Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2019/2020**

Bündel, Garben und Kohomologie

Arbeitsblatt 3

Das *Kroneckerprodukt* zu Matrizen

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m,\, 1 \leq j \leq n}$$

und

$$B = (b_{k\ell})_{1 \leq \ell \leq p,\, 1 \leq k \leq r}$$

ist durch

$$(a_{ij} \cdot b_{k\ell})_{1 \leq i \leq m,\, 1 \leq \ell \leq p;\, 1 \leq j \leq n,\, 1 \leq k \leq r}$$

gegeben.

Aufgabe 3.1. Berechne das Kroneckerprodukt der beiden Matrizen $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3.2. Es sei K ein Körper und

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m,\, 1 \leq j \leq n}$$

und

$$B = (b_{k\ell})_{1 \leq \ell \leq p,\, 1 \leq k \leq r}$$

Matrizen mit den zugehörigen linearen Abbildungen $A\colon K^n \to K^m$ bzw. $B\colon K^r \to K^p$. Zeige, dass das Tensorprodukt dieser linearen Abbildungen bezüglich der Basen $e_j \otimes e_k$, $1 \leq j \leq n$, $1 \leq k \leq r$, von $K^n \otimes K^r$ und $e_i \otimes e_\ell$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq \ell \leq p$, von $K^m \otimes K^p$ durch das Kroneckerprodukt von A und B beschrieben wird.

Aufgabe 3.3. Zeige, dass das Tensorprodukt des Möbiusbandes mit sich selbst ein triviales Geradenbündel ist.

Aufgabe 3.4. Es seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ Prägarben auf dem topologischen Raum X. Zeige, dass durch $U \mapsto \mathcal{F}(U) \times \mathcal{G}(U)$ mit den natürlichen Produktabbildungen eine Prägarbe auf X gegeben ist.

Aufgabe 3.5. Es sei I eine Indexmenge und sei $\mathcal{F}_i$, $i \in I$, eine Familie von Prägarben auf dem topologischen Raum X. Zeige, dass durch $U \mapsto \prod_{i \in I} \mathcal{F}_i(U)$ mit den natürlichen Produktabbildungen eine Prägarbe auf X gegeben ist.

Aufgabe 3.6. Interpretiere Beispiel 3.8 im Sinne von Beispiel 3.12.

Aufgabe 3.7. Es sei $p\colon V \to X$ ein reelles Vektorbündel vom Rang m auf einem topologischen Raum X. Zeige, dass zu jeder offenen Menge $U \subseteq X$, auf der V trivial ist, die zugehörige Prägarbe der stetigen Schnitte isomorph (in welchem Sinn?) zu $C^0(U, \mathbb{R})^m$ ist.

Aufgabe 3.8. Zeige, dass die Gruppen $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +)$, $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R}^n, +)$, (S^1, mit der Winkeladdition), die allgemeine lineare Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ bzw. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ topologische Gruppen sind.

Aufgabe 3.9. Es sei G eine topologische Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Zeige, dass auf jedem topologischen Raum X die Prägarbe $C^0(-, H)$ eine Unterprägarbe von $C^0(-, G)$ ist.

Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit G, die zugleich eine Gruppe ist, für die die Inversenabbildung und die Gruppenverknüpfung differenzierbare Abbildungen sind, heißt (reelle) *Lie-Gruppe*.

Aufgabe 3.10. Zeige, dass die Gruppen $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +)$, $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R}^n, +)$, (S^1, mit der Winkeladdition), die allgemeine lineare Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ bzw. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ Lie-Gruppen sind.

Aufgabe 3.11. Zeige, dass das Tangentialbündel auf einer Lie-Gruppe trivial ist.

Tipp: Zeige, dass man den Tangentialraum am neutralen Element in sinnvoller Weise in die anderen Tangentialräume transportieren kann.

Aufgabe 3.12. Sei I eine gerichtete Indexmenge und sei M_i, $i \in I$, ein gerichtetes System von Mengen. Es sei N eine weitere Menge und zu jedem $i \in I$ sei eine Abbildung

$$\psi_i\colon\ M_i \longrightarrow N$$

mit der Eigenschaft gegeben, dass $\psi_i = \psi_j \circ \varphi_{ij}$ ist für alle $i \preccurlyeq j$ (wobei φ_{ij} die Abbildungen des Systems bezeichnen). Beweise die universelle Eigenschaft des Kolimes, nämlich, dass es eine eindeutig bestimmte Abbildung

$$\psi\colon\ \operatorname{colim}_{i \in I} M_i \longrightarrow N$$

derart gibt, dass $\psi_i = \psi \circ j_i$ ist, wobei $j_i : M_i \to \operatorname{colim}_{i \in I} M_i$ die natürlichen Abbildungen sind.

Zeige ferner, dass falls M_i eine gerichtetes System von Gruppen und falls N ebenfalls eine Gruppe ist und alle ψ_i Gruppenhomomorphismen sind, dass dann auch ψ ein Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe 3.13. Sei I eine gerichtete Indexmenge und sei G_i, $i \in I$, ein gerichtetes System von kommutativen Gruppen. Zeige, dass der Kolimes eine kommutative Gruppe ist.

Aufgabe 3.14. Sei R ein kommutativer Ring und sei $S \subseteq R$ ein multiplikatives System. Auf S betrachten wir folgende (partielle) Ordnung, und zwar sagen wir $f \preccurlyeq g$, falls f eine Potenz von g teilt. Zeige, dass die kommutativen Ringe

$$R_f,\ f \in S\,,$$

ein gerichtetes System bilden, und dass für den Kolimes

$$\operatorname{colim}_{f \in S} R_f \,=\, R_S$$

gilt.

Aufgabe 3.15. Zeige, dass der Halm des Tangentialbündels einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit in einem Punkt nur von der Dimension der Mannigfaltigkeit (in diesem Punkt) abhängt.

Aufgabe 3.16. Es seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ Prägarben auf dem topologischen Raum X und $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$ ihre Produktprägarbe. Zeige, dass für den Halm in jeden Punkt $P \in X$ die Beziehung

$$(\mathcal{F} \times \mathcal{G})_P \,=\, \mathcal{F}_P \times \mathcal{G}_P$$

gilt.

Aufgabe 3.17. Es sei X ein topologischer Raum und seien $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ Prägarben auf X. Zeige die folgenden Aussagen.

(1) Die Identität
$$\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$$
ist ein Homomorphismus von Prägarben.
(2) Wenn $\varphi\colon\, \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ und $\psi\colon\, \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ Homomorphismen von Prägarben sind, so ist auch die Verknüpfung $\psi \circ \varphi$ ein Homomorphismus von Prägarben.
(3) Zu einer Unterprägarbe $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ ist die natürliche Inklusion ein Homomorphismus von Prägraben.

Aufgabe 3.18. Es sei I eine Indexmenge und sei $\mathcal{F}_i$, $i \in I$, eine Familie von Prägarben auf dem topologischen Raum X mit der Produktprägarbe $\prod_{i \in I} \mathcal{F}_i$. Es sei $\mathcal{G}$ eine weitere Prägarbe auf X. Zeige, dass ein Prägarbenmorphismus

$$\psi \colon \mathcal{G} \longrightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{F}_i$$

das gleiche ist wie eine Familie von Prägarbenmorphismen

$$\psi_i \colon \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F}_i .$$

Abbildungsverzeichnis