\begin{cases} xy+x+y=19, \\ yz+y+z=29, \\ zx+z+x=23. \end{cases}$

(35) $\begin{cases} (y-a)(z-a)=bc, \\ (z-b)(x-b)=ca, \\ (x-c)(y-c)=ab. \end{cases}$ (36) $\begin{cases} x(x+y+z)=25, \\ y(x+y+z)=49, \\ z(x+y+z)=122. \end{cases}$

(37) $\begin{cases} x(x+y+z)=8, \\ y(x+y+z)=16, \\ z(x+y+z)=40. \end{cases}$ (38) $\begin{cases} x+y+z=2, \\ x^2+y^2=5, \\ xy=2z^2. \end{cases}$

(39) 命適於聯立二次方程式 $3x^2+5y^2=15$, $y=mx$, 之 x, y 一組之根爲 α, β; 又命適於聯立方程式 $3x^2+5y=15, y=\dfrac{3}{5m}x$ 之 x, y 一組之根爲 γ, δ 時, 則 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$ 不論 m 之值如何常有同值, 求其值如何?

(40) 於 $y^2=12x, y=3x+n$ 之方程式, 使 x 之 二根相等時, n 之值當如何定之, 又此時 x 及 y 之值如何?

(四) 應用問題

43. 本章舉可歸於聯立二次方程式之解法之應用問題之例.

第 17 節所述應用問題解法之順序本章仍可通用. 卽

I. 以 x, y, z 表未知數.

II. 按題意表 x, y, z 等間之關係,但未知數之數與方程式之數不同時,則此問題無一定之解法.

III. 解所得之聯立方程式而求其根.

IV. 方程式之根不盡可採爲問題之答案,擇其適用者取之,不適用者棄之.

V. 須行驗算.

此處所應注意者,未知數不厭其多,如強使未知數減少,是於腦中解方程式無寧困難.

多用未知數,則解方程式比較容易,且可使問題之徑路明瞭.

前於第三章所述一元二次方程式之應用問題中可由聯立二次方程式解者不少.

例如知二數之和爲 a 及二數之積爲 b 欲求各數之例,依一元二次方程式之解法,如命表一數則以 $a-x$ 表他數,故得方程式如下:

$$x(a-x)=b \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

如各命二數爲 x, y 則得

$$\left.\begin{aligned} x+y&=a \\ xy&=b \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

之關係,解之可得二數,此爲聯立二次方程式之解法. (2)比於(1)兩數間之關係較見明瞭.

於 (2) 以 $y=a-x$ 代入於 $xy=b$, 則可得(1)卽在(1),將此手續於腦中行之.

例 1. 二個列車行三百六十哩之距離,所要時間之差爲五時間.

如雙方每時之速度俱增六哩時,則此差爲三時間.求兩列車之速度各如何?

解.　命 x 哩, y 哩各表二列車每時間之速度,則行 360 哩所要各列車之時數各爲 $\frac{360}{x}$, $\frac{360}{y}$, 如每時間之速度加 6 哩時,各列車之時數爲 $\frac{360}{x+6}$, $\frac{360}{y+6}$, 故得方程式如下:

$$\frac{360}{x}-\frac{360}{y}=5 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{360}{x+6}-\frac{360}{y+6}=3 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

除去分母而簡單之,(1) (2) 各如下:

$$xy-72y+72x=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$xy-114y+126x+36=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

自 (3) 減 (4) 而簡單之,

$$7y-9x=6, \quad \therefore \quad y=\frac{9x+6}{7} \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

將 y 之值代入於 (3) 而整頓之,

$$9x^2-138x-432=0$$

由此　$x=18$　或　$x=-\frac{24}{9}$.

負根不適於題意,如採 $x=18$,則由 (5) 得 $y=24$. 故兩列車之速度爲 18 哩與 24 哩.

[問 1.]　有車,前輪之周圍小於後輪之周圍,如車進 36 尺時,兩輪之迴轉數差一回,如前輪之周圍增 1 尺,則車進 60尺時,前輪之迴轉數較後輪反多一回,問前後兩輪之周圍如何?

[問 2]　有周圍 4680 尺之池,甲乙二人各乘自轉車在其周圍競走.第一回,甲乙同時出發甲一周後乙尙差 360 尺.第二回,甲每秒之速度較前回減少 6 尺,乙於甲出發後 3 秒以與前同一之速度

追之較甲早 9 秒先達一周，問第一回甲乙兩人之速度如何？

例 2.　有人將金 650 元分爲甲乙二部，以不同之利率假人，兩方所得之利息相等.如甲部分以乙之利率借出時，可得利息金 180 元，如乙部分以甲利率借出時，可得利息金 245 元. 問各部分之利率如何.

解.　甲乙二部分之金額各命爲 x 元，y 元，甲乙之利率各命爲 z，u 時，由題意得方程式如下：

$$x+y=6500 \cdots\cdots (1)$$

$$xz=yu \cdots\cdots (2)$$

$$xu=180 \cdots\cdots (3)$$

$$yz=245 \cdots\cdots (4)$$

(3)÷(4)　$\dfrac{xu}{yz}=\dfrac{180}{245}=\dfrac{36}{49} \cdots\cdots (5)$

然由(2)知　$\dfrac{u}{z}=\dfrac{x}{y}$　代入於(5)

$$\frac{x^2}{y^2}=\frac{36}{49}. \qquad \therefore \quad \frac{x}{y}=\pm\frac{6}{7}.$$

然 x, y 皆正故取正根 $\dfrac{x}{y}=\dfrac{6}{7}$.

故　$y=\dfrac{7}{6}x$　代入於(1)

得　$x=3000$　　$y=3500$,

代入於(3) (4)

$$u=\frac{180}{3000}=0.06 \qquad z=\frac{245}{3500}=0.07.$$

答　6 釐，7 釐.

[問 3.]　有金若干元借出，一年後本息合計得百四十元，如本金多25元，利率高四分時，則本息合計可得 174 元，問本金及年利率各如何？

例 3.　有直三角形之地，其周圍爲 80 尺，其面積爲 720 尺，問三邊之長各如何？

解.　如命夾有直角二邊之長各爲 x 尺，y 尺,斜邊爲 z 尺時,因周圍等於 180 尺,故得

$$x+y+z=180\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又直角角所夾二邊之相乘積等於三角形面積之 2 倍,卽

$$xy=1440\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

又直三角形斜邊之平方等於他二邊平方之和,故

$$x^2+y^2=z^2\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

將(1) (2) (3) 爲聯立方程式解之則得所求之根,

先由(1)　$x+y=180-z\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

平方之　$x^2+y^2+2xy=32400-360z+z^2$

以(2) (3) 代入　$z^2+2\times1440=32400-360z+z^2$

解此方程式得　$z=82.$

代入於(4)　$x+y=98\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$

由(5) (2)　$x=80,\ y=18,$ 或 $x=18,\ y=80.$

答　18 尺，80 尺，82 尺.

［問 4.］　有直角三角形之地，直角所夾二邊之和爲 48 尺，其面積爲 286 尺,問三邊之長如何?

［問 5.］　有直角三角形,直角所夾二邊之差爲 5 尺,又其周圍爲 60 尺,問三邊之長如何?

練習問題 VIII.

(1)　有父子二人其年齡之和爲 100,其積之 $\frac{1}{10}$ 較父之年齡超過 180,問父子之年齡各若干?

(2)　有 A 號列車自乙地向甲地開行,同時 B 號列車自甲地向乙地開行,一時間十五分之後,兩列車相遇. 又 A 號列車較 B 號列車早一時間又二十分,先達目的地,如甲乙兩地間之距離爲 100 哩時,問兩列車一時間之速度各幾哩?

(3) 自相隔 385 哩之兩地有甲乙兩火車同時相向開行，經 7 時間相遇於一處，如甲每行一哩較乙速 24 秒，問甲乙一時間之速度如何？

(4) 自相距 60 哩之甲乙兩站，有火車同時相向開行，相遇之後，一火車以 1 時間達乙站，他火車以 2 時 15 分間達於甲站，問此火車之速度各如何？

(5) 有 A, B 旅客二人，於 B 自乙地啓行之時，A 自甲地啓行欲經乙地與 B 同道．至 A 追及 B 時兩人所行之路程合計為 30 哩，又知 A 於 4 時間之前經過乙地，如 B 由甲地啓行，須費 9 時間始能達到此處，問甲乙兩地之距離如何？

(6) 有船三艘在兩港間來往，第一船每一時間比第二船速半哩，而其通行時間亦少一時間半．第二船每一時間比第三船速四分之三哩，而其通行時間亦少二時間半，問兩港間之距離如何？

(7) 甲乙二人來往於東西兩地．甲較乙後一時間啓程，於距兩地二哩之處追及乙，各達兩地，歸途又與乙遇．自初遇時至再遇時費時三十二分，又甲到東地時，乙始由距東地四哩之處歸來．問東西兩地之距離如何？

(8) 有一組之水夫順流駕舟自甲村至乙村需 3 時間．如一任水流而不用力時，比在同距離之靜水用力駕駛時多費 8 時間，問由乙村逆流上駛於甲村時要若干時間？

(9) 有甲乙二船甲自東港向西港，乙自西港向東港，各以一定之速度同時出發，若干時後相遇，其後四時間甲達西港，乙自遇甲之後每時間增加 2 浬之速度，於五時間後達於東港，問二船之速度每時間幾浬？

(10) 有甲乙二船，甲自東港向西港，乙自西港向東港，各以一定之速度同時出發，若干時後相遇，自此甲每時二浬之速度乙每時增 1 浬之速度，甲又行十時間達西港，乙又行十一時間達東港，問二船最初速度每時間幾浬？但兩港間之距離為 200 浬．

(11)　有甲乙二船,甲之速度與乙之速度之比爲 2:3, 各以一定之速度甲向正東乙向正南航行，二船間之距離其初爲 12 浬一時間後爲 8 浬,更一時間後爲 20 浬,問二船之速度各一時幾浬?

(12)　有人買上下二種之砂糖合計價爲五元二角三分，上等比下等每斤貴二分五釐,總計少出五角五分,又所買之斤數下等比上等多五斤.問各種之斤數及一斤之價各如何?

(13)　用車若干輛運石材於某地需八時間，如增車八輛則每回各車之載量減五石且能於七時間運到，又如減車八輛則每回各車之載量增十一石,且須運九時間,問車輛之數及每回每車之載量如何?

(14)　有甲乙二職工每日工資不同,俱用若干日,甲均不缺席發 16 元,乙缺席五日發 9 元.如乙不缺席而甲缺席十五日時,則乙較甲當多得 8 元,問總日數及甲乙每日之工錢各若干?

(15)　甲中隊之兵數較乙中隊之兵數多 40 人，丙中隊較乙中隊少 50 人,今以同數彈丸分配甲乙丙三中隊，甲中隊之兵所得之彈較乙中隊之兵各少得 10 個,丙中隊之兵較乙中隊之兵各多得 20 個.問乙中隊之兵數及各中隊所得之彈丸總數如何?

(16)　有面積 1800 方尺之地今如闊增 24 尺,而深縮三尺則其面積增 288 方尺,問此地之深闊各幾尺?

(17)　有甲乙矩形二地,其面積各爲 1960 方尺,而甲之縱邊較乙長 20 尺,甲之橫邊較乙短 8 尺,問各縱橫幾何?

(18)　有矩形之地如長邊減去 3 尺，短邊減去 1 尺,則其面積減半.如長邊加 9 尺,短邊減 2 尺,則其面積不變,問各邊如何?

(19)　欲使面積 64 平方尺之矩形,內接於半徑 6 尺之圓,求矩形各邊之長如何?

(20)　有矩形二地,其面積合爲 262 方尺,甲地較乙地廣 2 尺,甲之闊比乙之闊長 2 尺,甲之深比乙之深短 2 尺，問甲乙二地之闊及深各如何?

(21)　有深較於寬長 180 尺矩形之地，其周圍欲開寬若干尺

之馬場須用 4800 方尺之地面，而其外周爲 1080 尺，問馬場之寬及地之面積如何？

(22) 有地板面積 117 平方尺之室，一方壁之面積爲 130 平方尺，鄰壁之面積爲 90 平方尺，問此室之闊，長高各幾尺？

答及解法指針

第一章　一元二次方程式之解法

問 1.　(一)　$0,\ -\frac{5}{9}$.　(二)　$0,\ \frac{3}{10}$.　(三)　$0,\ 2$.

(四)　$0,\ -\frac{7}{3}$.　(五)　$0,\ \frac{11}{24}$.

問 2.　(一)　± 5.　(二)　± 6.　(三)　± 9.

(四)　$\pm\frac{1}{2}$.　(五)　$\pm\frac{5}{3}$.　(六)　± 7.

(七)　± 8.　(八)　± 4.

問 3.　(一)　$\pm\sqrt{7}$.　(二)　$\pm\sqrt{3}$.　(三)　$\pm\sqrt{5}$.

(四)　$\pm\sqrt{6}$.　(五)　$\pm\frac{\sqrt{119}}{2}$.　(六)　$\pm\frac{\sqrt{13}}{10}$.

問 4.　(一)　$\pm\frac{\sqrt{2119}}{41}$.　(二)　$\pm\sqrt{294}$.　(三)　$\pm\frac{\sqrt{19}}{3}$.

(四)　$\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.　(五)　$\pm\frac{3\sqrt{2}}{2}$.　(六)　$\pm\frac{\sqrt{19}}{3}$.

(七)　$\pm\frac{\sqrt{19}}{2}$.　(八)　$\pm\frac{\sqrt{3989}}{3}$.

問 5.　(一)　$11,-1$.　(二)　$\frac{7}{2},-\frac{1}{2}$.　(三)　$-\frac{2}{3},-4$.

(四)　$\frac{-4+\sqrt{3}}{5},\ \frac{-4-\sqrt{3}}{5}$.　(五)　$\frac{1}{3},-1$.

(六)　$-\frac{2}{7}+\frac{\sqrt{15}}{5},\ -\frac{2}{7}-\frac{\sqrt{15}}{5}$.

問 6.　(一)　0.　(二)　0.　(三)　0.

問 7.　(一)　7, 8.　(二)　3, 7.　(三)　9, 10.

(四)　$-2,\ -5$.　(五)　$9,\ -8$.　(六)　$9,\ -6$

(七) $8, -3$.　(八) $9, -5$.　(九) $\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}$.

(十) $\frac{7}{2}, -\frac{5}{7}$.

問 9.　(一) $1, \frac{7}{30}$.　(二) $2, -\frac{1}{4}$.　(三) $2, -\frac{8}{3}$.

(四) $\frac{5}{3}, -\frac{3}{2}$.　(五) $6, -\frac{4}{3}$.　(六) $1, 2$.

問 10.　(一) $67i$.　(二) 34.　(三) 170.

(四) 529200.　(五) $4i\sqrt{2}$.

問 11.　$(10\sqrt{3}+3\sqrt{30}-50)i$.

問 12.　$-1, -i, +1, +i, -1, -i, +1, \cdots\cdots\cdots\cdots$

問 13.　$\frac{6a^2b-2b^3}{a^2+b^2}i$.　問 14. 原式$=\sqrt{(\sqrt{3+4i}+\sqrt{3-4i})^2}=4$.

問 15.　(一) $\pm 4i$.　(二) $\pm 9i$.　(三) $\pm 25i$.

(四) $\pm i\sqrt{17}$.　(五) $\pm\frac{7}{3}i$.　(六) $\pm\frac{9}{2}i$.

(七) $\pm\frac{3i\sqrt{10}}{10}$.　(八) $\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$.　(九) $\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$.

(十) $\frac{5\pm i\sqrt{167}}{16}$.　(十一) $\frac{-3\sqrt{3}\pm i\sqrt{93}}{6}$.

練習問題 I.

(1) $2, -12$.　(2) $2, 2$.　(3) $\frac{7}{3}, -1$.

(4) $\frac{5\pm\sqrt{7}}{3}$.　(5) $\frac{15\pm\sqrt{205}}{10}$.　(6) $\frac{15\pm\sqrt{449}}{16}$

(7) $0, 11$.　(8) $5, \frac{20}{17}$,　(9) $\sqrt{2}\pm\sqrt{3}$,

(10) $a, \frac{1}{a}$.　(11) $\frac{a^2+b^2\pm\sqrt{(a^2-b^2)^2+4abc^2}}{2ab.}$

(12) $-\frac{b}{a}, -\frac{a}{b}$. (13) $a, -\frac{1+a^2}{2a}$. (14) $\frac{a+b}{a-b}, \frac{a-b}{a+b}$.

(15) $1, \frac{b+c-2a}{c+a-2b}$. (16) $\frac{b}{a}, \frac{d}{c}$. (17) a, b.

第二章 一元二次方程式根之研究

問 1. (一) 實根. (二) 實根. (三) 實根.
(四) 等根. (五) 虛根. (六) 虛根.

問 2. (一) 判別式 $=-a^2b^4$, $\therefore$ 虛根.
(二) 判別式 $=4p^2q^4$, $\therefore$ 實根.
(三) 判別式 $=(a-1)^2+b^2$, $\therefore$ 實根.

問 3. 判別式 $=a^2+21$, $\therefore$ 實根.

問 4. 判別式 $=b^2-4ac$, $ac<0$. $\therefore$ $b^2-4ac>0$. $\therefore$ 實根.

問 5. 判別式 $=(a-b)^2+4c^2$. $\therefore$ 實根.

問 6. 與 5 同.

問 7. 如 $b^2-4ac=0$ 則爲等根,如 b^2-4ac 不爲完全平方則爲無理數,如 $b^2-4ac<0$ 則爲虛數.

問 8. $K=0$ 或 $K=\frac{2}{3}$. 問 9. $m=\frac{25}{12}$, 或 $m=-3$.

問 10. $a\geqq 5$ 或 $a\leqq 2$. 問 11. $a=6\pm 2\sqrt{10}$.

問 12. $\frac{-a\pm\sqrt{a^2-144}}{4}$,欲使 x 爲實數. $a\geqq 12$, $a\leqq 12$.

問 13. $\frac{12}{7}, \frac{3}{7}$. 問 14. $\frac{-2(m+1)}{m}, \frac{m-1}{m}$.

問 15. p^2-2q, $-p(p^2-3q)$.

問 18. $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$, $\alpha^2+\beta^2=\frac{b^2-2ac}{a}$.

故(一) 以 $\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2$ 代入之.

(二) 以 $\alpha^3\beta+\alpha\beta^3=\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)$ 代入之.

(三) 以 $\alpha^5+\beta^5=(\alpha+\beta)(\alpha^4-\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2-\alpha\beta^3+\beta^4)$

$=(\alpha+\beta)\{\alpha^4+\beta^4-\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)+\alpha^2\beta^2\}$ 代入之.

(四) 以 $\alpha^6+\beta^6=(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^4-\alpha^2\beta^2+\beta^4)$ 代入各值.

(五 以 $\dfrac{\beta}{\alpha^2}+\dfrac{\alpha}{\beta^2}=\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2\beta^2}=\dfrac{(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)}{\alpha^2\beta^2}$ 代入各值.

問 19. $\alpha-\beta=\sqrt{\dfrac{b^2-4ac}{a^2}}$, $\alpha^2-\beta^2=-\dfrac{b}{a}\sqrt{\dfrac{b^2-4ac}{a^2}}$

故(一) $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)=\sqrt{\dfrac{b^2-4ac}{a^2}}\left(\dfrac{b^2-ac}{a^2}\right).$

(二) $\alpha^2\beta-\beta^2\alpha=\alpha\beta(\alpha-\beta)=\dfrac{c}{a}\sqrt{\dfrac{b^2-4ac}{a^2}}.$

(三) $\alpha^5-\beta^5-(\alpha-\beta)(\alpha^4+\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^3+\beta^4)$

$=(\alpha-\beta)\{(\alpha^2+\beta^2)^2-\alpha^2\beta^2+\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)\}$

代入各值.

(四) $\alpha^6-\beta^6=(\alpha^2-\beta^2)(\alpha^4+\alpha^2\beta^2+\beta^4)=(\alpha^2-\beta^2)$

$\{(\alpha^2+\beta^2)^2-\alpha^2\beta^2\}$ 代入各值.

(五) $\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\beta-\alpha}{\alpha\beta}=-\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha\beta}$ 代入各值.

(六) $\dfrac{\beta}{\alpha}-\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha\beta}=-\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha\beta}$ 代入各值.

(七) $\dfrac{1}{\alpha^2}-\dfrac{1}{\beta^2}=\dfrac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha^2\beta^2}=-\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2\beta^2}$ 代入各值.

(八) $\dfrac{\beta^2}{\alpha}-\dfrac{\alpha^2}{\beta}=\dfrac{\beta^3-\alpha^3}{\alpha\beta}=-\dfrac{(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}{\alpha\beta}$ 代入各值.

問 20. 兩方程式二根之差之平方與 p^2-4q 相等.

問 21. $ax^2+2bx+c=0$ 之二根之差爲 $2\sqrt{\dfrac{b^2-ac}{a^2}}$ 因 $\dfrac{b^2-ac}{a^2}$ 一定故此值亦一定.

問 22. $(t-\alpha)(t-\beta)=t^2+pt+q.$

問 23. (一) $15p^2-64q$, (二) $-14p^2+81q+5p+1$.

問 24. (一) $\dfrac{2mnq+n(p^2-2q)}{(m^2+1)q+m(p^2-2q)}$

(二) $\dfrac{n^2q}{(m^2+1)q+m(p^2-2q)}$.

(三) $\dfrac{10p^2+10q}{6p^2+q}$.

問 25. (一) $x^2+2x-35=0$. (二) $6x^2-5x+1=0$.

(三) $x^2-2ax+a^2-b^2=0$. (四) $x^2+2\sqrt{2}x-1=0$.

(五) $x^2+2mx+m^2+n^2=0$.

問 26. $9x^2-82x+9=0$.

問 27. $3x^2-10a^2x+7a^4=0$.

問 28. $c^2x^2-(b^2-2ac)x+a^2=0$.

問 29. $a^3x^2-(3abc-b^3)x+c^3=0$.

問 30. $px^2+(p^2+1)x+p=0$.

問 31. $qx^2+p(q+1)x+p^2=0$.

問 32. $a^2cx^2-(3abc-b^3)x+ac^2=0$.

問 33. $a^2x^2+ab(m+n)x+(m^2+n^2)ac+mn(b^2-2ac)=0$.

問 34. $x^2+4px+3p^2+4q=0$.

問 35. $(3p^2+4q)x^2-(p^2+4q)x+q=0$.

問 36. 如命一根爲 α, 他根爲 2α, 則由 $\alpha+2\alpha=-p$. $2\alpha,\alpha=q$ 之二式得 $2p^2=9q$.

問 37. 如命一根爲 α, 他根爲 $m\alpha$ 則 $(m+1)\alpha=-\dfrac{b}{a}$,

$\alpha=\dfrac{-b}{(m+1)\alpha}$, $m\alpha^2=\dfrac{c}{a}$, 故由此二式得 $mb^2=(m+1)^2ac$.

問 38. $p=2m+1$, $m=\dfrac{p-1}{2}$, $q=m^2+m=\left(\dfrac{p-1}{2}\right)^2+\dfrac{p-1}{2}$

$\therefore\quad p^2-4q-1=0$.

練習問題 II.

(1) 判別式 $=(a+b)^2+c^2$. (2) $a=9$.

(3) 從 $m>=<-\frac{1}{2}$ 而爲實根，等根，虛根.

(4) 3, -5.

(5) 判別式 $=-(p-q)^2$ 故爲 $p\neq q$，則此值爲負.

(6) (一) $\frac{39}{25}$. (二) $\frac{29}{25}$. (三) $\frac{-7\sqrt{29}}{25}$. (四) $-\frac{238}{125}$

(7) (一) $\frac{2b^2+ac-15ab+25a^2}{a^2}$. (二) $\frac{9ac-2b^2}{ac}$.

(8) 欲使二根爲正，則 $-\frac{b}{a}>0$, $\frac{c}{a}>0$? 欲使二根爲負,則 $-\frac{b}{a}<0$, $\frac{c}{a}>0$.

(9) $\frac{c}{a}<0$, $-\frac{b}{a}>0$. (10) $acx^2-b^2x+b^2=0$.

(11) (一) $x^2+px-6p^2+25q=0$.

(二) $4qx^2-(6p^2-12q+2p)x-3p+9q+1=0$.

(12) $\frac{-\alpha\beta\pm\sqrt{\alpha^2\beta^2+4(\alpha+\beta)}}{2}$, (13) 26, -26.

(14) 與第 14 節例 1 相同. (15) -2, -7.

第二章 二次方程式之應用

問 1. (一) $(5x+7)(x-3)$. (二) $(5x-7)(7x+5)$.

(三) $(11x-1)(2x-3)$. (四) $(5x-8)(x-6)$.

(五) $(11x+5)^2$. (六) $(3x-16)(4x+9)$.

(七) $(5x+3)(3x-4)$ (八) $(x+54)(x-24)$.

問 2.　(一)　$(x+y+1)(2x+3y+1)$.　(二)　$(x+y+1)(2x+3)$.

問 3.　7, 8.　　問 4.　5, 8.　　問 5.　13, 11.

問 6.　14, 9.　　問 7.　3, 6, 12, -3, -6, -12.

問 8.　21, 22, 23.　問 9.　$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$.　問 10.　48.

問 11.　48.　　問 12.　12, 15.　　問 13.　26 尺, 38 尺.

問 14.　如命前列之人數爲 x. 則側面爲 $x+14$ 人. 由題意. $x(x+14)=5(x+828)$. 解之取正根,則得 $x=60$.

故全人員爲 $60\times(60+14)$ 卽 4440 人.

問 15.　所求之廣爲 x 尺時. $2(60+x)x+2(40+x)x=1344$.

解之取正根　$x=6$.　　答 6 尺.

問 16.　所求之年利率如以 x 表之,

$$\{3000(1+x)-80\}\{1+x-0{\cdot}005\}=3270{\cdot}5$$

命 $1+x=X$, 解此方程式 $X=1{\cdot}06$ 答 6 釐.

練習問題 III

(1)　$(7x+1)(x-1)$.　　(2)　$3(x-1)(x-2)$.

(3)　$(5x+24)(x-3)$.　　(4)　$(x-4)(9x+34)$.

(5)　$(3x+5)(x-5)$.　　(6)　$(13x+11)(x+1)$.

(7)　$(x+p+q)(x+p-q)$.　　(8)　$(mx-n+r)(mx+n+r)$.

(9)　70 歲, 30.歲

(10)　命所求之年齡爲 x 歲, 由題意 $x^2=\frac{6}{7}(x-5)(x+8)+37$.

解之取其正根. $x=19$. 答 19 歲.

(11)　命乙一日之行程爲 $2x$ 哩. 則相遇所需之日數爲 x.

$\therefore$　$2x, x=320-(2x+8)x$. 解之取其正根 $x=8$. 故所求之里程 $8\times2\times8=128$, 卽乙在距出發地 128 哩之處.

(12) 夾直角之一邊之長命爲 x 尺,則他一邊爲$(x+48)$尺.

故 $x(x+48)=1391\times 2$. 解之取其正根 $x=34$.

∴ 答 34 尺, 82 尺.

第四章 分數方程式

問 1. (一) $3x=0$. (二) $x+1=0$. (三) $x(x-2)=0$.

問 2. (一) 6. (二) 11. (三) $\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

(四) 0. (五) $-\dfrac{1}{3}$.

問 3. (一) 6. (二) $\dfrac{11}{2}$. (三) 不能.

(四) $\dfrac{25}{18}, -\dfrac{5}{3}$. (五) -3. (六) 1.

(七) 0. (八) $\pm i$. (九) $\pm\sqrt{ab}$.

問 4. (一) 0, ± 5. (二) 5. (三) $10\dfrac{1}{2}$.

(四) 0, $6\pm\sqrt{3}$. (五) 4.

問 5. 如命豫定時間爲 x 時,則每時之速度爲 $\dfrac{9}{x}$ 哩.

由題意 $\dfrac{3}{\dfrac{9}{x}}+\dfrac{6}{\dfrac{9}{x}+1}=x-1$, 解之取其正根得 $x=\dfrac{9}{2}$, 卽答 4·5 時間.

問 6. 命乙行車每時之速度爲 x 哩, 則甲行車每時之速度爲 $(x+15)$ 哩. 故由題意 $\dfrac{36}{x}-\dfrac{1}{5}=\dfrac{36}{x+15}$ 解之取其正根 $x=45$.

卽乙 45 哩. 甲 60 哩.

問 7. 命會員之數爲 x, 則各一人之負擔額爲 $\frac{1800}{x}$ 分, 然因二人不到, 故一人之負擔額爲 $\frac{1800}{x-2}$ 分. 故由 $\frac{1800}{x-2}=\frac{1800}{x}+30$, 解之取其正根. $x=12$. 答 12 人.

問 8. 命甲地貧民之數爲 x, 則乙地爲 $(x+40)$ 人. 由題意 $\frac{180}{x}-\frac{180}{x+40}=6$. 解之取其正根. $x=20$. 故甲地 20 人, 乙地 60 人.

問 9. 命紅糖一斤之價爲 x, 則白糖 7 斤之價爲 $(7x+21)$ 分, 故一斤之價爲 $(x+3)$ 分, 故 $\frac{240}{x}=\frac{240}{x+3}+4$. 解之取其正根 $x=12$. 卽 1 斤 12 分, 故 7 斤 8 角 4 分.

問 10. 命混合液一石中之酒量爲 x 石. 則水量爲 $(1-x)$ 石. 由題意 $\frac{x+1}{1-x}=\frac{9x}{1-x+1}$ 解之 $x=\frac{1}{2}$. 故答各 5 斗.

問 11. 於混合液之全量取出單位量, 命其中所含酒精之量爲 x. 則水之量爲 $1-x$, 由題意 $\frac{1+x}{1-x}=\frac{10x}{2-x}$, 解之, $x=\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$ 故酒精爲全量之 $\frac{2}{3}$ 或 $\frac{1}{3}$, 此二值皆適合題意.

問 12. 命最初酒之量爲 x 升, 自其中汲出 9 升, 以同量之酒補後, 對於酒之全量之比爲 $\frac{x-9}{x}$. 故第二回汲出之混合液 9 升中含有純酒 9 升 $\times\frac{x-9}{x}$. 故桶中所留最後之酒之升數爲 $x-9-\frac{9(x-9)}{x}$. 又最後桶中之酒量與全量之比爲 $9:16+9=9:25$. 故得方程式如下:

$$x-9-\frac{9(x-9)}{x}:x=9:25.$$

解之 $x=22{\cdot}5$ 及 $5\frac{5}{8}$，然 $x>9$，故 $5\frac{5}{8}$ 不適於題意

$\therefore$ 答 $22{\cdot}5$ 升.

練習問題 IV.

(1) $\frac{7}{4}$. (2) 1. (3) $\dfrac{a+b+c\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2-ab+bc-ca}}{3}$

注意. $a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab=\frac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}$

故此根不拘 a, b, c 之值如何皆爲實數.

(4) $\dfrac{a-x}{b}-\dfrac{b}{a-x}=\dfrac{a}{b-x}-\dfrac{b-x}{a}$ 可由移項如下:

$$\frac{(a-x)(b-x)-ab}{b(b-x)}+\frac{(b-x)(a-x)-ab}{a(a-x)}=0.$$

卽 $$\frac{x^2-(a+b)x}{b(b-x)}+\frac{x^2-(a+b)x}{a(a-x)}=0.$$

如 $x^2-(a+b)x=0$. 則 $x=0$, $a+b$.

如 $\dfrac{1}{b(b-x)}+\dfrac{1}{a(a-x)}=0$. 則 $x=\dfrac{a^2+b^2}{a+b}$.

皆爲所求之根.

(5) $\dfrac{a}{x+a}+\dfrac{b}{x+b}=\dfrac{a-c}{x+a-c}+\dfrac{b+c}{x+b+c}$ 可由移項變形如下:

$$\frac{a(x+a-c)-(a-c)(x+a)}{(x+a)(x+a-c)}=\frac{(b+c)(x+b)-b(x+b+c)}{(x+b+c)(x+b)}$$

卽 $$\frac{cx}{(x+a)(x+a-c)}=\frac{cx}{(x+b+c)(x+b)}$$

$\therefore$ $x=0$ 或 $\dfrac{1}{(x+a)(x+a-c)}=\dfrac{1}{(x+b+c)(x+b)}$.

解之，得 $x=-\dfrac{a+b}{2}$.

(6) $\dfrac{1}{x^2+11x-8}+\dfrac{1}{x^2+2x-8}+\dfrac{1}{x^2-13x-8}=0$. 命 $x^2-8=y$.

除去分母而簡單之. 得 $y^2-49x^2=0$. $\therefore$ $x^2-8=\pm 7x$ 解之得 $x=\pm 1$, ± 8.

(7) $\dfrac{1\pm\sqrt{21}}{4}$,　　(8) $\dfrac{-5\pm\sqrt{345}}{10}$.

(9) 二人所成之日數如命爲 x, 則由題意 $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x+12}+\dfrac{1}{x+27}$

解之, 答 18 日.

(10) 命男工之人數爲 x 人, 則女工之人數爲 $(1100-x)$ 人. 故男工總員一日能成 $\dfrac{1}{x}$, 女工總員一日能成 $\dfrac{1}{1100-x}$ 之工作.

$$\therefore \qquad 25(1100-x)\times\frac{1}{x}=36x\times\frac{1}{1100-x},$$

解之取其正根 $x=500$, 答男工 500 人, 女工 600 人.

(11) 命所求之時數爲 x, 如二人共同則每時間成 $\dfrac{1}{x}$ 之工作又甲成 $\dfrac{1}{2}$ 之工作需 $(x-1)$ 時間, 故甲一時間成 $\dfrac{1}{2(x-1)}$ 之工作, 依同理乙成 $\dfrac{1}{2(x+2)}$ 之工作, 故將 $\dfrac{1}{2(x-1)}+\dfrac{1}{2(x+2)}=\dfrac{1}{x}$ 解之 $x=4$. 答 4 時間.

(12) 命椅子之數爲 x, 則一椅所坐之豫定人員爲 $\dfrac{800}{x}$ 故由題意 $\dfrac{800}{x+20}+2=\dfrac{800}{x}$ 解之, 取其正根 $x=80$. 答 $\dfrac{800}{80}=10$ 人.

(13) 所求甲乙兩港之距離如命爲 x 浬, 則商船與軍艦之速度每時各爲 $\dfrac{x}{6\frac{2}{3}}$ 浬 (即 $\dfrac{3x}{20}$ 浬) 及 $\dfrac{x-48}{2}$ 浬. 然航行 48 浬所需時間之差爲一時間, 故

$$\frac{48}{\dfrac{3x}{20}}-\frac{48}{\dfrac{x-48}{2}}=1,$$

解之，$x=80 \cdot 192$. 答 80 浬或 192 浬.

(14) 航行甲丙間每時之速度如命爲 x 浬.則乙丙間爲$(x+1)$浬，甲乙間爲$(x+2)$浬. 由題意

$$\frac{120}{x}=\frac{78}{x+1}+\frac{56}{x+2}$$

解之取其正根 $x=12$.

$\therefore$ 航行甲丙所需之時間爲 $\frac{120}{12}$ 時，卽 10 時間，乙丙間爲 6 時間，甲乙間爲 4 時間.

(15) 所求之畝如命爲 x 畝，則一畝之租入價爲 $\frac{1440}{x}$ 元，故一畝之租出價爲 $\left(\frac{1440}{x}+2\right)$元. 故

$$(x-8)\left(\frac{1440}{x}+2\right)=1440.$$

解之取其正根 $x=80$，卽答 80 畝.

(16) 命所求之疋數爲 x，則一疋之價爲 $\frac{24}{x}$ 元，由題意

$$\left(\frac{24}{x}+0 \cdot 2\right)(x-2)=25 \cdot 2.$$

解之取其正根，$x=20$. 答 20 疋.

(17) 命一個之買價爲 x 分，則 27 元所買之個數爲 $\frac{2700}{x}$ 個，破損後爲$\left(\frac{2700}{x}-4\right)$個，賣後所得利金爲 1 元，故得

$$\left(\frac{2700}{x}-4\right)(x+5)-2700=100.$$

解之取其正根，$x=45$. 答 4 角 5分.

第五章 無理方程式

問 1. (一) 1. (二) 3. (三) 5. (四) $4, \frac{1}{9}$.

問 2. (一) 6. (二) 2. (三) $3, -\frac{5}{3}$. (四) 4.

(五) 8. (六) 無根 (七) 7. (八) a, b

(九) $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$.

問 3. (一) 至得 $x=2$ 之根不感困難. 如 $x=2$ 則

左邊 $=\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{(\sqrt{4}-\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}-\sqrt{3}$
$=2-\sqrt{3}$, 右邊$=2-\sqrt{3}$. $\therefore$ $x=2$ 爲所求之根.

(二) 得 $x=2$ 後而行驗算.

左邊 $=\sqrt{6-2\sqrt{5}}=\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}=\sqrt{5}-1$,

右邊 $=\sqrt{5}-1$. $\therefore$ $x=2$ 爲所求之根.

(三) 得 $x=5$ 之根. 驗算.

左邊 $=\sqrt{11+2\sqrt{18}}-3=\sqrt{(\sqrt{9}+\sqrt{2})^2}-3$
$=3+\sqrt{2}-3=2$. 右邊 $=2$ $\therefore$ $x=5$ 爲所求之根.

問 6. (一) $0, a^2-b^2$ (但僅適合於 a, b 爲正數時).

(二) 0, (但僅適合於 $a>0$, $b<0$ 時).

$4(a+b)$, (但僅適合於 $2a+b>0$, $2b+a<0$).

(三) $0, 3b$.

問 7. (一) a, b.

(二) $\sqrt[4]{a-x}+\sqrt[4]{b-x}=\sqrt[4]{a+b-2x}$ 之兩邊四乘之,

則得 $a-x+4(\sqrt[4]{a-x})^3\sqrt[4]{b-x}+6\sqrt{a-x}\sqrt{b-x}$

$$+4\sqrt[4]{a-x}(\sqrt[4]{b-x})^3+b-x=a+b-2x.$$

約去同類項以 $\sqrt[4]{a-x}\sqrt[4]{b-x}$ 括之時.

$\sqrt[4]{a-x}\sqrt[4]{b-x}(6\sqrt[4]{a-x}\sqrt[4]{b-x}+4\sqrt{a-x}+4\sqrt{b-x})=0.$

括弧內不能爲負,若括弧內爲 0, 則各項皆各爲 0.

故 $\sqrt[4]{a-x}\sqrt[4]{b-x}=0$. 卽 $(a-x)(b-x)=0$.

$\therefore$ $x=a,\ b$ 二根皆能滿足原方程式.

(三) $a,\ b$.

問 8. (一) $6\sqrt{x^2-2x+6}=21+2x-x^2$ 移項如下:

$$x^2-2x+6+6\sqrt{x^2-2x+6}-27=0.$$

命 $\sqrt{x^2-2x+6}=X$ 則 $X^2+6X-27=0$, 解之取 X 之正値而求 x 時,則得 3 及 -1. 二根皆適合於原方程式.

(二) 命 $\sqrt{x^2-7x+18}=X$ 則所設之方程式爲

$X^2+X-42=0$, 故得 $x=9$ 及 -2.

(三) 命 $\sqrt{x^2-5x+11}=X$ 答 7. -2.

(四) 命 $\sqrt{x^2-5x+1}=X$ 答 8, -3.

問 9. (一) 欲解 $\dfrac{x-\sqrt{3}+\sqrt{x^2-3}}{x-\sqrt{3}-\sqrt{x^2-3}}=\dfrac{3x+\sqrt{3}}{x-5\sqrt{3}}$ 時,如利用比例之性質卽如 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ 則 $\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{c+d}{c-d}$ 則得關係如下:

$$\frac{2x-2\sqrt{3}}{2\sqrt{x^2-3}}=\frac{4x-4\sqrt{3}}{2x+6\sqrt{3}} \quad 即 \quad \frac{x-\sqrt{3}}{\sqrt{x^2-3}}=\frac{2x-2\sqrt{3}}{x+3\sqrt{3}}.$$

除去分母 $(x-\sqrt{3})(x+3\sqrt{3})=2(x-\sqrt{3})(\sqrt{x^2-3})$.

如 $x-\sqrt{3}=0$ 卽 $x=\sqrt{3}$, 則原方程式之分母爲 0.

故不能解. $\therefore$ $x+3\sqrt{3}=2\sqrt{x^2-3}$.

解之得 $x=\sqrt{3}\pm4$ 能滿足原方程式.

(二) 與前問同法,得 $x=\pm2a$.

(三) $\pm\sqrt{\dfrac{a^2(d-c)^2-b^2(d+c)^2}{2(c^2+d^2)}}$.

問 10. 命所求之數爲 x, 則得 $x+2\sqrt{x}=143$.

解之得 $x=121$.

問 11. 命某數爲 x，則得 $x+\sqrt{x}=2\sqrt{5x+20}$.

解之得 答 16.

問 12. 命所求之高爲 x 尺，則應用直角三角形斜邊上之平方等於他二邊上平方之和得關係如下：

$\sqrt{15^2-x^2}+\sqrt{13^2-x^2}=14.$

解之得答 12 尺.

練習問題 V.

(1) 25. (2) 1. (3) 無根. (4) 10.

(5) 5. (6) 0. (7) 8.

(8) $\frac{a^2+b^2+c^2-2bc-2ca-2ab}{4c}$ (但僅適用於 $\frac{a-b+c}{2\sqrt{c}}>0$, $\frac{-a+b+c}{2\sqrt{c}}>0$ 時)

(9) $\frac{(a-b)^2}{2ab}$ (但僅適用於 $a>0$, $a-b<0$, $3a-b>0$ 時).

(10) $\sqrt{x(a+b-x)}+\sqrt{a(b+x-a)}+\sqrt{b(a+x-b)}=0.$

各項不能爲負，故欲使其爲 0，非各項各自爲 0 不可. 卽

$x(a+b-x)=0$, $a(b+x-a)=0$, $b(a+x-b)=0$.

欲使此三方程式同時成立，惟 $x=a=b=0$ 或 $x=0$, $a=b$ 之時方可.

(11) $\sqrt{ab}$

(12) 除去分母變爲下形.

$$(2x^2-3x+2)-\sqrt{2x^2-3x+2}+1=0.$$

後得 $x=1,\ -\frac{1}{2}$.

(13) $(x-3)^2+3x-22=\sqrt{x^2-3x+7}$ 解括弧而移項之得

$x^2-3x+7-\sqrt{x^2-3x+7}=20$，　求　$\sqrt{x^2-3x+7}$　而後得

$x=6,\ -3.$

(14)　無根.

(15)　$0,\ \pm\sqrt{2}.$

(16)　命　$AE=x$，則 $BE=30-x$，由題意

$$\sqrt{9^2+x^2}+\sqrt{10^2+(30-x)^2}=36.$$

解之　答　$\frac{234}{11}$ 尺，$\frac{96}{11}$ 尺.

第六章　高次方程式

問 1.　(一)　$\pm2,\ \pm3.$　(二)　$\pm2,\ \pm5.$　(三)　$\pm9,\ \pm10.$

(四)　$\pm6,\ \pm\frac{1}{7}.$

問 2.　解 $x^4-3x^2+1=0$，得 $x=\pm\sqrt{\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}}.$

命　$\sqrt{\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}}=\sqrt{x}\pm\sqrt{y}$，求 $x,\ y$，得 $x=\frac{5}{4},\ y=\frac{1}{4}.$

$\therefore\ x=\pm\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\pm\frac{1}{2}\right)$　如以　$\sqrt{5}=2.24$，而計算之則得

$\pm1.61,\quad \pm0.61.$

問 3.　$\pm a,\quad \pm\frac{1}{a}.$

問 4.　(一)　$3,\ -2,\ 2,\ -1.$　　(二)　$0,\ \pm3i.$

(三)　$-2,\ 1,\ \frac{-1\pm i\sqrt{23}}{2}.$

問 5.　(一)　$(x-3)(x+4)(x-1)(x+2)=144$　變形如下：

$(x^2+x-12)(x^2+x-2)=144.$ 命 $x^2+x=X$ 則得

$X^2-14X-120=0.$　由此求 X 而後求 x，得

$$x=4,\ -5,\ \frac{-1\pm i\sqrt{23}}{2}$$

(二) $0,\ -5,\ \dfrac{-5\pm i\sqrt{15}}{2}$.

問 6. (一) $\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. (二) $0,\ 1,\ 3,\ -8$.

問 7. (一) $3,\ \dfrac{1}{3},\ -1$. (二) $1,\ \dfrac{2}{5},\ \dfrac{5}{2}$.

問 8. (一) $2,\ \dfrac{1}{2},\ 3,\ \dfrac{1}{3}$. (二) $\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{-1\pm i\sqrt{15}}{4}$.

(三) $2,\ \dfrac{1}{2},\ 1,\ 1$.

問 9. (一) $1,\ 1,\ 2,\ \dfrac{1}{2}$. (二) $1,\ -1,\ -1,\ 3,\ \dfrac{1}{3}$.

問 10. (一) $-1,\ -\omega,\ -\omega^2$. (二) $2,\ 2\omega,\ 2\omega^2$.

(三) $-4,\ -4\omega,\ -4\omega^2$. (四) $\dfrac{5}{2},\ \dfrac{5}{2}\omega,\ \dfrac{5}{2}\omega^2$.

(五) $-\dfrac{7}{10},\ -\dfrac{7}{10}\omega,\ -\dfrac{7}{10}\omega^2$.

問 12. $\pm1,\ \pm\omega,\ \pm\omega^2,\ \pm i,\ \pm i\omega,\ \pm i\omega^2$.

問 13. $\pm2,\ \pm2i$.

問 14. $\dfrac{3}{2}(\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}),\ \dfrac{3}{2}(-\sqrt{2}\pm i\sqrt{2})$.

問 16. (一) $\pm5,\ \pm5i$.

(二) $5(\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}),\ 5(-\sqrt{2}\pm i\sqrt{2})$.

問 17. $2,\ \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\pm i\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)$,

$\dfrac{1}{2}\left(-\sqrt{5}-1\pm i\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)$.

問 18. (一) $-1,\ \dfrac{1}{4}\left(1+\sqrt{5}\pm i\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)$,

$\dfrac{1}{4}\left(1-\sqrt{5}\pm i\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)$.

(二) $-3,\ \dfrac{3}{4}\left(1+\sqrt{5}\pm i\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)$,

$$\frac{3}{4}\left(1-\sqrt{5}\pm i\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right).$$

(三) 由 $x^5-1=0$ 與 $x^5+1=0$. 得之

問 19. (一) $8,\ 8\omega,\ 8\omega^2$.

(二) $-\dfrac{3\sqrt[3]{100}}{10},\ -\dfrac{3\sqrt[3]{100}}{10}\omega,\ -\dfrac{3\sqrt[3]{100}}{10}\omega^2$.

(三) $\pm25,\ \pm25i$.

(四) $\pm\sqrt[4]{\dfrac{13}{7}},\ \pm i\sqrt[4]{\dfrac{13}{7}}$.

(五) $\dfrac{\sqrt{30}\pm i\sqrt{30}}{6},\ \dfrac{-\sqrt{30}\pm i\sqrt{30}}{6}$.

(六) $1+\sqrt{5}\pm i\sqrt{10+2\sqrt{5}},\ 1-\sqrt{5}\pm i\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

問 20. (一) $3,\ 3\omega,\ 3\omega^2,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\omega,\ \dfrac{1}{2}\omega^2$.

(二) $\pm1,\ \pm i,\ \pm2,\ \pm2i$.

(三) 由 $x^5=32$ 及 $x^5=1$ 得之.

問 21. (一) $x^3-mx+m+1=0$. 得順次變形如下:

$x^3+1+m(x+1)=0$ 卽 $(x+1)(x^2-x+1)+m(x+1)=0$.

如 $x+1=0$ 則 $x=-1$, 如 $x^2-x+m+1=0$ 則

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1-4m-4}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{-4m-3}}{2}.$$

(二) 由視察得 $x=1$ 故原方程式爲

$(x-1)(2x^2+5x-3)=0$. 命第二之因數爲 0, 則得 $\dfrac{1}{2}$, -3, 故所求之根爲 $1,\ \dfrac{1}{2},\ -3$.

(三) 如 $x=5$ 則適合, 解左邊括弧而簡單之, 括出 $x-5$ 之因數,則得 $(x-5)(x^2-x+6)=0$.

由第二因數, 得 $x=\dfrac{1\pm i\sqrt{23}}{2}$, $\therefore$ 所求之根爲

$5,\ \dfrac{1\pm i\sqrt{23}}{2}$

（四）　如　$x=10$　則適合，與前同法得他根　$2\pm i\sqrt{15}$.

（五）　由視察得　$x=a$. 與前同法得 $x=b$, $x=-(a+b)$.

或由視察悉得 $x=a, b, -(a+b)$ 之根，因本題爲三次方程式，不能有三以上之根，故三根即爲以上三者.

問 22.　於 $x^5-10x^2+15x-6=0$，如以 $x=1$ 則適合，括出因數，於第二因數，更以 $x=1$ 亦適合，三用此法，結局得 $(x-1)^3(x^2+3x+6)=0$. 故所求之根，爲　1,　$\dfrac{-3\pm i\sqrt{15}}{2}$.

問 23.　（一）　2, 3, $\dfrac{5}{2}$.

（二）　$(a-x)^4+(b-x)^4=(a+b-2x)^4$　之右邊可變形爲　$\{(a-x)+(b-x)\}^4$，故展開而約去同項得

$$2(a-x)(b-x)\{2(a-x)^2+3(a-x)(b-x)+2(b-x)^2\}=0.$$

如　$a-x=0$　則　$x=a$,　如　$b-x=0$　則　$x=b$.

如　$2(a-x)^2+3(a-x)(b-x)+2(b-x)^2=0$　則

$$x=\frac{1}{2}(a+b)\pm\frac{1}{14}(a-b)i\sqrt{7}.$$

（三）　原方程式可變形爲

$$(a-x)^5+(b-x)^5=\{(a-x)+(b-x)\}^5.$$

展開左邊除去同類項則得，

$$(a-x)(b-x)\{(a-x)^3+2(a-x)^2(b-x)$$
$$+2(a-x)(b-x)^2+(b-x)^3\}=0.$$

如　$a-x=0$ 則 $x=a$，如 $b-x=0$ 則 $x=b$,　如 $(a-x)^3+2(a-x)^2(b-x)+2(a-x)(b-x)^2+(b-x)^3=0$. 則

$$(a-x+b-x)\{(a-x)^2-(a-x)(b-x)+(b-x)^2\}$$
$$+(a-x)^2(2b-2x)+(2a-2x)(b-x)^2=0.$$

由視察 $2x=a+b$, 卽得 $x=\frac{a+b}{2}$,他根於除去 $a+b-2x$ 之因數後由 $3x^2-3(a+b)x+a^2+b^2+ab=0$ 得

$x=\frac{1}{2}(a+b)\pm\frac{1}{6}(a-b)i\sqrt{3}.$

問 24. 於 $(x-a)^3(b-c)^3+(x-b)^3(c-a)^3+(x-c)^3(a-b)^3=0.$ 之方程式，如 $x=a$, $x=b$, $x=c$ 皆能滿足，然此方程式爲三次式不能有三以上之根. 故 a, b, c, 爲所求之根.

練習問題 VI.

(1) ± 2, $\pm\frac{\sqrt{21}}{3}$.　　(2) $\pm\frac{1}{6}i$, $\pm\frac{\sqrt{5}}{3}i$.

(3) $\pm\frac{3}{8}$, $\pm i$.　　(4) $\pm a$, $\pm b$.

(5) 4, -9, $\frac{-5\pm i\sqrt{159}}{2}$.　　(6) a, $-9a$, $-4a\pm ai\sqrt{15}$.

(7) 1, $-\frac{2}{7}$, $-\frac{7}{2}$.　　(8) 8, $\frac{1}{8}$, -1.

(9) 2, $\frac{1}{2}$, -3, $-\frac{1}{3}$.　　(10) -10, -1, 3, $\frac{1}{3}$.

(11) $\frac{\sqrt[3]{5}}{6}$. $\frac{\sqrt[3]{5}}{6}\omega$. $\frac{\sqrt[3]{5}}{6}\omega^2$.

(12) $-\sqrt[3]{\frac{13}{10}}$, $-\sqrt[3]{\frac{13}{10}}\omega$, $-\sqrt[3]{\frac{13}{10}}\omega^2$.

(13) 9, $\frac{9}{4}\left(\sqrt{5}-1\pm i\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)$, $\frac{9}{4}\left(-\sqrt{5}-1\pm i\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)$.

(14) a, b, $\frac{1}{2}\{a+b\pm(a-b)i\sqrt{3}\}$.

第七章 聯立方程式

問 1. (一) 5, 3; $\frac{3}{2}$, 10. (二) 3, 2; -5, 6.

(三) 4, 1; $-\frac{25}{7}$, $-\frac{71}{35}$. (四) $\frac{13+\sqrt{139}}{2}$, $\frac{23+\sqrt{139}}{2}$,

$\frac{13-\sqrt{139}}{2}$, $\frac{23-2\sqrt{139}}{2}$; (五) 1, 2; 3, 5.

(六) 17·046. $-3·682$; $-12·246$, 6·082.

問 2. (一) 2, 3; 3, 2. (二) 3, 7; 7, 3.

(三) 4, 5; 5, 4. (四) 3, 30; 30, 3.

(五) 12, 15, 15, 12.

問 3. (一) $\frac{\sqrt{a^2+4b}+a}{2}$, $\frac{\sqrt{a^2+4b}-a}{2}$; $\frac{-\sqrt{a^2+4b}+a}{2}$,

$\frac{-\sqrt{a^2+4b}-a}{2}$.

問 4. (一) 8, 7; -7, -8. (二) 9, 6; -6, -9.

(三) 15, 2; -2, -15.

問 5 1, 2; $\frac{22}{7}$, $\frac{7}{11}$.

問 6. $\frac{a\pm\sqrt{a^2+4mnb}}{2m}$, $-\frac{a\mp\sqrt{a^2+4mnb}}{2n}$.

問 7. (一) 5. 4; 4, 5. (二) 2, 8; 8, 2.

(三) 6, 7; 7, 6. (四) 11, 10; -10, -11.

(五) 6, 3; -3, -6. (六) 3, 4; 4, 3.

(七) 7, 2; -2, -7.

問 8. (一) 2, 1. (二) 5, 2. (三) 7, 1. (四) $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$.

問 9. (一) 1, 2; $-\frac{42}{32}$, $-\frac{661}{32}$. (二) 1, 2; -2, -1.

問 10. (一) $6,\ \frac{2}{3}$; $3,\ \frac{1}{3}$. (二) $0,\ 0$; $\frac{2}{3},\ \frac{3}{2}$.

(三) $3,\ 5$; $5,\ 8$. (四) $\frac{3}{2},\ 2$; $\frac{5}{4},\ \frac{8}{5}$.

(五) $2,\ 3$; $\frac{3}{4},\ \frac{4}{3}$.

問 11. $2,\ 1$; $-\frac{7}{4},\ -4$.

問 12. (一) $1,\ \pm 2,\ -4,\ \pm i$. (二) $\pm 1,\ 2$; $\pm\frac{\sqrt{11}}{4},\ \frac{3}{4}$.

問 13. (一) $2,\ 3$; $-2,\ -3$. (二) $6,\ 5$; $-6,\ -5$.

(三) $3\sqrt{3},\ \sqrt{3}$; $-3\sqrt{3},\ -\sqrt{3}$.

(四) $\pm 1,\ \pm 2$; $\pm\sqrt{3},\ 0$ (符號與次序同以下做此).

(五) $\pm 3,\ \pm 1$; $\pm\frac{8}{\sqrt{6}},\ \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$.

(六) $\pm\frac{1}{2},\ \mp\frac{3}{2}$; $\pm\frac{7}{\sqrt{6}},\ \mp\frac{1}{\sqrt{6}}$.

問 14. (一) $0,\ 0$; $-4,\ 2$; $\frac{12}{7},\ \frac{4}{7}$. (二) $0,\ 0$; $2,\ 1$.

問 15. (一) $1,\ 2$; $-\frac{7}{5},\ \frac{28}{5},\ 0,\ 0$. (二) $0,\ 0$; $1,\ 2$; $-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}$

問 16. (一) $1,\ 2$; $1,\ -1$. (二) $2,\ 2$; $-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}$.

問 17. (一) $0,\ 1,\ 0$; -3; $\frac{-13\pm 3i\sqrt{131}}{22},\ \frac{-1\pm i\sqrt{131}}{22}$.

(二) $1,\ 0$; $-4,\ 0$. $\frac{-7\pm\sqrt{177}}{8},\ \frac{-3\pm\sqrt{177}}{8}$.

問 18. (一) $\pm 1,\ \pm 2$; $\pm 2,\ \pm 1$. (二) $\pm 2,\ \pm 5$; $\pm 5,\ \pm 3$.

問 19. (一) $5,\ 1$; $1,\ 5$; $2,\ 3$; 2. (二) $0,0$; $\frac{1}{2},\ \frac{1}{6}$; $\frac{1}{6},\ \frac{1}{2}$.

(三) 1, 1; $\frac{-5\pm i\sqrt{7}}{2}$, $\frac{-5i\mp i\sqrt{7}}{2}$.

(四) 3, 1; −1 −3. (五) 1, 1; $\frac{-5\pm i\sqrt{7}}{2}$, $\frac{-5\mp i\sqrt{7}}{2}$

(六) 5, −4; 4, −5; 4, 1; −1, −4.

問 20. (一) 1, 3; 3, 1. (二) 5, 2; 2, 5.

(三) 4, 7; 7, 4. (四) 5. 1; −1, −5.

(五) 10, 8; −8, −10.

問 21. (一) 1, 3; 3, 1; $2\pm 5i$; $2\pm 5i$.

(二) 與(一)同法解之卽得,因煩雜故答數從略.

問 22. (一) −1, 2; 2, −1; $\frac{1}{2}(1\pm i\sqrt{11})$, $\frac{1}{2}(1\mp i\sqrt{11})$.

(二) $\frac{1}{2}\left\{a\pm\sqrt{\left(-a^2\pm 2\frac{\sqrt{a^5+b^5}}{\sqrt{5a}}\right)}\right\}$; $\frac{1}{2}\left\{a\pm\sqrt{\left(-a^2\mp 2\frac{\sqrt{a^5+b^5}}{\sqrt{5a}}\right)}\right\}$.

(三) 2, 1, −1, −2, $\frac{1}{2}(1\pm i\sqrt{11})$, $-\frac{1}{2}(1\mp i\sqrt{11})$.

問 23. (一) 1, 3, 5; −1 −3, −5.

(二) 7, 10; 11; −7; −10, −11.

問 24. (一) 1, 2, 3; −5, −8, −11.

(二) 3, 2, 1; −3, −4, −5.

問 25. (一) 1, 5, 7; −1, −5, −7. (二) 1, 2, 3; −1, −2, −3.

問 26. 1, 2, 5; −1, −2, −5.

問 27. (一) 2, 7, 1; −4, −9, −3. (二) 3, 4, 5; −5, −6, −7.

(三) $a\pm\sqrt{\frac{(a^2+\beta)(a^2+\gamma)}{a^2+\alpha}}$, $a\pm\sqrt{\frac{(a^2+\gamma)(a^2+\alpha)}{a^2+\beta}}$,

$a\pm\sqrt{\frac{(a^2+\alpha)(a^2+\beta)}{a^2+\gamma}}$.

(四) $a\pm\sqrt{\frac{(g^2+ca)(h^2+ab)}{f^2+bc}}$, $b\pm\sqrt{\frac{(f^2+bc)(h^2+ab)}{g^2+ca}}$;

$c\pm\sqrt{\frac{(f^2+bc)(g^2+ca)}{h^2+ab}}$.

問 28. (一) $0, 0, 0;\quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}.$

(二) $0, 0, 0;\quad \dfrac{2}{-\frac{2}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a}},\ \dfrac{2}{\frac{1}{b}+\frac{1}{a}-\frac{2}{c}},$

$\dfrac{2}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{2}{a}}.$

問 29. $\pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{CA}{B}}+\sqrt{\frac{AB}{C}}\right),\ \pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{BC}{A}}+\sqrt{\frac{AB}{C}}\right),$

$\pm\sqrt{\frac{CA}{B}}+\sqrt{\frac{BC}{C}}.$

但 $A=b+c-a,\quad B=c+a-b,\quad C=c(a+b+c).$

問 30. (一) $0, 0, 0;\quad a(a+b+c),\quad b(a+b+c),\quad c(a+b+c).$

(二) $\pm\frac{\sqrt{a+b+c}}{a},\quad \pm\frac{\sqrt{a+b+c}}{b},\quad \pm\frac{\sqrt{a+b+c}}{c}.$

問 31. (一) $-2, 4, 2;\ -2, 2, 4.$ (二) $4, 2, 1;\ -1, 2, -4.$

$1+\sqrt{5}, 3, \sqrt{5}-1;\ 1-\sqrt{5}, 3, -(1+\sqrt{5}).$

(三) $6, 1, 3;\quad -1, -6, 3.$

(四) $2, 1, 0;\quad -1, -2, 0.\ 1, 0, -2;\quad 0, -1, -2.$

練習問題 VII

(1) $1, 1; \frac{8}{15}, \frac{1}{15}.$　　(2) $4, 3; -\frac{48}{13}, -\frac{41}{13}.$

(3) $2, 3; \frac{3}{4}, \frac{4}{3}.$　　(4) $3, 2.$

(5) $1, 6.$　　(6) $\frac{5}{3}, \frac{2}{5}.$

(7) $\pm 2, \pm 1; \frac{13}{2\sqrt{11}}, \frac{2}{2\sqrt{11}}$. (8) $3, -3; \frac{9\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, -\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$.

(9) $\frac{55\pm\sqrt{305}}{8}, \frac{-15\mp\sqrt{305}}{8}; \frac{-55\pm\sqrt{305}}{8}, \frac{15\mp\sqrt{305}}{8}$.

(10) $5, 5; \ -5, -5; \ -\frac{5}{2}, \ -10; \ \frac{5}{2}, \ 10$.

(11) $1, 1; \ \frac{-5\pm i\sqrt{7}}{2}, \frac{-5\mp i\sqrt{7}}{2}$.

(12) $5, 2; \ -\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}$. (13) $2, 3; -\frac{7}{2}; -\frac{5}{2}$.

$-3, -3; \ \frac{5}{2}, \frac{5}{2}$. (14) $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}; 2, 1$.

(15) 6, 7; 7, 6. (16) 4, 3; 3, 4.

(17) 1, 2; 2, 1. (18) 4, 5; 5, 4.

(19) $\frac{1}{6}, \frac{1}{5}; -\frac{1}{5}, -\frac{1}{6}$. (20) 4, 8; 8, 4.

(21) 2, 3; 3, 2; −6, 1; 1, −6. (22) 2, 3; 3, 2.

(23) 9, 4; 8, 3. (24) 3, 1; −1, −3.

(25) $\frac{1}{2}, 3; \frac{1}{2}, \frac{1}{3}; -\frac{1}{2}, -3; \ -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$.

(26) $0, 0; \sqrt[3]{(a-1)(b-1)^2}, \sqrt[3]{(a-1)^2(b-c)}; \ \omega\sqrt[3]{(a-1)(b-1)^2}$,

$\omega\sqrt[3]{(a-1)^2(b-1)}; \ \omega^2\sqrt[3]{(a-1)(b-1)^2}, \omega^2\sqrt[3]{(a-1)^2(b-1)}$.

(27) $\frac{6a\sqrt{3}}{\sqrt{3}\pm 3}, \ \frac{6b\sqrt{3}}{-\sqrt{3}\pm 3}$. (28) 1, 9; 9, 1.

(29) 6, 10; 4, 15. (30) $\frac{5}{3}, \frac{2}{3}$; 1, 2.

(31) $\pm i\sqrt{10}, \pm i\sqrt{\frac{8}{5}}, \ \pm i\sqrt{\frac{5}{2}}$.

(32) $\pm\frac{bc\sqrt{2}}{a}, \ \pm\frac{ca\sqrt{2}}{b}, \pm\frac{ab\sqrt{2}}{c}$.

(33) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. (34) $5, 3, 4, -7, -5, -6$.

(35) $b+c$, $c+a$, $a+b$, $\frac{2bc}{a-b-c}$, $\frac{2ca}{b-c-a}$, $\frac{2ab}{c-a-b}$.

(36) $\frac{25}{14}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{61}{7}$; $-\frac{25}{14}$, $-\frac{7}{2}$, $-\frac{61}{7}$.

(37) $1, 2, 5$; $-1, -2, -5$. (38) $2, 1, -1$; $1, 2, -1$.

(39) α, β 適合於 $2x^2+5y^2=15$, $y=mx$. 故由

$$3\alpha^2+5\beta^2=15, \qquad \beta=m\alpha.$$

得 $\alpha^2=\frac{15}{3+5m^2}$, $\beta^2=\frac{15m^2}{3+5m^2}$.

依同理由 $3\gamma^2+5\delta=15$, $\delta=-\frac{3}{5m}\gamma$. 得

$$\gamma^2=\frac{25m^2}{3+5m^2}, \qquad \delta^2=\frac{9}{3+5m^2}.$$

$$\therefore \quad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=\frac{24+40m^2}{3+5m^2}=8.$$

(40) $y^2=12x$ ……………(1) $y=3x+n$ ………………(2)

以(2)代入於(1)將關於 x 之二次方程式整頓之,得

$$9x^2+6(n-2)x+n^2=0 \text{ ……………………(3)}$$

欲使方程式有等根,當使

$$9(n-2)^2-9n^2=0$$

由此得 $n=1$, 故由(3) $9x^2-6x+1=0$.

$$\therefore \quad x=\frac{1}{3}, \quad y=2.$$

聯 立 方 程 式 應 用 問 題

問 1. (一)前輪後輪之周圍各以 x 尺, y 尺表之,則

$$\frac{36}{x}-\frac{36}{y}=1. \qquad \frac{60}{x+1}-\frac{60}{y}=1.$$

解之取其正根得前輪 9 尺，後輪 12 尺.

問 2. 各命第一回甲乙每秒之速度為 x 尺，y 尺，因甲一周所需之時間與乙少走 360 尺距離之時間相等，故

$$\frac{4680}{x}=\frac{4320}{y}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

第二回甲每秒為$(x-6)$尺，其結果較乙多費 39 秒.始行一周故

$$\frac{4680}{x-6}-\frac{4680}{y}=39\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由(1) (2)$x=\frac{78}{3}$，故得甲每秒 26 尺，　乙每秒 24 尺.

問 3. 命所要之本金為 x 圓，年利率為 y，由題意

$$x(1+y)=140,\quad (x+25)(1+y+0.04)=174.$$

解之取其正根，得　$x=125$，　$y=0.12$.

∴ 本金 125 元，年利 1 成 2 分.

問 4. 夾直角之二邊各命為 x 尺 y 尺時.得

$$x+y=48,\qquad xy=572.$$

解之得二邊之長為 22 尺，26 尺.　又斜邊由平面幾何學之定理得　$\sqrt{26^2+22^2}=34$ 尺餘.

問 5. 夾直角之二邊各命為 x 尺，y 尺，斜邊命為 z 尺時.

$$x=y+5,\qquad x^2+y^2=z^2,\qquad x+y+z=60.$$

解之取適合題意之各數，得

$$x=20,\qquad y=15,\qquad z=25.$$

∴ 三邊為 20 尺，15 尺，25 尺.

練習問題 VIII.

(1) 命父子之年齡為 x 歲，y 歲，則得

$$x+y=100,\qquad \frac{xy}{10}=x+180.$$

解之取適於題意之答數. 得父 60 歲, 子 40 歲.

(2) A, B 兩列車之速度各命為 x 哩, y 哩, 則

$$\frac{5}{4}(x+y)=100,\qquad \frac{100}{y}-\frac{100}{x}=\frac{4}{3}.$$

解之取其正根, 得 A 每時 50 哩, B 每時 30 哩.

(3) 甲, 乙 每時之速度各命為 x 哩 y 哩, 則

$$7(x+y)=385,\qquad \frac{1}{y}-\frac{1}{x}=\frac{1}{150}.$$

解之取其正根, 得 $x=30$, $y=25$, 答甲 30 哩, 乙 25 哩.

(4) 甲站出發之火車每時速度命為 x 哩, 乙站火車命為 y 哩.

則 $$x+\frac{9y}{4}=60,\qquad \frac{4x}{y}=\frac{9y}{x}.$$

解之得答 24 哩, 16 哩.

(5) A, B 每時之速度各命為 x 哩, y 哩, A 追及 B 之地為丙地時, 乙丙間之距離為 $4x$ 哩, 甲丙間為 $9y$ 哩. 甲乙間為 $(9y-4x)$ 哩. 故

$$4x+9y=30,\qquad \frac{4x}{y}=\frac{9y}{x}.$$

解之得 $x=3$, $y=2$. 故甲乙間之距離為 6 哩.

(6) 命兩港間之距離為 x 哩, 第二船每時之速度為 y 哩. 則第一船之速度為 $(y+\frac{1}{2})$ 哩 第三船為 $(y-\frac{3}{4})$ 哩.

故 $$\frac{2x}{y}-\frac{2x}{y+\frac{1}{2}}=1\tfrac{1}{2},\qquad \frac{2x}{y-\frac{3}{4}}-\frac{2x}{y}=2\frac{1}{2}.$$

解之得 $x=225$, 即 225 哩.

(7) 命東西兩地之距離為 x 哩, 甲, 乙每時之速度各為 y 哩, z 哩, 則

$$\frac{x-2}{x}-\frac{x-2}{y}=1, \quad \frac{32}{60}y+\frac{32}{60}z=4, \quad \frac{2x-4}{z}-\frac{2x}{y}=1.$$

解之得 $x=30$， 答 30 浬.

(8) 命潮力每時之速度爲 x 哩，水流每時之速度爲 y 哩.

則
$$\frac{3(x+y)}{y}-\frac{3(x+y)}{x}=8.$$

由此得 $x=3y$. 而逆流上駛所需之時間爲

$$\frac{3(x+y)}{x-y}=6，\text{ 卽 6 時間.}$$

(9) 命甲乙每時之速度各爲 x 浬，y 浬，則相遇所需之時間爲 $\frac{90}{x+y}$ 時. 又乙需 $\frac{90}{x+y}$ 時間之距離甲以 4 時間可達，故

$$\frac{90}{x+y}=\frac{4x}{y} \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又每時加速 2 浬時乙以 5 時間，甲以 4 時間，合計航行 90 浬之水路，故

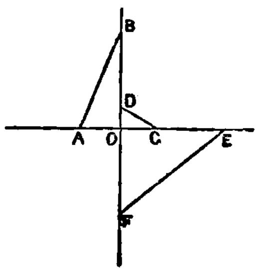
$$4x+5(y+2)=90 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

解(1)(2)得 $x=10$, $y=8$, 故甲乙每時之速度各爲 10 浬 8 浬.

(10) 甲乙二船最初之速度各爲每時 x 浬，y 浬，則由題意

$$\frac{10(x-2)}{y}=\frac{11(y+1)}{x}, \quad 10(x-2)+11(y+1)=200.$$

解之取適於題意之根得甲 11 浬，乙 9 浬.



(11) 甲乙每時之速度各命 $2x$ 浬，$3x$ 浬最初甲在於 A，乙在於 B，其次甲在 C 而乙在 D，最後甲在 E 同乙在 F. 然

$AB=12$, $CD=8$ $EF=20$

故如命 $OA=y$, $OB=z$ 則

$y^2+z^2=12^2$, $(2x-y)^2+(z-3x)^2=8^2$, $(4x-y)^2+(6x-z)^2=20^2$.

解之取其正根 $x=4$ ∴ 甲 8 浬, 乙 12 浬.

(12) 命下種糖之斤數爲 x, 價爲 y 分, 則上種之斤數爲$(x-5)$斤. 價爲 $(y+2.5)$分。

$$\therefore \quad xy-(x-5)(y+2.5)=55.$$

$$xy+(x+5)(y+2.5)=523.$$

解之取其正根 $x=17$, $y=17$.

∴ 各種之斤數爲 12 斤, 17 斤, 價 1 角 9 分 5. 1 角 7 分.

(13) 命所求之車輛數爲 x, 各車載量爲 y 石由題意

$$8xy=7(x+8)(y-5)=9(x-8)(y+11).$$

解之答 36 輛, 77 石 或 28 輛 45 石.

(14) 命所求之總日數爲 x, 甲,乙每日工資各爲 y 分, z 分,由題意

$xy=1600$, $(x-5)z=900$, $xz-(x-15)y=800$.

解之取適於題意者得日數 20 日, 甲 8 角, 乙 1 角.

(15) 命乙中隊之人數爲 x, 則甲中隊之人數爲 $x+40$ 丙中隊之人數爲 $x-50$. 如命彈丸之數爲 y.

則 $$\frac{y}{x+40}+10=\frac{y}{x}=\frac{y}{x-50}-20.$$

解之取其適於題意者得乙中隊之人數 200 人,彈丸之數 12000 個.

(16) 命闊深爲 x 尺, y 尺, 則

$$xy=1800, \qquad (x+24)(y-3)=2088.$$

解之取其正根得闊 120 尺, 深 90 尺.

(17) 甲地之縱橫各命爲 x 尺, y 尺. 則乙地之縱橫各爲 $(x-20)$尺 $(y+8)$ 尺. 由題意

$$xy=(x-20)(y+8)=1920.$$

解之取其正根,得甲之縱橫各爲 80 尺. 24 尺

乙之縱橫各爲 60 尺, 32 尺.

(18) 長邊短邊之長各命爲 x 尺, y 尺. 則

$$2(x-3)(y-1)=xy, \qquad (x+9)(y-2)=xy.$$

解之取其正根得長邊 9 尺 短邊 4 尺.

(19) 矩形各邊之長各命爲 $2x$ 尺, $2y$ 尺, 則

$$x^2+y^2=6^2, \quad 4xy=64.$$

解之得所求之二邊爲$2(\sqrt{17}+1)$尺, $2(\sqrt{17}-1)$尺.

(20) 甲地之闊深各命爲 x 尺, y 尺, 則乙地之闊深各爲 $(x-2)$尺, $(y+2)$尺.

$$\therefore \quad xy+(x-2)(y+2)=262, \quad xy=(x-2)(y+2)+2.$$

解之取其正根得甲闊 12 尺,深 11 尺; 乙闊 10 尺,深 13 尺.

(21) 命池之寬爲 x 尺, 則長爲$(x+180)$尺, 馬場之寬爲 y 尺, 池之周圍除馬場後之寬爲$(x+2y)$尺.

則長爲 $(x+180+2y)$尺, $\therefore$ 馬場之面積如下:

$$2(x+2y)y+2(x+180)y=28800.$$

又馬場之周圍爲

$$2(x+2y)+2(x+180+2y)=1080.$$

解之取其適於題意者, 則馬場之寬爲 30 尺,池之面積爲 36000 方尺.

(22) 命室之闊,長,各爲 x 尺, y 尺, z 尺, 則

$$xy=117, \quad yz=130, \quad zx=90.$$

解之取其正根,得 $x=9$. $y=13$, $z=10$.

答 9 尺, 13 尺, 10 尺.