Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2021**

Mathematik für Anwender I

Arbeitsblatt 35

Übungsaufgaben

Aufgabe 35.1.*

Es seien $P = \left(\frac{3}{4}, -1\right)$ und $Q = \left(2, \frac{1}{5}\right)$ zwei Punkte im $\mathbb{R}^2$. Bestimme den Abstand zwischen diesen beiden Punkten in

a) der euklidischen Metrik,

b) der Summenmetrik,

c) der Maximumsmetrik.

d) Vergleiche diese verschiedenen Abstände der Größe nach.

Aufgabe 35.2. Zeige, dass die Summenmetrik im $\mathbb{R}^n$ eine Metrik ist.

Aufgabe 35.3. Zeige, dass die Maximumsmetrik im $\mathbb{R}^n$ eine Metrik ist.

Aufgabe 35.4. Es sei M die Parabel, also der Graph der Quadratfunktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto x^2.$$

Entscheide, ob auf M durch

$$d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := |x_1 - x_2|$$

bzw. durch

$$d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := |y_1 - y_2|$$

eine Metrik definiert wird.

Aufgabe 35.5. Es sei

$$K = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\right\}$$

der Einheitskreis. Zeige, dass man auf K eine Metrik definieren kann, indem man $d(P, Q)$ $(P, Q \in K)$ als den positiven Winkel zwischen den zugehörigen Strahlen durch den Nullpunkt $(0, 0)$ ansetzt.

Aufgabe 35.6.*

Es sei (M, d) ein metrischer Raum. Zeige, dass die offenen Kugeln $U(x, \epsilon)$ offen sind.

Aufgabe 35.7. Es sei (M, d) ein metrischer Raum. Zeige, dass die abgeschlossenen Kugeln $B\,(x, \epsilon)$ abgeschlossen sind.

AUFGABE 35.8.*

Wir betrachten im $\mathbb{R}^2$ die offenen Bälle $U = U((0,0),1)$ und $V = U((2,0),2)$. Man gebe für jeden Punkt

$$x = (a,b) \in U \cap V$$

einen expliziten offenen Ball mit Mittelpunkt x an, der ganz innerhalb von $U \cap V$ liegt.

AUFGABE 35.9. Es sei (M,d) ein metrischer Raum. Zeige, dass folgende Eigenschaften gelten.

(1) Die leere Menge $\emptyset$ und die Gesamtmenge M sind offen.
(2) Es sei I eine beliebige Indexmenge und seien U_i, $i \in I$, offene Mengen. Dann ist auch die Vereinigung
$$\bigcup_{i \in I} U_i$$
offen.
(3) Es sei I eine endliche Indexmenge und seien U_i, $i \in I$, offene Mengen. Dann ist auch der Durchschnitt
$$\bigcap_{i \in I} U_i$$
offen.

AUFGABE 35.10. Zeige, dass auf dem $\mathbb{R}^n$ die euklidische Metrik, die Summenmetrik und die Maximumsmetrik dieselben offenen Mengen definieren.

AUFGABE 35.11. Es sei (M,d) ein metrischer Raum. Zeige, dass in M die sogenannte *Hausdorff*-Eigenschaft gilt, d.h. zu je zwei verschiedenen Punkten x und y gibt es offene Mengen U und V mit

$$x \in U \text{ und } y \in V \text{ und } U \cap V = \emptyset\,.$$

AUFGABE 35.12.*

Es sei (M,d) ein metrischer Raum. Zeige, dass jede endliche Teilmenge $T \subseteq M$ abgeschlossen ist.

AUFGABE 35.13. Zeige, dass die Menge der reellen Zahlen in $\mathbb{C}$ abgeschlossen ist.

AUFGABE 35.14. Zeige, dass die Menge

$$S = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \right\}$$

in $\mathbb{R}^2$ abgeschlossen ist.

AUFGABE 35.15. Zeige, dass die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ weder offen noch abgeschlossen ist.

Aufgabe 35.16. Es sei (M, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq M$ eine Teilmenge mit der induzierten Metrik. Zeige, dass eine Teilmenge $Z \subseteq T$ genau dann offen in T ist, wenn es eine in M offene Menge U mit $Z = T \cap U$ gibt.

Aufgabe 35.17. Zeige, dass auf jeder Menge M die diskrete Metrik in der Tat eine Metrik ist.

Aufgabe 35.18. Sei M eine Menge, die mit der diskreten Metrik versehen sei. Zeige, dass jede Teilmenge von M sowohl offen als auch abgeschlossen ist.

Aufgabe 35.19. Bestimme den minimalen Abstand von $(4, 1, -5)$ zu einem Punkt der Ebene E, die durch die Gleichung $2x - 7y + 3z = 0$ gegeben ist.

Aufgabe 35.20. Entscheide, ob im $\mathbb{R}^3$ (versehen mit der euklidischen Metrik) die Folge

$$x_n = \left(\frac{n^5 - 4n^2}{e^n}, \frac{-5n^4 + n^3 - n^{-1}}{13n^4 - 9n^2 + 5n + 6}, \frac{4\cos^3 n + 6n^2 + 5n - 2}{2n^2 - \sin^7 n} \right)$$

konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 35.21. Zeige, dass eine Folge in einem metrischen Raum maximal einen Grenzwert besitzt.

Aufgabe 35.22.*

Es sei $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl mit $|z| < 1$. Zeige, dass die Folge $(z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 35.23. Sei $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl mit $|z| > 1$. Zeige, dass die Folge $(z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergiert.

Aufgabe 35.24. Zu einem Dreieck $\triangle = (A, B, C)$ ist das Seitenmittelpunktsdreieck durch die Eckpunkte $\frac{1}{2}(A + B), \frac{1}{2}(A + C), \frac{1}{2}(B + C)$ gegeben. Diese Konstruktion ergibt eine rekursiv definierte Folge von Dreiecken $\triangle_n$, wobei $\triangle_1 = \triangle$ und $\triangle_{n+1}$ das Seitenmittelpunktsdreieck zu $\triangle_n$ ist. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^2$ mit $x_n \in \triangle_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_+$. Zeige, dass diese Folge konvergiert und bestimme den Grenzwert.

Aufgabe 35.25. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in einem metrischen Raum M. Zeige, dass die Folge genau dann gegen $x \in M$ konvergiert, wenn die Folge der Abstände $d(x_n, x)$ in $\mathbb{R}$ gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 35.26.*

Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in einem metrischen Raum M. Zeige, dass die Folge genau dann gegen $x \in M$ konvergiert, wenn in jeder offenen Menge U mit $x \in U$ alle bis auf endlich viele Folgenglieder liegen.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 35.27. (4 (1+1+1+1) Punkte)

Es seien $P = \left(3, \frac{5}{2}, 0\right)$ und $Q = \left(1, -6, \frac{2}{5}\right)$ zwei Punkte im $\mathbb{R}^3$. Bestimme den Abstand zwischen diesen beiden Punkten in der

a) euklidischen Metrik,

b) der Summenmetrik,

c) und der Maximumsmetrik.

Vergleiche diese verschiedenen Abstände der Größe nach.

Aufgabe 35.28. (2 Punkte)

Entscheide, ob für vier Punkte A, B, C, X in der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ stets die Abschätzung

$$d(A, B) + d(B, C) \leq d(A, X) + d(B, X) + d(C, X)$$

gilt.

Aufgabe 35.29. (6 (2+2+2) Punkte)

a) Definiere auf der Einheitssphäre, also der Kugeloberfläche

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\},$$

die „geodätische Metrik“, bei der der Abstand zweier Punkte $P, Q \in S$ durch die Länge der kürzesten Verbindung auf der Oberfläche gegeben ist.

b) Zeige, dass es sich um eine Metrik handelt.

c) Welchen Abstand besitzen die Punkte $(0, 0, 1)$ und $(1, 0, 0)$ in der euklidischen und in der geodätischen Metrik?

Die kürzeste Verbindung liegt auf dem Großkreis, den man enthält, wenn man die Kugeloberfläche mit der durch $P, Q, (0, 0, 0)$ gegebenen Ebene schneidet (wann definieren diese drei Punkte keine Ebene?). Die Formel für den Kreisumfang und die Tatsache, dass der Winkel proportional zur Bogenlänge ist, darf verwendet werden.

Aufgabe 35.30. (3 Punkte)

Für welche Punkte (t, t^2) der Standardparabel wird der Abstand zum Punkt $(0, 1)$ minimal?

Aufgabe 35.31. (3 Punkte)

Es seien P und Q zwei verschiedene Punkte im $\mathbb{R}^2$ und G die dadurch definierte Gerade. Zeige, dass G abgeschlossen in $\mathbb{R}^2$ ist.

Aufgabe 35.32. (4 Punkte)

Sei (M, d) ein metrischer Raum und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M, die gegen $x \in M$ konvergiere. Es sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine weitere Folge derart, dass die Abstände $d(x_n, y_n)$ eine Nullfolge in $\mathbb{R}$ sei. Zeige, dass auch $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x konvergiert.

Abbildungsverzeichnis