Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2022**

Riemannsche Flächen

Vorlesung 25

Wir beschreiben verschiedene Berechnungen von Kohomologien auf Mannigfaltigkeiten und speziell riemannschen Flächen. Ein wichtiges Hilfsmittel im reellen Fall ist die Partition der Eins, was auch für den komplexen Fall unmittelbar Auswirkungen besitzt.

Partition der Eins

Definition 25.1. Es sei X ein topologischer Raum. Eine Familie von Funktionen

$$h_j \colon X \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit $j \in J$ heißt eine *Partition der Eins*, wenn folgende Eigenschaften gelten.

(1) Es ist $h_j(X) \subseteq [0,1]$ für alle $j \in J$.
(2) Jeder Punkt $P \in X$ besitzt eine offene Umgebung $P \in U$ derart, dass die eingeschränkten Funktionen $h_j|_U$ bis auf endlich viele Ausnahmen die Nullfunktion sind.
(3) Es ist $\sum_{j \in J} h_j = 1$.

Wenn alle h_j stetig sind, so spricht man von einer *stetigen Partition der Eins*.

Definition 25.2. Es sei $X = \bigcup_{i \in I} W_i$ eine offene Überdeckung eines topologischen Raumes X. Eine Partition der Eins

$$h_j \colon X \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit $j \in J$ heißt eine *der Überdeckung untergeordnete Partition der Eins*, wenn es für jedes $j \in J$ eine offene Menge $W_{i(j)}$ aus der Überdeckung derart gibt, dass der Träger von h_j in $W_{i(j)}$ liegt.

Satz 25.3. *Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einer abzählbaren Basis der Topologie. Dann gibt es zu jeder offenen Überdeckung eine der Überdeckung untergeordnete stetig differenzierbare Partition der Eins.*

Es gibt auch differenzierbare und C^∞-Versionen dieses Satzes.

Satz 25.4. *Es sei M eine reelle C^∞-differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einer abzählbaren Topologie. Dann gilt für die Garbe der C^∞-differenzierbaren Funktionen $\mathcal{E}$ die Beziehung*

$$H^1(M, \mathcal{E}) = 0.$$

Beweis. Wir verwenden Satz 22.6 und arbeiten mit ?ech-Kohomologie. Es sei $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung und sei ein ?ech-Kozykel $h_{ij} \in \Gamma(U_{ij}, \mathcal{E})$ gegeben. Wir arbeiten mit der C^∞-Version der Partition der Eins, siehe Satz 25.3. Es sei also g_j, $j \in J$ eine Partition der Eins, die der offenen Überdeckung U_i untergeordnet ist. Wir arbeiten mit der neuen Indexmenge J über

$$U_j := U_{i(j)},$$

somit ist der Träger von g_j in U_j. Die U_j bilden ebenfalls eine offene Überdeckung und es liegt eine Verfeinerung der Ausgangsüberdeckung mit der Verfeinerungsabbildung $j \mapsto i(j)$ vor (es kommen die gleichen Mengen vor, nur eventuell mehrfach). Wir arbeiten mit dem Kozykel auf der Verfeinerung und nennen die Indexmenge wieder I.

Wir betrachten die Funktionen $g_j h_{ij}$, diese ist auf $U_i \cap U_j$ definiert, kann aber durch 0 auf ganz U_i fortgesetzt werden.

Wir setzen

$$f_i = \sum_{j \in I} g_j h_{ij},$$

was wegen der lokalen Endlichkeit wohldefiniert ist und somit eine C^∞-Funktion auf U_i ist. Die Kozykelbedingung $h_{ij} = h_{ik} - h_{jk}$ auf $U_i \cap U_j \cap U_k$ überträgt sich durch Multiplikation mit g_k auf $U_i \cap U_j$, da außerhalb von U_k beide Seiten zu 0 werden. Damit ist auf $U_i \cap U_j$

$$\begin{aligned} h_{ij} &= \sum_{k \in I} g_k h_{ij} \\ &= \sum_{k \in I} g_k (h_{ik} - h_{jk}) \\ &= \sum_{k \in I} g_k h_{ik} - \sum_{k \in I} g_k h_{jk} \\ &= f_i - f_j \end{aligned}$$

und die durch den Kozykel definierte Kohomologieklasse ist trivial. □

Satz 25.5. *Es sei M eine komplexe Mannigfaltigkeit mit einer abzählbaren Basis der Topologie. Dann gilt für die erste Kohomologie der Garbe der reell unendlich oft differenzierbaren Funktionen*

$$H^1(M, \mathcal{E}) = 0.$$

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 25.4, da man für die komplexwertigen Funktionen die Zerlegung in Real- und Imaginärteil hat. □

Von nun an setzen wir stets voraus, dass riemannsche Flächen eine abzählbare Basis der Topologie haben. Dies ist im kompakten Fall und auch für jede offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ erfüllt und wird häufig von vornherein zur Definition einer riemannschen Fläche hinzugenommen.

Korollar 25.6. *Auf einer riemannsche Fläche X gilt*

$$H^1(X, \mathcal{O}_X) \cong \Gamma\big(X, \mathcal{E}^{(0,1)}\big)/d^a(\Gamma(X, \mathcal{E})).$$

Beweis. Dies folgt aus der Exaktheit des Komplexes (siehe Satz 16.14)

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{d^a} \mathcal{E}^{(0,1)} \longrightarrow 0\,,$$

aus Satz 25.5 und aus der langen exakten Kohomologiesequenz. □

Korollar 25.7. *Für die riemannsche Fläche $\mathbb{C}$ gilt*

$$H^1(\mathbb{C}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}}) = 0.$$

Beweis. Dies folgt wegen Korollar 25.6 aus Satz 16.13. □

Bemerkung 25.8. Mit Partitionen der Eins kann man auch zeigen, dass für die Garben der C^∞-Funktionen und der C^∞-Differentialformen vom Grad d auf einer reellen C^∞-Mannigfaltigkeit M alle höheren Kohomologien gleich 0 sind. Für eine riemannsche Fläche folgt daher aus Satz 16.14 mit den Ausschnitten (für $i \geq 2$)

$$H^{i-1}(X, \mathcal{E}) = 0 \xrightarrow{\delta} H^i(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow H^{i+1}(X, \mathcal{E}^{(0,1)}) = 0$$

aus der langen Kohomologiesequenz sofort

$$H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$$

für $i \geq 2$. Für höherdimensionale komplexe Mannigfaltigkeiten sind auch höhere Kohomologien der Strukturgarbe wichtig.

Der de Rham-Komplex

Auf einer C^∞-differenzierbaren Mannigfaltigkeit M bilden die (reell- oder komplexwertigen) k-Differentialformen eine Garbe $U \mapsto \mathcal{E}^k(U)$. Die äußere Ableitung definiert einen Garbenhomomorphismus

$$d\colon\, \mathcal{E}^k \longrightarrow \mathcal{E}^{k+1}.$$

Definition 25.9. Es sei M eine n-dimensionale C^∞-reelle Mannigfaltigkeit. Man nennt den durch die äußeren Ableitungen gegebenen Garbenkomplex

$$0 \longrightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{(1)} \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{(2)} \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{(n-1)} \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{(n)} \xrightarrow{d} 0$$

den *de-Rham-Komplex* auf M.

Wichtige Eigenschaften der äußeren Ableitung werden in Satz 86.4 (Analysis (Osnabrück 2014-2016)) formuliert. Ferner ist wegen des Lemmas von Poincaré für Differentialformen der Komplex ab der Stelle $i \geq 1$ als Garbenkomplex exakt. Öfters ergänzt man links den Komplex durch die Garbe der lokal konstanten Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}$ oder in $\mathbb{C}$, um überall Exaktheit zu erreichen. In der gegebenen Form ist der Komplex aber gerade eine Auflösung dieser lokal konstanten Garbe. Die globale Auswertung ist im Allgemeinen nicht exakt, vielmehr die Grundlage für die Einführung der de-Rham-Kohomologie.

Definition 25.10. Es sei M eine n-dimensionale C^∞-reelle Mannigfaltigkeit. Man definiert über den de-Rham-Komplex die i-te *de-Rham-Kohomologie* von M durch

$$H^i_{dR}(M) := \operatorname{kern}\left(\mathcal{E}^{(i)}(M) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{(i+1)}(M)\right) / \operatorname{bild}\left(\mathcal{E}^{(i-1)}(M) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{(i)}(M)\right).$$

Eine i-te de Rham-Kohomoloieklasse wird also durch eine geschlossene i-te Differentialform ω repräsentiert, wobei zwei Differentialformen die gleiche Klasse definieren, wenn ihre Differenz eine exakte Differentialform ist.

Für eine riemannsche Fläche ist die komplexwertige Version des de-Rham-Komplexes (mit den lokal konstanten Funktionen) gleich

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{(1)} \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{(2)} \longrightarrow 0\,.$$

Die Kerngarbe

$$\mathcal{Z} := \operatorname{kern}\left(\mathcal{E}^{(1)} \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{(2)}\right)$$

ist die Garbe der geschlossenen differenzierbaren komplexwertigen 1-Formen. Mit $\mathcal{Z}$ kann man diesen exakten Komplex in zwei kurze exakte Garbensequenzen aufspalten, nämlich

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{d} \mathcal{Z} \longrightarrow 0$$

und

$$0 \longrightarrow \mathcal{Z} \longrightarrow \mathcal{E}^{(1)} \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{(2)} \longrightarrow 0\,.$$

Korollar 25.11. *Für die Garbe der lokal konstanten $\mathbb{C}$-wertigen Funktionen auf einer riemannschen Fläche X gilt*

$$H^1(X, \mathbb{C}) = H^1_{dR}(X)$$

und

$$H^2(X, \mathbb{C}) = H^2_{dR}(X).$$

Beweis. Wir arbeiten mit der kurzen exakten Garbensequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{d} \mathcal{Z} \longrightarrow 0\,,$$

die sich aus dem (komplexwertigen) de-Rham-Komplex ergibt, wenn man $\mathcal{Z} := \operatorname{kern}\left(\mathcal{E}^{(1)} \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{(2)}\right)$ setzt. Aufgrund der langen exakten Kohomologiesequenz in Verbindung mit Satz 25.4 ist

$$H^1(X, \mathbb{C}) = H^0(X, \mathcal{Z}) / \operatorname{bild}\left(H^0(X, \mathcal{E}) \xrightarrow{d} H^0(X, \mathcal{Z})\right).$$

Wegen der Linksexaktheit der globalen Auswertung ist

$$H^0(X, \mathcal{Z}) = \operatorname{kern}\left(H^0(X, \mathcal{E}^{(1)}) \xrightarrow{d} H^0(X, \mathcal{E}^{(2)})\right)$$

und somit stimmt der obige Ausdruck mit der Definition der ersten de-Rham-Kohomologie überein. Für den zweiten Teil siehe Aufgabe 25.8. □

Divisoren, invertierbare Garben und Kohomologie

In Lemma 19.11 wurde auf einer zusammenhängenden riemannschen Fläche die kurze exakte Garbensequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X^\times \longrightarrow \mathcal{M}_X^\times \stackrel{\operatorname{div}(-)}{\longrightarrow} \mathcal{D}iv_X \longrightarrow 0$$

betrachtet.

LEMMA 25.12. *Auf einer zusammenhängenden riemannschen Fläche X gibt es die exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X^\times) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{M}_X^\times) \stackrel{\operatorname{div}(-)}{\longrightarrow} \operatorname{Div}(X)$$
$$\stackrel{\delta}{\longrightarrow} H^1(X, \mathcal{O}_X^\times) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{M}_X^\times) \longrightarrow 1.$$

Insbesondere gibt es eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \operatorname{DKG}(X) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X^\times) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{M}_X^\times) \longrightarrow 0\,.$$

Beweis. Die lange exakte Kohomologiesequenz zur kurzen exakten Garbensequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X^\times \longrightarrow \mathcal{M}_X^\times \stackrel{\operatorname{div}(-)}{\longrightarrow} \mathcal{D}iv_X \longrightarrow 0$$

ist

$$0 \longrightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X^\times) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{M}_X^\times) \stackrel{\operatorname{div}(-)}{\longrightarrow} \operatorname{Div}$$
$$(X) \stackrel{\delta}{\longrightarrow} H^1(X, \mathcal{O}_X^\times) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{M}_X^\times) \longrightarrow 0,$$

wobei die 0 rechts auf der Welkheit der Divisorengarbe beruht. Der Zusatz folgt unmittelbar aus der Definition der Divisorenklassengruppe. □

Nach Beispiel 21.10 in Verbindung mit Satz 22.6 ist $H^1(X, \mathcal{O}_X^\times)$ isomorph zur Gruppe von Isomorphieklassen von invertierbaren Garben mit dem Tensorprodukt als Verknüpfung. Der verbindende Homomorphismus

$$\delta\colon\ \operatorname{Div}(X) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X^\times)$$

stimmt im Wesentlichen mit der Zuordnung aus der Definition 20.14 überein. In Bemerkung 26.13 wird erläutert, dass im kompakten Fall sogar

$$\operatorname{DKG}(X) \cong H^1(X, \mathcal{O}_X^\times)$$

gilt.

Die Exponentialsequenz

LEMMA 25.13. *Auf einer riemannschen Fläche liegt die lange exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow H^0(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^0(X,\mathcal{O}_X) \longrightarrow H^0(X,\mathcal{O}_X^\times) \stackrel{\delta}{\longrightarrow} H^1(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{O}_X) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{O}_X^\times) \cong \mathrm{Pic}\,(X) \longrightarrow H^2(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

vor. Wenn X kompakt ist, so ist

$$0 \longrightarrow H^1(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{O}_X) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{O}_X^\times) \cong \mathrm{Pic}\,(X) \longrightarrow H^2(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

exakt.

Beweis. Die holomorphe Exponentialsequenz (siehe Beispiel 11.14)

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \stackrel{2\pi \mathrm{i}}{\longrightarrow} \mathcal{O}_X \stackrel{\exp(-)}{\longrightarrow} \mathcal{O}_X^\times \longrightarrow 0$$

ergibt die angegebene lange exakte Kohomologiesequenz, wobei man die Sequenz wegen

$$H^2(X,\mathcal{O}_X) = 0$$

abbrechen kann. Sei nun X kompakt, wir können zusätzlich zusammenhängend annehmen. Dann sind die Anfangsterme der Sequenz nach Satz 3.7 gleich

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \stackrel{2\pi \mathrm{i}}{\longrightarrow} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^\times .$$

Nach Aufgabe 1.4 ist die hintere Abbildung surjektiv, man kann also die weitere Sequenz „neu“ bei 0 beginnen lassen. □

Man kann ferner zeigen, dass im kompakten Fall $H^2(X,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ ist (für die projektive Gerade siehe Aufgabe 21.6). Die letzte Abbildung ist dabei die Gradabbildung im Sinne von Definition 20.18.

BEISPIEL 25.14. Es sei X eine riemannsche Fläche und $U_1 \subseteq X$ eine offene Kreisscheibe mit zwei Punkten $P, Q \in U_1$. Es sei γ die (auf der Karte) lineare Verbindung von Q nach P. Wir setzen

$$U_2 := X \setminus \gamma([0,1]),$$

insbesondere bilden die beiden offenen Mengen U_1 und U_2 eine offene Überdeckung von X. Dabei ist

$$U_1 \cap U_2 = U_1 \setminus \gamma([0,1])$$

homöomorph zu einer mit einem abgeschlossenen Intervall geschlitzten Kreisscheibe. Eine holomorphe Funktion h auf $U_1 \cap U_2$ definiert als ?ech-Kozykel eine erste Kohomologieklasse von $H^1(X,\mathcal{O}_X)$ und eine nullstellenfreie holomorphe Funktion darauf definiert eine erste Kohomologieklasse von $H^1(X,\mathcal{O}_X^\times)$. Unter der langen exakten Sequenz zur Exponentialsequenz (siehe Lemma

25.13) wird h auf e^h abgebildet. Dabei wird die in Beispiel 13.16 eingeführte Funktion $\ln(z-P) - \ln(z-Q)$, aufgefasst auf $U_1 \cap U_2$, auf

$$e^{\ln(z-P)-\ln(z-Q)} = \frac{z-P}{z-Q}$$

abgebildet, was eine Kohomologieklasse in $H^1(X, \mathcal{O}_X^\times)$ definiert. Wir verwenden Lemma 25.12 und betrachten den Divisor $P - Q$. Dieser ist auf U_1 der Hauptdivisor zu $\frac{z-P}{z-Q}$ und auf U_2 der Hauptdivisor zu 1. Somit wird dieser Divisor unter dem verbindenden Homomorphismus auf diese Kohomologieklasse abgebildet.

Abbildungsverzeichnis

Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von http://commons.wikimedia.org) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 9

Lizenzerklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 9