Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2015/2016**

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Arbeitsblatt 10

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 10.1. Um die Erde wird entlang des Äquators ein Band gelegt. Das Band ist jedoch einen Meter zu lang, so dass es ringsherum gleichmäßig angehoben wird, um straff zu werden. Welche der folgenden Lebewesen können drunter durch laufen/schwimmen/fliegen/tanzen?

(1) Eine Amöbe.
(2) Eine Ameise.
(3) Eine Meise.
(4) Eine Flunder.
(5) Eine Boa constrictor.
(6) Ein Meerschweinchen.
(7) Eine Boa constrictor, die ein Meerschweinchen verschluckt hat.
(8) Ein sehr guter Limbotänzer.

Übungsaufgaben

Aufgabe 10.2. Es sei K ein Körper, V und W seien K-Vektorräume und

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

sei eine K-lineare Abbildung. Zeige, dass für beliebige Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ und Koeffizienten $s_1, \ldots, s_n \in K$ die Beziehung

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} s_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} s_i \varphi(v_i)$$

gilt.

Aufgabe 10.3.*

Es sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung zwischen den K-Vektorräumen V und W. Zeige $\varphi(0) = 0$.

Aufgabe 10.4.*

Es sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung zwischen den K-Vektorräumen V und W. Es sei $v \in V$. Zeige $\varphi(-v) = -\varphi(v)$.

Aufgabe 10.5. Eine Unze Gold kostet 1100 €.

a) Wie viel kosten sieben Unzen Gold?

b) Wie viel Gold bekommt man für 10000 €?

Aufgabe 10.6. Von einer Brotsorte kostet ein Laib mit 750 Gramm 3 €.

a) Wie viel kostet ein Laib mit 1000 Gramm?

b) Wie viel Brot bekommt man für 10 €?

Aufgabe 10.7. Lucy Sonnenschein fährt mit ihrem Fahrrad 10 Meter pro Sekunde.

a) Wie viele Kilometer fährt sie pro Stunde?

b) Wie lange braucht sie für 100 Kilometer?

Aufgabe 10.8. Fünf Spaziergänger laufen eine Strecke in 35 Minuten ab. Am nächsten Tag laufen 7 Spaziergänger die gleiche Strecke in gleichem Tempo. Wie lange brauchen sie?

Aufgabe 10.9. Interpretiere die folgenden physikalischen Gesetze als lineare Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Was sind die messbaren Größen, was ist der Proportionalitätsfaktor und wodurch ist dieser festgelegt?

(1) Masse ist Volumen mal Dichte.
(2) Energie ist Masse mal Brennwert.
(3) Die zurückgelegte Strecke ist Geschwindigkeit mal Zeit.
(4) Kraft ist Masse mal Beschleunigung.
(5) Energie ist Kraft mal Weg.
(6) Energie ist Leistung mal Zeit.
(7) Spannung ist Widerstand mal Stromstärke.
(8) Ladung ist Stromstärke mal Zeit.

AUFGABE 10.10. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zeige, dass zu $v \in V$ die Abbildung

$$K \longrightarrow V,\ \lambda \longmapsto \lambda v,$$

linear ist.

AUFGABE 10.11. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zeige, dass zu $a \in K$ die Abbildung

$$V \longrightarrow V,\ v \longmapsto av,$$

linear ist.[1]

AUFGABE 10.12. Es sei K ein Körper und seien U, V, W Vektorräume über K. Es seien

$$\varphi\colon U \to V \text{ und } \psi\colon V \to W$$

lineare Abbildungen. Zeige, dass dann auch die Verknüpfung

$$\psi \circ \varphi\colon\ U \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung ist.

AUFGABE 10.13. Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K-Vektorräume. Es sei

$$\varphi\colon\ V \longrightarrow W$$

eine bijektive lineare Abbildung. Zeige, dass dann auch die Umkehrabbildung

$$\varphi^{-1}\colon\ W \longrightarrow V$$

linear ist.

AUFGABE 10.14. Es sei eine lineare Abbildung

$$\varphi\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 5 \text{ und } \varphi\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 4$$

gegeben. Berechne

$$\varphi\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

[1] Eine solche Abbildung heißt *Homothetie* oder *Streckung* mit dem Streckungsfaktor a.

Aufgabe 10.15.*

Es sei eine lineare Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

mit

$$\varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix},\ \varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \varphi\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechne

$$\varphi\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 10.16. In einer Kekspackung befinden sich Schokokekse, Waffelröllchen, Mandelsterne und Nougatringe. Die Kalorien, der Vitamin C-Gehalt und der Anteil an linksdrehenden Fettsäuren werden durch folgende Tabelle (in geeigneten Maßeinheiten) wiedergegeben:

Sorte	Kalorien	Vitamin C	Fett
Schokokeks	10	5	3
Waffelröllchen	8	7	6
Mandelstern	7	3	1
Nougatring	12	0	5

a) Beschreibe mit einer Matrix die Abbildung, die zu einem Verzehrtupel (x, y, z, w) das Aufnahmetupel (K, V, F) berechnet.

b) Heinz isst 100 Schokokekse. Berechne seine Vitaminaufnahme.

c) Ludmilla isst 10 Nougatringe und 11 Waffelröllchen. Berechne ihre Gesamtaufnahme an Nährstoffen.

d) Peter isst 5 Mandelsterne mehr und 7 Schokokekse weniger als Fritz. Bestimme die Differenz ihrer Kalorienaufnahme.

Aufgabe 10.17. Finde mittels elementar-geometrischer Überlegungen eine Matrix, die eine Drehung um 45 Grad gegen den Uhrzeigersinn in der Ebene beschreibt.

Aufgabe 10.18. Zeige, dass die Abbildungen

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R},\, z \longmapsto \operatorname{Re}(z)\,,$$

und

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R},\, z \longmapsto \operatorname{Im}(z)\,,$$

$\mathbb{R}$-lineare Abbildungen sind. Zeige ferner, dass die komplexe Konjugation $\mathbb{R}$-linear, aber nicht $\mathbb{C}$-linear ist. Ist der Betrag

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R},\, z \longmapsto |z|\,,$$

$\mathbb{R}$-linear?

Aufgabe 10.19.*

Es sei B eine $n \times p$-Matrix und A eine $m \times n$-Matrix und es seien

$$K^p \xrightarrow{B} K^n \xrightarrow{A} K^m$$

die zugehörigen linearen Abbildungen. Zeige, dass das Matrixprodukt $A \circ B$ die Hintereinanderschaltung der beiden linearen Abbildungen beschreibt.

Aufgabe 10.20. Ergänze den Beweis zu Satz 10.9 um die Verträglichkeit mit der skalaren Multiplikation.

Aufgabe 10.21. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Es sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Familie von Vektoren in V. Zeige, dass die Abbildung

$$\varphi\colon\, K^n \longrightarrow V,\, (s_1, \ldots, s_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} s_i v_i,$$

linear ist.

Aufgabe 10.22. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Es sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Familie von Vektoren in V. Zeige, dass für die Abbildung

$$\varphi\colon\, K^n \longrightarrow V,\, (s_1, \ldots, s_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} s_i v_i,$$

die folgenden Beziehungen gelten.

(1) φ ist injektiv genau dann, wenn $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind.
(2) φ ist surjektiv genau dann, wenn $v_1, \ldots, v_n$ ein Erzeugendensystem von V ist.

(3) φ ist bijektiv genau dann, wenn $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis ist.

Aufgabe 10.23. Es sei K ein Körper. Zu $i \in \{1, \ldots, n\}$ seien K-Vektorräume V_i und W_i sowie lineare Abbildungen

$$\varphi_i \colon V_i \longrightarrow W_i$$

gegeben. Zeige, dass dann auch die Produktabbildung

$$\varphi = \varphi_1 \times \varphi_2 \times \cdots \times \varphi_n : V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \longrightarrow W_1 \times W_2 \times \cdots \times W_n,$$
$$(v_1, v_2, \ldots, v_n) \longmapsto (\varphi_1(v_1), \varphi_2(v_2), \ldots, \varphi_n(v_n))$$

, eine lineare Abbildung zwischen den Produkträumen ist.

Aufgabe 10.24.*

Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K. Es sei $v_1, \ldots, v_n$ ein Erzeugendensystem von V und es sei $w_1, \ldots, w_n$ eine Familie von Vektoren in W.

a) Zeige, dass es maximal eine lineare Abbildung

$$\varphi \colon V \longrightarrow W$$

mit $\varphi(v_i) = w_i$ für alle i geben kann.

b) Man gebe ein Beispiel für eine solche Situation an, wo es keine lineare Abbildung mit $\varphi(v_i) = w_i$ für alle i gibt.

Aufgabe 10.25. Beweise Lemma 10.13.

Aufgabe 10.26. Betrachte die Abbildung

$$f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

die eine rationale Zahl $q \in \mathbb{Q}$ auf q schickt und die alle irrationalen Zahlen auf 0 schickt. Ist dies eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung? Ist sie mit Skalierung verträglich?

Aufgabe 10.27.*

Es sei K ein Körper und es seien V und W endlichdimensionale K-Vektorräume. Zeige, dass V und W genau dann zueinander isomorph sind, wenn ihre Dimension übereinstimmt.

Aufgabe 10.28. Es sei K ein endlicher Körper mit q Elementen. Bestimme die Anzahl der linearen Abbildungen

$$\varphi\colon K^n \longrightarrow K^m.$$

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 10.29. (3 Punkte)

Es sei eine lineare Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

mit

$$\varphi\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \varphi\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechne

$$\varphi\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 10.30. (3 Punkte)

Finde mittels elementar-geometrischer Überlegungen eine Matrix, die eine Drehung um 30 Grad gegen den Uhrzeigersinn in der Ebene beschreibt.

Aufgabe 10.31. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper, V und W seien K-Vektorräume und

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

sei eine K-lineare Abbildung. Zeige, dass der Graph der Abbildung ein Untervektorraum des Produktraumes $V \times W$ ist.

Die nächste Aufgabe verwendet die folgende Definition.

Seien $(G, \circ, e_G)$ und $(H, \circ, e_H)$ Gruppen. Eine Abbildung

$$\psi : G \longrightarrow H$$

heißt *Gruppenhomomorphismus*, wenn die Gleichheit

$$\psi(g \circ g') = \psi(g) \circ \psi(g')$$

für alle $g, g' \in G$ gilt.

Aufgabe 10.32. (3 Punkte)

Seien V und W $\mathbb{Q}$-Vektorräume und sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

ein Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass φ bereits $\mathbb{Q}$-linear ist.

Aufgabe 10.33. (3 Punkte)

Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $U_1, U_2 \subseteq V$ Untervektorräume der gleichen Dimension. Zeige, dass es einen K-Automorphismus

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

mit

$$\varphi(U_1) = U_2$$

gibt.