萬有文庫
第二集七百種
王雲五主編

數理精蘊

(一)

清聖祖敕編

商務印書館發行

數理精蘊

(一)

清聖祖敕編

國學基本叢書

萬有文庫

第二集七百種

總編纂者
王雲五

商務印書館發行

數理精蘊目錄

上編

下編

下編四十卷之後，尚有八線表，對數闡微，對數表，八線對數表四種，共八卷，删去未印。

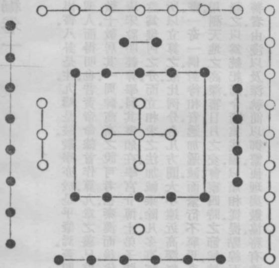
編者識

數理精蘊上編卷一

數理本原

粵稽上古。河出圖。洛出書。八卦是生。九疇是敘。數學亦於是乎肇焉。蓋圖書應天地之瑞。因聖人而始出。數學窮萬物之理。自聖人而得明也。昔黃帝命隸首作算。九章之義已啓。堯命羲和治曆。敬授人時。而歲功以成。周官以六藝教士。數居其一。周髀商高之說可考也。秦漢而後。代不乏人。如洛下閎張衡劉焯祖冲之之徒。各有著述。唐宋設明經算學科。其書頒在學宮。令博士弟子肄習。是知算數之學。實格物致知之要務也。故論其數。設爲幾何之分。而立相求之法。加減乘除。凡多寡輕重貴賤盈朒。無遺數也。論其理。設爲幾何之形。而明所以立算之故。比例分合。凡方圓大小遠近高深。無遺理也。溯其本原。加減實出於河圖。乘除殆出於洛書。一奇一偶。對待相資。遞加遞減。而繁衍不窮焉。奇偶各分。縱橫相配。互乘互除。而變通不滯焉。徵其實用。測天地之高深。審日月之交會。察四時之節候。較晝夜之短長。以至協律度。同量衡。通食貨。便營作。皆賴之以爲統紀焉。今匯集成編。以類相從。提點線面體以爲綱。分和較順逆以爲目。法無論巨細。惟擇其善者。由淺以及深。執簡以御繁。使理與數協。務有裨於天下國家。以傳於億萬世云爾。

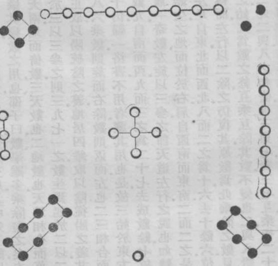
河圖



易繫辭曰。天一、地二、天三、地四、天五、地六、天七、地八、天九、地十。天數五。地數五。五位相得而各有合。朱子曰。河圖以五生數。統五成數。而同處其方。蓋揭其全以示人。而道其常。數之體也。考其數。始於一。中於五。終於十。陽奇陰偶。而數之加減由是生焉。自一而二。自二而三。自三而四。自四而五。皆遞加一以相生。自五復加一而成六。六加一而七。七加一而八。八加一而九。九加一而十。十則仍歸於一。故至十而天地之數全矣。天數陽也。地數陰也。言天地。卽所以言陰陽也。五位相得而各有合。以五行之序而定位也。邵子曰。天之陽在南。而陰在北。地之陰在南。而陽在北。故河圖之數。一陽位於北。二陰位於南。其卽五行質具於地之義而言之歟。今以陰陽相生之數論之。一爲陽。天一生水而位北。一加一爲二爲陰。地二生火而位南。二加一爲三爲陽。天三生木而位東。三加一爲四爲陰。地四生金而位西。四加一爲五爲陽。天五生土而位中。至五而五行之數已周。此生數之極也。自一至五。則五又爲一體矣。於是以五爲中數。而復加一。則爲六。六陰也。因五中數與一相加。故與一同位而屬之水焉。六加一爲七。以中數五計之。實加二。故與二同位而屬之火焉。七加一爲八。以中數五計之。實加三。故與三同位而屬之木焉。八加一爲九。以中數五計之。實加四。故與四同位而屬之金焉。九加一爲十。以中數五計之。復加五。故與五同位而屬之土焉。至十而五行之數再周。天地之數已備。此成數之極也。以陰陽運行之序論之。以五生數。統十成數。位居於中。而奇數則始於北。一。次東三。次南七。次西九。偶數則始於南。二。次西四。次北六。次東八。此數之陰與陰。陽與陽。各從其類者也。以奇偶相得之數論之。一與六合。二與七合。三與八合。四與九合。五與十合。此又奇偶相得。而各有合者也。邵子謂圓者河圖之數。又曰歷紀之數。其肇於此。然則所謂數者。卽一陰

一陽。一奇一偶。循環無間。表裏相維。百千萬億。總由此推之以成其變化。河圖者、豈非天地自然生成之數也哉。

洛書



洛書之數。戴九履一。左三右七。二四為肩。八六為足。五居其中。朱子謂以五奇數統四偶數。而各居其所。蓋主於陽以統陰而肇其變。數之用也。邵子曰。數學雖多。乘除盡之矣。夫洛書者。數之源也。乘除之所以生也。易說卦傳曰。參天兩地而倚數。三、天數也。二、地數也。天地相合而萬物育焉。一者太極之體。其數不行。故數行於二三。起於三。以三參之。則三九七一之數生焉。起於二。以二兩之。則二四八六之數生焉。其序列之位。則天居四正。取以陽統陰之義。地居四維。取以陰從陽之義。其三九七一。乘數則旋而左。除數則返而右也。其二四八六。乘數則旋而右。除數則返而左也。二三相合而為五。五則無對。居中者。立其體也。二五相合而為十。十仍歸一。洛書不用者。藏其用也。是故三始於東方發生之地、而位於左。自東而南。三而三之。是為九。故戴九。自南而西。九而三之為二十七。去成數餘七。故右七。自西而北。七而三之為二十一。去成數餘一。故履一。奇數左旋。以三參之。即天道左行之說也。如轉而右行。以三除之。仍復其原數焉。二立於西南。二陰始生之地、而位於右肩。自西南而東南。二而二之。是為四。位於左肩。自東南而東北。四而二之為八。位於左足。自東北而西北。八而二之為十六。去十餘六。位於右足。偶數右旋。以二兩之。即地道右行之說也。如轉而左行。以二除之。仍復其原數焉。此乘除之數。見於運行者如此。若以對待者觀之。一與九對。一為數之始。九為數之終。互乘互除。其數不變也。二與八對。二八互乘。俱得十六。二除十六得八。八除十六。仍得二。此二與八之相倚也。三與七對。三七互乘。皆二十一。三除二十一得七。七除二十一。仍得三。此三與七之相倚也。四與六對。四六互乘。皆二十四。四除二十四得六。六除二十四。仍得四。此四與六之相倚也。至五為二三之合。天地之交。陰陽之會。位於洛書之中。以建人極。配上下而為三才。故

斜直四圍皆得十五合之得四十有五爲九五之數要之運行者其序也對待者其位也進退循環縱横交錯總不外於乘除故曰乘除之本原自洛書生也

周髀經解

數學之失傳久矣。漢晉以來。所存幾如一綫。其後祖冲之郭守敬輩。殫心象數。立密率消長之法。以爲習算入門之規。然其法以有盡度無盡。止言天行。未及地體。是以測之有變更。度之多盈縮。蓋有未盡之餘蘊也。明萬曆間。西洋人始入中土。其中一二習算數者。如利瑪竇穆尼閣等。著爲幾何原本同文算指諸書。大體雖具。實未闡明理數之精微。及我朝定鼎以來。遠人慕化。至者漸多。有湯若望南懷仁安多閔明我。相繼治理曆法。間明算學。而度數之理。漸加詳備。然詢其所自。皆云本中土所流傳。粵稽古聖堯之欽明。舜之濬哲。曆象授時。閏餘定歲。璿璣玉衡。以齊七政。推步之學。孰大於是。至於三代盛時。聲教四訖。重譯向風。則書籍流傳於海外者。殆不一矣。周末。疇人子弟。失官分散。嗣經秦火。中原之典章。既多缺佚。而海外之支流。反得眞傳。此西學之所以有本也。古算書存者。獨有周髀。周公商高問答。其本文也。榮方陳子以下。所推衍也。而漢張衡蔡邕以爲術數雖存。考驗天狀。多所違失。按榮方陳子始言晷度。衡邕所疑。或在於是。若周髀本文。辭簡而意該。理精而用博。實言數者所不能外。其圓方矩度之規。推測分合之用。莫不與西法相爲表裏。然則商高一篇。誠成周六藝之遺文。而非後人所能假託也。舊註義多舛訛。今悉詳正。弁於算書之首。以明數學之宗。使學者知中外本無二理焉爾。

昔者周公問於商高曰。竊聞乎大夫善數也。請問古者包犧立周天曆度。

周天曆度者。分周天三百六十度。爲推求曆日之用也。按通鑑載包犧作甲曆。天干地支相配。六甲一

轉天度一周年以是紀而歲功成月以是紀而朔望定晝夜以是紀而時日分易大傳言包犧仰以觀於天文俯以察於地理其觀察之時必有度數以紀其法象則曆度始於包犧無疑矣

夫天不可階而升地不可將尺寸而度請問數從安出

天之高明地之博厚非人力所能及其曆度之數不知從何而得也

商高曰數之法出於圓方

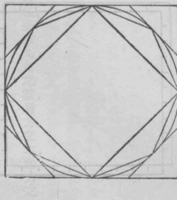
萬物之象不出圓方萬象之數不離圓方河圖者方之象也洛書者圓之象也太極者圓之體奇也四象者方之體偶也奇數天也偶數地也有天地而萬物於是乎生有圓方而萬象於是乎定有奇偶而萬數於是乎立矣

圓出於方

以數而論出於圓方以圓方而論則圓出於方蓋方易度而圓難測方有盡而圓無盡故推圓者以方度之以有盡而度無盡也是以圓周內弦外切屢求勾股爲無數多邊形以切近圓界將合而爲一而圓周始得故曰圓出於方也

方出於矩

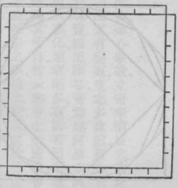
孟子曰不以規矩不能成方圓夫規所以成圓而矩所以成方也故凡方形必出於二矩相合如矩之二股均者合之卽爲正

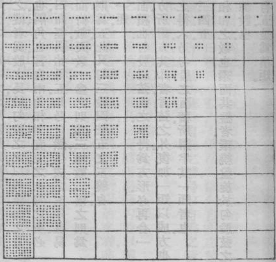


方矩之二股一大一小者合之則爲長方。蓋因矩之爲形。其角直。其線正。所以能成方體。此又直內方外之理。故曰方出於矩也。

矩出於九九八十一。

度圓方者遞歸於矩。而矩之形總不外乎二數相乘。九九者數之終。而一一乃數之始。言九九而不及他數者。以九九之內。他數俱該也。是以一一爲一。二二爲四。三三爲九。四四爲一十六。五五爲二十五。六六爲三十六。七七爲四十九。八八爲六十四。九九爲八十一。乃矩之二股均平所成之正方也。一二爲二。一三爲三。一四爲四。一五爲五。一六爲六。一七爲七。一八爲八。一九爲九。形雖未方。而其理猶存也。二三爲六。二四爲八。二五一十。二六一十二。二七一十四。二八一十六。二九一十八。三四一十二。三五一十五。三六一十八。三七二十一。三八二十四。三九二十七。四五二十。四六二十四。四七二十八。四八三十二。四九三十六。五六三十。五七三十五。五八四十。五九四十五。六七四十二。六八四十八。六九五十四。七八五十六。七九六十三。八九七十二。乃矩之一股小一股大所成之長方也。至於一百之類。雖爲正方。乃十之相乘。十則仍歸於一也。又如八十四、九十六之類。乃六七四十二、六八四十八之倍。不得自立爲數之本。又或十一、十三、十七、十九之類。十一爲二五一十之奇。十三爲二六一十二之奇。十七爲

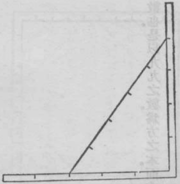




四四一十六之奇。不得成正方。亦不得成長方。故不入九九之數也。是以九九之數。爲方之本。而方之形必合以矩。故曰矩出於九九八十一也。

故折矩以爲勾廣三、股修四、徑隅五。

前言圓方之形，此言勾股生成之正數也。以二矩合之既爲方形，今以一矩折之，則爲一方之兩邊，是以折矩之橫者爲勾之廣，折矩之縱者爲股之長，於勾股之末以斜弦連之，是爲徑隅。徑，直也；隅，角也。言自兩角相對直連之也。勾之廣必三，股之修必四，而徑隅始得五，此乃自然生成之正分也。易曰：參天兩地而倚數。天數一，參之則爲三；地數二，兩之則爲四；三二合之則爲五，此又勾三股四弦五之正義也。



既方其外，半其一矩。

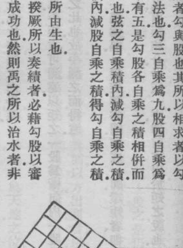
此言勾股之面積也。勾股以弦連之，不得爲方形，必再合一矩乃爲一長方。所謂方其外者，言弦之外復加一矩以成方也。勾三股四相乘得一十有二，卽爲兩矩合成之數，半之得六，乃勾股之面積，所謂半其一矩者也。

環而共盤，得成三四五。

此言勾股弦相和之數也。環而共盤者，環繞盤旋於勾股弦之周圍，得成三四五，共之爲一十有二，乃三數相和之總數也。

兩矩共長二十有五，是爲積矩。

此言勾股相求之法也。兩矩者、勾與股也。其所以相求者。以勾股弦各面積。彼此加減以立法也。勾三自乘爲九。股四自乘爲一十有六。合而計之爲二十有五。是勾股各自乘之積相併而與弦自乘之積等。故曰積矩也。弦之自乘積內。減勾自乘之積。得股自乘之積。弦之自乘積內減股自乘之積。得勾自乘之積。故爲勾股弦相求之法也。



故禹之所以治天下者。此數之所由生也。

言禹之平成之功。昭垂萬古。揆厥所以奏績者。必藉勾股以審高下。始得順水之性。而告厥成功也。然則禹之所以治水者。非此勾股之數所由生乎。

周公曰。大哉言數。請問用矩之道。

商高曰。平矩以正繩。

此言用矩立法。必以正且直也。平矩以正繩有兩義。平置其矩使矩之角直。以此直角之一股。或橫或平。橫以度遠。平以度高。復自一股引繩以度其分。則此分爲我所知。故以所知推所不知。此繩引長時。必使與直角對正。不論其分之幾何。引之又必令直方。能得測度之準。故爲平矩以正繩。又平者均平整齊之謂。用矩之道。矩之角正。即直角之說也。然後二股得直。以之測高測遠。乃得度其大小之分。此

矩既正而所測之度亦正矣孟子曰規矩準繩以爲方圓平直繩者卽準之之意規矩所以度圓方而準繩所以考平直故準之以平繩之以直始得立法之精微故曰平矩以正繩也

偃矩以望高

此用矩測高之法也偃者仰也仰矩方可測高矩之一股植立在前一股定平在下然後比例推之蓋平股與立股之比卽所知之遠與所測之高之比也故仰測之而得高

覆矩以測深

此用矩測深之法也覆者俯也俯矩方可測深矩之一股立者在前一股平者在上平股與立股之比卽所知之遠與所測之深之比也故俯測之而得深

臥矩以知遠

此用矩測遠之法也臥者平也平矩方可測遠以矩之一股爲橫向內一股爲縱向前是以橫與縱之比卽所知之度與所求之遠之比也故平測之而得遠

環矩以爲圓

此用矩爲圓之法也以矩之一端爲樞一端旋轉爲圓則成一圜環矩者卽旋規之說也

合矩以爲方

此用矩爲方之法也矩二股也兩矩相合乃成一方卽前方出於矩之說也

方屬地圓屬天天圓地方

前言用矩以測高深廣遠。復用矩以爲圓方。此以圓方屬之天地者。非以形體言、蓋以陰陽動靜之理言也。樂記云。著不息者天也。著不動者地也。不息故運而不積。圓之象也。不動故靜而有常。方之理也。且圓之數無盡。而方之數有盡。天不可階而升。測天者恆於地上度之。是仍以方度圓也。凡數之不盡者必奇。數之可盡者必偶。是以陽爲奇陰爲偶。此方圓之理數所以屬乎天地也。

方數爲典。以方出圓。

典、則也。言圓之數奇零不盡。不可爲則。故惟方數可爲典則。以方出圓者。以方之形度圓之分。從方數中生出圓數。即前圓出於方之說也。如圓徑求積。則以徑自乘之爲正方形。而以方率圓率比例推之。即得圓積。是皆以方出圓之理也。

笠以寫天。天青黑。地黃赤。天數之爲笠也。青黑爲表。丹黃爲裏。以象天地之位。

此即儀象以表天地之形色也。笠形圓。故以象天。寫象也。青黑天之色。黃赤地之色。天數之爲笠形。則以青黑爲表。丹黃爲裏。以象天地之位。蓋取天包地之象也。

是故知地者智。知天者聖。智出於勾。勾出於矩。夫矩之於數。其裁制萬物。惟所爲耳。

天地之高深廣遠。非聖智不能知。然聖智非由理之自然。亦不能無所憑藉而知也。故明勾股之數。即可以知地而爲智。知地之數。即可因地以知天而爲聖矣。故曰智出於勾也。然勾股之形。又賴矩以成。故矩爲勾股之本。而天地之高深廣遠。皆賴矩以測。況萬物之大小巨細。豈能外於矩之度分乎。故矩之於數。其裁制萬物。惟其所爲而無不可也。

周公曰善哉。

以周公之聖而與之曰善哉。則其得數之本立法之妙。可謂至矣。至是而周髀之義盡矣。

數理精蘊上編卷二

幾何原本一

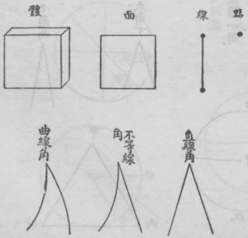
第一

凡論數度．必始於一點．自點引之而爲線．自線廣之而爲面．自面積之而爲體．是名三大綱．是以有長而無闊者謂之線．有長與闊而無厚者謂之面．長與闊厚俱全者謂之體．惟點無長闊厚薄．其間不能容分．不可以數度．然線之兩端卽點．而線面體皆由此生．點雖不入於數．實爲衆數之本．

第二

線有直曲兩種．其二線之一端相合．一端漸離．必成一角．二線若俱直者．謂之直線角．一線直一線曲者謂之不等線角．二線俱曲者．謂之曲線角．

第三



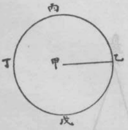
凡角之大小。皆在於角空之寬狹。出角之二線。即如規之兩股。漸漸張去。自然開寬。是以命角不論線之長短。止看角之大小。如丙角兩線雖長。其開股之空狹。遂為小角。若丁角兩線雖短。其開股之空寬。遂成大角矣。

第四

凡命角必用三字為記。如甲乙丙三角形。指甲角、則云乙甲丙角。指乙角、則云甲乙丙角。指丙角、則云甲丙乙角是也。亦有單舉一字者。則其所舉之一字。即是所指之角也。如單言甲角乙角丙角之類。

第五

凡有一線。以此線之一端為樞。復以此線之一端為界。旋轉一周。即成一圜。如甲乙一線。以甲端為樞。乙端為界。旋轉復至乙處。即成乙丙丁戊之圜。此圜線謂之圜界。圜界內所積之面度謂之圜面。

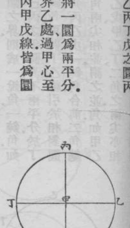


第六

凡圓界不拘長短.其分界之所.卽爲弧線.如乙丙丁戊之圓.丙至丁、丁至戊.俱爲弧線.因其形似弧.故名之

第七

凡圓.自一界過圓心至相對之界.畫一直線.將一圓爲兩平分.則爲圓徑.如乙丙丁戊之圓.以甲爲心.自圓界乙處.過甲心至丁.或自圓界丙處.過甲心至戊.畫乙甲丁及丙甲戊線.皆爲圓徑也.

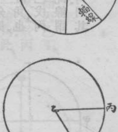


第八

凡自圓心至圓界.作幾何線.皆謂之輻線.其度俱相等.因平分全徑之半.故又謂之半徑線.

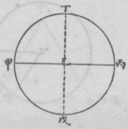
第九

凡圓界皆以所對之角而命其弧.而角又以所對之弧而命其度.蓋角度俱在圓界.而圓界爲角度之規也.如乙角爲心.甲丙爲界.則乙角相對之界.卽甲丙弧.而甲丙弧.卽乙角之度也.



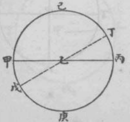
第十

凡角相對之弧。得圜界四分之一者。此角必直。故謂之直角。如甲丁丙戊之圜。甲乙丙之徑。自中心乙至圜界丁。畫一半徑。將半圜界又分爲兩平分。則成甲乙丁、丙乙丁之二角。此二角各得圜界四分之一。則此二角爲直角也。若自丁界過乙心至圜界戊處。畫一直線。又成丁乙戊之徑。復得甲乙戊、丙乙戊、兩相等之直角矣。故凡畫一直線交於別線。其所成之角若直。此線謂之垂線。蓋因平分圜界爲四。其四弧相對之四角。必相等而皆爲直角。則其二徑相交。必互爲垂線可知矣。



第十一

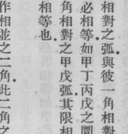
凡角相對之弧。不足圜界四分之一者。謂之銳角。若過四分之一者。謂之鈍角。故自圜徑中心。復畫一輻線。而不平分半圜之界。則成一銳角一鈍角。如甲己丙庚之圜。於甲乙丙之徑。自乙心至甲己丙之半圜界。不兩平分。於丁處畫一輻線。遂成丙乙丁一銳角。甲乙丁一鈍角。再將丁乙線引於相對圜界戊處。畫一丁乙戊徑線。復成甲乙戊一銳角。丙乙戊一鈍角。合前二角。總爲四角矣。故凡二角兩尖相對。謂之對角。二角兩尖相並。謂之並角。如甲乙戊、丙乙丁、二角之兩尖相對。即謂之對角。丙乙戊、甲乙丁、二角之兩尖亦相對。故亦謂之對角也。如丙乙戊、甲乙戊之二角。兩尖相並。而同出一線。則謂



之並角矣

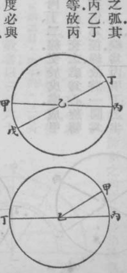
第十二

凡一圜內設兩角此一角相對之弧與彼一角相對之弧其限若等則此二角之度亦必相等如甲丁丙戊之圜丙乙丁角相對之丙丁弧甲乙戊角相對之甲戊弧其限相等故丙乙丁角甲乙戊角其度亦相等也



第十三

凡有一圜其徑線之中心作相並之二角此二角之度必與二直角等如甲丙丁之圜自丁乙丙徑線之中心作甲乙丙、甲乙丁之相並二角此二角之度必與二直角相等也



第十四

凡一直線交於他直線其所成之二角或為二直角或與二直角等如丙乙丁直線上畫一甲乙直線至於乙處即成甲乙丙、甲乙丁之二直角也又或於丙乙丁直線上畫一戊乙直線亦至乙處復成丙乙戊一銳角丁乙戊一鈍角此二角必與二直角相等也再申明之以乙為心丙為界旋轉畫一圜則丙乙丁線為圜之徑線必將圜界平分為兩平分矣此丙乙丁徑線之中心所畫之甲

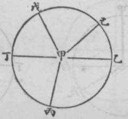
乙線。又將半圜界平分爲兩平分。則此二角各相對之弧。皆爲一圜界四分之一。而各爲一直角可知矣。又如戊乙線。將半圜界雖不兩平分而成一銳角一鈍角。然所成二角。仍在丙乙丁徑線所限半圜界度。爲全圜界四分之二。故與二直角相等也。

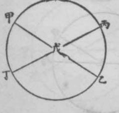
第十五

凡自一心畫爲衆線。其所成之角雖多。止與四直角相等。如自甲心至乙、至丙、至丁、至戊、至己畫衆輻線。雖成衆角。其各角所函之度。必與四直角等。蓋因甲點爲心。衆輻線皆立一圜之界。故衆角所對之弧。總不越一圜之全度。前言一圜之界。僅有四直角之弧線。茲角雖多。亦未嘗出一圜之界。故曰衆角雖多。止與四直角等也。

第十六

凡兩直線相交所成二對角之度。必俱相等。如甲乙、丙丁、二線。交於戊處。成甲戊丁、丙戊乙之二對角。斯二角之度。必俱相等。今以二線相交之處爲心。旋轉畫一全圜。則甲乙、丙丁、二線。俱爲此圜之徑線矣。惟其俱爲徑線。故將一圜爲兩平分。而甲戊乙之徑線。爲甲丙乙之半圜界。丙戊丁之徑線。爲丙甲丁之半圜界。因兩半圜界俱係全圜徑線。故相交成對角。其度必等。茲將甲丙乙之半圜界。減去甲丙弧。即餘丙乙弧。丙甲丁之半圜界。亦減去丙甲弧。又餘甲丁弧。

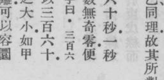




凡兩相等之弧減去一段相等之弧所餘之弧必相等今甲丙乙、丙甲丁、二半圜之界內減去甲丙、丙甲、同體之弧則所餘丙乙、甲丁、相對之弧亦必相等矣此二弧之度既俱相等則所對之甲戊丁、丙戊乙、二角之度亦必相等可知矣其餘甲戊丙、丁戊乙、亦與甲戊丁、丙戊乙、同理故其所對之角度亦必相等也

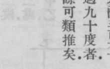
第十七

凡大小圜界俱定爲三百六十度而一度定爲六十分一分定爲六十秒一秒定爲六十微一微定爲六十纖夫圜界定爲三百六十度者取其數無奇零便於布算卽徵之經傳亦皆符合也易曰・凡三百有六十當期之日・邵子曰・三百六十・中分之得一百八十・爲二至二分相去之數・度下皆以六十起數者以三百六十乃六六所成以六十度之可得整數也凡有度之圜界可度角分之大小如甲乙丙角欲求其度則以有度之圜心置於乙角察乙丙、乙甲之相離可以容圜界之幾度如容九十度卽是甲乙丙直角何以知爲直角・因九十度爲全圜三百六十度之四分之一・前言凡角得圜界四分之一者爲直角・故知其爲直角也・若過九十度者爲丁乙丙鈍角不足九十度者爲丙乙戊銳角觀此三角之度其餘可類推矣



第十八

凡二線之間寬狹相離之分俱等則此二線謂之平行線也



第十九

欲求平行線之間相距幾何。則自上一線不拘何處至下一線。畫二縱線。則此二線爲相距度分也。如甲乙、丙丁二線平行。自上線甲乙二處至下線丙丁二處畫二縱線。則此二線爲相等線。其度必等。然則甲乙、丙丁相對之間。其相距之遠近不已見耶。

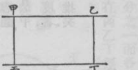
第二十

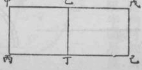
平行二線雖引至於無窮。其端必不能相合。蓋二線相離之度各處遠近俱爲相等故也。如甲乙、丙丁平行二線。隨意引於戊己。又自戊至己畫一縱線。其度亦等於甲丙、乙丁二縱線。故曰平行線雖引至於無窮。其端終不能相合也。

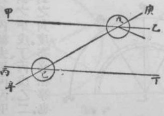
第二十一

凡平行二線。或縱或斜。畫一直線交加於上。則平行線上所成之二角必俱相等。如甲乙、丙丁二平行線上畫一庚辛斜線。其甲乙線之庚戊乙角。丙丁線之戊己丁角。皆相等。假使庚戊乙角大於戊己丁角。則戊乙線必離於庚戊線而向丙丁線。甲乙、丙丁二線不平行矣。若甲乙、丙丁二線毫無偏斜。又得庚辛直線相交成二角。則此二角必然相等矣。

第二十二





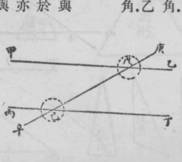


凡平行二線上畫一斜線則成八角此八角度有相等者必是對角或內外角如庚戊乙、甲戊己二角其度相等因其兩尖相對謂之對角庚戊乙、戊己丁二角其度亦相等因其在平行二線之內外故謂之內外角甲戊己、戊己丁二角其度亦相等因其俱在平行二線之內而立斜線之左右故又謂之相對錯角又如甲戊庚、庚戊乙二角其度不等因其立一線之界謂之並角庚戊甲、丁己辛二角其度亦相等因其俱在平行二線之外故謂之外角乙戊己、丙己戊二角其度亦相等因其又俱在平行二線之內故又謂之內角總之二平行線上交以斜線所成八角必兩兩相等也

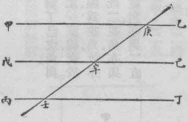
第二十三

平行線上一邊之二內角或一邊之二外角與二直角相等如丁己戊角與丙己戊角爲並角則此二並角與二直角等前第十四節云凡一直線交於他直線所成二角必與二直角相等則此二角同出於一直線爲並角故亦與二直角等矣又如甲戊庚、庚戊乙雖爲外角而亦爲並角此二並角亦與二直角等也他如甲戊己、乙戊己二並角丙己辛、丁己辛二並角亦與二直角等也

第二十四



有平行二線。復與一線相平行者。此三線互相爲平行線也。如甲乙、丙丁、二線之間。有戊己線與之平行。則甲乙、丙丁、戊己三線互相爲平行線也。照前第二十一節。在此三線上。畫一庚辛壬斜線。則所成之庚辛二角必相等。而辛壬二角亦必等也。三線之與斜線相交所成之角。旣各相等。則三線互爲平行可知矣。



幾何原本二

第一

凡各種界所成俱謂之形。其直界所成者爲直界形。曲界所成者爲曲界形。凡直界所成各形未有少於三角形界者故三角形爲諸形之首。

第二

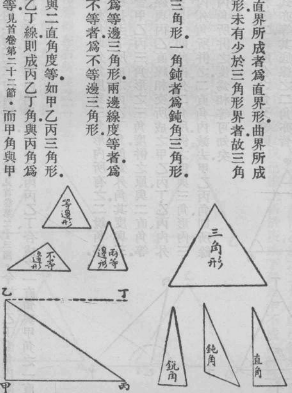
凡三角形一角直者爲直角三角形。一角鈍者爲鈍角三角形。三角俱銳者爲銳角三角形。

第三

凡三角形其三邊線度等者爲等邊三角形。兩邊線度等者爲兩等邊三角形。三邊線度俱不等者爲不等邊三角形。

第四

凡三角形之三角度相併。必與二直角度等。如甲乙丙三角形。自乙角與甲丙線平行畫一乙丁線。則成丙乙丁角與丙角爲二尖交錯之二角其度必相等見首卷第二十二節。而甲角與甲

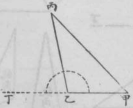


乙丁角。為甲丙、乙丁、二平行線內一邊之二內角。與二直角等。見首卷第二十三節。今於甲乙丁直角內。減丙乙丁角。所餘為甲乙丙角。丙乙丁角既與丙角度等。則甲乙丙丙乙丁、合成之一直角。與甲角之一直角。非二直角之度耶。

第五

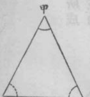
凡三角形。自一界線引長成一外角。此外角度。與三角形內所有之二銳角等。

如甲乙丙三角形。自甲乙線引長至丁。所成之丙乙丁角。卽為外角。其度與三角形內甲丙二銳角之度等。蓋甲乙丙三角形之三角度。併之原與二直角等。如本卷第四節云。而甲丁直線。與丙乙直線相交。所成之甲乙丙、丁乙丙、內外角。亦與二直角等。如首卷第十四節云。則此內外二角所併之度。與三角形內三角所併之度。亦必相等。今於內外角所併之二直角內。減去甲乙丙角。則所餘之丙乙丁一外角度。與甲角丙角所併之度。為相等可知矣。



第六

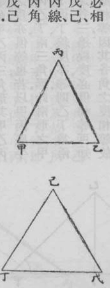
凡兩三角形。其兩邊線之度相等。二線所合之角又等。則二形底線之度必等。二形之式亦等。其底線之二角亦皆等也。如甲乙丙一三角形。丁戊己一三角形。此二形之甲角丁角若等。甲丙、丁戊、二線。甲乙、丁己、二線。又互相等。則



乙丙戊己之二底線必等。其二形之三角式亦必等。而乙角己角相等。丙角戊角亦相等。若將二形之甲角丁角相合。則甲丙、丁戊、二線。甲乙、丁己、二線。各度必等。因其俱等。故丙乙線之二角。與戊己線之二角。俱恰相符而無偏側矣。若謂乙丙底與戊己底不符。必是戊己線上斜於庚。或下斜於辛。不成直線形矣。

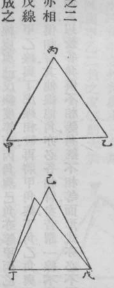
第七

兩三角形。其三邊線之度若等。則三角之度亦必相等。而此形內所函之分亦俱等也。如甲乙丙、丁戊己、兩三角形之甲乙線、丁戊線、甲丙線、丁己線、乙丙線、戊己線、兩兩相等。則甲角與丁角。乙角與戊角。丙角與己角。必各相等。而甲乙丙三界所函之分。丁戊己三界所函之分。亦俱相等。蓋因此兩三角形之各線。俱恰相符。故所函之分亦俱恰相符也。



第八

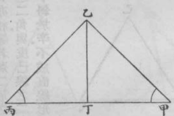
凡兩三角形。有一線相等。其相等線左右所生之二角又相等。則其他線他角俱相等。而二形之分亦相等也。如甲乙丙、丁戊己、兩三角形之甲乙線丁戊線若等。而此二線左邊所成之甲角、丁角、右邊所成之



乙角戊角亦相等。則甲丙線度與丁己線度等。丙乙線度與己戊線度等。而丙角與己角亦等。甲丙乙形所函之分與丁己戊形所函之分。自然相等矣。若將甲乙線與丁戊線相較。再將甲角與丁角、乙角與戊角相較。此二線二角之度。必俱相符。此二線二角既俱相符。其他線他角亦必各相符矣。若謂一線不符。則相等之角亦必不符。必其一線斜出或一線偏入以致各角俱不相等。角既不相等。而形式亦必不同矣。

第九

三角形之兩邊線若等。其底線之兩角度亦必等。如甲乙丙三角形。其甲乙、乙丙兩邊線之度等。則其甲丙底線之甲角丙角之度。亦俱等也。若以甲丙底平分於丁處。自丁至乙角畫一直線。遂成甲乙丁、丙乙丁兩三角形。此兩形之甲乙線與丙乙線既相等。而甲丙底線平分之甲丁、丙丁線度亦等。則乙丁為兩三角形所共用之各一邊線。然則此兩三角形之各三邊線度。必俱相等可知矣。三角形之三線既各相等。則其各角之度亦必相等。因其各角之度相等。故甲角丙角之度亦必等也。



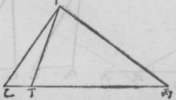
第十

有兩邊相等之三角形。自上角至底線畫一直線。將底線為兩平分。則此線為上角之平分線。又為底線之垂線也。如甲乙、丙乙兩邊線度相等之甲乙丙三

角形.自上角乙、至底線丁、畫一直線將甲丙底線爲兩平分.則爲乙角之平分線.又爲甲丙底線之垂線也.蓋乙丁線將乙甲丙三角形平分爲甲乙丁、丙乙丁、兩三角形.此兩三角形之各界線度.必各相等.而各角之度又俱相等.則甲乙丁角丙乙丁角、將乙角爲兩平分矣.而甲丁乙角、丙丁乙角又爲相等之兩直角.因其爲兩直角.故乙丁線爲平分甲丙底線之垂線也.

第十一

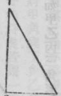
凡三角形內長界所對之角必大.短界所對之角必小.如甲乙丙三角形之乙丙界長於甲丙界.故其相對之甲角大於乙角.而甲乙界短於甲丙界.故其所對之丙角小於乙角也.試依甲丙界度.截乙丙於丁.復自甲至丁.作甲丁線.即成甲丙丁兩界相等之三角形.夫甲丙、丙丁、兩界度既相等.則甲丁丙、丁甲丙、兩角亦相等.今甲丁丙角相等之丁甲丙角.原自乙甲丙角所分.則乙甲丙角.必大於甲丁丙角矣.然此甲丁丙角.爲甲乙丁小三角形之外角.與小三角形內之甲乙二角相併之度等. 見本卷第五節. 既與甲乙二角之度等.則大於乙角可知矣.夫甲丁丙角.既大於乙角.則乙甲丙角.必更大於乙角矣.丙角之小於乙角.其理亦同.



第十二

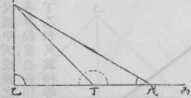
凡三角形內.必有二銳角.蓋三角形之三角.併之與二直角等. 見本卷第四節. 如甲乙丙三角形之乙角

爲直角則所餘甲角丙角併之始與乙角相等。二角併之僅與一直角等。則此二角獨較之必小於直角矣。故此甲丙二角爲銳角也。又如丁戊己三角形之戊角爲鈍角。則所餘之丁角己角愈小於直角而爲銳角矣。



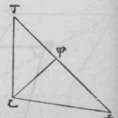
第十三

凡自一點至一橫線畫衆線。而衆線內有一垂線。必短於他線。而他線與垂線相離愈遠則愈長也。如自甲點至乙丙線畫甲乙、甲丁、甲戊、幾線。此內甲乙爲垂線。較之甲丁、甲戊線。則其度最短。而甲戊線與甲乙線相離既遠於甲丁。故更長於甲丁線也。蓋甲乙爲垂線。則乙角必爲直角。見首卷第十節。而甲乙丁三角形內丁角甲角。必俱爲銳角而小於乙角矣。因乙角大於丁角。故此乙角相對之甲丁線。必長於丁角相對之甲乙線。又甲丁戊外角原與甲乙丁、乙甲丁、二內角相併之度等。見本卷第五節。則此甲丁戊一外角必大於甲乙丁一內角矣。甲丁戊之外角既大於甲乙丁之內角。則甲丁戊角相對之甲戊線。必長於甲乙丁角相對之甲丁線可知矣。



第十四

凡三角形將二界線相併、必長於所餘之一界線．如甲乙丙三角形．將甲乙、甲丙二界線併之則長於所餘之乙丙界線也．試以丙甲線引之至丁作丁甲線與甲乙等則丁丙線爲甲丙、甲乙、二界線之共度矣復自丁至乙、作丁乙線成乙甲丁兩界相等之三角形．其丁乙甲角與丁角等 見本卷第九節．則丁乙丙角必大於丁角夫丁乙丙角既大於丁角則其所對之丁丙線必長於丁角相對之乙丙線可知矣見本卷第十一節．



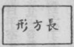
幾何原本三

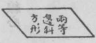
第一

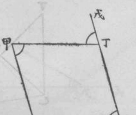
凡四邊線函四角者.其形有五.四邊線度等.而角度亦等者.爲正方形.四角直而兩邊線短、兩邊線長者.爲長方形.四邊線度等.而角度不等者.爲等邊斜方形.兩邊線長、兩邊線短而角度又不等者.爲兩等邊斜方形.以上四形.俱自平行線出.如四邊線不等.亦不平行.而四角度又不等者.爲不等邊斜方形.

第二

凡四平行線所成方形.其所函之角成兩對角.必兩兩相等.如甲乙丙丁平行線方形.其甲角度丙角度等.而乙角度丁角度亦等者.以丙丁線引長至戊.作一線.成一丁外角.與甲角爲二尖交錯之角.其度相等.見首卷第二十二節.而丁外角與丙角又爲一邊之內外角.其度亦等.見首卷第二十二節.夫甲丁二角既等.丁丙二角又等.則甲角與丙







角、必自相等。而丁乙兩對角之相等。不言可知矣。

第三

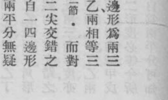
凡平行四邊形自一角至相對之角。作一對角線。必平分四邊形爲兩三角形。如甲丙乙丁四邊形。作甲乙對角線。卽成丙甲乙、丁甲乙兩相等三角形。蓋此四邊形之丙丁二角爲對角。其度必等。見本卷第二節。而對角線所分之丙甲乙、丁乙甲二角。丙乙甲、丁甲乙二角。俱爲二尖交錯之角。其度又兩兩相等。見首卷第二十二節。夫此兩三角形。原自一四邊形而分。各角又俱相等。則其所函之分必等。而四邊形平分爲兩平分無疑矣。

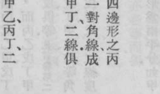
第四

凡平行線所成方形。其兩兩平行線度俱相等。如甲丙乙丁四邊形之丙甲線。與乙丁線度等。丙乙線、與甲丁線度等。此卽如前節作一對角線。成兩三角形。而兩形之各角。必俱相等。則丙甲、乙丁、二線。丙乙、甲丁、二線。俱爲各相等角所對之線。其度亦必相等矣。見二卷第八節。

第五

平行線方形內兩對角線。其相交處必平分二線之正中。如甲乙、丙丁、二

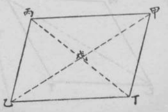


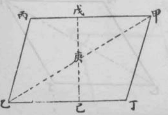


線相交於戊。則所成甲戊、戊乙、二線。丙戊、戊丁、二線。俱等。蓋因丙戊乙、甲戊丁、兩三角形之丙乙、甲丁、二線。爲平行線。其度等。見本卷第四節。而丙乙戊、丁甲戊、二角。乙丙戊、甲丁戊、二角。皆爲平行線內相對之錯角。其度俱等。見首卷第二十二節。夫丙乙、甲丁、二線既等。各相對之錯角又等。則丙乙戊、丁甲戊、二等角相對之戊丙、戊丁、二線。度與甲丁戊、乙丙戊、二等角相對之戊甲、戊乙、二線。度必皆相等可知矣。見二卷第八節。

第六

凡平行線方形內。於對角線上。或縱或橫。正中截開。即將此形爲兩平分。如甲丙乙丁之方形。其甲乙對角線上。畫一戊己線。於庚處截開。則平分甲丙乙丁方形爲丙戊己乙一段。甲戊己丁一段。此二段內之戊甲庚、己乙庚、兩三角形之甲庚、乙庚、二線相等。而戊甲庚、己乙庚之兩角。又爲平行線內二尖交錯之角。其度相等。而甲庚戊、乙庚己、二尖相對之角。其度又等。則此兩三角形。度亦必相等。又如甲乙對角線。將甲丙乙丁方形爲兩平分。則其甲丙乙、甲丁乙、兩三角形度必等。將此兩相等之三角形。以戊己線截開。於甲丙乙形內。減甲戊庚。於甲丁乙形內。減乙己庚。則所餘之甲庚己丁、乙庚戊丙、二形。度必等。今所分各形。既俱兩兩相等。則甲丙乙丁之方形。爲戊己線所截。自爲兩平分可知



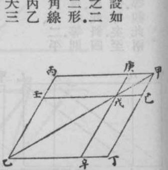


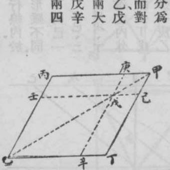
矣。

第七

凡四邊形於對角線、不拘何處復作相交二平行線、即成四四邊形。設如甲丙乙丁四邊形、於對角線之戊處、復作一壬戊己、一辛戊庚、相交之二平行線、即成甲戊、戊乙、丙戊、戊丁、四四邊形。此四形中之甲戊、戊乙二形、爲對角線上所成之形。丙戊、戊丁、二形、爲對角線旁所成之形。此對角線旁所成兩形、必俱相等。如丙壬戊庚、戊辛丁己兩形之分是已。蓋甲丙乙丁之全形、因甲乙對角線平分爲兩平分、所成之甲丙乙、甲丁乙、兩大三角形之分必等。其對角線上所成之一小方形、復爲甲戊對角線平分爲兩平分、成甲庚戊、甲己戊、兩小三角形。此兩小三角形之分亦必等。而對角線上所成之一大方形、又爲戊乙對角線平分爲兩平分、成戊壬乙、戊辛乙、兩中三角形。此兩中三角形之分亦必等。今將甲丙乙、甲丁乙、兩大三角形內、減去甲庚戊、甲己戊之兩相等小三角形、再減去戊壬乙、戊辛乙之兩相等中三角形、所餘對角線旁所成之丙壬戊庚、戊辛丁己兩四邊形、此兩四邊形自然相等矣。

第八

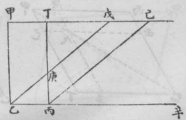


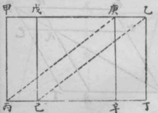


凡兩平行線內同底所成之四邊形其面積必等如甲己、乙辛兩平行線內於乙丙底作甲乙丙丁一長方四邊形戊乙丙己一斜方四邊形此兩形雖不同而所容之分必相等何也試以兩三角形考之如甲乙戊一三角形丁丙己一三角形此兩三角形之甲乙丁丙二線等甲戊丁己二線亦等甲丁、戊己、二線．俱與乙丙平行．而度分相等．若於甲丁、戊己、二線．各加一丁戊線．卽成甲戊、丁己線．其度自然相等．而戊甲乙、己丁丙二角爲甲乙丁丙平行線一邊之內外角其度又等則此兩三角形自然相等可知矣今於兩三角形內各減去丁戊庚、則所餘之甲乙庚丁、戊庚丙己二形之分必等復於此二形內每加一庚乙丙形則成甲乙丙丁、戊乙丙己之兩四邊形其面積必然相等也

第九

兩平行線內無論作幾四邊形其底度若等則面積必俱等如甲乙、丙丁、二平行線內作甲丙己戊、庚辛丁乙、兩平行線四邊形其丙己、辛丁、兩底度相等則其積亦等試自丙己底至庚乙畫二直線卽成一庚丙己乙斜四邊形此斜四邊形既與甲丙己戊四邊形同出於丙己之底卽同前節兩形面積俱等矣至於庚辛丁乙、與庚丙己乙、又同出於庚乙之底故此兩形面積亦俱等觀此兩兩相等則甲丙己戊、庚辛丁乙、兩形之面積相等明矣



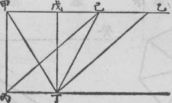


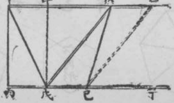
第十

凡兩平行線內同底所成之各種三角形。其面積俱等。如甲、乙、丙、丁、兩平行線內。於丙丁底。作甲丙丁一三角形。己丙丁一三角形。此兩三角形之面積必等。何也。自丁至戊。作一直線。與甲丙平行。再自丁至乙。作一直線。與己丙平行。卽成甲丙丁戊、己丙丁乙、兩四邊形。此二形既同出於丙丁底。其面積相等。而甲丙丁、己丙丁、兩三角形爲平分兩四邊形之一半。其面積亦必相等矣。

第十一

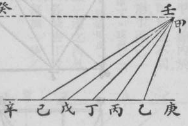
兩平行線內。無論作幾三角形。其底度若等。其面積亦俱等。如甲、乙、丙、丁、二平行線內。作甲丙戊、庚戊己、兩三角形。其丙戊、戊己、兩底度相等。故其面積亦等。今自戊至辛。作一直線。與甲丙平行。又自己至乙。作一直線。與庚戊平行。卽同前節成面積相等之兩四邊形。而此甲丙戊、庚戊己、兩三角形。爲面積相等兩四邊形之各一半。則此兩三角形之面積必等可知矣。





第十二

凡有幾三角形其底若俱在一直線而各底相對之角又共遇於一處。則其衆三角形必在二平行線之間。如甲乙丙、甲丙丁、甲丁戊、甲戊己四三角形。其乙丙、丙丁、丁戊、戊己各底俱在一庚辛直線上。而各底相對之角又皆遇於甲處。則此四三角形俱同在庚辛、壬癸二平行線之間矣。

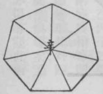


第十三

凡等邊等角各形內。五邊者爲五角形。六邊者爲六角形。邊愈多角愈多者。俱隨其邊與角而名之焉。

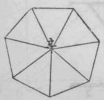
第十四

多邊多角形自角至心作線。凡有幾界。即成幾三角形。設如辛七邊形自心至邊七角作七線。即成七三角形。而此各三角形之分俱相等也。



第十五

欲知衆邊形各邊角之度。將邊數加一倍。得數減四。其所餘之數。即爲各邊角度也。如辛七邊形以七邊數加一倍共爲十四。

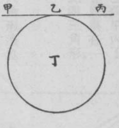


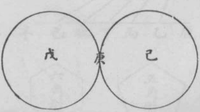
十四內減四所餘之十.卽爲十直角數.爲此七邊形之各邊角之總度也.何也.假如辛形自心至七角作七線.成七三角形.凡三角形之三角與二直角等.見二卷第四節• 則此七三角形之各三角度共與十四直角等.其七三角形之辛心所有之七角又與四直角等.見首卷第十五節• 若將十四直角內減四直角.乃餘十直角.則此十直角與衆邊形之各邊角之總度相等可知矣.

幾何原本四

第一

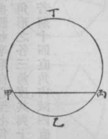
凡有直線、切於圓界、而不與圓界相交者、謂之切線。如甲乙丙線、切於丁圓乙界、其線雖自甲過乙至丙、而與圓界不出入相交、此甲乙丙線、卽爲圓之切線也。又如一圓與一圓界相切而不相交、則謂之切圓。假如戊圓與己圓、於庚界相切、二界總未相交、故又謂之切圓也。





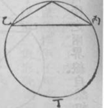
第二

凡一直線、橫分圓之兩界、謂之弦線。其所分圓界之一段謂之弧。此弧與弦相交所成之二角、謂之弧分角。如甲丙線、橫分甲乙丙丁圓界於甲丙、則甲丙線爲弦、其所分之甲丁丙一段、甲乙丙一段、皆謂之弧、而甲丙弦與甲乙丙弧相交所成之甲丙乙、丙甲乙二角、卽謂之弧分之角焉。



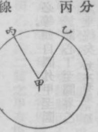
第三

凡自一圜弦線之兩頭復作二直線相遇於圜界之一處其所成之角謂之圜分內角又謂之弧分相對之界角也如甲乙丁丙圜之甲乙丙一段自乙丙弦線之兩頭各作一直線於甲處相遇其所成之乙甲丙角即圜分內角然此甲角與乙丁丙弧相對故又爲弧分相對之界角也



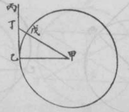
第四

凡一圜有二輻線截弧之一段所成之三角形謂之分圜面形如甲圜自甲心至圜界乙丙二處作甲乙甲丙二輻線所成之甲丙乙三角形即爲分圜面形也



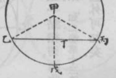
第五

凡自圜之輻線之末與圜界相切作一垂線則此垂線與輻線之末在圜界僅一點相切其他全在圜外即如甲圜之甲乙輻線於乙末作一丙乙垂線則此丙乙垂線與甲乙輻線俱在圜界乙處之一點相切而此垂線之丁等處俱在圜外也若自圜之甲心至丁作一甲戊丁線此線必長於甲乙輻線如二卷第十三節云因其長於輻線必出於圜界之外此甲戊丁線既出於圜界之外則丙乙線全在圜外可知矣



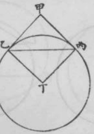
第六

圜弦線上。自圜心作一垂線。則將弦線爲兩平分。如乙丙弦。自圜心甲至弦線丁。作一垂線。必將乙丙弦爲兩平分。成乙丁、丁丙二段。若自甲心至弦線乙丙二末。作二輻線。成一甲乙丙三角形。此三角形之甲乙、甲丙二線。爲一圜之輻線。其度必等。此二輻線既等。則甲乙丙三角形內甲丁垂線所分之乙丁、丁丙二段亦必等矣。若將垂線引長至弧界戊作線。則又將乙丙弧界爲兩平分矣。



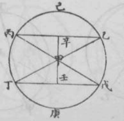
第七

凡自圜外一處至圜界兩邊。作二切線。此二線之度必等。如自圜外甲至圜界乙丙兩邊。作甲乙、甲丙二切線。此二線之度相等。今於圜心丁至圜界乙丙二切線之末。作二輻線。則此二輻線。爲甲乙、甲丙之垂線矣。如本卷第五節云。因其爲垂線。則甲乙丁、甲丙丁之二角。必同爲直角。見首卷第十節。再自丙至乙作一弦線。即成丁乙丙、甲乙丙兩三角形。丁乙丙三角形之丁乙、丁丙二線。同爲圜之輻線。其度必等。因其相等。故丁乙丙、丁丙乙二角亦必等。夫甲乙丁、甲丙丁二角原相等。此二角內減去丁乙丙、丁丙乙二角。則所餘之甲乙丙、甲丙乙二角亦自相等。此二角既俱相等。則甲乙、甲丙二切線。爲等角傍之兩界線。自然相等無疑矣。



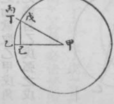
第八

凡圜內兩弦線若等。其分圜弧面之積必等。自心至兩弦所作垂線亦必等。如甲圜之丙乙、丁戊、二弦之度若等。則所分丙己乙辛、丁庚戊壬、二弧面積必等。自此圜之甲心至丙乙、丁戊、二弦之末各作輻線卽成甲丙乙、甲丁戊兩三角形。此兩三角形之各界線。必兩兩相等。則此兩三角形內相等線所對之角亦必相等。見二卷第七節。角既相等。則等角相對弧界之丙己乙、丁庚戊、二段亦必相等。見首卷第十二節。丙己乙、丁庚戊、二弧線既等。丙乙、丁戊、二弦線又等。則丁庚戊壬之弧面積與丙己乙辛之弧面積。自然相符矣。又甲辛、甲壬、二垂線將丙乙、丁戊、二弦。爲兩平分則丙辛、乙辛、丁壬、戊壬之四線亦俱等。三角形之各界線。既兩兩相等。而三角形內各角又兩兩相等。則平分丙乙、丁戊、二弦之甲辛、甲壬之度自然相等矣。



第九

凡弦線之所屬有三種。一爲弧之切線。一爲弧之割線。一爲弧之弦線。欲取弧界各角之度。用此三線求之必得也。如甲圜之甲乙輻線於乙末作丙乙垂線復自圜心甲至圜界戊割出至丙乙垂線丁分作甲丁線。又從圜界戊至甲乙輻線作戊己垂線。則成三種線。此三線內丁乙線爲乙戊弧之切線。甲丁線爲



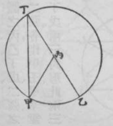
乙戊弧之割線戊巳線爲乙戊弧之正弦凡欲得各角弧界之度必於此三種線取之如欲取乙甲戊角相對弧度則自與甲角相對乙戊弧之丁乙切線取之或自乙戊弧之甲丁割線取之或自乙戊弧之戊巳正弦取之皆得乙戊弧之度數焉

第十

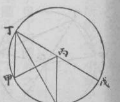
一圜界內在於圜界一段至圜心作二線至圜界作二線即成二角在圜心者爲心角在圜界者爲界角設如甲乙丁圜自甲乙一段至丙心作甲丙、乙丙二線仍自甲乙至丁界作甲丁、乙丁二線成甲丙乙甲丁乙二角其甲丙乙角爲心角甲丁乙角爲界角也

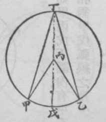
第十一

圜內之心角界角同立圜界之一段而各角之二線所成之式又分爲三種有界角心角同用一線者有界角心角不同用一線者有界角二線跨心角二線者總之此三種心角皆大於界角一倍如有三圖圜心之甲丙乙角皆自圜界甲乙一段作甲丙、乙丙二線圜界之甲丁乙角亦自圜界甲乙一段作甲丁、乙丁二線則第一圖之甲丁乙界角之乙丁線同立於甲丙乙心角之乙丙線上而甲丙乙心角爲甲丙丁三角形之外角與甲丁丙、丙甲丁二內角等見二卷第五節其甲丙、丙丁二線又爲一圜之輻線其度亦等此二



線既等、則甲丁丙、丙甲丁、二角亦必等。見二卷第九節。今甲丙乙之外角、既與甲丁丙、丙甲丁、二內角等、則甲丙乙心角、大於甲丁乙界角一倍可知矣。如第二圖甲丁、乙丁線、不同立於甲丙乙心角之乙丙線上、而甲丙乙心角在甲丁乙界角甲丁、丁乙、二直線之外、則自丁角過圜之丙心至對界作一丁丙戊全徑線、即成甲丙戊一大心角、乙丙戊一小心角、甲丁戊一大界角、乙丁戊一小界角、其甲丙戊大心角、即如第一圖必倍於甲丁戊大界角、而乙丙戊小心角亦必倍於乙丁戊小界角、於甲丙戊大心角內減去乙丙戊小心角、甲丁戊大界角內減去乙丁戊小界角、則所餘之甲丙乙心角必大於所餘之甲丁乙界角一倍矣。如第三圖甲丁、乙丁界角之二線、正跨於甲丙乙心角二線之上、而甲丙乙心角在甲丁乙界角甲丁、丁乙、二直線之間、則自丁角過圜之丙心至對界作丁丙戊全徑線、即成甲丙戊、乙丙戊二心角、甲丁戊、乙丁戊、二界角、此甲丙戊心角必倍於甲丁戊界角、乙丙戊心角亦必倍於乙丁戊界角、以甲丙戊、乙丙戊、二心角併之、乃甲丙乙一心角、以甲丁戊、乙丁戊、二界角併之、乃甲丁乙一界角、今所分之二心角既各倍於所分之界角、則此所併之甲丙乙心角必倍於所併之甲丁乙界角矣。



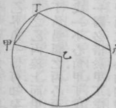


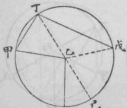
第十二

凡自圜之弧線一段任作相切界角幾何其度必俱相等。如甲乙丁丙之圜自甲乙弧線一段至圜界丙、丁作相切之甲丙乙、乙丁甲二界角此二角之度必俱相等。試自圜之戊心至圜界甲、乙作二輻線即成甲戊乙一心角此甲戊乙之心角與甲丙乙、乙丁甲界角俱同一圜弧線之一段則心角必倍於界角然則甲丙乙、乙丁甲二界角既俱爲甲戊乙心角之一半則此二角之度必等可知矣。

第十三

凡圜內心角所對弧線之度比界角所對弧線之度少一半則二角之度必等。如甲丙戊丁圜內有甲乙丙一心角甲丁戊一界角而甲乙丙心角相對甲丙弧線之度比甲丁戊界角相對甲戊弧線之度少一半則甲乙丙心角之度必與甲丁戊界角之度相等。試自丁角過圜之乙心至對界作丁乙己全徑線復自乙心至戊界作乙戊半徑線即成甲乙己、乙戊二心角甲丁己、己丁戊二界角其甲乙己心角必倍於甲丁己界角而己乙戊心角亦必倍於己丁戊界角今以甲乙己、己乙戊二心角相併甲丁己、己丁戊二界角亦相併則甲乙己、己乙戊二心角所併之度

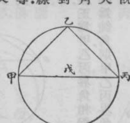


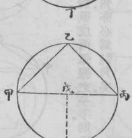


必倍於甲丁己己丁戊二界角所倂之度矣。是以甲丁戊一界角。必得甲乙己己乙戊二心角所倂之一半。夫甲丙弧線。旣爲甲戊弧線之一半。而甲乙丙角又爲甲乙己己乙戊二心角所倂之一半。則甲乙丙心角度必與甲丁戊界角之度相等矣。

第十四

凡圜內界角。立於圜界之半者。必爲直角。如甲乙丙丁圜內之甲乙丙界角。立於甲丁丙圜界之正一半。則此甲乙丙角必然爲直角也。自甲丁丙之半圜。於丁界爲兩平分。復自丁界至圜心戊作丁戊輻線。卽成甲戊丁角。其相對之甲丁弧。爲圜界四分之一。旣爲圜界四分之一。則必爲直角。如首卷第十節云。夫心角相對弧線。若爲界角相對弧線之一半。其二角之度相等矣。如本卷第十三節云。今甲戊丁心角相對之甲丁弧線。旣爲甲乙丙界角相對之甲丁丙弧線之一半。則甲戊丁心角度。必與甲乙丙界角度相等。且甲丁弧線。旣爲圜界四分之一。而甲丁丙弧線。又爲圜界之正一半。則甲戊丁心角爲直角。而甲乙丙界角亦必爲直角矣。

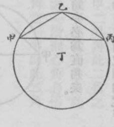


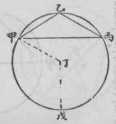


第十五

凡圜內界角。其所對之弧。過於圜界之半者。必爲鈍角。如甲乙丙戊圜內之甲乙丙界角。其相對之甲戊

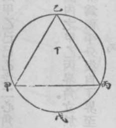
丙弧大於圓界之一半故其相對之甲乙丙角爲鈍角也試將甲戊丙弧平分於戊爲甲戊戊丙兩段復自圓心丁至甲戊作二輻線卽成甲丁戊一心角其甲戊丙弧分旣大於半圓則此甲戊弧線一段亦大於圓之四分之一矣故此甲戊弧線相對之甲丁戊心角必爲鈍角見首卷第十一節夫心角相對之弧線比界角相對之弧線少一半則二角之度必相等如本卷第十三節云今甲丁戊心角相對之甲戊弧線正爲甲乙丙界角相對甲戊丙弧線之一半則甲乙丙界角自然與甲丁戊心角等矣夫甲丁戊心角旣爲鈍角則甲乙丙界角亦必爲鈍角矣

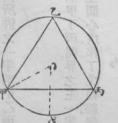




第十六

凡圓內界角其所對之弧不及圓界之半者必爲鋭角如甲乙丙戊圓內之甲乙丙界角其相對之甲戊丙弧小於圓界之一半故其相對之甲乙丙角爲鋭角也試將甲戊丙弧平分於戊爲甲戊戊丙兩段復自圓心丁至甲戊作二輻線卽成甲丁戊一心角此心角所對之甲戊弧線旣不足圓界四分之一則此

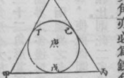




甲丁戊心角必爲銳角矣、見首卷第十一節。此甲丁戊心角所對之弧比之甲乙丙界角所對之弧爲一半則此二角之度必等夫甲丁戊心角既爲銳角則甲乙丙界角亦必爲銳角矣

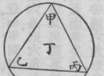
第十七

凡函圓各界形之各線與圓界相切而不相交則謂之函圓切界形如甲乙丙三角形之甲乙、乙丙、丙甲三界線俱在庚圓界之丁己戊三處相切而不相交故謂之函圓切界三角形又若甲乙丙丁四方形之甲乙、乙丙、丙丁、丁甲四界線俱在戊圓界之己庚辛壬四處相切而不相交則謂之函圓切界四邊形觀此二圖則知函圓各界形必大於所函圓界形之分矣



第十八

凡圓內直界形之各角止抵圓界而不割出則謂之圓內所函各邊形如甲乙丙三角形之甲角乙角丙角俱與丁圓界相抵而不會割出卽謂之圓內所函三角形又如甲乙丙丁四方形之甲角乙角丙角丁角俱與戊圓界相抵而不割出則謂之圓內所函四邊形觀此二圖則知函於圓界各界形必小於圓界形之分矣

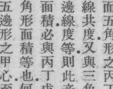


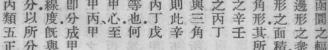
第十九

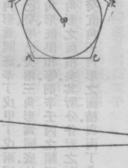
凡等邊衆界形或函圜或函於圜其界數愈多愈與圜界相近如甲圜形函乙丙丁等邊三角形又函乙己丙庚丁戊等邊六角形以三角形之三邊比之六角形之六邊則六角形之六邊與圜界相近矣設有十二角形之十二邊比此六角形之六邊則十二角之十二邊又與圜界爲近若有二十四角之二十四邊則又更近於十二角之十二邊矣蓋函衆界形之度必大於所函之衆界形度見本卷第十七十八兩節今甲圜既函等邊六角形自大於六角形而此六角形又函等邊三角形亦必大於三角形由此推之十二角函六角二十四角函十二角其邊愈多者其度愈大故與圜界愈近也又如復有一函圜等邊四角形內又作一函圜等邊八角形此四角形既函八角形必大於八角形可知矣若於八角形內復作十六角形十六角形內又作三十二角形其所函形愈小邊數愈多則與所函之圜界度愈近矣苟設一函於圜界之多邊形爲幾十萬邊設函於圜界之多邊形一自六邊起算一自四邊起算復設一函圜界之多邊形亦爲幾十萬邊設函圜界之多邊形亦一自六邊起算一自四邊起算使此函圜之多邊形自外與圜界相比而函於圜界之多邊形自內與圜界相比則此二多邊形之每邊直界線將與圜界曲線合而爲一故圜界曲線可得直線之度而多邊形之直線亦可得爲圜界度也

第二十

函圜切界等邊形。其所函圜之輻線度。與一直角三角形之小邊之度等。而等邊形之衆界共度。又與三角形之大邊之度等。則三角形之面積。與等邊形之面積等。如丙丁戊己庚等邊五角形。其所函甲圜之甲乙輻線。與辛壬癸直角三角形之辛壬小邊線度等。而五角形之丙丁戊己庚五邊線共度。又與三角形之壬癸大邊線度等。則此辛壬癸三角形面積。必與丙丁戊己庚等邊五角形面積等也。何以見之。若自五邊形之甲心。至丙、丁、戊、己、庚之五角。作甲丙、甲丁、甲戊、甲己、甲庚五線。即分成甲丙丁類五三角形。夫辛壬癸三角形之壬癸線度。既與五角形之五邊共度等。今將壬癸線平分五分。以所分之每分爲底。依前所分五三角形式。作甲壬丙類五正式三角形。復自所分



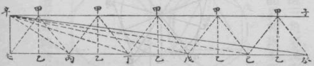




丙丁戊己四處。俱至三角形之辛角。作丙辛、丁辛、戊辛、己辛四線。遂分辛壬癸一三角形。爲辛壬丙類五斜式三角形。再自甲壬丙類五三角形之甲角至底。各作一甲乙垂線。俱與圜之幅線等。則甲壬丙相等之五三角形之高度。亦自相等矣。於是復自辛壬癸三角形之辛角。與五甲角相切。作一辛子線。與壬癸爲平行線。則此平行線內同底所成之各種三角形之面積。必俱相等矣。見三卷第十節。蓋辛壬丙、甲壬丙、兩三角形。爲同底。辛丙丁、甲丙丁、兩三角形。爲同底。辛丁戊、甲丁戊、兩三角形。爲同底。辛戊己、甲戊己、兩三角形。爲同底。辛己癸、甲己癸、兩三角形。爲同底。故其面積俱相等也。且辛壬丙三角形。與甲壬丙三角形。既俱相等。則辛壬丙之類五斜式三角形之面積。卽如甲壬丙之類五正式三角形之面積矣。其所分各形之面積俱等。則其全形之面積。自然相等。此所以辛壬癸直角三角形之面積。與丙丁戊己庚等邊五角形之面積相等也。

第二十一

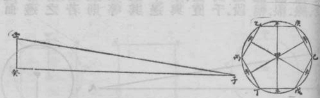
圜界內函等邊衆界形。其圜心至衆界所作中垂線。與一直角三角形之小邊之度等。而等邊衆界形之衆界共度。又與直角三角形之大邊之度等。則此三角形之面積。與等邊衆界形之面積等。如甲圜所函乙丙丁戊己庚等邊六角形。其圜之甲心至衆界所作甲辛垂線。與壬癸子直角三角形之壬癸小邊線度等。而六角形之乙

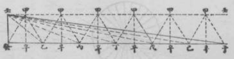


丙丁戊己庚六邊線共度又與三角形之癸子大邊線度等則此壬子癸三角形面積必與乙丙丁戊己庚等邊六角形面積等也若依前節法將六邊形分爲六三角形復以三角形之癸子界照六邊形度分爲六分又照六邊形所分六三角形作六正式三角形復自壬子癸三角形之壬角至乙丙丁戊己五處作五斜線成六斜式三角形此兩式三角形同底又同在二平行線內則其面積必兩兩相等此兩式六三角形之垂線既與壬癸子直角三角形之壬癸小邊線度等而兩式六三角形之底線共度又與壬子癸直角三角形之癸子大邊線度等則壬癸子直角三角形之面積必與乙丙丁戊己庚等邊六角形之面積相等矣

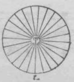
第二十二

凡圜形之幅線與一直角三角形之小邊線度等而圜之周界與三角形之大邊線度等則此直角三角形之面積與圜形之面積相等如有一甲圜形其甲乙幅線與丙丁戊直角三角形之丙丁小邊線度等而甲圜形之乙周界又與丙丁戊三角形





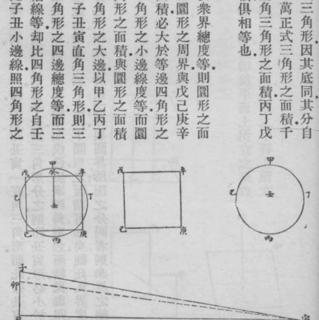
之丁戊大邊線度等。則此丙丁戊三角形之面積。即與甲圜形之面積相等也。何以見之。甲圜之輻線。與三角形之小邊等者。即如等邊衆界形之中垂線。與三角形之小邊等也。甲圜之周界。與三角形之大邊等者。即如等邊衆界形之各界共度。與三角形之大邊等也。若夫函圜衆界形相等之三角形。其小邊雖與圜之輻線等。其大邊則長於圜之周線。故其積分亦大於圜之積分。而函於圜衆界形相等之三角形。其小邊既短於圜之輻線。而大邊亦短於圜之周線。故其積分亦小於圜之積分。今此甲圜形相等之丙丁戊三角形。其小邊既與圜之輻線等。而三角形之大邊。又與圜之周線等。則其積分與圜形之積分相等無疑矣。然圜周界曲線也。等邊衆界形之界度直線也。觀之似難於相通者。如以圜之內外。各設多邊衆界形。分為千萬邊如本卷第十九節云。則逼圜界最近。將合而為一。乃依所分之段為千萬正式三角形。此千萬正式三角形之中垂線。亦將與圜之輻線合而為一。而千萬邊共界度。既與圜周合而為一。則圜周之曲線。亦變而為直線矣。夫千萬邊正式三角形之中垂線。既成圜之輻線。則與丙丁戊三角形之小邊等。而千萬邊正式三角形之底界共度。



又成圜之周度。則又與丙丁戊三角形之大邊度等矣。復自丙丁戊三角形之丙角至千萬正式三角形之底界各作千萬斜式三角形。以比正式三角形。因其底同。其分自相等。故千萬斜式三角形之面積。比之千萬正式三角形之面積。千萬正式三角形之面積。比之丙丁戊一直角三角形之面積。丙丁戊直角三角形之面積。比之甲圜形之面積。俱相等也。

第二十三

有一圜形。又一衆界形。此圜界度。若與彼衆界總度等。則圜形之面積。必大於衆界形之面積也。如甲乙丙丁圜形之周界。與戊己庚辛等邊四角形之四邊總度等。則圜形之面積。必大於等邊四角形之面積矣。前言凡圜形之輻線。與一直角三角形之小邊線度等。而圜之周界。與三角形之大邊線度等。則三角形之面積。與圜形之面積相等矣。今試以甲乙丙丁圜形周界。為三角形之大邊。以甲乙丙丁圜形之甲壬輻線。為三角形之小邊。作一子丑寅直角三角形。則三角形之丑寅大邊線度。亦與戊己庚辛四角形之四邊總度等。而三角形之子丑小邊線度。雖與圜形甲壬輻線等。却比四角形之自壬心至癸邊所作垂線為長。若將三角形之子丑小邊線。照四角形之



壬癸垂線度截開。則分子丑線於卯。復自卯至寅、作一斜弦。即成卯丑寅一直角三角形。而此卯丑寅三角形之分。與戊己庚辛四角形相等也。此卯丑寅三角形。自子丑寅三角形分之。則卯丑寅形。必小於子丑寅形。今甲乙丙丁圜形之面積。既與子丑寅三角形之面積等。而戊己庚辛四角形之面積。又與卯丑寅三角形之面積等。則戊己庚辛四角形之面積。必小於甲乙丙丁圜形之面積可知矣。觀此凡界度相等之形。圜界所函之分。比衆界所函之分必大。而衆界所函之分與圜界所函之分同者。則衆界之總度。復比圜界度大也。

第一

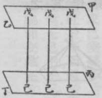
平面之上所立直線。無少偏倚。其面上所生之角必俱直。則謂之平面上所立垂線也。如甲乙之平面正立一丙丁線。不偏不倚。此卽爲平面上所立之垂線矣。

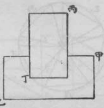
第二

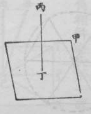
凡兩平面相對。其所立衆垂線度俱各相等。則此相對之平面謂之平行面也。如甲乙、丙丁、二平面間所有戊己衆垂線之度俱相等。此甲乙丙丁二平面卽爲平行面矣。

第三

平面上復立一平面。無少偏倚。其兩邊所成之角必皆爲直角。則謂之平面上所立直面也。如甲乙平面上所立之丙丁平面。無偏無倚。兩邊亦俱成直角。此卽爲平面上所立之直面矣。

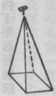


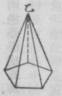




第四

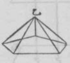
凡各面相合其每面之角所合處復成一種體角則謂之厚角夫厚角必自三面合之乃成其面多者爲各瓣相併而成之厚角也如甲圖四面爲四瓣相併所生之厚角乙圖五面爲五瓣相併所生之厚角是已

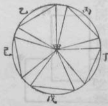




第五

凡各面相併所成之厚角如將各面計之則其衆角所合之分必不足於四直角度也如甲圖五面合成之厚角若將其五面展開使平作乙丙丁戊己平面之五瓣復以甲爲心作一甲圜其乙丙丁戊己之五瓣相離處不能滿甲圜之周界矣因其不滿於圜之周界故比四直角爲不足也或以四直角分強欲作一厚角則其瓣過於大必不能成平面所合之厚角矣





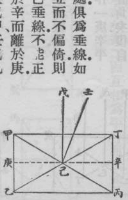
第六

凡等邊三面所合厚角其三面內之兩面角併之必大於一直角度也如甲丙乙丁之等邊三面所合之甲厚角將乙甲丙丙甲丁二面併之必大於一直角度矣依前節法將甲厚

角展開使平．雖不足四直角之度．而乙甲丙、丙甲丁之二面併之．則較之一直角度爲大焉．何以見之．夫三面展開其所離之虛分仍有三面之分．以三面之實分合三面之虛分．則爲六角之全形．此六角之全形得四直角度矣．六角而得四直角．則三角必得二直角．三角既得二直角．則二角相併必大於一直角可知矣．

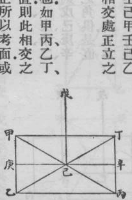
第七

凡平面二線交處作一垂線．正立而無偏倚．此線任在平面各處．俱爲垂線．如甲乙丙丁平面上．甲丙、丁乙二線相交己處．作一戊己垂線．正立而不偏倚．則此戊己線．任在甲乙丙丁平面上某一處．俱爲垂線也．假使戊己垂線．不能正立而有所偏倚．則如壬己線．近於辛而離於庚矣．壬己線既近於辛而離於庚．則偏向於丁丙而遠於甲乙．而壬己丁、壬己丙之二角爲銳角．壬己甲、壬己乙之二角爲鈍角矣．戊己既如壬己．則不得謂之甲丙、丁乙二線相交處正立之垂線矣．



第八

衆線交處立一垂線．其各角若俱直．此所交各線．必在一平面也．如甲丙、乙丁、庚辛之三線相交處．立一戊己垂線．其與衆線相接各角若俱直．則此相交之三線．必在一平面也．夫衆線之相交．固在平面．而垂線之所立．正所以考面或



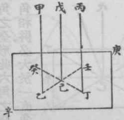
一角不直則不得謂之平面矣。

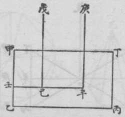
第九

平面上若立二垂線。必互為平行線。如甲乙丙丁之平面上立戊己、庚辛二垂線。則此二線互為平行線也。試自辛過己至壬作一辛壬線。則戊己、庚辛二垂線所立之分必正。其在甲乙丙丁平面上任指何處所生之角俱是直角。見本卷首節。故戊己壬、庚辛己二角俱為直角而相等也。且此二角又為二線與一線相交所成之內外角。其度既等。則戊己、庚辛二線必為平行線矣。如首卷第二十一節。

第十

有二線與一垂線平行。雖不在平面之一界。此三線亦互相為平行線也。如甲乙、丙丁二線。俱與戊己一垂線平行。不立於一直線上。雖不居平面之一界。此三線亦必互為平行線也。試於甲乙、丙丁、戊己三線之末作一庚辛平面。此平面上之戊己線為垂線。其四圍平面所生之各角俱是直角矣。復自乙過己、自丁過己作相交二線。則成甲乙己、戊己壬二角、丙丁己、戊己癸二角。此各二角俱為平行線一邊之內外角。俱為相等角矣。見首卷第二十一節。而甲乙己、丙丁己二角亦俱為直角。夫甲乙、丙丁二線在庚辛平面上所生

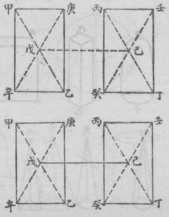




之角皆直又皆與戊己垂線所生之角等則甲乙、丙丁、二線亦皆得爲垂線其與戊己線爲互相平行之三線可知矣

第十一

相對二平面之間横一直線此線在二平面上所生角若俱直則此相對二面互相爲平行面也如甲辛乙庚、丙癸丁壬、二平面之間横一戊己直線此戊己線末所抵處其四圍俱成直角則此二平面互相爲平行面矣試將此二平面之戊己横線所抵之處作甲乙、庚辛、相交二線丙丁、壬癸、相交二線則戊己横線於二平面各界所生之角俱爲直角如甲乙、丙丁、二線與戊己横線相抵所生之甲戊己、戊己癸、二尖交錯之角相等故甲乙、丙丁、相當之二線爲平行矣又如辛戊己、戊己丙、二尖交錯之角亦相等故庚辛、壬癸、相當二線亦爲平行矣相對二平面之上所有之相當各二線既俱同爲平行線則相對之二平面自然互爲平行面矣



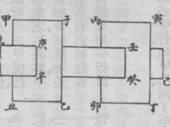
第十二

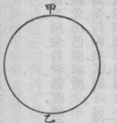
有二平行面横交一面其相交處所生二線必平行如甲乙、丙丁、平行二面上横交一戊己平面其庚辛、

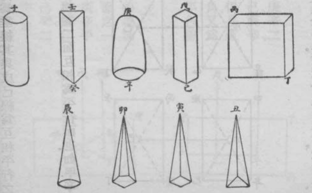
壬癸之相交處所生二線。亦俱平行也。何以言之。庚辛、壬癸平面相交處所生二縫、旣在甲乙、丙丁、二平面之上。自然與甲乙、丙丁二面之甲丑、子乙、丙卯、寅丁之各線。同爲平行線。且又在戊己一平面內。其分自然相對。故此二平面與一平面相交之縫線。亦得爲平行也。

第十三

凡各種面內所積之實爲體。而皆因其面以名之焉。如全體不成角度。止現圓之圓面。則謂之圓體。甲乙圖是也。全體各面俱平。各邊相等。所成各角又等。則謂之平面正方體。丙丁圖是也。全體各面雖平。體長而面成兩式。其相對各面。仍兩兩相等。相對各邊。則又平行。角又相等。此謂之平行長方體。戊己圖是也。體有曲平兩面相離、



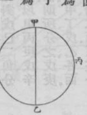




而不成等邊等面。則謂之底平半圓體。庚辛圖是也。全體相對之各面不平行。上下兩面平行。則謂之上下面平行體。壬癸圖是也。體圓而上下面俱平。則謂之長圓體。子圖是也。底爲平面。其各面俱合於一角而成厚角。則謂之尖瓣體。底三角者。謂之三瓣尖體。底四角者。謂之四瓣尖體。底衆角者。謂之衆瓣尖體。如丑寅卯三圖是也。又或底面圓而漸銳成形。則謂之尖圓體。辰圖是也。

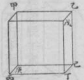
第十四

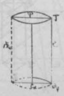
凡圓體、長圓體、尖圓體、俱生於圜面。故其外皮面積。亦生於圜界一旋轉之度分耳。如取甲乙丙丁之圓形。則以甲乙徑線爲樞心。將甲丙乙半圓作轉式旋轉。復還於原處。卽成甲丙乙丁一圓形體。如取甲乙戊己平行面之長圓形。則以甲乙中線爲樞心。將丙丁線界作轉式旋轉。復還於原處。卽成甲乙戊己一長圓體。如取甲丙丁平底尖圓形。則以甲乙中線爲樞心。將甲丁邊線作轉式旋轉。復還於原處。卽成甲乙丙丁一尖圓體矣。



第十五

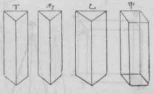
凡各體形。其各面平行相當。則相對兩邊面積俱相等。如甲乙丙丁之正方體。其甲戊庚丁、甲己戊丙、甲丙乙丁、六面俱各平行。故相對二面之積俱兩兩相等也。





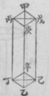
第十六

凡體面式不一而積等者。爲積數相等之體。面式既同而體積又等者。爲面式體積全等之體。如甲、乙二體。爲積數相等之體也。丙、丁二體。爲面式體積全等之體也。



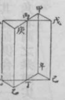
第十七

凡平行面之長方體。自一面之對角線。平分爲兩三稜體。此兩三稜體。必爲面式體積全等之體矣。如甲乙平行面長方體。自丙丁二角。至相對戊己二角。分爲兩段。成戊丙乙、丁己甲兩三稜體。爲面式體積全等體也。試以甲丙庚戊、辛丁乙己兩平面形。自戊丙、丁己兩對角線。均分爲兩三角形面。則所分之戊庚丙、己乙丁、丙甲戊、丁辛己四三角形面積俱相等。而丙乙、甲己、甲丁、戊乙各面。又互爲平行。必兩兩相等。再對角線分成之丙丁己戊、戊己丁丙二面。原在一界所分。必各相等。今所分二形之各面既各相等。則其積必等。而爲面式體積全等體無疑矣。



第十八

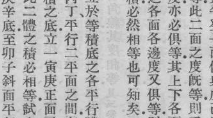
凡平行二平面之間。若同底。立各平行體。其積必相等。設甲乙、丙丁、平行二平面之間。於戊己庚辛底。立壬庚、癸己二平行體。其積俱相等。何也。蓋因壬戊己

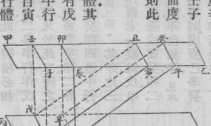


子丑寅平面三角形之壬戊己子面與卯辛庚辰癸午平面三角形之卯庚辛辰面平行而壬戊己子丑寅平面三角形之丑戊己寅面與卯辛庚辰癸午平面三角形之癸辛庚午面平行故其各面之度相等其壬子辰卯之面與丑寅午癸一面俱與戊己庚辛一面平行其度亦必相等此二面之度既等則壬子寅丑卯辰午癸二面之度亦必俱等其上下各面度既等而平面兩三角形之各面各邊度又俱等則此壬庚癸己二平行體之積必然相等也可知矣

第十九

凡平行平面之間所有立於等積底之各平行體其積必俱相等設如甲乙丙丁平行二平面之間有戊己庚辛壬癸子丑二等積之底立一寅庚正面平行體一卯子斜面平行體此二體之積必相等試自寅庚正面平行體之戊己庚辛底至卯子斜面平行體之卯辰午未面復作一卯庚斜面平行體則寅庚卯庚二體立於戊己庚辛之一底其積相等矣如前節所云而卯子卯庚二體又同立於卯辰午未之面其積亦必相等是以寅庚正面平行體卯子斜面平行體俱與卯庚平行體相等故云凡平行平面之間所

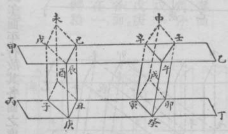




有立於等積底之各平行體其積必俱相等也。

第二十

平行平面之間有立於等積三角底之各三面體其積必俱等。如甲乙、丙丁平行二平面之間有子庚丑、寅癸卯等積三角底立戊庚己、辛癸壬之兩三面體此二體積必相等何以見之若以此二體之上邊二面之戊辰、辰己二界平行作戊未、己未二線辛午、壬午二界平行作辛申、壬申二線又於此二體之下邊二面之子庚、庚丑二界平行作子酉、酉丑二線寅癸、癸卯二界平行作寅戌、戌卯二線則二體所生酉子庚丑、戌寅癸卯四邊平行二底俱在子丑、寅卯二對角線其度相等。見三卷第三節。其分比三角面各大一倍矣復於所作二底邊酉戌二處作酉未一縱線戌申一縱線即成未庚、申癸平行面二方體矣其酉子庚丑、戌寅癸卯二底既俱相等則所生之未庚、申癸平行面之二方體亦自相等。見本卷第十九節。此未庚、申癸平行面二方體既各相等則戊庚己、辛癸壬之三面體為未庚、申癸二方體之正一半其積必等無疑矣。



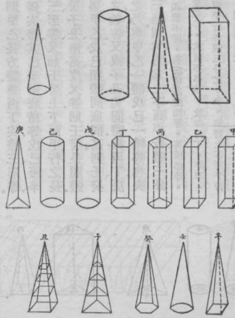
第二十一

凡各種體形難以圖顯蓋以圖止一面故也。必用木石製之始能相

肯.況此各種形體.又或有外實而內空者.必按其形以求其理.始可發明其精蘊矣.

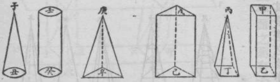
第二十二

凡各面所成體形內.其各面俱平行.或上下面爲平行.而立於等積之底.其體之高又等.則其體之積亦相等.如甲乙體.其各面俱平行.又如丙丁體.其上下面平行.立於等積之底.其高又等.或又如戊己體.其上下面平行圓面積又等.高又等.則其兩兩體積必相等矣.又如庚辛壬癸之類尖體形.苟立於等積之底.其體之高者等.則其體之積亦相等.何以見之.若將衆尖體.分爲平行底之衆小體.其所分衆小體之底度高度.必俱相等.如子丑圖.其所分小體之積俱等.故其全體之積亦相等也.



第二十三

凡上下面平行各體。與平底尖體、同底同高者。不論平面圓面。其平底尖體皆得上下面平行體三分之一。如甲乙上下面平行之長方體。與丙丁四瓣尖體其乙丁兩底積等。甲乙、丙丁、兩高度又等。則甲乙長方體。與丙丁尖體三形等。如戊己上下面平行之三稜體。與庚辛三瓣尖體。其己辛兩底積等。戊己、庚辛兩高度又等。則戊己三稜體。與庚辛尖體三形等。又如壬癸上下面平行之長圓體。與子丑尖圓體。其癸丑兩底積等。壬癸、子丑兩高度又等。則壬癸長圓體與子丑尖圓體三形等。又如壬癸長圓體。與甲乙、戊己類體同底同高。則壬癸長圓體亦與丙丁、庚辛類尖體三倍所合之數等。又或子丑尖圓體。與丙丁、庚辛類尖體同底同高。則子丑尖圓體三倍之。乃與甲乙一體戊己一體等也。夫同底同高上下面平行體。既俱爲尖體之三倍。則尖體爲上下面平行體三分之一可知矣。　蓋甲乙・戊己・壬癸・各體・其式雖不同・苟底積高度相等・其積必等・而丙丁・庚辛・子丑・各體式雖不同・苟底積高度相等・其積亦必等・故知丙丁・庚辛・子丑・平底尖體・互爲甲乙・戊己・壬癸・上下面平行各體三分之一也・如將上下面平行各體・以木石爲之・分作同底同高之各平底尖體・用權衡以較其分量・則各體之積分・自昭然可見矣・

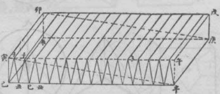


第二十四

凡長圓體外周面積。與長方體底面積相等。而長圓體半徑。又與長方體高度相等。則長圓體積。必得長方體積之半也。如甲乙丙丁長圓體。其周圍外面積與戊己長方體之庚己底面積等。而長圓體之壬丁半徑。又與長方體之戊庚高度等。則此甲乙丙丁長圓體積。必得戊己長方體積之一半也。試將甲乙丙丁長圓體。從壬癸中線。至周圍外面分為千萬分。則成子丑己類千萬長尖體。此千萬長尖體之高。與長圓體之壬子半徑等。而千萬長尖體之共底。卽長圓體之周圍外面積。則此千萬長尖體。必為戊己長方體之一半矣。蓋寅己辛三角面為午己長方面之一半。見三卷第三節。而此子丑己類衆三角面與寅己辛三角面等。見四卷第二十節。子丑己類衆三角面旣與寅己辛三角面等。則子丑己類衆長尖體。亦必與卯辰庚辛己寅三角體等。此卯辰庚辛己寅三角體。因為戊己長方體之一半。今長圓體所分之衆長尖體。旣與卯辰庚辛己寅三角體等。則亦必為戊己長方體之一半。故甲乙丙丁長圓體為戊己長方體之一半也。

第二十五

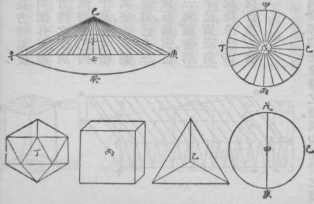
凡球體外面積。與尖圓體之底積等。而球體之半徑。與尖圓體之高度等。則此球體之積。與尖圓體之積



等也。如甲乙丙丁球體之外面積。與己庚辛尖圓體之庚子辛癸底積等。球體之甲戊半徑與尖圓體之己壬高度等。則此球體之積。爲與尖圓體之積等也。試將球體從中心分爲千萬尖體。復將尖圓體亦分爲千萬尖體。則球體所分尖體每一分必皆與尖圓體所分尖體一分等。何也。蓋球體所分尖體。皆以球體之外面爲底。而以球體之甲戊半徑爲高。其尖圓體所分尖體。皆以尖圓體之底爲底。而以尖圓體之己壬高爲高。夫尖圓體之底積。原與球體之外面積等。而尖圓體之高度。又與球體甲戊半徑等。故此兩種千萬尖體。皆爲同底同高。其積相等無疑矣。見本卷第十八節。然此兩種千萬尖體。卽球體尖圓體之所分。其所分之體既等。則原體亦必相等可知。故曰球體與尖圓體俱相等也。

第二十六

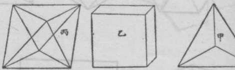
凡各形外皮面積相等之體。惟圓體所函之積數。大於他種各體所函之積。如甲、乙、丙、丁外皮面積相等。各形內甲圓體所函之積。必大於乙、丙、丁、直界體所函之積也。何也。大凡圓形其半圓周一旋轉。卽成圓體。此戊己庚半圓周一次旋轉。卽成甲圓體。見本



卷第十四節・又凡平面圜界所函之積必大於等邊各形所函之積見四卷第二十三節・平面圜界所函猶大於各等邊所函之積則圜體所函必大於各直界體所函之積可知矣

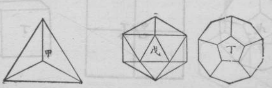
第二十七

厚角所成等面體形有五種各以面數而名之其一爲四面體每面有三角各三角之各三界度俱等如甲圖是也二爲六面體每面俱爲正方其方面之四角俱爲直角而各界互等故又爲正方體如乙圖是也三爲八面體每面有三角各三角之各三界度俱等如丙圖是也四爲十二面體每面有五角各五角之五界度俱等如丁圖是也五爲二十面體每面有三角各三角之各三界度俱等如戊圖是也

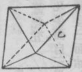


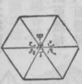
第二十八

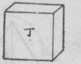
前節發明五種厚角所成等面體形之外不能復生他形蓋此五種厚角體俱是等邊三角四角五角之平面相合所成也凡平面自三界以下不能成面見二卷首節・而厚角自三面以下亦不能成角故厚角自三面始如甲四面體其四厚角皆三平面三角形所合而成也乙八面體其六厚角皆四平面三角形所

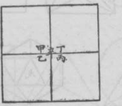


合而成也丙二十面體其十二厚角皆五平面三角形所合而成也然平面三角形所合過於五形則不能成厚角故平面六三角形合於一處卽成庚形其甲乙丙丁戊己六角相合與四直角等見首卷第十五節既與四直角等則爲平面不成厚角矣如本卷第五節六形相合尙不能成厚角況多形乎是故平面三角形所生厚角體僅得四面八面二十面三種而已若夫平面正方四角形所成厚角如丁六面正方體其八厚角皆三平面四角形所合而成此外更無他形若將四平面四角形合於一處卽成辛形其甲乙丙丁四角既俱爲直角必不能成厚角矣故四角形所生厚角僅有一六面正方體而已至於平面五角形所成厚角如戊十二面體其二十厚角皆三平面五角形所合而成此外更無他形也或將四平面五角形如癸子丑寅之四角合於壬此四角俱爲鈍角必大於四直角既大於四直角在平面尙不能

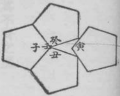


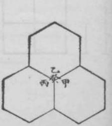






相合厚角豈能成耶。是以平面五角形所成之厚角。僅有一十二面體而已。或將平面六角形之三形。合於一處爲癸。其甲乙丙三角度。與四直角等。故不成厚角。六角平面相合。既不成厚角。其七角八角等形。愈不能成厚角矣。故曰四面六面八面十二面二十面五種體。只在三角四角五角三種平面形所生。此外不能復成他形也。





數理精蘊上編卷三

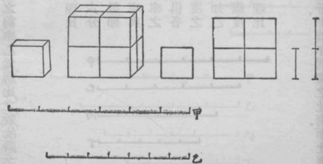
幾何原本六

第一

大凡欲論諸物之不齊。必借同類之物以比之。始可以得其不齊之度數。如一線與他線相比。其度之或長或短。其數之或多或少。自能見之。如一面與他面相比。其面度之或大或小。其積數之或多或少。自能見之。又如一體與他體相比。其體度之或厚或薄。其積數之或多或少。亦自能見之。若將一線與一面相比。或一面與一體相比。既不同類。又不同形。則線之長短面之大小體之厚薄俱不可辯矣。故曰欲論諸物之不齊。必借同類之物以比之也。

第二

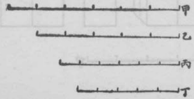
將兩數相比。其度互爲大小。則謂之比例。其比者、與所比者、俱謂之率。率者。法也。矩也。以數互相準之之謂也。其比之數爲前率。其所比之數爲後率。如甲乙二數互相爲比。其相較之分。甲數之度爲長。其分爲多。



乙數之度爲短其分爲少如是以比之故謂之二率甲爲比之之數故謂之前率乙爲所比之數故謂之後率焉

第三

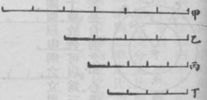
有四率兩兩相比其一率與二率之比同於三率與四率之比則謂之同理比例也如甲乙丙丁四數甲與乙比丙與丁比苟乙爲甲六分之五丁爲丙六分之五則甲與乙之比例丙與丁之比例此兩比例相同而乙有甲幾分之數即可知丁有丙幾分之數矣故凡四率內將一率與三率分數定爲相等二率與四率分數亦定爲相等其度之長短雖有不同苟分數定準則一率與二率之比卽如三率與四率之比也夫甲乙丙丁四線內甲第一線與丙第三線俱各定爲六分乙第二線與丁第四線俱各定爲五分則甲度之長雖大於丙度之長其分數則俱爲六而乙度之長雖大於丁度之長其分數亦俱爲五故知乙第二線度與甲第一線度之六分之五分相等丁第四線度亦與丙第三線度之六分之五分相等所以甲線之比乙線卽如丙線之比丁線而謂之同理比例也



第四

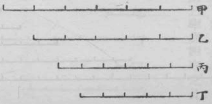
凡四率兩兩相比其一率與二率相比之分若大於三率與四率相比之分則爲不同理之比例而比例

不得行也。如有甲、乙、丙、丁、四數。甲與乙、丙與丁、各互相爲比。苟甲第一數與乙第二數相比之分爲六與四。其丙第三數與丁第四數相比之分爲五與四。則此甲與乙之比。大於彼丙與丁之比矣。故凡如此例者。以一率二率相比之分爲準。則三率四率相比之分爲小。若依三率四率相比之分爲準。則一率二率相比之分又大。故謂之不同理之比例。而比例四率不能行也。



第五

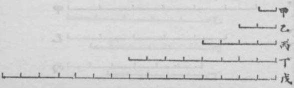
凡有四率。一率之度與二率之度相比分數。若同於三率之度與四率之度相比分數。則此四率又謂之相當比例四率焉。如甲、乙、丙、丁、四線。苟甲線與乙線相比之度。與丙線與丁線相比之度。其分數同。則此四線謂之各相當線。而每兩率相比。其每度之分數同。故又謂之相當比例四率也。



第六

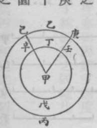
凡三率互相爲比。其一率與二率之比。同於二率與三率之比。則謂之相連比例率也。如甲、乙、丙、三數互

相爲比。苟甲數與乙數之比同於乙數與丙數之比。則此甲、乙、丙、三數。謂之相連比例率矣。若相連比例率內將一率與三率比之。則爲隔一位加一倍之比例。或有相連比例四率。將一率與四率比之。則爲隔二位加二倍之比例。大凡有幾率隔幾位以比者。皆以隔幾位而爲加幾倍之比例也。如甲乙丙相連比例率內。其甲與丙之比爲隔一位加一倍之比例。又或甲、乙、丙、丁、戊、五數。俱爲相連比例率。其甲與丁之比。即爲隔二位加二倍之比例。而甲與戊之比例。又爲隔三位加三倍之比例矣。



第七

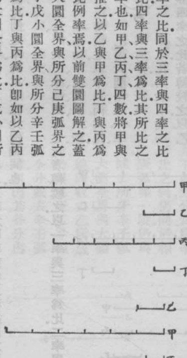
相當比例四率。爲數學之要。因其理之所該最廣。故設爲雙圜圖以申明之。立甲點爲心。作乙丙一大圜。丁戊一小圜。此二圜界各具三百六十度。故皆可以爲三百六十分。首卷第十七節云。凡圜無論大小。俱定爲三百六十度。於是自圜之甲心過小圜界之辛壬二處。至大圜己庚二處。作二線。則大圜之己甲庚小圜之辛甲壬俱同一甲角。此甲角相對之己庚弧界。設爲六十度。則爲乙丙大圜三百六十分中之六十分矣。乙丙大圜之己庚弧界度。既爲六十分。則丁戊小圜之辛壬弧界度。亦爲六十分矣。大凡角度。俱定於相對之



圜界。見首卷第九節・今此大圜之己庚弧界。小圜之辛壬弧界。俱與一甲角相對。其度雖依圜之大小不同而分數則等。分數既等。則大圜小圜大弧小弧兩兩互相爲比。卽如四率之兩兩相比爲同理比例矣。是以大圜之三百六十分爲一率。自大圜所分之己庚弧之六十分爲二率。小圜之三百六十分爲三率。自小圜所分之辛壬弧之六十分爲四率。其乙丙大全圜與本圜己庚分之比。卽同於丁戊小全圜與本圜辛壬分之比也。故凡各率各度雖異。相當之分數若同。則一率與二率之比。必同於三率與四率之比。而俱謂之順推比例矣。要之分合加減各率之法。總不越此圖之互轉相較之理也。

第八

一種反推比例。將一率與二率之比同於三率與四率之比者反推之。以二率與一率爲比。四率與三率爲比。其所比之例仍同。故亦謂之相當比例率也。如甲、乙、丙、丁四數。將甲與乙之比同於丙與丁之比。反推之。以乙與甲爲比。丁與丙爲比。則所比之例。仍同於相當比例率焉。以前雙圜圖解之。蓋甲數與乙數之比例。卽乙丙大圜全界與所分己庚弧界之比例。丙數與丁數之比例。卽丁戊小圜全界與所分辛壬弧界之比例也。今反以乙與甲爲比。丁與丙爲比。卽如以乙丙大圜所分之己庚弧界與乙丙大圜全界爲比。丁戊小圜所

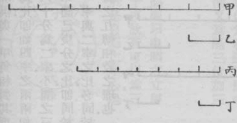


分之辛壬弧界、與丁戊小圜全界爲比也。因其以二率爲一率。以三率爲四率。前後互移。故謂之反推比例。然名雖爲反推比例。而相當比例之率。仍與順推比例相同也。

第九

一種遞轉比例。將一率與二率之比、同於三率與四率之比者。轉較之。以一率與三率爲比。二率與四率爲比。其所比之例。仍爲相當比例率也。如甲、乙、丙、丁四數。將甲與乙之比。同於丙與丁之比。轉較之。以甲與丙爲比。乙與丁爲比。則所比之例。仍同於相當比例率也。如前雙圜圖

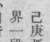
乙丙大圜全界一率。與所分己庚弧界二率之比。同於丁戊小圜全界三率。與所分辛壬弧界四率之比。若轉較之。以乙丙大圜之一率。與丁戊小圜之三率爲比。大圜所分之己庚弧界二率。與小圜所分之辛壬弧界四率爲比。其度雖依圜之大小有異。而分數則同。其比例仍同於原比例。故甲、乙、丙、丁之四數。亦如大小二圜。爲互相比例之率。而甲一率與丙三率之比。卽大圜與小圜之比。乙二率與丁四率之比。卽大圜所分弧界與小圜所分弧界之比也。蓋以



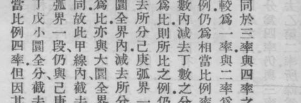
三率爲二率以二率爲三率遞轉相較故謂之遞轉比例其相當比例之四率雖遞轉以較之亦仍爲相當比例之四率也.

第十

一種分數比例.彼四率之中.以一率與二率之比.同於三率與四率之比矣.若將此相比之率所較之分截開.以一率與二率之較爲一率.與二率爲比.以三率與四率之較爲三率.與四率爲比.則其所比之例.仍爲相當比例率也.如甲、乙、丙、丁四數.於甲數內減去乙數之分爲戊己.丙數內減去丁數之分爲庚辛.乃以戊己易甲與乙線爲比.以庚辛易丙與丁線爲比.則所比之例.仍同於相當比例率也.如前雙圜圖.



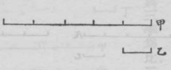
於乙丙大圜全界內減去所分己庚弧界一段.仍與己庚弧界爲比.丁戊小圜全界內減去所分辛壬弧界一段.仍與辛壬弧界爲比.亦與大圜全界與大圜所分弧界.小圜全界與小圜所分弧界相比之理同.故此甲線內截去乙所成戊己.仍與乙相比.即如乙丙大圜全分、截去己庚弧界一段.仍與己庚弧界相比.而丙線內截去丁所成庚辛.仍與丁相比.即如丁戊小圜全分、截去辛壬弧界一段.仍與辛壬弧界相比也.其比例仍同於相當比例四率.但因其各分內有分開相減之故.所以謂之分數比例也.



第十一

一種合數比例。有四率以一率與二率之比。同於三率與四率之比矣。若將此相比之率。併之以一率與二率相加爲一率。仍與二率爲比。以三率與四率相加爲三率。仍與四率爲比。其所比之例。亦仍同於相當比例之四率也。如甲、乙、丙、丁、四數。以甲數與乙數相加。共爲一率。與乙數爲比。丙數與丁數相加。共爲三率。與丁數爲比。則所比之例。仍同於相當比例四率也。此合數比例。與分數比例之理。互相對待。彼分數比例。以雙圜圖

二圜全界內。減去所分弧界一段。仍與所分弧界一段爲比。今此合數比例。卽如二圜全界內所分大段。加入所分弧界一小段。卽是全界。而與所分弧界一段爲比也。其所比之理。仍同於相當比例四率。但因有相加之分。故謂之合數比例焉。



第十二

一種更數比例。以一率與二率之比。同於三率與四率之比者。更之。將一率與二率相減。用其餘分爲二率。仍與一率爲比。又將三率與四率相減。用其餘分爲四率。仍與三率爲比。則其比例之理。仍同於相當比例四率也。如甲、乙、丙、丁、四數。於甲第一率內減去乙第二率。所餘爲戊己。乃以戊己立乙第二率之位。而以甲與戊己爲比。復於丙第三率內。減去丁第四率。所餘爲庚辛。乃以庚辛立丁第四率之位。而以丙

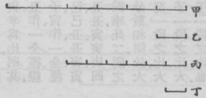
與庚辛爲比其所比之理仍同於四率之比例故亦爲相當比例之四率也今以雙圜圖解之

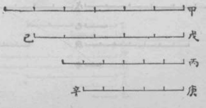
乙丙大圜三百六十度之全界仍爲一率全界內減去所分之己庚弧界六十度一段餘己丙庚三百度一大段

爲二率丁戊小圜三百六十度之全界

仍爲三率全界內減去所分之辛壬弧界六十度一段餘辛戊壬三百度一大段

爲四率則乙丙大圜三百六十度之全界如甲所更之己丙庚三百度如戊已而丁戊小圜三百六十度之全界如丙所更之辛戊壬三百度如庚辛故其四率之兩相比例亦同爲相當比例率也凡四率之內前後之相差雖更入比之仍與相當比例之理同但以其數有更入之故所以謂之更數比例也

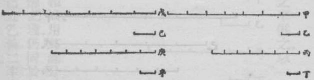




第十三

一種隔位比例。有兩相比例四率。將此一邊四率內。一率與末率爲比。彼一邊四率內。一率與末率爲比。則其所比之例。仍同於相當比例四率也。如此一邊有甲、乙、丙、丁、四數。彼一邊有戊、己、庚、辛、四數。此甲與乙之比。同於彼戊與己之比。此乙與丙之比。同於彼己與庚之比。此丙與丁之比。同於彼庚與辛之比。若將此四率隔位比之。使此一邊之甲與丁爲比。以彼一邊之戊與辛爲比。則其比例。仍同於相當比例四率也。試以雙圜圖之大小圜所分各弧界之兩線引長。

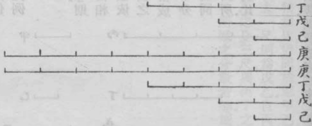
自庚壬過甲至癸丑作一全徑線。復自己辛過甲至子寅。作一全徑線。則分大圜爲庚己、己丑、丑寅、寅庚、四段。分小圜爲壬辛、辛癸、癸子、子壬、四段。其大圜之庚己、己丑、丑寅、寅庚、四段。爲相當四率。而小圜之壬辛、辛癸、癸子、子壬、四段。亦爲相當四率。此二圜之所分四段。既俱爲相當四率。則其各相比例度之大小雖異。而分數相同。故大圜之庚己一段。與己丑一段之比。同於小圜之壬辛一段。與辛癸一段之比。大圜之己丑一段。與丑寅一段之比。同於小圜之辛癸一段。與癸子一段之比。大圜之丑寅一段。與寅庚一段之比。同於小圜之癸子一段。與子壬一段之比也。若以此各相當四率隔位以比之。其大圜之庚己一段。與寅庚一段爲比。而小圜之壬辛一段。與子壬一段爲比。其比例仍同於相當比例四率。但以其兩邊

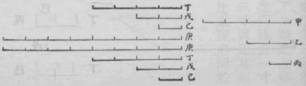


各相比例四率內.各取兩率隔位以比之.故謂之隔位比例耳.

第十四

一種錯綜比例.有兩連比例三率.此一邊三率內中率與末率之比.同於彼一邊三率內中率與末率之比.則爲相當比例之四率.苟錯綜其位分.以此一邊首率與末率隔位爲比.復取另一數與彼一邊中率爲比.而成同理之四率.則此另一數.必與彼邊三率.爲連比例四率矣.如此一邊有甲、乙、丙、連比例三數.彼一邊有丁、戊、己連比例三數.將此一邊中率乙數.與末率丙數之比.同於彼一邊中率戊數與彼一邊末率己數之比.則其比例爲同理比例矣.今錯綜其位分.使此一邊所有之首率甲數.與所有之末率丙數隔位爲比.復另取一庚數.與彼一邊所有之中率戊數爲比.則其比例亦同於相當比例四率.而此庚數與彼邊丁、戊、己三率.爲連比例之數矣.何也.試以庚數置於彼一邊丁首率之上.則庚爲首率.而丁移而爲中率.戊又易而爲末率.是故此一邊甲首率





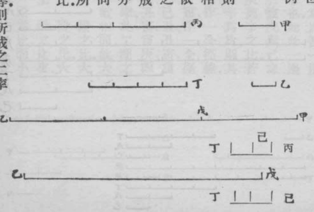
與丙末率之比。同於彼一邊所取庚首率與所易戊末率之比。但以兩連比例率互相易位。增八比之之不同。故名之爲錯綜比例耳。

第十五

一種加分比例。凡有二率。依本度各加幾倍。所加之分數若等。則所成之二率互相爲比。仍同於原二率之互相爲比。謂之等倍相加之比例也。如甲、乙、二數。於甲數依本度加三倍爲丙。於乙數依本度加三倍爲丁。則此丙、丁、二數互相爲比。仍同於甲、乙、二數之互相爲比也。假若甲度爲一大分。乙度爲一小分。則甲加三倍成四大分之丙。乙加三倍成四小分之丁。以四大分之丙比四小分之丁。以一大分之甲比一小分之乙。其相當之分數既等。固爲同理比例可知矣。見本卷第三節。故凡二率依本度各加幾倍。其所加之分數若等。其加分之率互相爲比。必同於原率之互相爲比。因於原數有相加之分。故謂之加分比例也。

第十六

一種減分比例。凡有二率。依本度各減幾倍。所減之分數若俱等。則所成之二率

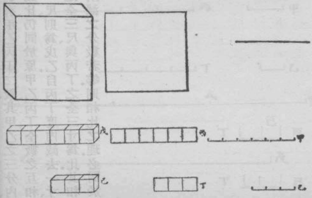


互相爲比.仍同於原二率之互相爲比.謂之等分相減之比例也.如有甲乙、丙丁、二數.其甲乙之三分內、減去甲戊一分.丙丁之三分內減去丙己一分.則戊乙、己丁、互相爲比.仍同於原甲乙丙丁、全數之互相爲比也.何也.夫甲乙度爲三尺.丙丁度爲三寸.自甲乙度內減去一尺.則爲戊乙.自丙丁度內減去一寸.則爲己丁.以所餘之戊乙二尺、與所餘之己丁二寸爲比.以甲乙之全三尺、與丙丁之全三寸爲比.其相度之分數必等.故亦爲同理比例矣.凡二率之內.無論減幾分.其所減之分數若等.則相比之理.必同於原數之比例.因於原數內減之.故又謂之減分比例也.

幾何原本七

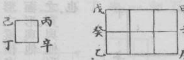
第一

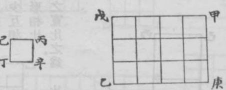
前卷所論比例之法凡一十有二相當比例一種・相連比例一種・正比例一種・反比例一種・遞轉比例一種・分數比例一種・合數比例一種・更數比例一種・隔位比例一種・錯綜比例一種・加分比例一種・減分比例一種・雖種種變化不窮其每相當分數所成之率依然一理故其相比之例俱同而皆為相當比例四率也是故線與線為比面與面為比體與體為比依前各種比例之法線之比例若同則為相當比例線面之比例若同則為相當比例面體之比例若同則為相當比例體矣夫線面體為類不同雖不能互相為比假使線面體之每相當分數若等則按其各類相當分數比之亦為同理比例率也如甲之六分線與乙之三分線相比丙之六分面與丁之三分面相比戊之六分體與己之三分體相比此三種每相當分數既俱相等故其比例亦俱相等而六率互為同理比例可知矣

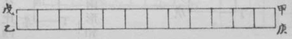


第二

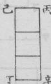
大凡直角平方面積、皆生於二線之度、故欲知方面所生比例之分、將其二形之縱橫線分考之、即可得而知矣、如甲乙、丙丁、直角平方之二面、欲知其所生比例之分、則視甲乙大形之甲戊橫線長度、得彼丙丁小形之丙己橫線長度爲三倍、而甲乙大形之甲庚縱線寬度、得彼丙丁小形之丙辛縱線寬度爲二倍、假若將甲乙大形、自中線平分爲甲癸壬乙二形、其甲癸形之甲壬寬度、丙丁形之丙辛寬度、必俱相等、其甲戊橫線長度、既仍與丙己橫線長度爲三倍、其所分之甲癸形、必與丙丁三形相等、再彼壬乙形、亦與丙丁三形相等、則此二形相合之甲乙一全形、比之丙丁小形爲六分可知矣、又或甲乙大形之甲戊橫線長度、得丙丁小形之丙己橫線長度爲四倍、甲乙大形之甲庚縱線寬度得丙丁小形之丙辛縱線寬度爲三倍、則大形與小形四倍者有三、而大形比小形爲十二分可知矣、再或甲乙大形之甲戊橫線、比丙丁小形之丙己橫線爲十二倍、丙丁小形之丙辛縱線、反比甲乙大形之甲庚縱線爲三倍、則甲乙大





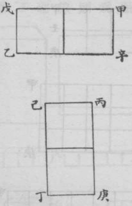


形之甲戊橫線之長。雖比丙丁小形之丙己橫線之長多十一倍。而甲乙大形之甲庚縱線之寬。又比丙丁小形之丙辛縱線之寬少二倍矣。將此縱橫二線之多少較之。甲乙大形比丙丁小形爲四倍。而丙丁小形爲甲乙大形之四分之一。於是以二形之縱橫多少互相較對以比例之。始得知此形與彼形之比例焉。故凡直角平方面形與他一形相比。其比例有二。以此形之長與他形之長比之爲一比例。以此形之寬與他形之寬比之爲一比例。兩形相比之間而兼兩比例者。正以平面之積自二線之度生之之故也。



第三

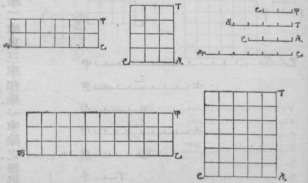
有兩直角方面形。若將此方面橫界。與他方面橫界爲比。又將他方面縱界與此方面縱界爲比。其比例若同。則此兩方面必相等也。如甲乙、丙丁、兩方面形。甲乙形之甲戊橫界比丙丁形之丙己橫界大一倍。而丙丁形之丙庚縱界比甲乙形之甲辛縱界亦大一倍。則甲乙、丙丁、兩形之分必相等。是知兩方面形縱橫之分。互相較對。則兩方面之積可知矣。



第四

凡有相比例四率。其二率與三率相乘。一率與四率相乘。則所得之分數俱相等也。如甲乙、丁戊、戊己、乙

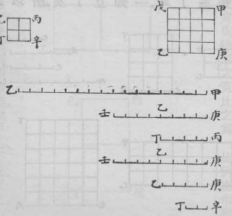
丙、相比例四率。甲乙一率爲二分。丁戊二率爲四分。戊己三率爲三分。乙丙四率爲六分。將丁戊二率爲縱線。戊己三率爲橫線。以之相乘。又將甲乙一率爲縱線。乙丙四率爲橫線。以之相乘。其所得之丁己一方面形。甲丙一方面形。其分數俱是十二。互相等矣。然則丁己形之丁戊縱度。雖比甲丙形之甲乙縱度大一半。而丁己形之戊己橫度。復比甲丙形之乙丙橫度少一半。故其縱橫互較之分相等。而其積亦等也。是故四率中凡有三率。欲求其不知之一率。將兩率之分相乘。所得之數。以一率之分除之。即得其一率矣。設如甲乙三分爲一率。丁戊六分爲二率。戊己五分爲三率。乙丙十分爲四率。今只知一率二率三率之分。欲推四率。則以丁戊六分二率。與戊己五分三率相乘。爲丁己三十分。乃以甲乙三分一率除之。即得乙丙十分四率矣。此以小分爲首率者也。或知乙丙、戊己、丁戊之三率。而推甲乙之一率。則以乙丙十分爲一率。戊己五分爲二率。丁戊六分爲三率。二率與三率相乘。一率除之即得甲乙之四率矣。此以大分爲首率者也。又或知甲乙、丁戊、乙丙之三率。而推戊己之一率。則以丁戊爲一率。甲乙爲二率。乙丙



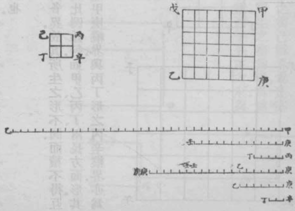
爲三率。二率與三率相乘。一率除之。卽得戊己之四率矣。此卽反推比例之理也。又或知戊己、乙丙、甲乙之三率。而推丁戊之一率。則以戊己爲一率。甲乙爲二率。乙丙爲三率。二率與三率相乘。一率除之。卽得丁戊之四率矣。此卽遞轉比例之理也。

第五

凡有兩直角方面形。此一方面之橫界。與他一方面橫界爲比。此一方面之縱界。與他一方面縱界爲比。其比例若等。則此兩方面之比例。比之兩界之比例。爲連比例隔一位相加之比例也。如甲乙、丙丁、同式二方面形。其甲乙形之甲戊橫界。爲丙丁形丙己橫界之二倍。而甲乙形之甲庚縱界。亦爲丙丁形丙辛縱界之二倍。則甲乙形面積。與丙丁形面積之比。比之甲乙形之一界。與丙丁形之一界之比者。卽如連比例三率隔一位相加之比例矣。蓋甲乙方面之縱橫界。既爲丙丁方面縱橫界之二倍。則甲乙方面內。如丙丁方面之二倍者有二。二其二爲四。故甲乙方面積。比丙丁方面積爲四倍。今甲乙方面積爲一十六分。與丙丁方面積之四分相比。較之甲乙方界之四分、與丙丁方界之二分相比者不同。蓋



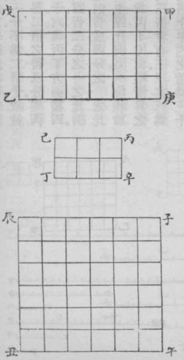
丙丁四得甲乙十六之四分之一而辛丁二得庚乙四之二分之一以四分比一分較之二分比一分不爲二倍乎故欲求其比例相連之率則於甲乙形之界二倍之得八分與丙丁方界二分爲比卽如甲乙方面積十六與丙丁方面積四分之比矣夫八與十六四與八二與四皆二分之一之比例而十六隔八與四比八隔四與二比則皆成四分之一之比例故十六與四較之四與二爲兩界上連比例隔一位相加之比例也又如甲乙方面之縱橫界爲丙丁方面縱橫界之三倍則甲乙方面內如丙丁方面之三倍者有三其三爲九故甲乙之面積比丙丁面積爲九倍今甲乙之積爲三十六分與丙丁方面積四分相比較之甲乙方界之六分與丙丁方界之二分相比者不同蓋丙丁四得甲乙三十六之九分之一而辛丁二得庚乙六之三分之一以九分比一分較之三分比一分不爲三倍乎故欲求其比例相連之率則於甲乙形之界三倍之得十八與丙丁方界二分爲比卽如甲乙方面積三十六與丙丁方面積四之比例矣蓋十八與六



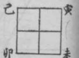
六與二.皆三分之一之比例.而三十六隔十二與四比.十八隔六與二比.則皆爲九分之一之比例.故三十六與四較之六與二.亦爲兩界上連比例隔一位相加之比例也.

第六

凡直角方面形有二種.一爲長方.一爲正方.因其縱橫界之比例各異.故其所生之形不同.而積不得互相爲比也.如欲比之.必以長方與長方爲比.正方與正方爲比.其比例始行.如甲乙、丙丁、兩長方面形.其甲乙形之甲戊橫界.與丙丁形之丙己橫界.爲大一倍.甲乙形之甲庚縱界.與丙丁形之丙辛縱界.亦爲大一倍.其比例相同.若以甲乙形之甲戊橫界.與丙丁形之丙辛縱界爲比.則大三倍.而甲乙形之甲庚縱界.與丙丁形之丙己橫界爲比.止大一分.猶不得大一倍.其比例則異.故甲乙形所生之積.爲二十四.而丙丁形所生之積.爲六.俱爲長方形焉.又如子丑、寅卯.兩正方形.其子丑形之子辰橫界.與寅卯形之寅己橫界之比.子丑形之

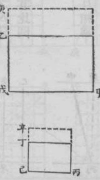


子午縱界與寅卯形之寅未縱界之比俱爲大三倍而比例相同復以子丑形之子辰橫界與寅卯形之寅未縱界爲比子丑形之子午縱界與寅卯形之寅已橫界爲比亦各大三倍而比例相同故子丑形所生之積爲三十六而寅卯形所生之積爲四俱爲正方形焉以此四形兩兩相比則甲乙長方形與丙丁長方形爲比而子丑正方形與寅卯正方形爲比各爲相當比例之四方面也



第七

有兩同式長方面於兩形相當之二界各作兩正方面互相爲比卽同原兩長方面之互相爲比也如甲乙丙丁兩直角長方面在甲戊丙已相當二橫界各作甲庚丙辛兩正方面則所作甲庚丙辛兩正方面互相爲比卽同於原有之甲乙丙丁相同之兩長方面之互相爲比也夫甲乙丙丁同式之兩長方面積旣爲隔一位相加之比例則所作甲庚丙辛同式之正方面積亦必爲隔一位相加之比例然則甲乙丙丁原有之兩面互相爲比與所作甲庚丙辛之正方面之互相爲比其爲同理之比例無疑矣



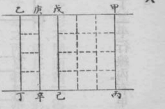
第八

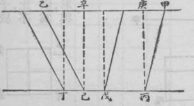
大凡二平行線內所有直角方面互相爲比同於其底之互相爲比也如甲乙丙丁二平行線內有甲己

庚丁、兩直角方面．其甲己面與庚丁面之比．卽同於甲己面之丙己底線、與庚丁面之辛丁底線之比也．蓋甲己面之丙己底線與庚丁面之辛丁底線爲三倍．而甲己面之甲丙縱線與庚丁面之庚辛縱線因同在二平行線內．其度固同．今以二面縱線俱依庚丁面之庚辛分數分之．皆爲四倍．則甲己面爲一十二分．而庚丁面爲四分矣．以甲己面之十二分與庚丁面之四分爲比．卽如甲己面之丙己底三分與庚丁面之辛丁底一分之比．故其比例相同也．

第九

凡二平行線內、所有二界平行斜方面互相爲比．同於其底界度之互相爲比也．如甲乙丙丁、二平行線內．有甲戊、乙丁、兩斜方面積．互相爲比．卽同於丙戊、己丁、兩底界之互相爲比也．試將甲戊、乙丁、兩斜方面之丙戊、己丁、兩底界上立庚戊辛丁、兩直角面．則此兩直角面因與兩斜方面同底同高．其積必等．見三卷第八節．前節言凡二平行線內所有直角方面互相爲比．同於其底之互相爲比．此甲戊、乙丁、兩斜方面．旣與同底所立庚戊、辛丁、兩直角面相等．則甲戊、乙丁、兩斜方面互相爲比．必同於丙戊、己丁、兩底界之互相爲比可知矣．故凡二平行線內所有面積相比之分數．必與底界相比之

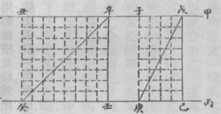


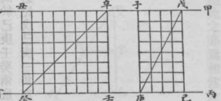


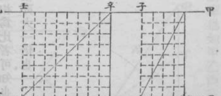
分數同也。

第十

凡二平行線內、所有三角形面積互相爲比。亦同於其底界度之互相爲比也。如甲乙、丙丁、二平行線內。有戊己庚、辛壬癸、兩三角形。其內所函面積互相爲比。卽同於己庚、壬癸、兩底界之互相爲比也。何也。凡二平行線內所有三角形得其同底所立四邊形之一半。今以甲乙、丙丁、二平行線內之戊己庚三角形。同底立一戊己庚子四邊形。辛壬癸三角形。同底立一辛壬癸丑四邊形。則戊己庚三角形。爲戊己庚子四邊形之一半。而辛壬癸三角形。爲辛壬癸丑四邊形之一半。如以兩三角形面積互相爲比。卽同於兩四邊形面積之互相爲比。而爲相當比例四率矣。其面積旣互





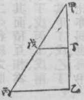


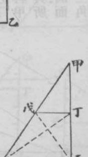
相爲比。則其兩三角形面積相比。同於兩三角形底之相比者。亦如兩四邊形相比。同於兩四邊形底之相比矣。然則戊己庚、辛壬癸兩三角形面積互相爲比。必同於己庚、壬癸兩底界互相爲比者可知也。今壬癸底界既比己庚底界大一倍。故辛壬癸三角形面積。必比戊己庚三角形面積亦大一倍也。

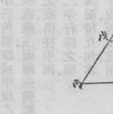
幾何原本八

第一

凡三角形內。與其底線平行。作一直線。則所截三角形之兩邊線。互相爲比例線。其兩邊線所分各二段互相爲比。爲相當比例四率。而每邊所截之一段。與本全線比之。亦爲相當比例四率也。如甲乙丙三角形內。與乙丙底線平行。作一丁戊線。則分甲乙一邊爲甲丁、丁乙二段。分甲丙一邊爲甲戊、戊丙二段。其甲乙一邊之甲丁、丁乙二段互相爲比。甲丙一邊之甲戊、戊丙二段互相爲比。其比例俱同。爲相當比例四率矣。又如甲乙一邊之甲丁一段。與本邊甲乙全線爲比。甲丙一邊之甲戊一段。與本邊甲丙全線爲比。其比例亦俱同。爲相當比例四率矣。今以三角形。按所截分。分爲各式。以各式面積互相比者考之。自丁戊線之丁戊二端。作丁丙、戊乙二線。則甲乙丙一三角形。分爲四三角形。此四三角形內。所有之乙戊丁、丙丁戊兩三角形。既在乙丙、丁戊二平行線之間。又共立於一丁戊之底。其二





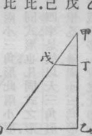


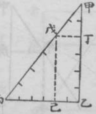
形之積必等。見三卷第十節。於此二形各加一所截甲丁戊小三角形。卽成甲戊乙、甲丁丙、兩三角形。其積亦必相等。又如甲丁戊、乙丁戊、兩三角形之底。俱在甲乙一直線上。而兩三角形之戊角。又共在一戊處。其兩形必在二平行線之間。而甲丁戊、丙丁戊、兩三角形之底。俱在甲丙一直線上。而兩三角形之丁角。又共在一丁處。其兩形亦在二平行線之間。見三卷第十二節。因各三角形兩兩俱爲二平行線所限。故其面積互相爲比。必同於其底界之互相爲比也。見七卷第十節。此所以甲丁戊、丙丁戊、兩三角形積互相爲比。與其甲戊、戊丙、兩底線之互相爲比同。其甲丁戊、乙丁戊、兩三角形積互相爲比。與其甲丁、丁乙、兩底線之互相爲比亦同也。再甲乙戊三角形之積。旣與甲丙丁三角形之積相等。則以甲乙丙之全形與所分之甲乙戊三角形。或與所分之甲丙丁三角形相比。其比例必俱相同。而甲丙丁三角形之甲丁底與甲丙乙全形之甲乙底。互相爲比。甲乙戊三角形之甲戊底與甲乙丙全形之甲丙底。互相爲比。亦必俱相同矣。因其各三角形。得互相爲比例。故其所截兩邊線。兩兩爲相當比例率也。

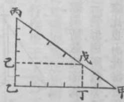
第二

凡三角形內。與底平行作一直線。其所截兩邊線之每一段。與各邊全線之比。卽同於所作線與底線之比也。如甲乙丙三角形內。與乙丙底平行作一丁戊線。此丁戊線所截甲丁一段。與甲乙全線之比。甲戊

一段與甲丙全線之比皆如丁戊線與乙丙底線之相比也假若將甲乙丙三角形之甲乙邊線爲底而與甲乙底線平行作一戊己線卽成戊己乙丁四邊長方形其兩兩平行線之度俱各相等然三角形之兩邊與所截之每段既互相爲比如前節所云則此乙丙邊之乙己一段與乙丙邊全線之比卽同於彼甲丙邊之甲戊一段與甲丙邊全線之比而丁戊之平行線既與乙己平行線度相等則此丁戊平行線與原底乙丙線之比亦必同於彼甲丙邊之甲戊一段與甲丙邊全線之比矣故甲戊段爲一率甲丙邊全線爲二率丁戊平行線爲三率乙丙底線爲四率爲相當比例四率也又如甲乙邊之甲丁一段與甲乙邊全線之比既同於丁戊平行線與乙丙底線之比則甲丁段爲一率甲乙邊全線爲二率丁戊平行線爲三率乙丙底線爲四率亦爲相當比例四率也苟甲乙邊全線爲六分則甲丁段得其六分之二分乙丙邊全線爲六分則丁戊段亦得其六分之二分所以成兩兩相當比例之率也

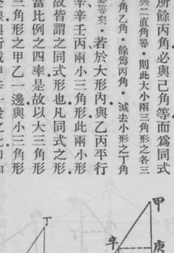






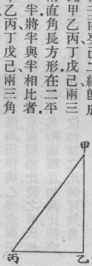
第三

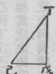
凡大小兩三角形其相當之二角度若兩兩相等則其餘一角亦必相等如此類兩三角形謂之同式三角形也雖其內容積分不同而其相當各界互相爲比俱爲相當比例之率焉如甲乙丙丁戊己大小兩三角形其甲角與丁角等乙角與戊角等則所餘丙角必與己角等而爲同式三角形也二卷第三節言凡三角形之三角相併與二直角等則此大小兩三角形之各三角相併亦俱爲二直角於二直角中減去大形之甲角乙角餘爲丙角減去小形之丁角戊角餘爲己角其所減之數既等則所餘之數亦必等矣若於大形內與乙丙平行作庚辛線與甲乙平行作辛壬線則成甲庚辛辛壬丙兩小三角形此兩小形之相當角度與大形之相當角度亦必俱等故皆謂之同式形也凡同式之形其容積雖不一而其各界互相爲比皆爲相當比例之四率是故以大三角形之甲乙全線與所截甲庚一段之比即如大三角形之甲乙一邊與小三角形之相當丁戊一邊之比也大三角形之甲丙全線與所截甲辛一段之比即如大三角形之甲丙一邊與小三角形之相當丁己一邊之比也大三角形之乙丙底線與所截庚辛底線之比即如大三角形之乙丙底線與小三角形之戊己底線之比也至於甲乙丙大三角形與所截辛壬丙小三角形相當各界之比亦如甲乙丙大三角形與丁戊己小三角形相當各界之比也由此推之凡同式之形其相當各界互相爲比皆爲相當比例之率可知矣

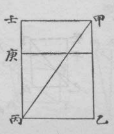


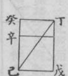
第四

同式直角三角形面積互相爲比。同於三角形各相當界所作方形之互相爲比。而同式三角形面積互相爲比者。比之各相當界互相爲比則爲連比例內隔一位相加之比例也。如甲乙丙、丁戊己兩同式直角三角形。其面積互相爲比。卽同於此兩三角形之乙丙、戊己相當二界所作庚乙、辛戊兩方形互相爲比之比例。而此兩三角形之面積互相爲比。比之乙丙、戊己相當二界互相爲比之比例。則爲連比例內隔一位相加之比例矣。蓋兩三角形之乙、戊二角俱爲直角。若與乙丙、戊己二線平行作甲壬、丁癸二線。又與甲乙、丁戊二線平行作壬丙、癸己二線。卽成壬乙、癸戊兩直角長方形。此甲乙丙、丁戊己兩三角形。因與所作壬乙、癸戊兩直角長方形在二平行線內。同爲一底。其積爲一半。將半與半相比者。卽同於全與全之相比。故甲乙丙、丁戊己兩三角形互相爲比。必同於壬乙、癸戊兩直角長方形互相爲比之比例矣。夫依乙丙、戊己、甲乙、丁戊各相當二界所作壬乙、癸戊兩長方形互相爲比之比例。旣與甲乙丙、丁戊己兩三角形互相爲比之比例同。則依乙丙、戊己相當二界所作庚乙、辛戊兩

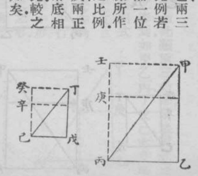








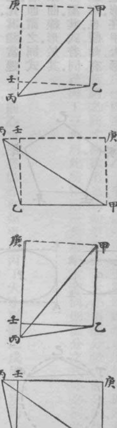
正方形互相爲比之比例。亦與壬乙、癸戊、兩長方形、與甲乙丙、丁戊己、兩三角形互相爲比之比例同矣。又凡直角兩方形。其兩界互相爲比之比例若俱同。則兩形面積互相爲比之比例。較之兩界互相爲比之比例。爲隔一位相加之比例。見七卷第五節。今甲乙丙、丁戊己、兩三角形之各依底線所作正方形互相爲比。較之二底線互相爲比之比例。卽爲隔一位相加之比例。夫甲乙丙、丁戊己、兩三角形之面積互相爲比者。旣與所作庚乙、辛戊、兩正方形面積互相爲比之比例同。則此所作兩正方形面積相比較之兩底相比爲隔一位相加之比例。而甲乙丙、丁戊己、兩三角形面積互相爲比較之乙丙、戊己、相當二界互相爲比之比例。亦爲隔一位相加之比例可知矣。



第五

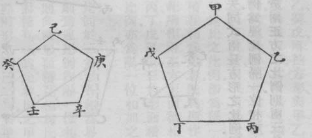
同式無直角三角形面積互相爲比。同於三角形各相當界所作方形之互相爲比。而三角形面積互相爲比者。比之各相當界互相爲比。則爲連比例內隔一位相加之比例也。如甲乙丙、丁戊己兩同式三角形。雖無直角。然其相當各角俱等。則此兩形面積互相爲比。同於在此兩形之甲乙、丁戊、相當二界所作方形互相爲比之比例。而兩形之面積互相爲比者。比之甲乙、丁戊、相當二界互相爲比之比例。則爲連比例內隔一位相加之比例矣。試自兩形之丙己二角。與甲乙、丁戊、二界平行作丙庚、己辛、各一線。又自甲丁二角。至庚辛二線之末。作甲庚、丁辛、二線。又與此二線平行。自乙戊二角至壬癸二處。作乙壬、戊癸、

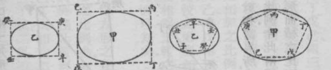
二線成庚乙辛戊、兩直角長方形此兩長方形與甲乙丙、丁戊己、兩三角形俱在兩平行線內又同爲一底則此兩三角形面積爲彼庚乙辛戊、兩長方形之一半將半與半相比者同於全與全之相比故甲乙丙、丁戊己兩三角形面積之比例必同於庚乙辛戊、兩長方形之比例矣夫同式兩長方形之比例同於相當界所立正方形之比例而同式正方形之比例比之各相當界之比例爲連比例隔一位相加之比例今此兩三角形面積之比例既同於庚乙辛戊、兩長方之比例亦必同於兩正方之比例則兩三角形面積之比例比之兩界之比例爲連比例隔一位相加之比例可知矣

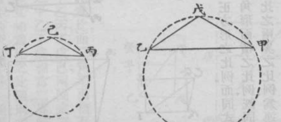


第六

有衆多邊形。其邊數同相當各角俱等。而相當界之比例又同。則謂之同式形也。如有甲乙丙丁戊、己庚辛壬癸。大小兩多邊形。其邊數俱爲五。其相當甲己二角、乙庚二角、丙辛二角、丁壬二角、戊癸二角。各度俱等。而甲乙邊與己庚邊之比。卽同於乙丙邊與庚辛邊之比。其相當邊互相比之俱同者。卽謂之同式多邊形也。又如衆曲線形。於其內外作各種直界形。其式若同。則謂之同式曲線形也。假如有甲、乙大小兩曲線形。在甲大形內。作一丙丁戊己庚五邊形。在



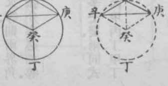




乙小形內作一辛壬癸子丑五邊形此所作兩五邊形之式若同則曲線形之式必同又如甲乙大小兩曲線形在甲大形外作一丙丁戊己四邊形在乙小形外作一庚辛壬癸四邊形此所作兩四邊形之式若同其曲線形之式亦必同故皆謂之同式曲線形也或如甲乙、丙丁大小兩圜分於大圜分內作一戊甲乙三角形於小圜分內作一己丙丁三角形此所作兩三角形之式若同則圜分之式亦必同故謂之同式圜分也

第七

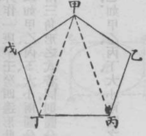
大小各圜分之式若同則其相對之圜心角度必俱等也如甲乙、丙丁、大小兩圜之戊甲己、庚丙辛兩分之式相同其弧雖隨圜之大小各殊而自圜所分之度必同其各段所對二圜之壬癸心角度亦等矣夫戊甲己與庚丙辛兩段式旣同則此內所函甲戊己、丙庚辛兩三角形之甲丙相當兩界角之度必等若自甲丙二角過二圜心壬癸至對界乙丁作甲壬乙、丙癸丁二線則成兩界角與兩心角蓋心角大於界角一倍故甲乙大圜之戊壬乙心角比戊甲乙界角大一倍乙壬己心角比乙甲己界角大一倍今將戊壬乙乙壬己兩心角倂之戊甲乙乙甲己兩界角倂

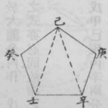


之。則所併之心角亦必比所併之界角大一倍矣。而丙丁小圜之庚癸丁、丁癸辛兩心角併之。亦必比庚丙丁、丁丙辛所併之兩界角大一倍。夫兩圜之兩界角度既等。而兩圜之所併之心角度又等。則兩界角相對之戊乙己庚辛兩弧段之分數亦必相等。界角所對之弧分既等。則心角所對之弧分亦必相等。心角所對之弧分即爲甲丙二界角相對之壬癸二心角之度也。

第八

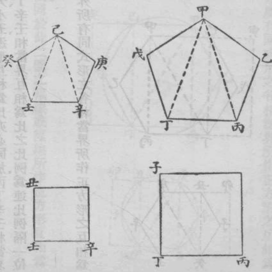
凡大小同式多邊形。分爲衆三角形。其相當三角形之式俱相同也。如甲乙丙丁戊、己庚辛壬癸兩同式五邊形。自大形甲角至丙丁二角。自小形己角至辛壬二角。各作二線。則大形分爲甲乙丙、甲丙丁、甲丁戊三三角形。小形分爲己庚辛、己辛壬、己壬癸三三角形。而甲乙丙之形。與相當己庚辛之形同式。甲丙丁之形。與相當己辛壬之形同式。甲丁戊之形。與相當己壬癸之形同式。因其所分各三角形俱爲同式。故相當各角度必等。相當各角度既等。則其相當各界之比例。亦必俱同。自五邊形所分之各三角形之相當界互相爲比之比例既同。則五邊形之相當各界互相爲比之比例亦必同。相當各界之比例相同。則兩形之式相同可知矣。





第九

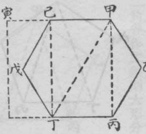
凡大小同式多邊形互相爲比。同於各形相當界所作方形之互相爲比。而比之各面相當界互相爲比之比例。爲連比例隔一位相加之比例也。如甲乙丙丁戊。己庚辛壬癸。兩同式五邊形。於大形之丙丁界。小形之辛壬界。各作子丙丑辛大小兩方形。其大小五邊形互相爲比。必同於所作子丙丑辛。大小二方形之互相爲比。大小五邊形。既同於大小兩方形之互相爲比。則比之丙丁、辛壬、相當二界互相爲比之比例。爲連比例隔一位相加之比例矣。若將甲乙丙丁戊、己庚辛壬癸、兩形。分爲衆三角形。則相當各三角形之式必同。相當各三角形之式既同。則相當各三角形互相爲比。卽同於在三角形各相當界所作方形之互相爲比。而各三角形面積之互相爲比。較之各相當界互相爲比之比例。亦爲連比例隔一位相加之比例。夫所分衆三角形互相爲比。既同於所作方形之互相

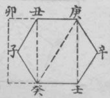


爲比。則衆三角形所合甲乙丙丁戊、己庚辛壬癸之大小五邊形互相爲比。亦必同於丙丁、辛壬、相當界所作子丙丑辛大小兩方形之互相爲比。而比之丙丁、辛壬、相當界互相爲比之比例爲連比例隔一位相加之比例可知矣。

第十

凡大小同式直界形互相爲比。同於在所比各形內外所有同式形之各相當界所作正方形之互相爲比也。如甲乙丙丁戊己庚辛壬癸子丑大小兩直界形。於此二形內所函之甲丙丁己、庚壬癸丑二同式四邊形之甲丙、庚壬、相當二界作寅丙、卯壬、正方形。則兩直界形互相爲比。卽同於兩正方形之互相爲比也。若將甲乙丙丁戊己、庚辛壬癸子丑兩六邊形。俱分爲三角形。則其相當各三角形之式俱相同。而相當各三角形互相爲比。必同於甲丙、庚壬、相當二界所作寅丙、卯壬、正方形之互相爲比矣。此所分三角形之比例。既同於所作正方形之比例。則大小兩形內各三角形之甲丙、庚壬、界。又爲兩四邊形之共界。而甲乙丙丁戊己、庚辛壬癸子丑、兩同式形。互相爲比。亦必同於其所函之甲丙丁己、庚壬癸丑兩四邊形之甲丙、庚壬、兩相當界所作寅丙、卯壬、兩正方

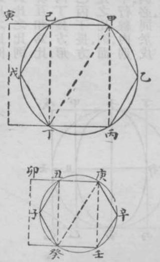




形之互相爲比可知矣。

第十一

凡大小同式曲界形互相爲比同於在所比各形內外所有同式形之各相當界所作正方形之互相爲比也。如甲乙丙丁戊己庚辛壬癸子丑大小二圜。此二圜之中。雖各函一同式六邊形。各函一同式四邊形。又各函衆同式三角形。此大小二圜之積互相爲比。必同於在圜內所函同式形之甲丙、庚壬、相當二界所作寅丙、卯壬、正方形之互相爲比也。大凡衆界形或函圜或函於圜。其界數愈多。愈與圜界相近。而圜界分爲千萬段。卽成千萬直界形。見四卷第十九二十等節。則大小兩圜之比例。因與內函相當直界形之比例等矣。夫相當直界形之比例。原同於兩形之相當界所作方形之比例。而圜界形之比例又同於相當直界形之比例。則此大小二圜互相爲比之比例同於此二圜之輻線或徑線所作正方形互相爲比之比例可知矣。



第十二

凡圓面徑與撱圓面（一名鴨蛋形）高度等者。其面積互相爲比之比例。卽同於函兩形各作切方形互相爲比之比例。而圓形面積、與撱圓形面積互相爲比之比例。又同於圓形徑、與撱圓形小徑互相爲比之比例也。如子壬寅癸之圓面子丑寅卯之撱圓面。其子寅高度俱同。（圓徑卽撱圓大徑。）其面積互相爲比之比例。必同於圓面外所作切圓戊己庚辛正方形、與撱圓面外所作切圓甲乙丙丁長方形互相爲比之比例。而子壬寅癸圓面與子丑寅卯撱圓面互相爲比之比例。又同於圓面之壬癸徑、與撱圓面之丑卯小徑互相爲比之比例也。蓋平行線內兩面形互相爲比之比例。同於其底界互相爲比之比例。（見七卷第八節。）今戊己庚辛正方形。與甲乙丙丁長方形。皆在戊辛、己庚平行線內。故戊己庚辛正方形與甲乙丙丁長方形互相爲比之比例。同於己庚底與乙丙底互相爲比之比例。而子壬寅癸圓面與子丑寅卯撱圓面。亦在戊辛、己庚平行線內。則子壬寅癸圓面與子丑寅卯撱圓面互相爲比之比例。必同於戊己庚辛正方形、與甲乙丙丁長方形互相爲比之比例矣。然戊己庚辛正方形之己庚底。卽圓面壬癸徑度。而甲乙丙丁長方形之乙丙底。又卽撱圓面之丑卯徑度也。夫平圓與撱圓之比例。既同於正方形與長方形之比例。又同於

己庚底與乙丙底之比例，則圓面與橢圓面之比例，同於圓面之壬癸徑與橢圓面之丑卯徑之比例可知矣。

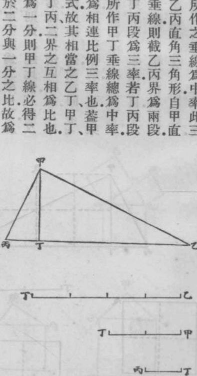
幾何原本九

第一

凡直角三角形自直角至相對界作一垂線則一形分爲兩形與原形共爲三同式直角三角形而其比例俱相同也如甲乙丙直角三角形自甲直角至相對乙丙界作一甲丁垂線則甲乙丙一形分爲甲丁乙、甲丁丙兩形此所分兩形與原有甲乙丙形之式俱相同而皆爲直角三角形其三形每相當各界之比例亦俱相同也蓋甲丁線既爲垂線則兩傍所分甲丁乙、甲丁丙二角必俱爲直角見首卷第十節是故甲乙丙三角形之甲角甲丁乙三角形之丁角其度相等而兩三角形又共一乙角其相當二角度既等則所餘各一角度自等見八卷第三節故甲乙丙之丙角與甲丁乙之甲角其度相等也而甲乙丙之甲角亦與甲丁丙之丁角相等此兩三角形又共一丙角故所餘之甲乙丙之乙角與甲丁丙之甲角其度亦等三三角形之每相當各角之度既等則三三角形之式必同三三角形之式既同則其每相當各界之比例亦俱相同可知矣

第二

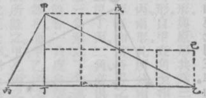
凡直角三角形。自直角至相對界作一垂線。則所截之兩段。一爲一率。一爲三率。而所作之垂線爲中率。此三率卽爲相連比例率也。如甲乙丙直角三角形。自甲直角至相對乙丙界作一甲丁垂線。則截乙丙界爲兩段。其所截之乙丁段爲一率。則丁丙段爲三率。若丁丙段爲一率。則乙丁段爲三率。而所作甲丁垂線總爲中率。故此乙丁、甲丁、丁丙三線。互爲相連比例三率也。蓋甲乙丁、甲丁丙兩三角形爲同式。故其相當之乙丁、甲丁、二界互相爲比。卽同於甲丁、丁丙二界之互相爲比也。今以乙丁線爲四分。丁丙線爲一分。則甲丁線必得二分。因四分與二分之比。必同於二分與一分之比。故爲相連比例三率也。

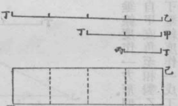


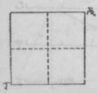
第三

直角三角形。自直角至相對界所作垂線。與所分二段。固爲相連比例三率。如依垂線度作一方形。則與所分二段一爲寬度一爲長度所作長方形之積相等也。如甲乙丙直角三角形。自甲直角至相對乙丙界作一甲丁垂線。截乙丙界爲兩段。遂成乙丁、甲丁、丁丙之連比例三率。今依甲丁垂線度作一戊丁正

方形。卽爲中率自乘之數。以甲丁垂線所截丁丙一段爲寬度乙丁一段爲長度作一己丁長方形。卽爲首率末率相乘之數。其戊丁正方形之積。必與己丁長方形之積相等也何也蓋同式兩三角之相當界互相爲比之比例同故此乙丁界與甲丁界之比卽同於甲丁界與丙丁界之比乙丁線既爲一率則甲丁線爲二率甲丁線復爲三率則丙丁線爲四率然則此相連比例三率又爲相當比例四率矣因其可爲相當比例四率故二率與三率相乘一率與四率相乘所得之分數相同。見七卷第四節。今既以甲丁爲二率又爲三率則甲丁自乘之數卽是二率三率相乘之數而乙丁一率與丙丁三率相乘所得己丁長方形卽與甲丁二率三率自乘之正方相等可知矣此乃首率末率求中率之法也要之首率末率相乘中率相乘。中率相乘者。中率自乘。或二率三率相乘。俱在首率末率之中。故云。其所成之二式雖異因俱自相連比例四率而生故其積相等而得以爲準



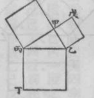


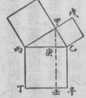


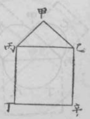
也。

第四

凡有直角三角形。其直角相對界所作方形之積。必與兩傍界所作兩方形之積相等也。如甲乙丙直角三角形。其甲直角相對乙丙界作一乙丁方形。其積必與甲乙、甲丙之兩傍線所作戊乙、己丙兩方形之積相等也。試自甲直角過相對乙丙界至方形辛丁界作一甲庚壬垂線。則甲乙丙三角形分爲甲乙庚、甲庚丙兩三角形。而乙丁正方形分爲乙壬、庚丁兩長方形。此所分甲乙庚、甲庚丙兩三角形與甲乙丙原三角形爲同式。則其每相當界之互相比例必同矣。是以甲庚丙小三角形之庚丙小界與丙甲大界之比。卽同於甲乙丙大三角形之甲丙小界與乙丙大界之比。而爲相當比例四率也。然丙甲、甲丙之二率三率原爲一線。則庚丙、丙甲、乙丙又爲相連比例三率矣。故丙甲中率所作己丙方形之積與庚丙一率爲寬乙丙三率爲長所作庚丁長



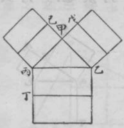


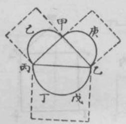


方形之積相等也。乙丁既爲正方形。則庚壬度必與方界乙丙各度等。故庚丁長方、卽同庚丙爲寬乙丙爲長所作之長方也。又如甲乙庚、甲乙丙兩三角之乙庚、甲乙、乙甲、乙丙四界。爲相當比例四率。又爲相連比例三率。故甲乙中率所作戊乙方形之積。亦與乙庚一率爲寬乙丙三率爲長所作乙壬長方形之積相等也。今庚丁、乙壬之兩長方形。既與己丙、戊乙兩正方形等。則兩形相合之乙丁正方形。亦必與己丙、戊乙兩正方形相等可知矣。

第五

凡直角三角形之三界。所作同式三形。其一大界所作一形之積。必與二小界所作二形之積等也。如在甲乙丙直角三角形之乙丙、甲乙、甲丙三界。作乙丁、戊乙、己丙三同式長方形。則乙丙大界所作乙丁一形之積。必與甲乙、甲丙二小界所作戊乙、己丙二形之積等也。又或如甲乙丙直角三角形。於乙丙大界。作乙戊丁丙一半圜。於甲乙、甲丙二小界。作甲庚乙、甲己丙二半圜。則乙丙大界所作乙戊丁丙一半圜之積。必與甲乙、甲丙二小界所作甲庚乙、甲己丙二半圜之積等也。蓋依三界所作三形之式既同。故同式衆形互相爲比。卽同於相當界所作正方形之互相爲比也。要之一大界所作一大形內減一小界所





作一小形。卽餘一小界所作一小形而一小界所作一小形內。再加八一小界所作一小形則爲一大界所作一大形矣。

第六

一圜之內二絃線相交所截之段遞轉比之其比例俱同而爲相當比例四率也。如甲圜內乙丙、丁戊二絃線相交於己其所截之戊己一段與己丙一段之比例卽同於乙己一段與己丁一段之比例。故戊己、己丙、乙己、己丁四段爲相當比例之四率也。何以見之。若自乙至戊、自丁至丙復作二絃線卽成乙己戊、丁己丙兩三角形。此兩三角形之乙角丁角俱切於甲圜之戊丙弧段其度相等。見四卷第十二節。再乙己戊之己角丁己丙之己角又爲二尖相對之角其度亦相等。今乙丁二角之度既等而兩己角之度又等。則所餘戊丙二角亦自等。兩三角形之相當各角既等。則其式必同。其式既同。則每相當各二線互相爲比之比例俱同而戊己、己丙、乙己、己丁四段互相爲比例四率可知矣。

第七

圜之徑線不拘何處作一垂線。則所截之兩段。一爲一率。一爲三率。而垂線爲中率。卽爲相連比例三率也。如甲圜自丁界至乙丙徑線戊處作一丁戊垂線。將乙丙徑線截爲兩段。其所截乙戊一段爲一率。戊丙一段爲三率而

丁戊垂線爲中率。此乙戊、丁戊、戊丙、三線、爲相連比例三率也。試自圜界丁至乙、丙、二處、作丁乙、丁丙、二線、則成一乙丙丁三角形。其丁角既立於圜之乙己丙半界、故爲直角。見四卷第十四節。而丁戊垂線、乃自直角至相對乙丙底界所作之垂線、故所截乙戊一段爲一率、戊丙一段爲三率、而丁戊垂線爲中率、爲相連比例三率也。

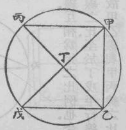
第八

自圜外一點、過圜界二處至相對界作二線。以此兩全線互相爲比。即同於圜界外所截之二段遞轉爲比之比例、而爲相當比例四率也。如己圜自圜外甲點、過圜界乙、丁、二處、至相對界丙、戊、二處、作二線、則甲丙、甲戊、兩全線互相爲比、必同於圜界外所截甲乙、甲丁、二段之遞轉相比、而爲相當比例四率也。試自圜界乙、丁、二處、至相對界丙、戊、二處、作乙戊、丁丙、二線、則成甲丙丁、甲戊乙、兩三角形。此兩三角形之丙、戊、二角、既切於一圜之乙丁弧界、其二角之度必等。見四卷第十二節。再甲丙丁之甲角、甲戊乙之甲角、既共爲一角、其度自等。兩三角形各二角度俱等、則兩三角形必爲同式矣。故甲丙、甲戊、相當二界、互相爲比之比例、即同於甲丁、甲乙、相當二界互相爲比之比例。是以甲丙與甲戊之比、同於甲丁與甲乙之比。將甲丙全線爲一率、甲戊全線爲二率、甲乙、甲

丁、遞轉移之而以甲丁一段爲三率甲乙一段爲四率爲相當比例之四率也。

第九

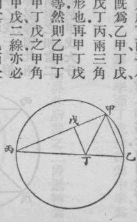
凡函於圜內之三角形以其一角平分爲二過相對底界至相對界作一直線則所分角之小邊線、與所作線之在三角形內一段之比即同於所作線之全分與所分角之大邊線之比也如函於圜內有甲乙丙三角形以甲角平分爲二分過所對乙丙底界至相對界作一直線即成甲丁戊一全線以三角形之甲乙小邊、與所作甲丁戊線之甲丁一段之比即同於所作甲丁戊全線、與三角形之甲丙大邊之比也何以言之若自圜界乙至戊作乙戊弦線即成甲乙戊、甲丁丙、兩三角形此兩三角形之戊丙二角俱切於圜界甲乙弧之一段其度必等而甲乙戊三角形之甲角甲丁丙三角形之甲角又爲一角所平分之兩角其度亦必等因此兩三角形各二角之度等故兩形爲同式兩三角形之式既同則兩形之相當二界互相爲比之比例俱同是以甲乙小分與甲丁小分之比即同於甲戊大分、與甲丙大分之比也。



第十

凡函於圜內之三角形以其一角爲兩平分自角至底作一線則所分底線兩段互相爲比即同於所分角之兩傍兩邊線之互相爲比也如函於圜內有甲乙丙三角形以甲角平分爲二分至乙丙底作甲丁

一線，則分乙丙底線為乙丁、丁丙兩段，以乙丁與丁丙之比，即同於以甲乙小邊線與甲丙大邊線之比也。試自所分底線之丁至甲丙線與甲乙平行作丁戊一線，即成戊丁丙一小三角形。葢甲乙丙大三角形之乙角，戊丁丙小三角形之丁角，既為乙甲丁戊平行線一邊之內外角，其度必等。見首卷第二十三節。而甲乙丙、戊丁丙兩三角形又共一丙角，故此兩三角形之各二角度等，為同式兩三角形也。再甲丁戊之丁角、乙甲丁之甲角，因為平行線內二尖交錯之角，其度亦等。然則乙甲丁之甲角，既為甲乙丙之甲角之兩平分，則甲丁戊之丁角亦與甲丁戊之甲角度等矣。甲丁戊三角形之丁角、甲角既等，則二角所對之丁戊、甲戊二線亦必等矣。甲乙丙、戊丁丙兩三角形既為同式，而三角之度又俱等，則其甲乙丙大三角形之甲乙、甲丙二線，互相為比，即同於戊丁丙小三角形之戊丁、戊丙二線互相為比之比例也。今戊丁、甲戊二線其度既等，則甲乙線與甲丙線之比，又同於以甲戊線與戊丙線之比。至於丁戊平行線所截乙丁一段與丁丙一段之比，則又同於甲戊一段與戊丙一段之比矣。是故甲乙線與甲丙線之比，為同於乙丁線與丁丙線之比也。

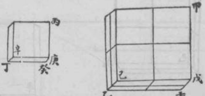


幾何原本十

第一

大凡直角立方體積皆生於面線互乘之度。故欲知方體所生比例之分。將所比形之長寬與厚詳較之。即可得而知矣。如甲乙、丙丁、直角立方二體。其甲乙大形之戊己長比丙丁小形之庚辛長。甲乙大形之戊壬寬比丙丁小形之庚癸寬。甲乙大形之甲戊厚比丙丁小形之丙庚厚。俱爲大一倍。其甲乙大形之戊乙底平面積與丙丁小形之庚丁底平面積之比例。將縱橫二線之長寬度分考之即得。見七卷第二節・旣得二體底積之比例。乃以二形之厚度。復與底積比之。即可知甲乙、丙丁、二體之比例矣。蓋甲乙大體之戊己、戊壬、長寬之度。旣比丙丁小體之庚辛、庚癸、長寬之度大一倍。則戊乙平面底形之內。如庚丁平面底形二倍者有二矣。然則甲乙大形甲戊之厚度。旣比丙丁小形丙庚之厚度大一倍。則甲乙體形之內。如丙丁體形四倍者有二。可知矣。是故欲知直角方體之比例。以本體之長寬與厚。互相比例以較之。即得直角方體互相爲比之比例也。

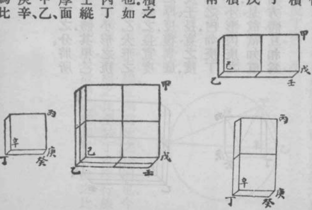
第二



有兩直角長方體。若將此一體之底度、與他一體之底度。又將他一體之厚度、與此一體之厚度爲比。其比例若同。則此二體之積必等也。如甲乙、丙丁、兩直角長方體。甲乙體之戊乙底度。比丙丁體之庚丁底度大一倍。而丙丁體之丙庚厚度。比甲乙體之甲戊厚度亦大一倍。則甲乙、丙丁、二體之積必相等。是故兩體之底積與厚度相較。則兩體之積可知矣。葢體積之比例。視其面線。令兩體之底面厚度交互相等。如此其體積不得不等也。

第三

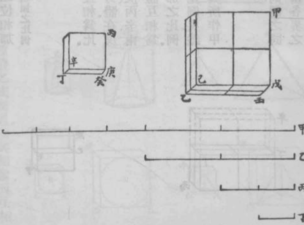
有兩直角方體。其底面積之縱橫二界相比之比例。與厚度面積之縱橫二界相比之比例。若俱同。則此兩體爲直角正方同式體也。如甲乙、丙丁、兩直角方體。其甲乙體之戊乙底面之戊己橫界。比丙丁體之庚丁底面之庚辛橫界大一倍。甲乙體之戊乙底面之戊壬縱界。比丙丁體之庚丁底面之庚癸縱界大一倍。甲乙體之甲己厚面之甲戊直界。比丙丁體之丙辛厚面之丙庚直界亦大一倍。則甲乙、丙丁之兩體。俱爲直角正方同式體也。至於兩體所有之戊己、庚辛、二界。戊壬、庚癸、二界。甲戊、丙庚、二界。俱爲相當之界。而可互相爲比



例矣。

第四

凡同式直角正方體。其體積之比例。比之兩界線之比例。為連比例隔二位相加之比例也。如甲乙、丙丁、兩同式直角正方體。其相當之戊己庚辛二界。戊壬庚癸二界。甲戊、丙庚、二界互相為比之比例。俱各大一倍。則此甲乙體積與丙丁體積之比。比之甲乙體之界線。與丙丁體之界線之比者。即如連比例四率內隔二位相加之比例矣。蓋甲乙體之各界。既為丙丁體之各界之二倍。則甲乙體內如丙丁體之二倍者有四。二其四為八。故甲乙體積。比丙丁體積大八倍。夫以甲乙體積八。與丙丁體積一相比。為八分之一。甲乙體界二。與丙丁體界一相比。為二分之一。其比例不同。蓋以八分比一分。較之二分比一分。為四倍也。如欲求其相連比例之率。則於甲乙體之界四倍之。得八分。與丙丁體界一分為比。即如甲乙體積與丙丁體積之比例矣。夫八與四、四與二、二與一皆為連比例二分之一之比例。今以八與一為比。其間隔四



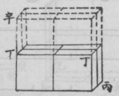
與二之兩位。故曰同式兩體積之比例。為兩界上連比例隔二位相加之比例也。若邊為三倍，則面為九倍，體為二十七倍，亦為隔二位相加之比例也。

第五

有兩同式直角長方體。於兩體相當之二界。各作兩正方體。互相為比。即同於原兩長方體之互相為比也。如甲乙、丙丁兩直角長方體。在戊乙、己丁相當二橫界。各作甲庚、丙辛二正方體。則所作之甲庚、丙辛兩正方體互相為比之比例。仍同於原有之甲乙、丙丁兩長方體互相為比之比例也。夫甲乙、丙丁同式之兩長方體。既為隔二位相加之比例。則所作甲庚、丙辛同式之兩正方體。亦必為隔二位相加之比例矣。然則原有之甲乙長方體。為原有之丙丁長方體之八分之一。其所作甲庚正方體。亦為所作丙辛正方體之八分之一可知矣。

第六

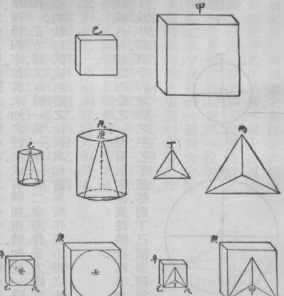
凡有大小平面體。其相當角度俱等。而相當界之比例又同。則謂之同式體也。如甲乙、大小兩平面體。其相當各角之度俱等。而相當各界之比例又同。則甲乙二體。謂之同式平面正方體也。如丙丁、大小兩四瓣



體。其相當各角之度俱等。而相當各界之比例又同。則丙、丁二體謂之同式四瓣體也。又如大小圓面體。於其內外作各種平面體其平面體之式若同。則圓面體亦謂之同式體。如戊、己大小兩圓體所函之庚、辛尖瓣等體是也。

第七

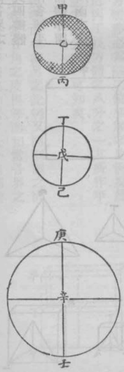
同式各種體之比例。同於在各體相當界所作正方體之比例也。如甲乙丙丁戊己、大小兩三角尖瓣體。互相爲比。卽同於乙丙戊己相當二界所作庚乙辛戊兩正方體之互相爲比。又如壬、癸兩圓球體。其互相爲比之比例。亦同於圓球徑相當之乙丙、戊己二界。所作庚乙辛戊兩正方體互相爲比之比例也。蓋同式平面形互相爲比之比例同於各相當二界所作正方面形互相爲比之比例矣。今各種體之式既同。故其相當面互相



爲比之比例必同。相當面互相爲比之比例同者。緣相當面之各相當界互相爲比之比例同也。故凡同類兩體。知此一體之度。而不知彼一體之度。欲求知之。則在同式兩體相當二界各作一正方體。此所作之二體。一爲一率。一爲二率。所知之體爲三率。推得四率。即其未知之體矣。或有同類兩體。知此一體之界。而不知彼一體之界。則依所知一體之界作一正方體。其兩體一爲一率。一爲二率。所作正方體爲三率。推得四率。即是彼一體界數所作之正方體矣。故曰同式兩體之比例。與相當界所作正方體之比例相同也。

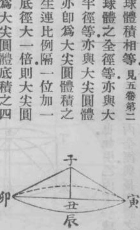
第八

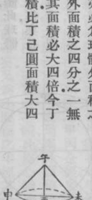
凡圓面半徑與球體半徑等者。其圓面積爲球體外面積之四分之一。而圓面半徑與球體全徑等者。其圓面積與球體外面積等也。如丁己圓面之丁戊半徑。與甲丙球體之甲乙半徑等。則丁己圓面積。爲甲丙球體外面積之四分之一。又如庚壬圓面之庚辛半徑。與甲丙球體之甲丙全徑等。則庚壬圓面積。與甲丙球體外面積等也。試作子寅卯一尖圓體。使其寅辰卯之底面積。與甲丙球體外面積等。其



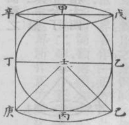
子丑高度、與甲丙球體之甲乙半徑等。則此尖圓體積、與球體積相等。見五卷第二十五節・又作午未申一小尖圓體使其未申底徑、與甲丙球體之全徑等亦與大尖圓體之寅丑半徑等。其午酉高度、與甲丙球體之甲乙半徑等。亦與大尖圓體之子丑高度等。則此小尖圓體積、為球體積之四分之一。亦即為大尖圓體積之四分之一。何以見之。蓋大小兩面之比例同於相當界所生連比例隔一位加一倍之比例。今大尖圓體之寅卯底徑。比小尖圓體之未申底徑大一倍。則大尖圓體底積。比小尖圓體底積。必又大一倍。而小尖圓體底積。為大尖圓體底積之四分之一矣。又兩體同高者。其體積之比例。同於其底面之比例。今小尖圓體底積。既為大尖圓體底積之四分之一。則其體積必為大尖圓體積之四分之一。而亦為球體之四分之一矣。球體原與大尖圓相等・夫大尖圓體之底積。原與球體之外面積等。小尖圓體底積。既為大尖圓體底積之四分之一。亦必為球體外面積之四分之一。而丁己圓面。固與小尖圓之底積等。則為球體外面積之四分之一無疑矣。至於庚壬圓面之徑。原比丁己圓面之徑大一倍。則其面積必大四倍。今丁己圓面。既為甲丙球體外面積之四分之一。則庚壬圓面積比丁己圓面積大四倍者。安得不與球體外面積相等乎。

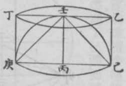
第九





凡球體全徑與上下面平行長圓體底徑高度相等則球體爲長圓體之三分之二也如甲乙丙丁一球體戊己庚辛一長圓體此球體之乙丁全徑與長圓體之己庚底徑度等而球體之甲丙全徑與長圓體之戊己高度等則球體積爲長圓體積之三分之二也蓋長圓體與尖圓體同底同高則其比例爲三分之一五卷第二十三節言平底尖體與上下面平行體同底同高則尖體爲平行體三分之一尖圓體之底徑與球之全徑等高與球之半徑等者尖圓體積爲球體積之四分之一而尖圓體又爲半球體之二分之一矣說見前節今於乙己庚丁半長圓體內作己壬庚半球體又作一壬己庚尖圓體則此尖圓體爲半球體之二分之一尖圓體既爲半球體之二分之一又爲半長圓體之三分之一則半球體豈非長圓體之三分之二乎夫全與全之比例即若半與半之比例今半長圓與半球之比例爲三分之二則全長圓體與全球體之比例亦爲三分之二可知矣

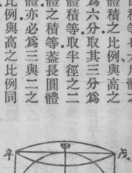




第十

凡球體全徑與長圓體底徑高度相等者其球體外面積與長圓體周圍面積等也如甲乙丙丁一球體戊己庚辛一長圓體其球體之乙丁全徑與長圓體之己庚底徑等而球體之甲丙全徑與長圓體之戊

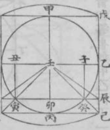
己高度等則此球體外面積必與長圓體之周圍面積等也大凡體之面積相等者其體積之比例同於其高之比例而體積之比例與高之比例同者其面積必相等試將球體乙壬半徑分爲六分取其三分爲高以長圓周圍面積爲底所成之體積必與長圓體積等取半徑之二分爲高以球體外面積爲底所成之體積必與球體之積等蓋長圓體與球體之比例原爲三與二之比例此所成之二體亦必爲三與二之比例一體之高爲三分一體之高爲二分是積之比例與高之比例同矣非因其面積相等之故乎由是觀之球體外面積與長圓體周圍面積相等也明矣



第十一

凡球體全徑與上下面平行長圓體底徑高度相等者其相當每段之外面積皆相等也如甲乙丙丁一球體戊己庚辛一長圓體此球體之乙丁全徑與長圓體之己庚底徑等球體之甲丙全徑與長圓體之戊己高度等則球體之癸丙寅一段凸面積必與相當長圓體之辰己庚巳一段周圍外面積等也夫乙辰巳丁一段長圓體內分出子癸寅丑一小長圓體餘癸子乙辰巳丁丑寅空心體此空心體與子癸寅丑長圓體之積必等何以知之蓋壬癸爲大圓面之半徑而所截卯癸又爲小圓面之半徑其壬卯與卯癸之度又等故壬癸壬卯卯癸三線成一壬癸卯直角三角形而壬癸半徑所作圓面必與壬卯卯癸兩

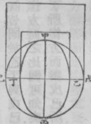
線爲半徑所作兩圓面等 見九卷第六節 • 又壬癸與壬乙皆一圜之輻線其度必等而卯辰原與壬乙相等故卯辰爲半徑所作之圓面即壬癸爲半徑所作之圓面於卯辰爲半徑所作圓面內減去卯癸爲半徑所作圓面即餘辰癸環面與壬卯爲半徑所作之圓面等而壬卯與卯癸原相等然則辰癸環面既與壬卯半徑所作之圓面等亦必與卯癸爲半徑所作之圓面等矣夫卯癸即小長圓底之半徑而辰癸又爲空心體底之環徑其兩面積既等則其兩體積必等無疑矣又壬癸寅小尖圓體原與癸乙辰巳丁寅曲凹體等 乙丙丁半球體 • 爲半長圓體三分之二 • 則癸乙巳丙庚丁寅曲凹體 • 爲長圓體三分之一 • 與壬己庚尖圓體相等 • 故壬癸寅一段尖圓體 • 與相當癸乙辰巳丁寅一段曲門體 • 亦必相等也 • 而壬癸寅小尖圓體爲子癸寅丑小長圓體三分之一則癸乙辰巳丁寅曲凹體亦爲辰癸空心體之三分之一矣於乙辰巳丁長圓體內減去壬癸寅小尖圓體又減去癸乙辰巳丁寅曲凹體則餘乙癸壬寅丁一段空心球體必與乙辰壬巳丁一段空心長圓體等 如以乙辰巳丁一段長圓體作六分 • 則子癸寅丑小長圓爲三分 • 壬癸寅小尖圓體爲一分 • 與小尖圓體相等之癸乙辰巳丁寅曲凹體亦爲一分 • 今既減去小尖圓體及曲凹體 • 是於六分內減去二分 • 而存一段空心球體爲四分也 • 而壬辰巳大尖圓體 • 亦爲乙辰巳丁長圓體三分之一 • 於長圓體內減去大尖圓體 • 則餘乙辰壬巳丁空心長圓體爲三分之二也 • 三分之二之比例 • 固同於六分之四之比例 • 則此一段空心長圓體 • 與一段空心球體 • 相等無疑 • 若將此兩空心體從壬心至外面剖爲千萬尖體 俱以乙壬半徑爲高 • 以兩



空心體外面爲底．則空心球體所分之各尖體．與空心長圓體所分之各尖體．其積既等．其高又等．則其底不得不等．同底同高者．其積既等．則同高同積者．其底必等．此各尖體之底既等．則兩空心體之外面積相等可知矣．千萬尖體之底．卽兩空心體之面也．夫乙丙丁半球體外面積．原與乙己庚丁半長圓體周圍外面積等．於半球體內減去乙癸寅丁一段．餘癸丙寅一段．球體於半長圓體內．減去乙辰巳丁一段．餘辰己庚巳一段長圓體．其減去之各段外面積既相等．則所餘之球體癸丙寅一段凸面與長圓體辰己庚巳一段周圍外面積相等也明矣．

第十二

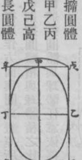
凡橢圓體大徑、與圓球體徑相等者．其二體積之比例．卽同於橢圓體小徑所作方面與圓球體徑所作方面之比例也．如甲乙丙丁橢圓體之甲丙大徑與甲戊丙己圓球徑等．則橢圓體積、與球體積之比例．卽同於橢圓乙丁小徑所作方面、與球體戊己徑所作方面之比例也．試將橢圓體與球體任意依徑線平行分之．其所分之大小平圓面．如子丑乃球體大圓面之徑．寅卯乃橢圓體小圓面之徑．此大小兩平圓面之比例．同於其相當子丑、寅卯、二徑所作二方面之比例．見八卷第十一節．而子丑徑與寅卯徑之比例．又同於戊己徑與乙丁徑之比例．故此所分之大小圓面之比例．亦必同於戊己方



面與乙丁方面之比例矣。若將此兩體與戊己徑平行。任意分為幾何面。其相當大小兩面之比例。皆如戊己方面與乙丁方面之比例。此所分各面之比例。既皆同於乙丁與戊己所作方面之比例。則撱圓體與圓球體之比例。必同於乙丁所作方面、與戊己所作方面之比例可知矣。即所分之寅丙卯撱圓體之一段。與子丙丑圓球體之一段。其比例亦必同於乙丁所作方面、與戊己所作方面之比例矣。

第十三

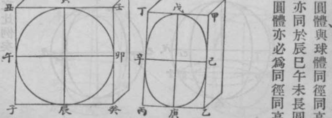
凡撱圓體大徑。與長圓體高度等。而撱圓體小徑、與長圓體底徑等。則撱圓體為長圓體之三分之二。亦如圓球體與同徑同高長圓體之比例也。如甲乙丙丁一撱圓體。戊己庚辛一長圓體。其撱圓體之甲丙大徑與長圓體之戊己高度等。而撱圓體之乙丁小徑。亦與長圓體之己庚底徑等。則撱圓體為長圓體之三分之二。其比例即如子丑寅卯球體與辰巳午未長圓體之比例也。蓋戊己庚辛長圓體之戊己高度。與辰巳午未長圓體之辰巳高度等。故兩長圓體之比例。即同於己庚底積與巳午底積之比例。至於戊己庚辛長圓體之己庚底積。與撱圓體之乙丁小徑所作圓面積等。而辰巳午未長圓體之巳午底積。又與球體丑卯全徑所作圓面積等。則戊己庚辛長圓體積與辰巳午未長圓體積之比例。即同於撱圓體之乙丁小徑所作圓面、與球體丑卯全徑所作圓面之比例矣。夫撱圓體與球體之比例。原同於撱圓體小徑所作圓面與球體



全徑所作圓面之比例。故撱圓體與球體之比例。亦同於撱圓體同徑同高之長圓體、與球體同徑同高之長圓體之比例也。若轉比之。卽戊己庚辛長圓體與甲乙丙丁撱圓體之比例。亦同於辰巳午未長圓體與子丑寅卯球體之比例矣。夫球體既爲同徑同高長圓體之三分之二。則撱圓體亦必爲同徑同高長圓體之三分之二可知矣。

第十四

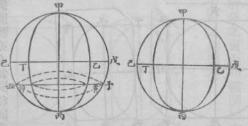
凡函撱圓之長方體。與所函撱圓體之比例。同於函球之正方體。與所函球體之比例也。如甲乙丙丁長方體。函一戊己庚辛撱圓體。其長方體之甲乙高度與撱圓體之戊庚大徑等。長方體之乙丙底度。與撱圓體之己辛小徑等。則此甲乙丙丁長方體、與所函戊己庚辛撱圓體之比例。同於壬癸子丑正方體、與所函寅卯辰午球體之比例也。蓋甲乙丙丁長方體之甲乙高度。與壬癸子丑正方體之壬癸高度等。故長方體與正方體之比例。同於兩體底積之比例。今此長方體之底積。與所函撱圓體之巳辛小徑所作方面等。而正方體之底積。與所函球體之卯午全徑所作方面等矣。然則此長方體與正方體之比例。不同於撱圓體小徑所作方面。與球體全徑所作方面之比例乎。夫撱圓體與球體之比例。原同於撱圓體小徑所作方面。與球體全徑所作方面之比例。則撱圓體與球體之比例。同於函撱圓體之長方體、與函球體之正方體之比例可



知矣。若轉比之、則長方體與所函橢圓體之比例。亦必同於正方體與所函球體之比例矣。

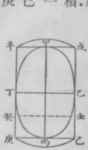
第十五

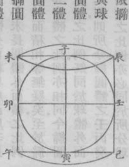
凡橢圓體大徑、與圓球體之徑等者。其橢圓體外面積、與球體外面積之比例。即同於橢圓體小徑。與球體全徑之比例。即任分一段。其相當一段外面積之比例。亦無不同也。如甲乙丙丁橢圓體之甲丙大徑、與甲戊丙己球體全徑等。則此橢圓體外面積、與球體外面積之比例。必同於橢圓體之乙丁小徑、與球體之戊己全徑之比例也。即任分寅丙卯一段橢圓體外面積、與子丙丑一段球體外面積之比例。亦仍同於乙丁小徑、與戊己全徑之比例也。蓋兩體所分寅卯、子丑、平圓面皆與乙丁、戊己、徑線平行。故寅卯圓界、與子丑圓界之比。同於寅卯圓徑、與子丑圓徑之比。而寅卯徑與子丑徑之比。又同於乙丁徑與戊己徑之比也。然此兩體依徑平分。可爲無數平圓界。其相當各圓界之比例。既皆同於乙丁徑與戊己徑之比例。則全體外面積之比例。豈不同於乙丁徑與戊己徑之比例乎。至於所分之寅丙卯一段橢圓體。與子丙丑一段球體。俱可分爲平圓以比之。則一段與一段之比例。無異於全體與全體之比例也明矣。

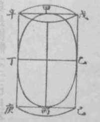


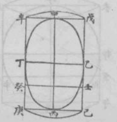
第十六

凡橢圓體大徑、與長圓體高度等。而橢圓體小徑與長圓體底徑等。則橢圓體外面積、與長圓體周圍外面積等。即任分一段。其相當一段之外面積。亦無不等也。如甲乙丙丁一橢圓體。戊己庚辛一長圓體。其橢圓體之甲丙大徑、與長圓體之戊己高度等。而橢圓體之乙丁小徑、與長圓體之己庚底徑等。則橢圓體之外面積。與長圓體周圍之面積等。即任分壬丙癸一段橢圓體外面積。亦與相當壬己庚癸一段長圓體之外面積等也。試依橢圓體甲丙大徑度作子丑寅卯一球體。并作與球體同高同徑辰巳午未一長圓體。則此兩長圓體之高度等。其二體周圍面積之比例、必同於二體底徑之比例。二長圓體底徑之比例、即是橢圓體之乙丁小徑、與球體之丑卯全徑之比例也。橢圓體外面積、與球體外面積之比例。原同於橢圓體乙丁徑、與球體丑卯徑之比例。則戊己庚辛長圓









體外面積、與撱圓體外面積之比例、亦同於辰巳午未長圓體外面積、與球體外面積之比例也。夫球體外面積、原與辰巳午未長圓體外面積等、而撱圓體外面積、與戊己庚辛長圓體外面積之比例、既與球體外面積與辰巳午未長圓體外面積之比例相同、則此撱圓體外面積與戊己庚辛長圓體外面積相等無疑矣。至於撱圓體所分一段、與球體所分一段之比例、與其全體之比例亦相同。今撱圓體外面全積、與戊己庚辛長圓體周圍外面全積之比例、既同於球體外面全積與辰巳午未長圓體周圍外面全積之比例、則所分撱圓體之壬丙癸一段外面積、與長圓體之壬己庚癸一段外面積之比例、亦必同於所分球體之申寅酉一段外面積之比例矣。彼球體之申寅酉一段外面積、既與長圓體之戊巳午亥一段外面積相等、則此撱圓體之壬丙癸一段外面積與長圓體之壬己庚癸一段外面積相等也明矣。