自學自習
記入式參考書
幾何
全

理學博士　山口鋭之助
文學博士　藤岡勝二
監修

東京
吉田書店出版部

學生諸君の最も厭ふところのものは、時間の濫費と腦力の徒勞とである、故に參考書として世に提供さるべきものは、須く此等の點に甚大の注意を拂ひたるものでなければならぬ、本書は此の二條件をモットーとして編述されたもので、即ちノウト代用記入に依れる最も進步的のものたるを誇り得ると信ずる。

本書は中學校、師範學校、高等女學校並に實業學校生徒諸君の豫習用、復習用たるは勿論、官立私立專門學校入學受驗者の參考書となり、兼ねて專門學校生徒諸君及び中等學校教員諸氏の備忘錄としても頗る適切なる編纂法に則りたるものである。

本書の特長として擧ぐべきものは、記入欄をもうけたこと及び載錄すべき教材の蒐集に深く注意を傾け、現今廣く行はるゝ教科書中の教材は言ふ迄もなく、最新にして有益なる事項は悉く之を採擇し、各編各章の排列に就きては能く教科書との連絡を圖れる事等である。

簡明にして要領を得たる記入式に依る本書は、豫習復習及び受驗參考用に資せんため、最近十ヶ年間の官公立各專門學校の入學試驗問題を適所應所に挿入して解答を附してあるから、讀者は本書に依つて基礎的知識を養ふと共に、應用的腦力を研くことが出來る。

編者誌

幾　何

上　巻

頁

書込欄

幾何

上卷

第一編　緒　論

1. 幾何學ノ意義

幾何學トハ物ノ形，大サ及ビ位置ニ關スル眞理ヲ論ズル學ナリ。

2. 定義トハ如何

定義トハ各學科ニヨリテ異ル術語アレバ其ノ術語ヲ說明確定シタルモノヲ云フ。

3. 體，面，線，點ノ定義

體トハ物體ノ位置，大サ，形狀ニツキテノ共通事柄ノミニツキ考ヘタルモノナリ。

面トハ體ト體外トノ空間ノ境界ヲ云フ。

線トハ面ト面トノ交ル所，又ハ面ノ境界ヲ云フ。

點トハ線ト線トノ交ル所，又ハ線ノ境界ヲ云フ。

4. 直線及ビ直線ニ關スル定義

直線トハ點ト點トヲ結ブ線ノ最短距離ヲ云フ。

無限直線トハ限リ無ク長クシテ兩端ヲ有セザル直線ヲイフ。

有限直線トハ無限直線ノ一部分ニシテ兩端ヲ有スル直線ヲイフ。有限直線ハ又線分トモ稱ス。

書込欄

半直線トハ直線ノ一端ノミヲ有スル，卽チ無限直線ヲ或ル一點ニ於テ二ツニ分チ，其ノ一方ノミヲ考フルトキニコレヲ半直線ト云フ。

延長線トハ有限直線又ハ半直線ヲ引キ延シタル部分ノ直線ヲ云フ。

折線トハ二ツ以上ノ有限直線ノ連續ニヨリテ生ジタル場合ヲ云フ。

注意 單ニ直線ト云フトキニハ有限直線，無限直線，半直線ノ三ツノ中何レカナルモノナリ。

5. 平面トハ如何

一ツノ面上ニ於テ任意ノ二點ヲ通ル直線ガ全ク其ノ上ニ在ルトキニ其ノ面ヲ平面ト稱ス。

6. 公理トハ如何

公理トハ證明ヲ待タズシテ眞ナリト認メラレル程度ノ簡單ナル眞理ヲ云フ。公理ヲ普通公理，幾何學公理ノ二ニ分ツ。

7. 普通公理トハ如何

普通公理トハ吾人ノ常識又ハ經驗ニヨリテ眞ナリト認メル事柄ニシテ例ヘバ次ノ如シ。

等量ノ各ニ等量ヲ以テ加，減シ又ハ等數ニテ乘,除スルモ相等シ．不等量ノ各ニ等量ヲ以テ加，減シ又ハ等數ニテ乘，除スルモ不等ニシテ尙ホ以前大ナリシモノガ大ナリ。

書込欄

8. 幾何學公理トハ如何

幾何學公理トハ幾何學ニ於テノミ證明ヲナサズシテ眞ナリト認定スル事柄ニシテ教科書ニ依リテ多少ノ相違アリト雖モ次ノ四種ヲ出デズ。

I 圖形ハ其ノ大サ及ビ形ヲ變セズ位置ヲ變ズルコトヲ得。

II 全ク重ネ合ハスコトヲ得ルモノハ相等シ。

III 二點ヲ過ギル直線ハ唯一ツアリ，而シテ唯一ツニ限ル。

公理(III)ヨリ次ノ事實ヲ知リ得。

1. 二點ヲ共有スル諸直線ハ全ク相合ス。
2. 全ク相合セザル二直線ハ二點ニテ出合ハズ。

IIII 一點ヲ過ギ一直線ニ平行ナル直線ハ唯一ツアリ，而シテ唯一ツニ限ル。

9. 平面圖形トハ如何

同一ノ平面上ニ於テ點，線ノ單獨又ハ集合シタルモノヲ云フ。

10. 定理トハ如何

定理トハ既ニ眞ナリト認メラレタル事柄ヨリ其ノ眞ナルコトヲ證明シ得ラルルコトヲ云フ。

11. 系トハ如何

系トハ公理，定理又ハ定理ノ證明中ヨリ容易ニ推定シ得ベキ重要ナル事柄ヲ云フ。

書
込
欄

12. 假設及ビ終結トハ如何

幾何學上ニ在ル事柄ハ必ズ假說ト終結トノ二部分ニ分ツコトヲ得。假設トハ原因ヲ述ベ，終結トハ其ノ結果ヲ表ハスモノナリ。

例ヘバ同一面上ノ任意ノ二點ヲ過ギル直線ガ全ク其ノ面上ニ在レバ其ノ面ハ平面ナリ。

上例ニ於テ「同一面……在レバ」マデヲ假設ト云ヒ，「其面」以下ヲ終結ト云フ。

13. 定理又ハ問題ノ逆トハ如何

或事柄ノ假設ヲ終結トシ，終結ヲ假設トシタル場合ヲ前ノ逆ト云フ。

書
込
欄

第二編 直線及直線形

第一 角及垂線

1. 角ニ關スル定義

(A) 角トハ一點ヨリ引キタル二ツノ直線ニヨリテ作ラルヽモノヲ云ヒ，一點ヲ頂點ト稱シ，二線ヲ邊ト云フ。

(B) 共軛角トハ一點ヨリ引キタル二直線ニヨリテナス角ハ二ツアルベシ，其ノ一ツヲ他ノ角ノ共軛角ト云フ。

(C) 優角ト劣角，一點ヨリ引キタル二直線ニテ作ル二角中，大ナル角ヲ優角，小ナル角ヲ劣角ト云フ。

(D) 接角トハ一邊ト頂點トヲ共有シテ共有邊ノ兩側ニ在ル二角ヲ云フ。

(E) 平角トハ二邊ガ一直線ヲナストキノ角ヲ云フ。

(F) 直角トハ一直線上ノ一點ヨリ一ツノ直線ヲ引キ夫レヲ共有邊トスル接角ガ相等シキトキ其ノ一角ヲ云フ。

(G) 鈍角ト鋭角，直角ヨリ大ニシテ且ツ二直角ヨリ小ナル角ヲ鈍角，直角ヨリ小ナル角ヲ鋭角ト云フ。

(H) 餘角ト補角，二ツノ角ノ和ガ一直角ナルト

書

込

欄

キ一ツヲ他ノ餘角，二ツノ角ノ和ガ二直角トナルトキハ一ツヲ他ノ補角ト云フ。

(I) 對頂角トハ二直線ガ交リテナス四ツノ角ノ中ノ向ヒ合フ二角ヲ云フ。

2. 次ノ題ニ於テ定理，系及ビ問題ヲ區別シ，問題ノミ證明セヨ。

(A) 平角ハ相等シ

(B) 平角ハ二直角ニ等シ

(C) 直角ハ相等シ

(D) 等角ノ餘角ハ相等シ

(E) 等角ノ補角ハ相等シ

(F) 對頂角ハ相等シ

解 (A) 及ビ (F) ハ定理

(B) 及ビ (C) ハ系ニシテ何レモ (A) ヨリ證明シ得ルモノナリ

(D) 及ビ (E) ハ問題ナリ

(D) 問題ノ說明，角Aト角Bトガ等角ニシテ，角Aノ餘角ヲC，角Bノ餘角ヲDトスレバ，角Cハ角Dニ等シ

假設 $\angle A=\angle B$ $\angle A+\angle C=\angle R$(直角)

$\angle B+\angle D=\angle R$

終結 $\angle C=\angle D$

證明 直角ハ相等シト云フ定理ヨリ

$\angle A+\angle C=\angle B+\angle D$

書

込

欄

然ルニ $\angle A=\angle B$ 故ニ $\angle C=\angle D$

(E) 問題ノ說明

假設 $\angle A+\angle B$ $\angle A+\angle C=2\angle R$

$\angle B+\angle D=2\angle R$

終結 $\angle C=\angle D$

證明 平角ハ相等シ，及ビ平角ハ二直角ニ等シヨリ

$\angle A+\angle C=\angle B+\angle D$

然ルニ $\angle A=\angle B$ 故ニ $\angle C=\angle D$

3. 接角ニ關スル主要ナル定理ヲアゲヨ。

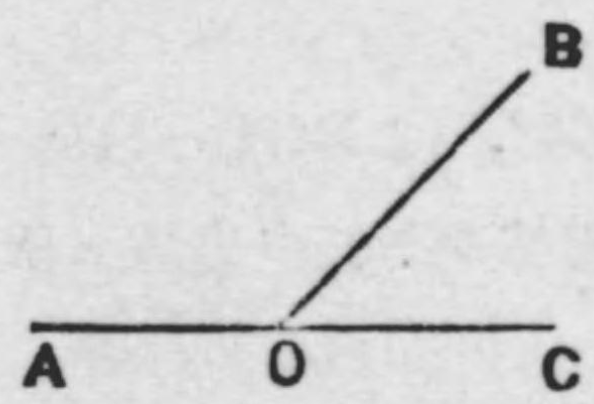
(A) 一直線上ノ一點ヨリ半直線ヲ引キテ作レル接角ノ和ハ二直角ニ等シ

(B) 一點ヨリ三ツノ半直線ヲ引キテ作ル接角ノ和ガ二直角ナルトキハ其ノ兩端ノ半直線ハ同一直線ナリ

(B) 定理ハ (A) 定理ノ逆ナリ

(C) 直線上ノ一點ヲ過ギ其ノ直線ニ唯一ツノ垂線ヲ引クコトヲ得ベシ

4. 前題ノ (B) ヲ證明セヨ。



假設 一點OヨリA半直線OA, OB, OCヲ引キ，$\angle AOB+\angle BOC=\angle 2R$

終結 AO, OC ハ一直線ヲナス

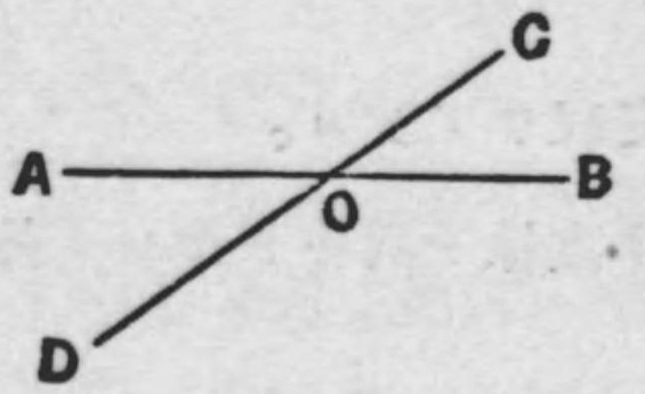
書込欄

證明 $\angle AOB+\angle BOC=\angle AOC$

然ルニ $\angle AOB+\angle BOC=\angle 2R$

$\therefore$ $\angle AOC=2R$ 由ツテ AO, OC ハ一直線ヲナス

5. AB 直線上ノ任意ノ點 O ヨリ，直線ノ兩側ニ各 OC, OD ノ二直線ヲ引キ，$\angle AOD$ ト $\angle COB$ トガ等シケレバ OC, OD ハ一直線ヲナス。



假設 AOB ハ一直線 $\angle AOD=\angle COB$

終結 OC, OD ハ一直線

證明 AOB ガ一直線ナル故

$\angle AOC+\angle COB=2\angle R$

然ルニ $\angle AOD=\angle COB$

$\therefore$ $\angle AOC+\angle AOD=2\angle R$ $\therefore$ $\angle COD=2\angle R$

由ツテ OC, OD ハ一直線ナリ

6. 相交ル二直線ガナス四ツノ角ノ中ノ一ツガ $65°$ ナルトキ，其ノ三ツ角ノ大キサ如何。

假設 AB, CD ノ二直線ヲ O ニ於テ交ラシム $\angle COA=65°$

終結 $AOD=115°$, $\angle BOD=65°$, $\angle BOC=115°$

證明 $\angle AOC=65°$ 對頂角ハ相等シト云フ定理ニ依リテ $\angle BOD=65°$

然ルニ $\angle AOC+\angle BOC=2\angle R=180°$

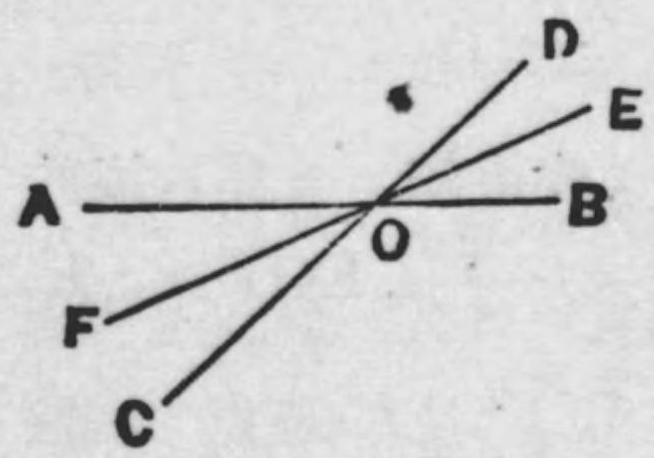
書込欄

$\therefore$ $180°-65°=\angle BOC=115°$

$\angle BOC=115°=\angle AOD$ ($\because$ 對頂角ハ相等シ)

7. 對頂角ノ各二等分線ハ一直線ヲナス。

假設 AB, CD ガ O ニ於テ交リ



$\angle AOC$, $\angle BOD$ ノ二等分線ヲ夫々 OE, OF トス

終結 OE, OF ハ一直線ナリ

證明 $\angle AOC=\angle BOD$ ($\because$ 對頂角)

然ルニ $\angle EOB=\frac{1}{2}\angle BOD$, $\angle AOF=\frac{1}{2}\angle AOC$

$\therefore$ $\angle EOB=\angle AOF$

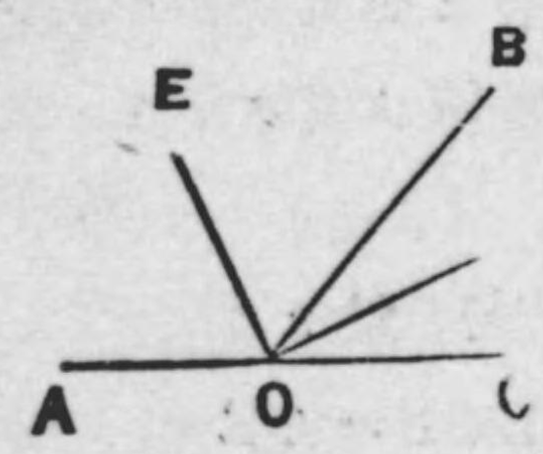
然ルニ AOB ハ一直線ナル故ニ $\angle AOE+\angle EOB=2\angle R$

依ツテ $\angle AOE+\angle AOF=2\angle R$

故ニ OF, OE ハ一直線ヲナス

8. 一直線上ノ任意ノ一點ヨリ一ツノ直線ヲ引クトキニ生ズル二ツノ接角ノ二等分線ハ互ヒニ垂直ナリ。

假設 AC 直線上ノ一點 O ヨリ OB 直線ヲ引キ



$\angle AOB$, $\angle BOC$ ノ二等分線ヲ夫々 OE, OF トス

終結 $OE\perp OF$

證明 $\angle AOB+\angle BOC=2\angle R$

書込欄

然ルニ $\angle EOB=\frac{1}{2}\angle AOB,\ \angle BOF=\frac{1}{2}\angle BOC$

$\therefore\ \angle EOB+\angle BOF=\frac{1}{2}\angle AOB+\frac{1}{2}\angle BOC$

$\therefore\ \angle EOF=\frac{1}{2}(\angle AOB+BOC)=\angle R$

依テ $OE\perp OF$ ナリ

9. OA, OB, OC ノ三ツノ半直線ニテ爲ス接角ノ二等分線ヲ夫々 OE, OF トスレバ $\angle EOF=\angle R$ ナルトキ OA' OC ハ一直線ヲナス。

假設 $\angle AOE=\angle EOB,\quad \angle BOF=\angle FOC$
$\angle EOF=\angle R$

圖ハ 8 ノ圖ヲ用ニ

終結 AO, OC ハ一直線ナリ

證明 $\angle EOF=\angle R\quad \therefore\ \angle EOB+\angle BOF=\angle R$

然ルニ $\angle EOB=\frac{1}{2}\angle AOB,\ \angle BOF=\frac{1}{2}\angle BOC$

$\therefore\ \frac{1}{2}(\angle AOB+\angle BOC)=\angle EOB+\angle BOF=\angle R$

依ツテ $\angle AOB+\angle BOC=2\angle R$

從ツテ AO, OC ハ一直線ナリ

10. 一直線ガ他ノ一直線ニ出會ヒテ生ジタル二ツノ接角頂ヲ過ギ一角ノ二等分線ニ垂線ヲ引クトキハ此垂線ハ他ノ角ヲ二等分ス。

假設 直線 CD ガ直線 AB ト交ル點ヲ O トシ,
$\angle AOE=\angle COE\quad \angle EOF=\angle R$

書込欄

終結 $\angle COF=\angle BOF$

證明 $\angle EOC+\angle COF=EOF=\angle R$ 〔假設〕
$\angle AOE+\angle BOF=\angle AOB-\angle EOF$
$=2\angle R-\angle R=\angle R$

$\therefore\ \angle AOE+\angle BOF=\angle EOC+\angle COF$

然ルニ $\angle AOE=\angle COE\quad \therefore\ \angle COF=\angle BOF$

11. 相交ル二直線ガナス四ツノ角ヲ夫々二等分スル四ツノ直線ハ互ヒニ垂線トナル。

假設 直線 AB, CD ハ互ヒニ一點 O ニ於テ交ル,
$\angle AOC,\ \angle BOC,\ \angle BOD$, AOD ノ夫々ノ二等分線ヲ OE, OH, OF, OG トス

終結 $OG\perp OF,\quad OE\perp OG,\quad OH\perp OF,\quad OF\perp OG$

證明 問題 7 ニ依ツテ EOF, GOH ハ各々一直線ヲナス

故ニ問題 8 ニ依ツテ $OG\perp OF$

同様ニ $OH\perp OF,\ OE\perp OG,\ OF\perp OG$ ナリ

12. 一枚ノ紙ノ隅ヲ斜ニ折リ返セバ折レタル線ノ二ツノ部分ノ爲ス角ヲ二等分スル直線ハ折目ト直角ヲ爲ス。

假設 OF ハ紙ノ折リ目, OCF ノ一隅ヲ折リ返ヘシ, OBF トナシ, 折レタル線ヲ AO, BO トシ,
OE ハ $\angle AOB$ ノ二等分線トス

終結 OE ハ OF ト直角ヲナス

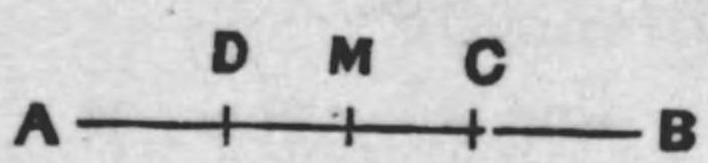
證明 8 ト同ジ

書

込

欄

13. M ヲ中點トスル有限直線 AB ノ上ノ任意ノ一點ヲ C トシ, $CA>CB$ ナラバ $CM=\frac{1}{2}(CA-CB)$



假設 $AM=MB$

$AC>CB$

總結 $MC=\frac{1}{2}(CA-CB)$

證明 點 D ヲ設ケテ $MC=MD$ トスレバ

$AM=MB$ ナル故ニ $AD=CB$

從ッテ $AC=AD+DC=BC+DC$

$\therefore\ AC-BC=DC=2MC$

$\therefore\ \frac{1}{2}(AC-BC)=MC$

14. 角 AOB ノ二等分線ヲ OM トシ, OC ハ $\angle AOB$ ヲ分ツ任意ノ直線トス. 若シ $\angle COA>\angle COB$ ナルトキハ

$\angle COM=\frac{1}{2}(\angle COA-\angle COB)$

假設 $\angle AOM=\angle BOM$, $\angle AOC>\angle COB$

總結 $\angle MOC=\frac{1}{2}(AOC-BOC)$

證明 OD ヲ引キテ $\angle MOC=\angle MOD$ トス

$\angle AOM=\angle BOM$ ナル故ニ

$\angle AOD=\angle CCB$

從ッテ $\angle AOC=AOD+\angle DOC=\angle BOC$

$+\angle DOC=\angle BOC+2\angle MOC$

書

込

欄

$\therefore\ \frac{1}{2}(\angle AOC-\angle BOC)=\angle MOC$

第二 三角形

1. 多角形ニ關スル定義。

多角形トハ線分ニテ圍マレタル圖形ニシテ其ノ各線分ヲ邊ト云フ

周トハ邊ノ長サノ和ヲ云フ

內角トハ邊ノナス圖形內ノ角ヲ云フ

外角トハ一邊ト其ノ隣邊ノ延長トノナス角ヲ云フ

頂點トハ二隣邊ニテナス角頂ヲ云フ

對角線トハ相隣ラザル二頂點ヲ結ブ直線ヲ云フ

三邊形, 四邊形又ハ三角形, 四角形等ハ其ノ邊數ニ依ッテ云フ

多角形ハ通常ハ何レノ一內角モ二直角ヨリ小ナルモノトス

正多形角トハ各邊相等, 各內角相等ノ一條件ノ完備セルモノヲ云フ

2. 三角形ニ關スル定義。

三角形ヲ細別スレバ次ノ各稱アリ。

(A) 銳角三角形 各內角ガ銳角ナルモノ

(B) 鈍角三角形 一內角ガ鈍角ナルモノ

(C) 直角三角形 一內角ガ直角ナルモノヲ云ヒ、

書込欄

直角ノ對邊ヲ斜邊ト云フ

(D)　二等邊三角形　二邊ガ等シキモノヲ云ヒ，不等ナル第三邊ヲ底邊，其ノ對角ヲ頂角ト云フ

(E)　正三角形　等邊，等角ナルモノヲ云フ

3. 三角形ニ關スル主要ナル定理。

イ．二等邊三角形ノ定理。

(A)　二邊等シケレバ其ノ對角等シ

(B)　二角等シケレバ其ノ對邊等シ (Aノ逆)

(C)　等邊又ハ等角ナル三角形ハ正三角形ナリ

ロ．合同(全等)ノ定理。

(A)　合同トナル三大定理

(甲)　二邊，夾角，相等

(乙)　二角，夾邊，相等

(丙)　三邊，相等

(B)　二邊，第一邊ノ對角，相等，他邊ノ對角補角セズ

(C)　直角三角形ノ合同

(甲)　斜邊，一角，相等

(乙)　斜邊，他一邊，相等

ハ．邊ト角ニ關スル定理

(A)　二邊ノ和ハ第三邊ヨリ大ナリ

(B)　二邊ノ差ハ第三邊ヨリ小ナリ

(C)　大邊ノ對角ハ大ナリ

書込欄

(D)　大角ノ對邊ハ大ナリ (Cノ逆)

(E)　兩三角形ニ於テ二邊相等，夾角不等ナルトキ大夾角ノ對邊ハ大ナリ

(F)　Eノ逆

ニ．角ニ關スル定理

(A)　內角ノ和ハ二直角ニ等シ

(B)　一外角ハ其ノ內對角ノ和ニ等シ

ホ．線外ノ一點ヨリ夫レニ引ク線ノ定理

(A)　垂線ハ最短ナリ

(B)　斜線ノ足ヨリ垂線ノ足マデノ距離

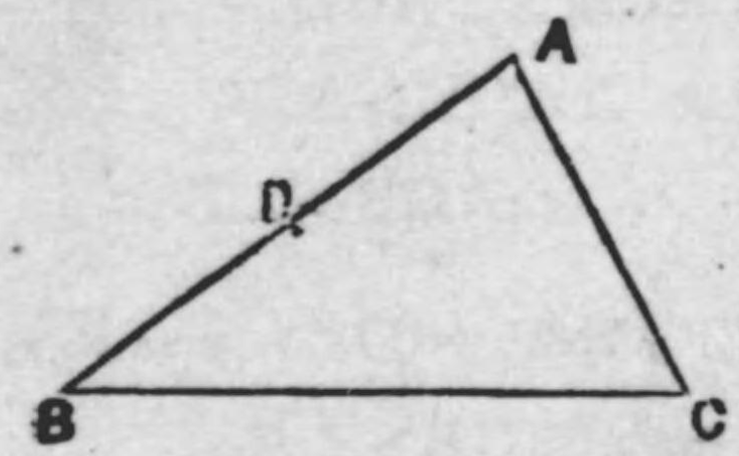
(イ)　等シケレバ斜線ハ等シ

(ロ)　大ナル方ノ斜線ハ大ナリ

(ハ)　等長ノ斜線ハ相等シ (イノ逆)

(ニ)　不等ノトキハ大ナル斜邊ハ大ナリ (ロノ逆)

4. 三角形ノ二邊ノ差ハ第三邊ヨリ小ナリ。



假設　所要ノ三角形ヲ ABC トシ，$AB>AC$ トス

終結　$AB-AC<BC$

證明　$\triangle ABC$ ニ於テ $AB<BC+AC$

各々ヨリ等シク AC ヲ引ケバ

$AB-AC<BC$

又 $AB<AC$ ナルトキニハ

$BC<AB+AC$

書込欄

$BC-AC<AB$

5. 四邊形ノ周ハ一對角線ノ二倍ヨリモ大ナルコトヲ證セヨ。

假設 四邊形 ABCD ノ對角線ヲ BD トス

終結 $2BD<AB+BC++CD+DA$

證明 △ABD ニ於テ $BD<AB+AD$

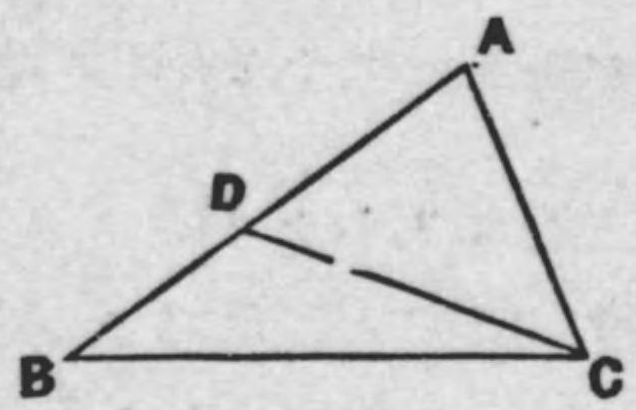
△CBD ニ於テ $BD<BC+CD$

$2BD<AB+BC+AD+CD$

6. 三角形ノ二邊不等ナルトキハ大邊ノ對角ハ小邊ノ對角ヨリモ大ナリ。

假設 △ABC ニ於テ $AB>AC$ トス

終結 $\angle ACB>\angle B$



證明 AB 邊上ニ $AD=AC$ ニトリ CD ヲ結ベバ

$\angle ADC=\angle ACD$

$\angle ACB>\angle ACD$

由テ $\angle ACB>ADC$

又 $\angle ADC>\angle ABC$ $\therefore$ $\angle ACB>\angle B$

7. △ABC 底邊ノ BC ノ中點ヲ D トスレバ

(I) $AB>AC$ ナルトキ $\angle ADB>\angle R$

(II) $\angle ADB>\angle R$ ナルトキ $AB>AC$

(I) **假設** $AB>AC$

終結 $\angle ADB>\angle R$

證明 △ADB, △ADC ニ於テ

書込欄

$BD=CD$ $AD=AD$ $AB>AC$

$\therefore$ $\angle ADB>\angle ADC$

然ルニ $\angle ADB+\angle ADC=2\angle R$

$\therefore$ $\angle ADB>\angle R$

(II) **假設** $\angle ADB>\angle R$

終結 $AB>AC$

證明 BDC ガ一直線ナル故ニ $\angle ADB+\angle ADC=2\angle R$

然ルニ $\angle ADB=\angle R$ $\therefore$ $\angle ADB>ADC$

△ADB, △ADC ニ於テ

$BD=DC$ $AD=AD$ $\angle ADB>\angle ADC$

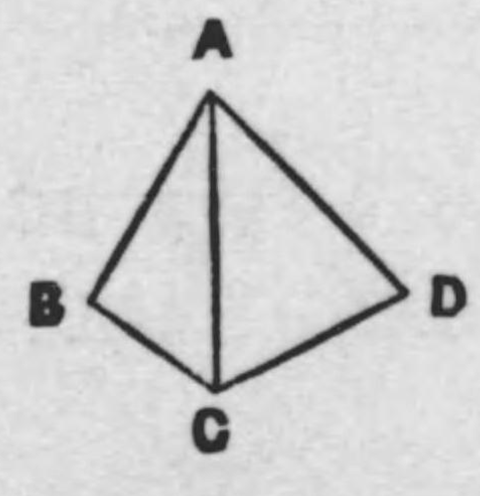
$\therefore$ $AB>AC$

8. 四邊形 ABCD ニ於テ邊 AD ハ最大ニシテ邊 BC ハ最小ナルトキ角 ABC ハ角 ADC ヨリモ大ナリ。(海機)

又角 BCD ハ角 BAD ヨリ大ナリ。

假設 AB, BC, CD, DA ノ四邊中 AD ハ最大邊 BC ハ最小邊トス

終結 $\angle ABC>\angle ADC$ $\angle BCD>\angle BAD$



證明 對角線 AC ヲ作リテ △ABC ト △ACD ニ分ツ

△ABC ニ於テ

$AB>BC$ $\therefore$ $\angle BCA>\angle BAC$

△ACD ニ於テ

書込欄

$AD>CD$　∴ $\angle ACD>CAD$

∴ $\angle BAC+\angle CAD>\angle BCA+\angle ACD$

∴ $\angle BAD<\angle BCD$

又對角線 BD ヲ作リ △ABD ト △CBD トニ分テバ

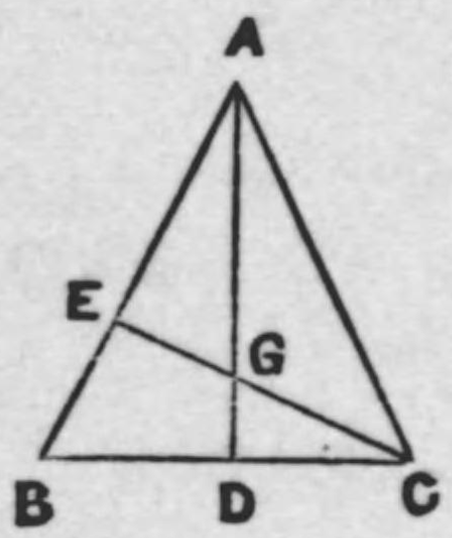
$$\begin{array}{ll} \triangle BCD ニ於テ & \angle BDC<\angle CBD \\ \triangle ABD ニ於テ & \angle BDA<\angle ABD \\ \hline & \angle BDC+\angle BDA<\angle CBD+\angle ABD \end{array}$$

∴ $\angle ADC<\angle ABC$

9. 二等邊三角形 ABC ノ底邊 BC ノ一端 C ヨリ AB ヘ垂線 CE ヲ下セバ ∠BCE ハ ∠BAC ノ半分ナルコトヲ證セヨ。

假設　△ABC ニ於テ $AB=AC$, $CE\perp AB$

頂角ノ二等分線ヲ AD トス



總結　$\angle BCE=\angle BAD=\frac{1}{2}\angle A$

證明　AD ト CE トノ交點ヲGトス

△AEG ト △CGD ニ於テ

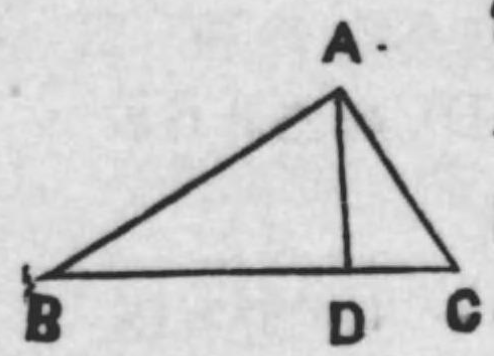
$\angle CGD=\angle AGE$　$\angle E=\angle D=\angle R$

三角形ニ於テ二角相等シキ故ニ殘ル一角モ亦相等シ

∴ $\angle BCE=\angle BAD$

10. 直角三角形 ABC ノ直角頂 A ヨリ斜邊 BC ニ下セル垂線ヲ AD トスレバ $\angle BAD=\angle ACD$, $\angle CAD=\angle CBA$ ナリ。

書込欄



假設　△ABC ニ於テ $\angle A=\angle R$

$AD\perp BC$

總結　$\angle BAD=\angle ACD$

$\angle CAD=\angle ABD$

證明　$\angle A=\angle R$　$\angle ADC=\angle R$

∴ $\angle BAC=\angle DAC+\angle DCA$

∴ $\angle BAD+CAD=\angle DAC+DCA$

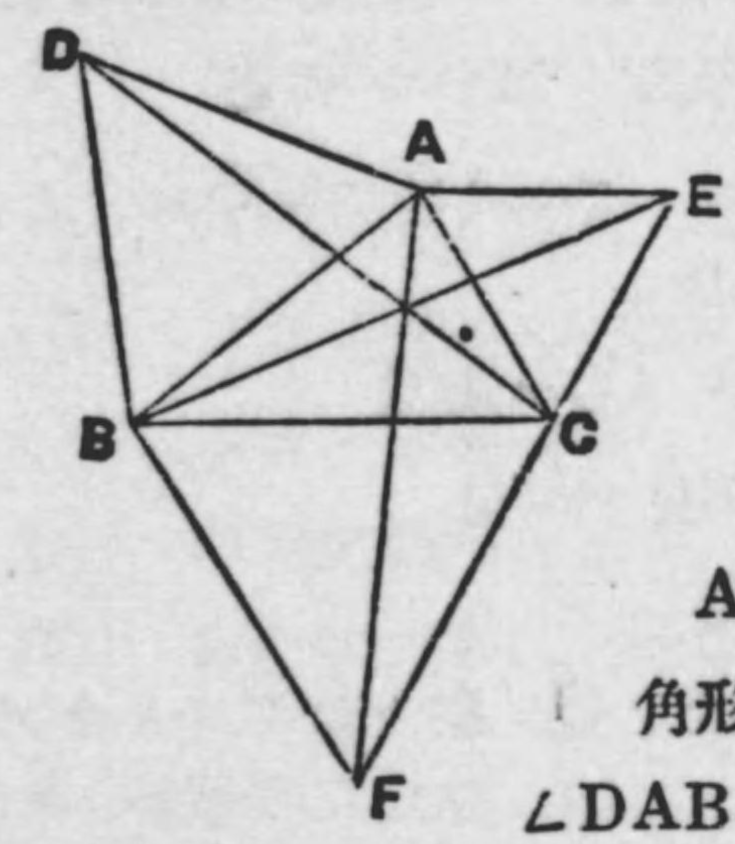
共通ナル ∠CAD ヲ兩方ヨリ減ズレバ

$\angle BAD=\angle DCA$

同樣ニシテ $\angle CAD=CBA$ ナルコトヲ證シ得

11. △ABC ノ各邊上ニ正三角形 ABD, ACE, BCF ヲ畫ケバ CD, BE, AF ノ各直線ハ相等シキコトヲ證セヨ。(神商．海經)

假設　△ABC ノ各邊上ノ正三角形ヲ ABD, ACE, BCF トス



總結　$CD=BE=AF$

證明　△ADC ト △ABE トニ於テ

$AD=AB$(∵ △ABD ハ正三角形)

$AE=AC$ (∵△AEC ハ正角形)

$\angle DAB=\angle EAC=60°$

書込欄

兩方ニ $\angle BAC$ ヲ加ヘテ

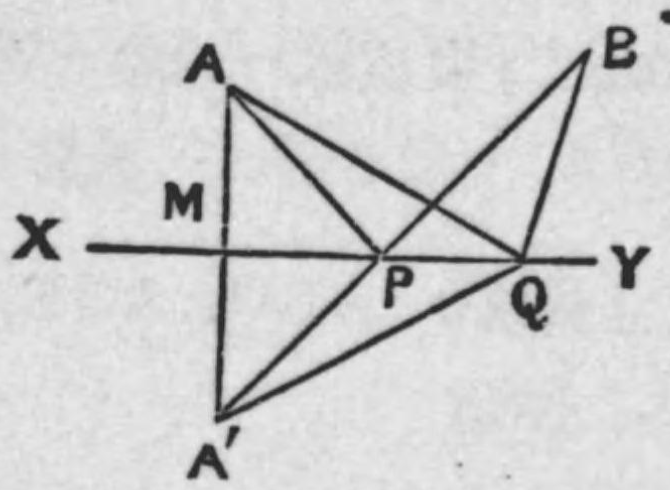
$\angle DAC=\angle EAB$ $\triangle ADC\equiv\triangle ABE$

$\therefore$ $CD=BE$

同様ニシテ $CD=BE=AF$ ナルコトヲ證シ得

12. 定直線 XY ノ同側ニ定點 AB アリ, XY 上ノ點 P ニ於テ $\angle APM=\angle BPQ$ ヲナシテ結合スルトキ $AP+BP$ ハ他ノ XY 上ノ何レノ點ト結ブヨリモ最小ナリ。

假設 XY 直線ノ同側ニアル二定點ヲ A, B トシ AP, BP ヲ結ブ, XY 上ノ他ノ任意ノ點ヲ Q トシ AQ, BQ ヲ結ブ. $\angle APM=\angle BPQ$



終結 $AP+BP<AQ+BQ$

證明 BP ヲ延長シテ PA′ トス

$AA'\perp XY$, AA′ ヲ結ブ

$\angle APM=\angle BPQ=\angle A'PM$

又 $\angle AMP=\angle R=\angle A'MP$ MP ハ共通

$\therefore$ $\triangle APM\equiv\triangle A'PM$ $\therefore$ $AP=A'P$

$\therefore$ $AP+BP=A'P+BP$

A′Q ヲ結ベバ同様ニシテ $AQ=A'Q$

$\triangle A'BQ$ ニ於テ $A'B<BQ+A'Q$

$\therefore$ $AP+BP<AQ+BQ$

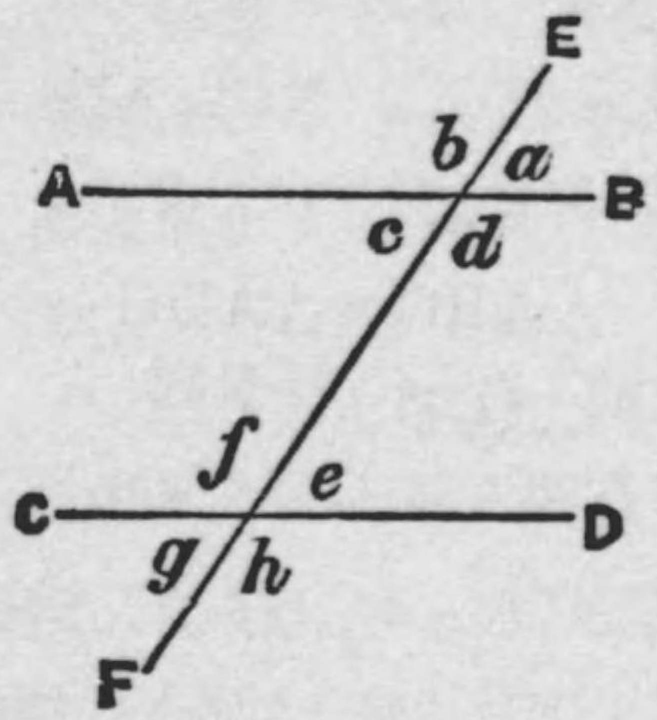
$\therefore$ $AP+BP$ ハ XY 線上ノ他ノ點ト結ブヨリ小ナリ

書込欄

第三 平行直線及平行四邊形

1. 平行直線ニ關スル主要ナル定義ヲ擧ゲヨ。

(A) 平行線トハ同一平面上アニリテ交ハラザル直線ヲ云フ



(B) 二ツノ平行線ガ第三直線ト交リテナストキニ

錯角トハ (c, e) (d, f) ヲ云フ

同位角トハ (a, e) (d, h) (b, f) (c, g) ヲ云フ

同傍ノ内角トハ (d, e) (c, b) ヲ云フ

外角トハ a, b, g, h ヲ云フ

2. 平行線ニ關スル定理

(A) 錯角相等シケレバ二線平行ス

(B) 二線平行スレバ錯角相等シ

(C) 同一直線ニ平行ナル二線ハ平行ス

3. 平行四邊形ノ性質ヲ述ベヨ。

(A) 二双ノ對邊平行ス

(B) 二双ノ對邊相等シ

(C) 二双ノ對角相等シ

(D) 對角線互ヒニ二等分ス

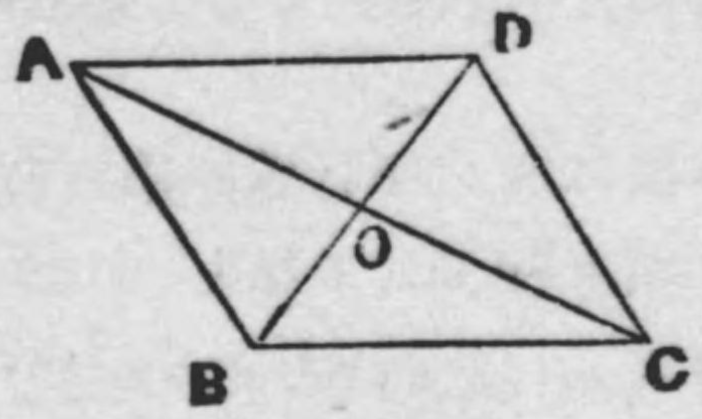
4. 四邊形ノ二双ノ對邊ガ相等シキトキ其ノ四邊形

書込欄

ハ平行四邊形ナリ。

假設　$AB=CD$,　$BC=DA$

終結　$AB \parallel CD$,　$BC \parallel DA$



證明　$\triangle ABC$ ト $\triangle ADC$ ニ於テ
$AB=CD$,　$BC=AD$
AC ハ共通
$\therefore$　$\triangle ABC \equiv \triangle ADC$

故ニ二等邊ノ對角 $\angle BAC=\angle ACD$
$\therefore$　$AB \parallel CD$
同樣ニ $BC \parallel DA$ ナリ

5. 四邊形ノ二双ノ對角ガ相等シキトキ其ノ四邊形ハ平行四邊形ナリ。

假設　$\angle ABC=\angle ADC$, $\angle BAD=\angle BCD$ (4. ノ圖ヲ用ユ)

終結　$AB \parallel CD$,　$BC \parallel DA$

證明　四邊形ノ內角ノ和ハ $4\angle R$
然ルニ對角相等シキ故ニ　$\angle ABC+\angle BAD=2\angle R$
$\therefore$　同傍內角ガ補角ヲナス故ニ　$BC \parallel AD$
同樣ニシテ $AB \parallel CD$

6. 四邊形ノ一双ノ對邊相等シク且ツ平行ナル場合其ノ四邊形ハ平行四邊形ナリ。

假設　$AB \parallel CD$, $AB=CD$ (4 ノ圖ヲ用ユ)

書込欄

終結　$ABCD$ ハ平行四邊形

證明　$\triangle ABC$ ト $\triangle ADC$ ニ於テ $AB \parallel CD$ ナル故ニ
$\angle BAC=\angle ACD$,　$AB=CD$,　$AC=BC$
$\therefore$　$\triangle ABC \equiv \triangle ADC$
$\therefore$　等邊ノ對角 $\angle BCA=\angle DAC$　$\therefore$　$BC \parallel DA$
假設ニヨリ $AB \parallel CD$ ナリ　故ニ $ABCD$ ハ平行四邊形ナリ

7. 四邊形ノ一双ノ對角相等シク且ツ一双ノ對邊ガ平行ナルトキハ其ノ四邊形ハ平行四邊形ナリ。

假設　$\angle ABC=\angle ADC$,　$AB \parallel CD$ (4ノ圖ヲ用ユ)

終結　$AB \parallel CD$,　$BC \parallel AD$

證明　$\triangle ABC$ ト $\triangle ADC$ ニ於テ
$AB \parallel CD$ ナル故ニ $\angle BAC=\angle ACD$
然ルニ $\angle ABC=\angle ADC$ ナル故ニ $\angle ACB=\angle CAD$
$\therefore$　$BC \parallel DA$
假設ニヨリ $AB \parallel CD$

8. 四邊形ノ對角線ガ互ニ二等分スルトキ其ノ四邊形ハ平行四邊形ナリ。

假設　AC, BD ヲ四邊形 $ABCD$ ノ對角線トシ，其交點ヲ O トス，$OA=OC$, $OB=OD$ (4ノ圖ヲ用ユ)

終結　$AB \parallel CD$,　$BC \parallel DA$

證明　$\triangle OAB$ ト $\triangle OCD$ ニ於テ

書込欄

$OA=OC$, $OB=OD$, $\angle AOB=\angle COD$

$\therefore$ $\triangle OAB \equiv \triangle OCD$

$\therefore$ $\angle ABO=\angle OCD$ 依ツテ $AB \parallel CD$

同様ニ $BC \parallel DA$

9. 平行四邊形ニシテ別名ヲ有スルモノ。

(A) 菱 形 各邊相等

(B) 矩 形 各内角直角

(C) 正方形 各邊相等，各内角直角

10. 三角形ノ中點ニ關スル定理

(A) 二邊ノ中點ヲ結ブ線分ハ底ニ平行シ且ツ底ノ半分ニ等シ

(B) 一邊ノ中點ヲ過ギ底ニ平行スル直線ハ他ノ邊ノ中點ヲ過ギル

11. 三角形ノ二邊ノ中點ヲ連ネタル線分ハ他ノ邊ニ平行シ且ツ其ノ半分ニ等シ。（山商）

假設 $\triangle ABC$ ノ二邊 AB, AC ノ各ノ中點ヲ D, E トス

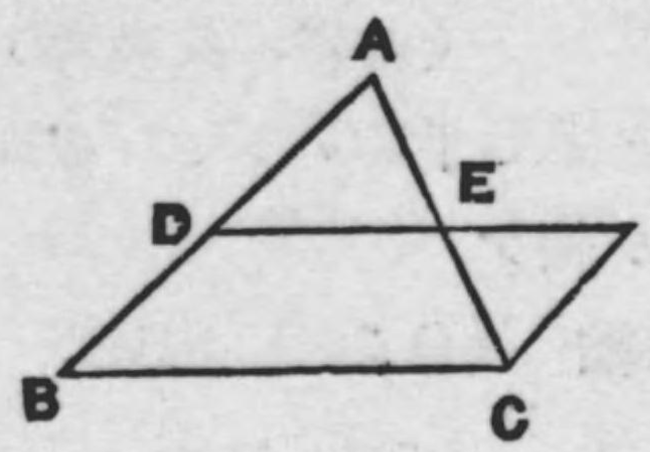
終結 $DE \parallel BC$, $DE=\frac{1}{2}BC$

證明 DE ノ線ヲ延長シテ $DE=EF$ ナラシメ CF ヲ結ブ

$\triangle ADE$ ト $\triangle ECF$ トニ於テ

$AE=CE$（假設）

書込欄



$DE=EF$（作圖）

$\angle AED=\angle CEF$（對頂角）

$\therefore$ $\triangle ADE \equiv \triangle CEF$

$\therefore$ $\angle DAE=\angle ECF$

$\therefore$ $CF \mathrel{\underline{\parallel}} AD$

然ルニ假設ニヨリ $AD=BD$

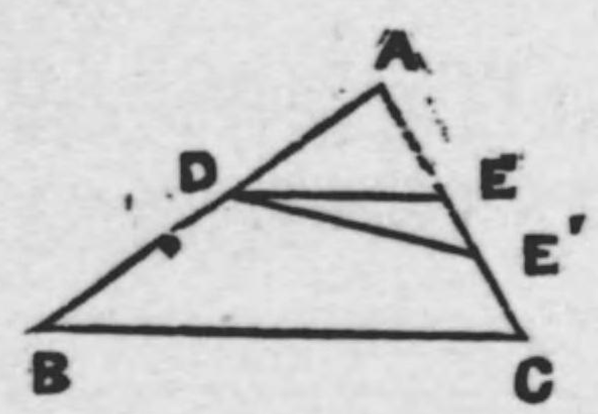
$\therefore$ $CF \mathrel{\underline{\parallel}} DB$

故ニ四邊形 $DBCF$ ハ平行四邊形ナリ

$\therefore$ $DE \parallel BC$

$DE=\frac{1}{2}DF=\frac{1}{2}BC$

12. 三角形ノ一邊ノ中點ヨリ底邊ニ平行ニ引キタル直線ハ他ノ一邊ヲ二等分ス。



假設 $\triangle ABC$ ノ AB 邊ノ中點ヲ D トシ $DE \parallel BC$ トス

終結 $AE=CE$

證明 AC ノ中點ヲ E' ト假定スレバ $DE' \parallel BC$

然ルニ假設ニヨリ $DE \parallel BC$

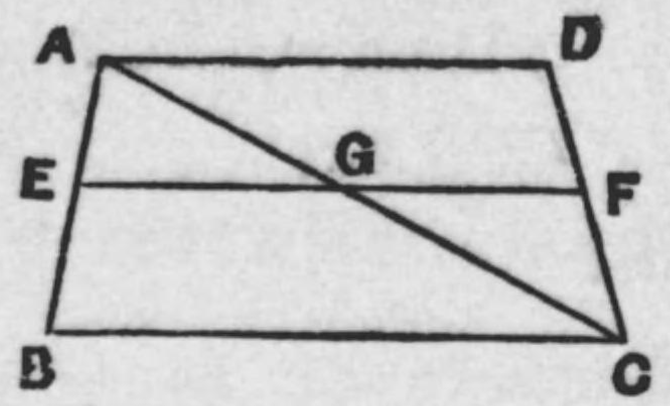
$\therefore$ DE' ト DE トハ幾何公理ニヨリ合致セザルヲ得ザルモノナリ，故ニ $AE=CE$

13. 梯形ノ平行セザル二邊ノ中點ヲ結ビタル直線ハ平行シタル二邊ニ平行シ，且ツ其ノ和ノ半ニ等シ。

書込欄

又ハ其ノ差ノ半ニ等シ。　　(海經. 女高師)

假設 梯形 ABCD ノ二邊ヲ AD∥BC トシ, AB, DC ノ中點ヲ E, F トシテ結ブ



終結 AD∥EF∥BC, $EF=\frac{1}{2}(AD+BC)$

證明 AC ノ中點ヲ G トシ EG, FG ヲ結ブ

△ABC ニ於テ EG∥BC

又 $EG=\frac{1}{2}BC$

△ACD ニ於テ GF∥AD

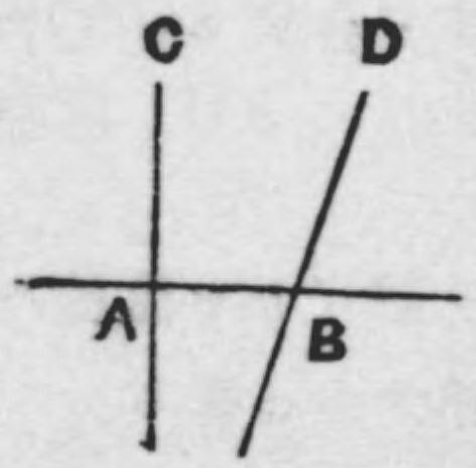
又 $GF=\frac{1}{2}AD$

然ルニ AD∥BC　AD∥GF, BC∥GE ナル故 EGF ハ一直線ヲナス

∴ EF∥BC　∴ $EF=EG+FC=\frac{1}{2}(BC+AD)$

差ノ場合ハ平行ナラザル二邊ガ平行線間ニ於テ交ツテ居ルトキ生ズ

14. 直線 AB ニ下セル垂線 CA ト斜線 DB トハ相交ハル。



假設 AB⊥CA, BD ハ AB ニ斜線

終結 AC ト BD トハ相交ル

證明 同一平面上ニ於テ交ハラザル直線ハ平行ナリ

書込欄

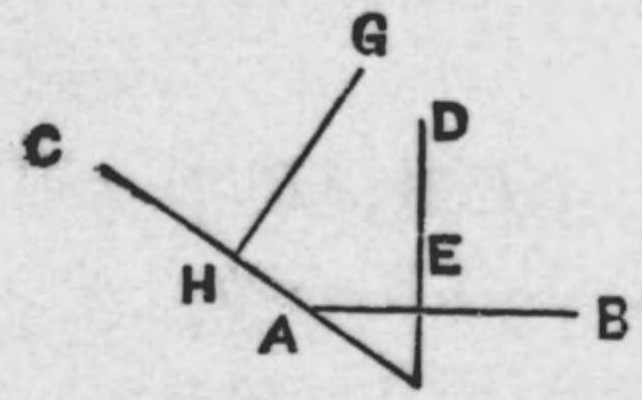
若シモ AC, BD ハ交ハラザルモノトスレバ

AC⊥AB, AC∥BD

然ルニ BD ハ AB ニ垂線ニ非ズ

依ツテ AC, BD ハ相交ハルベシ

15. 相交ル二直線ノ各ニ垂線ナル直線ハ相交ル。



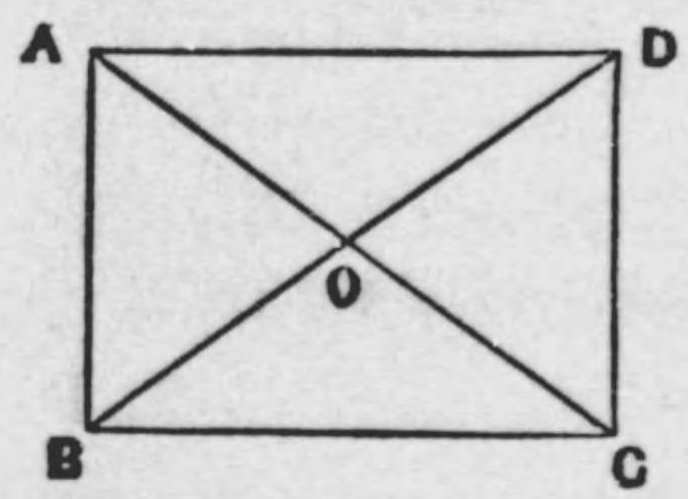
假設 AB, AC ガ A ニ於テ交リ AB⊥DE, AC⊥GA

終結 DE, GH ハ交ル

證明 AB ト AC トハ交リ DE⊥AB ナル故 AC トモ交ル

DE ハ CA ニ斜ニ交リ GH ハ CA ニ垂直ナリ, 依リテ前題ヨリ DE ト GH トハ交ルベシ

16. 平行四邊形ノ兩對角線ガ相等シケレバ矩形ナリ。(商船)



假設 ▱ABCD ノ對角線ヲ AC, BD トシ AC=BD

終結 ▱ABCD ハ矩形ナリ

證明 △ABC ト △DBC ニ於テ

AC=BD, AB=CD, BC ハ共通

書込欄

$\because\ \triangle ABC \equiv \triangle DBC$ （三邊相等）

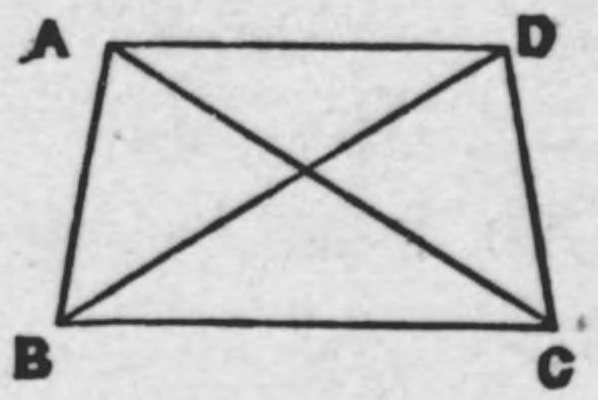
$\therefore\ \angle ABC = \angle DCB$

然ルニ $AB /\!/ CD$ 故ニ $\angle ABC + \angle DCB = 2\angle R$

$\therefore\ \angle ABC = \angle DCB = \angle R$

$\therefore$ ABCD ハ矩形ナリ

17. 兩對角線相等シク且ツ一双ノ對邊相等シキ四邊形ハ梯形ナリ。



假設 四邊形 ABCD ノ $BD = AC \quad AB = CD$

終結 ABCD ハ梯形ナリ

證明 $\triangle ABD$ ト $\triangle DAC$ トニ於テ

$BD = AC,\ AB = CD,$ AD ハ共通

$\therefore\ \triangle ABD \equiv ACD$

$\therefore\ \angle BAD = \angle ADC$

又 $\triangle ABC$ ト $\triangle DBC$ トニ於テ

$AC = BD,\ AB = CD,$ BC ハ共通

$\therefore\ \triangle ABC \equiv \triangle DBC$

$\therefore\ \angle ABC = \angle DCB$

依ツテ $\angle DAB + \angle ABC = \angle ADC + \angle DCB$

$= 2\angle R$

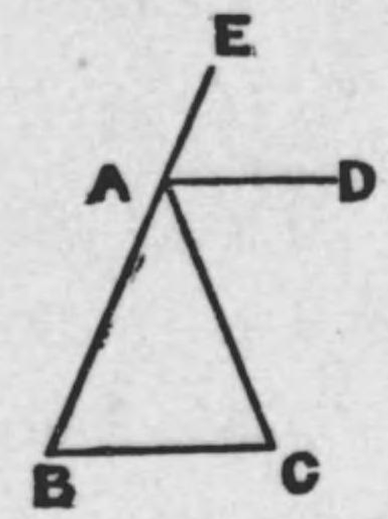
$\therefore\ AD /\!/ BC$

從ツテ ABCD ハ梯形ナリ

18. 二等邊三角形 ABC ノ頂點 A ヲ過ギ底邊 BC

書込欄

ニ平行スル直線 AD ハ頂角 A ノ外角ヲ二等分ス。



證明 $AD /\!/ BC$ ナル故ニ

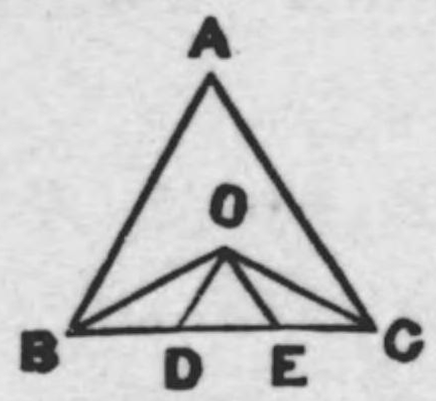
$\angle EAD = \angle ABC,\ \angle DAC = \angle ACB$

然ルニ二等邊三角形ナル故ニ $\angle B = \angle C$

$\therefore\ \angle EAD = DAC$

$\therefore$ AD ハ $\angle EAC$ ヲ二等分ス

19. 正三角形 ABC ノ底角 B, C ノ二等分線ノ交點 O ヲ過ギテ $AB /\!/ OD,\ AC /\!/ OF$ ヲ作ルトキ，$BD = DE = EC$ ナリ。



證明 $\angle OBD = \angle OBA$

$OA /\!/ AB$ ナル故 $\angle OBA = \angle BOD$

$\therefore\ \angle OBD = \angle BOD$ 依ツテ

$BD = DO$

同様ニ $CE = OE$

又 $\triangle ODE$ ハ $AB /\!/ OD,\ AC /\!/ OE$ ニシテ

$\triangle ABC$ ガ正三角形ナル故ニ矢張リ正三角形ナリ

$\therefore\ OD = DE = EO$

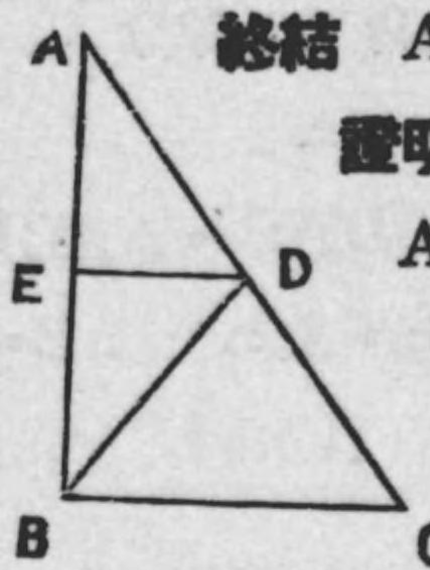
$\therefore\ BD = DE = DO = OE = CE$

$\therefore\ BD = DE = CE$

20. 直角三角形ノ斜邊ノ中點ハ各角頂ヨリ等距離ナリ。

假設 三角形 ABC ノ斜邊 AC ノ中點ヲ D

書込欄



總結 $AD=DB=DC$

證明 AB ノ中點ヲ E トスレバ

$AE=BE$, $AD=DC$ ナル故

$ED \parallel BC$

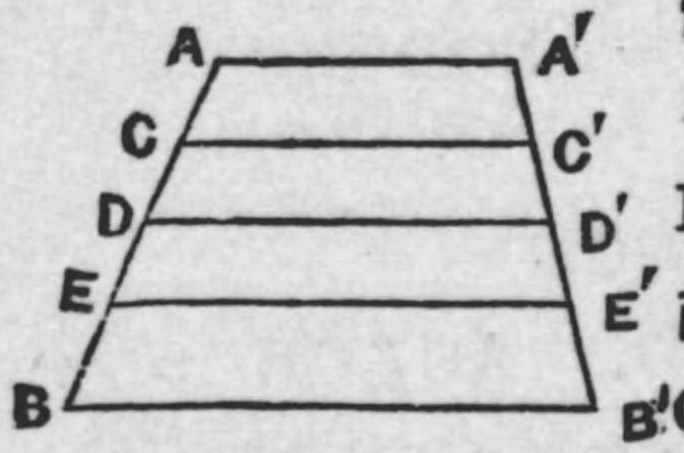
然ルニ $\angle ABC=\angle R$

$\therefore\ \angle AED=\angle R$

$\therefore\ \triangle DAB$ ニ於テ $AE=BE$, $DE\perp AB$

$\therefore\ DA=DB$

21. 線分ヲ任意ニ等分シタル分點又ハ兩端ヲ通過スル一組ノ平行線ガ一直線ヲ截ルトキ其ノ部分ハ等長ナリ。



假設 線分 AB ヲ C, D, E ニテ四等分 AA', CC', DD', EE', BB' ハ一組ノ平行線, 一直線 $A'B'$ トノ交點ヲ A', C', D', E', B' トス

總結 $A'C'=C'D'=D'E'=E'B'$

證明 $A'F \parallel AC$, $C'G \parallel CD$ トスレバ $ACA'F$ ハ平行四邊形ノ對邊ナル故ニ相等シ, 且ツ $A'F \parallel C'G$

然ラバ $A'F \# C'G$, $\angle A'FC'=\angle C'GD'$, $\angle C'A'F=\angle D'C'G$

依ツテ $\triangle A'FC' \equiv \triangle C'GD'$ $\therefore\ A'C'=C'D'$

同理ニヨリテ $C'D'=D'E'=E'B'$

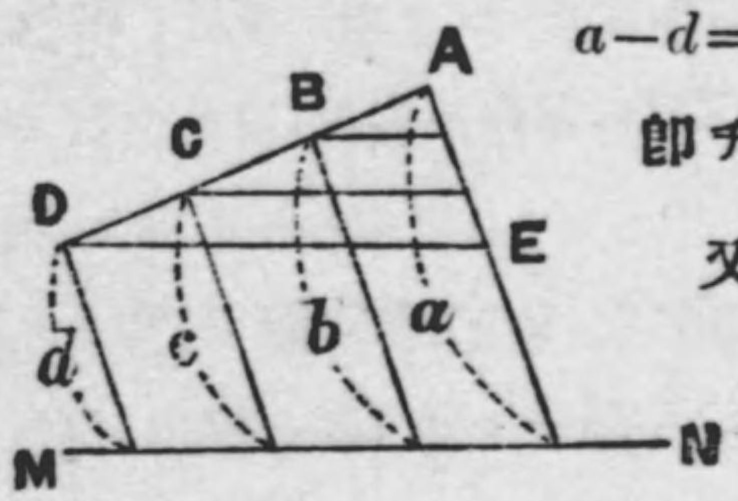
書込欄

卽チ諸平行線ハ $A'B'$ ヲ四等分ス

22. 線分 AD ヲ三等分シタル點ヲ A ヨリ順次ニ B, C トシ, 其ノ線分ニ交ハラザル直線 MN ニ A, B, C, D ヨリ平行直線ヲ引キ其ノ長サヲ夫々 a, b, c, d トシ a ガ最長ナレバ次ノ關係アルコトヲ證セヨ。

$3c=a+2d,\quad 3b=2a+d,\quad 2b=a+c$

證明 D, C, B ヨリ MN ニ三平行線ヲ引ケバ夫等ニテ截ラレタル線分ハ相等シ



$a-d=3(c-d)$

卽チ $a+2d=3c$

又 $a-d=\dfrac{3}{2}(b-d)$

$2a-2d=3(b-d)$

故ニ $2a+d=3b$

又 $a-c=2(b-c)$

$\therefore\ 2b=a+c$

23. 四邊形ノ各邊ノ中點ヲ順次ニ結ビテ作ル四邊形ハ平行四邊形ナリ, 且ツ其周ハ原四邊形ノ對角線ノ和ニ等シ。(神商. 海經. 女高師)

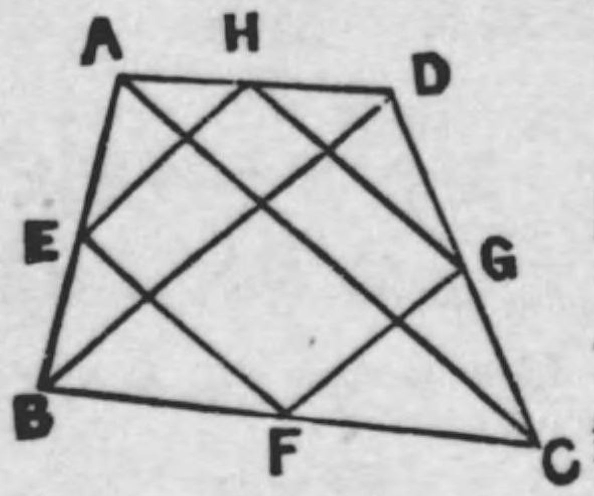
假設 四邊形 $ABCD$ ノ邊ノ中點ヲ E, F, G, H トス

總結 $EFGH$ ハ平行四邊形, 且ツ

$EF+FG+GH+HE=BD+AC$

證明 $AE=BE$, $AH=HD$

書込欄



$\therefore\ EH \underline{\parallel} \frac{1}{2}BD$

同様ニ $FG \underline{\parallel} \frac{1}{2}BD$

$\therefore\ EH=FG$

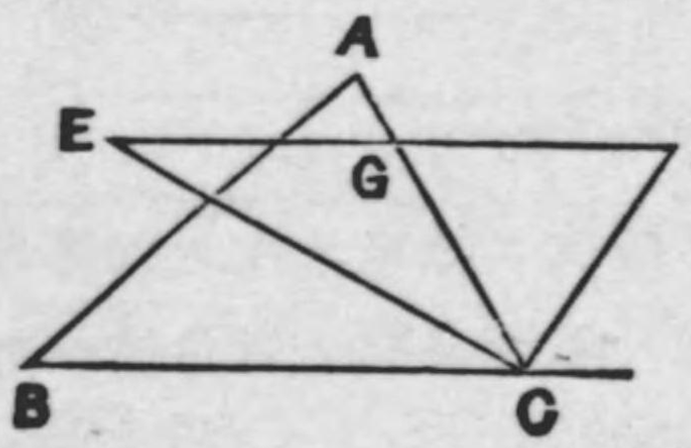
對邊相等シク且ツ平行ナル故ニ四邊形 EFGH ハ平行四邊形ナリ

又 $EH+FG=BD$

同理ニテ $EF+GH=CA$

$\therefore\ EH+EF+FG+GH=BD+CA$

24. 三角形 ABC ノ一角 C ノ二等分線ト C ノ外角ノ二等分線トガ BC ニ平行ナル直線ヲ截リテ得タル線分ハ AC ニテ等分セラル。



證明 兩二等分線間ノ線分ヲ EF トシ EF ト AC トノ交點ヲ G トス

$EF \parallel BC$ ナル故ニ

$\angle ECB=\angle CEG$

然ルニ $\angle ECB=\angle ECG$

$\therefore\ CG=EG$

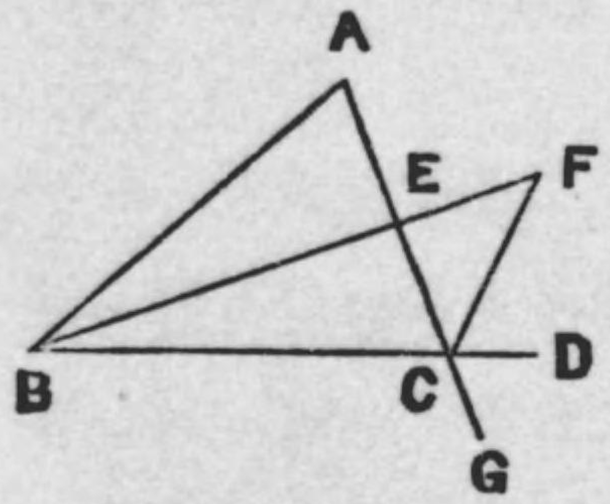
同様ニ $CG=CF$

依ッテ $EG=GF$

書込欄

第四 研究餘錄

1. 三角形ノ外角ハ其ノ內對角ノ何レヨリモ大ナリ。



假設 $\triangle ABC$ ノ一邊 BC ヲ延長シテ生ズル外角ヲ ACD トス

終結 $\angle A<\angle ACD$

$\angle B<\angle ACD$

證明 AC 邊上ニ $AE=CE$ ニトリ BE ノ延長上ニ $BE=EF$ トシテ CF ヲ結べバ F ハ $\angle ACD$ 內ニ在リ

$\triangle ABE$ ト $\triangle FEC$ トニ於テ

$BE=EF,\ AE=CE,\ \angle AEB=\angle CEF$

$\therefore\ \triangle ABE\equiv\triangle FEC$

$\therefore\ \angle A=\angle ECF$

然ルニ $\angle ACD>\angle ACF$

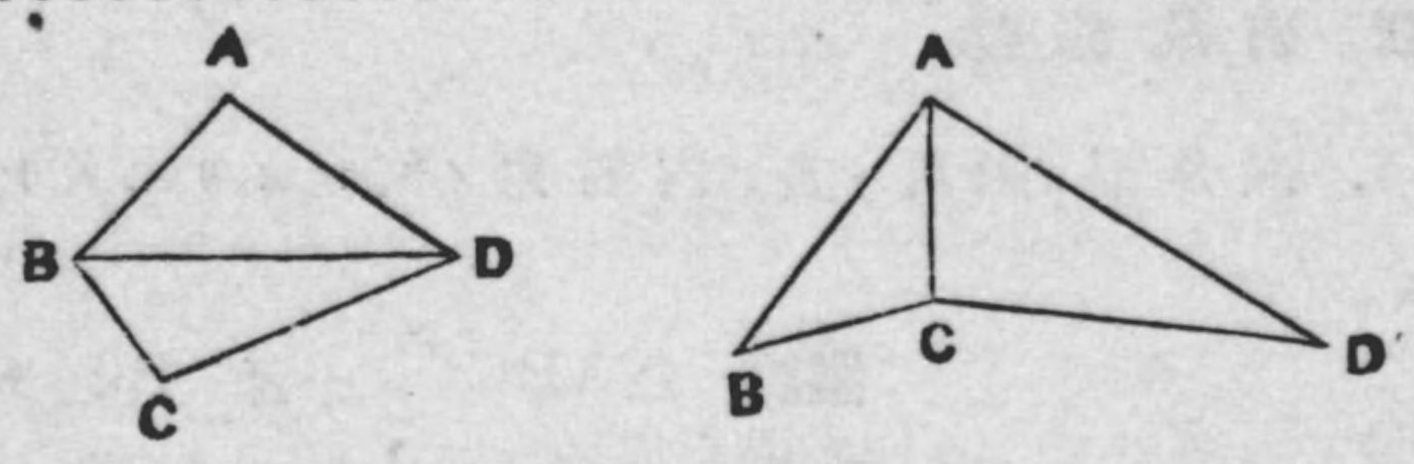
$\therefore\ \angle A<\angle ACD$

同様ニシテ $\angle B<\angle ACD$ ナルコトヲ證スルコトヲ得

2. 凸四邊形又ハ凹四邊形ノ內角ノ和ハ四直角ニ等シ。

假設 凸四邊形又ハ凹四邊形ノ內角ヲ A, B, C, D トス

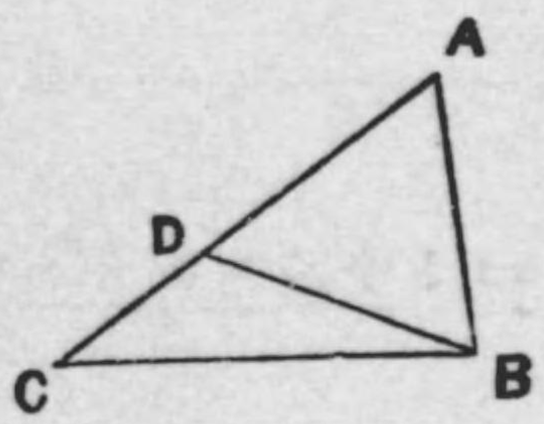
書
込
欄



總結 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=4\angle R$

證明 BD 又ハ AC ノ對角線ヲ作リテ兩三角形ニ分カテバ各三角形ノ内角ノ和ハ二直角ナル故，コレ等ノ四邊形ノ内角ノ和ハ四直角ナリ

3. 三角形 ABC ニ於テ $\angle ABD=\angle ADB$ ナルヤウニ直線 BD ヲ引ケバ，其ノ各邊トハ底角ノ和ノ半 $\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)$ ニテ交リ，其ノ底邊トハ底角ノ差ノ半 $\frac{1}{2}(\angle B-\angle C)$ ニテ交ル。



證明 $AB<AC$ トス

$$\angle A+\angle ADB+\angle ABD=2\angle R$$

$$\angle A+\angle B+\angle C=2\angle R$$

然ルニ $\angle ABD=\angle ADB$,

$\therefore\ 2\angle ABD$

故ニ兩方ヨリ $\angle A$ ヲ去レバ

$$2\angle ABD=\angle B+\angle C$$

$$\therefore\ \angle ABD=\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)=\angle ADB$$

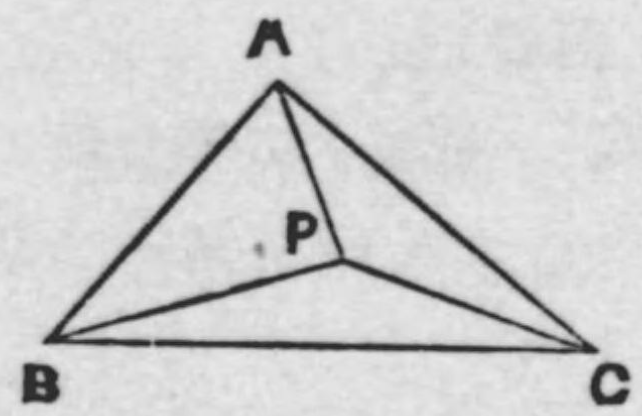
書
込
欄

又 $\angle DBC=\angle ABD-\angle C$

$$=\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)-\angle C$$

$$=\frac{1}{2}(\angle B-\angle C)$$

4. 三角形 ABC 内ノ任意ノ點 P ヨリ各角頂ニ至ル三線ノ和ハ周ヨリ小ニシテ周ノ半分ヨリハ大ナリ。



假設 △ABC 内ノ點ヲ P トシテ AP, BP, CP ヲ結ブ

總結 周 $>AP+BP+CP$
$>\frac{1}{2}$周

證明

△ABP ニ於テ　$AB<AP+BP$
△BPC ニ於テ　$BC<BP+CP$
△APC ニ於テ　$AC<AP+CP$

$$AB+BC+AC<2(AP+BP+CP)$$

$$\frac{1}{2}\text{周}<AP+BP+CP$$

又 △ABC ニ於テ　$AB+AC>BP+CP$
$AB+BC>AP+CP$
$AC+BC>AP+BP$

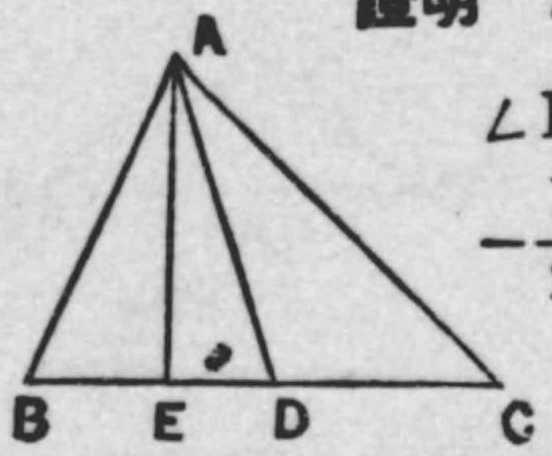
$$2(AB+AC+BC)>2(BP+AP+CP)$$

$$\text{周}>AP+BP+CP$$

5. △ABC ノ角 A ノ二等分線 AD ト A ヨリ邊 BC ヘ下ス垂線 AE トハ底角 B 及ビ C ノ差ノ半ニテ交ル。（商船．海經．陸經）

書込欄

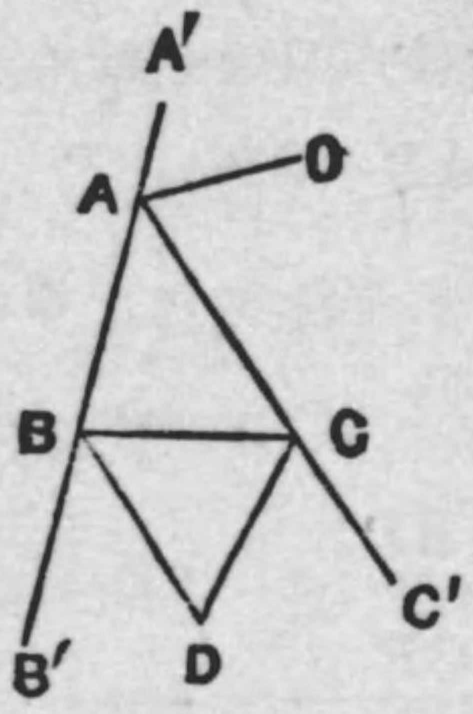
證明 $\angle ADB=\angle C+\frac{1}{2}\angle A$



$\angle DAE=\angle ADB-\angle R=\angle ADB$
$-\frac{1}{2}(\angle A+\angle B+\angle C)$

$\therefore\ \angle DAE=\frac{1}{2}(\angle B-\angle C)$

6. 三角形ノ二底邊ノ外角ノ二等分線ガナス角ハ頂角ノ外角ノ半ニ等シ。（鹿農・商船）



假設 △ABC ノ底邊ノ二等分線ノ交點ヲ D トシ, $\angle A$ ノ外角ノ二等分線ヲ AO トス

終結 $\angle D=OAC$

證明 △BDC ニ於テ

$\angle D+\angle DBC+\angle DCB=2\angle R$

(∵ 三角形ノ内内ノ和)

又三角形ノ外角ノ和ハ四直角ナル故 △ABC ニ於テ

$\angle OAC+\angle DCB+\angle DBC=2\angle R$

兩邊ヨリ共通ナル角 DCB, DBC ヲ引ケバ

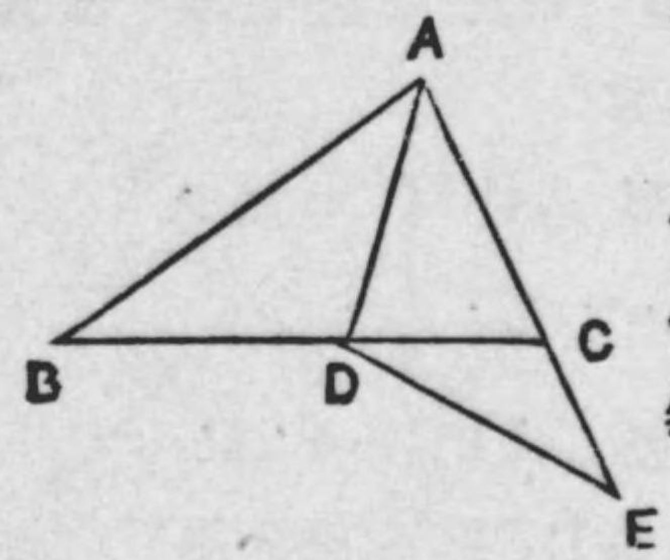
$\angle OAC=\angle D$

7. 三角形 ABC ニ於テ AB<AC ナレバ角 A ノ二等分線 AD ハ底 BC ヲ BD>CD ニ分ツ。

證明 AC ヲ延長シテ AE=AB ナラシメ D, E ヲ結ブ

△ABD ト ADE トニ於テ

書込欄



AB=AE, AD ハ共通

$\angle BAD=\angle EAD$

$\therefore\ \triangle ABD=\triangle AED$

$\therefore\ BD=DE,\ \angle B=\angle E$

然ルニ $\angle DCE=\angle A+\angle B$

$\therefore\ \angle DCE>\angle B$

從ツテ $\angle DCE>\angle E$

$\therefore$ $\angle DCE$ ニ對スル邊 DE ハ $\angle E$ ニ對スル邊 CD ヨリモ大ナリ

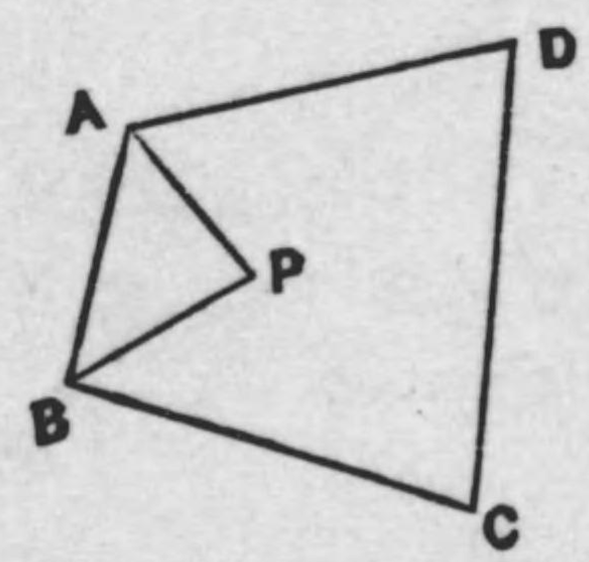
卽チ BD=ED>CD　$\therefore$ ED>DC

8. 四邊形 ABCD ノ相隣レル二角 A, B ノ二等分線ノ交點ヲ P トスレバ

$\angle P=\frac{1}{2}(\angle C+\angle D)$

又相對スル二角 A, C ノ二等分線ノ交點ヲ P トスレバ

$\angle P=\frac{1}{2}(\angle D-\angle B)$



證明 △ABP ニ於テ

$\angle P+\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}\angle B=2\angle R$

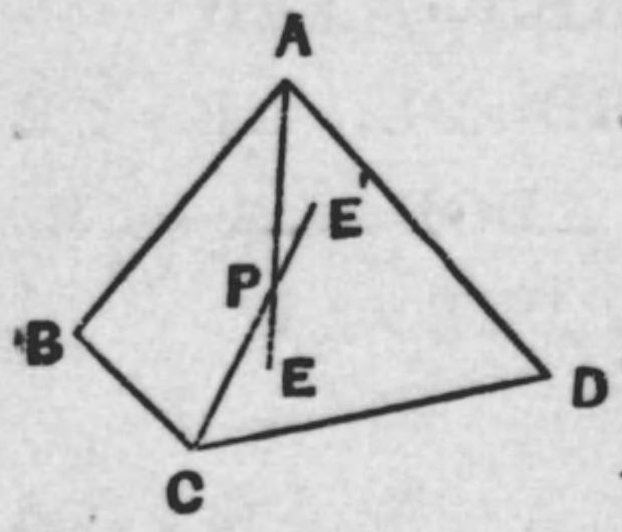
四邊形 ABCD ニ於テ

$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=4\angle R$

$\therefore\ \frac{1}{2}(\angle A+\angle B+\angle C+\angle D)$
$=2\angle R$

書込欄

$\therefore\ \angle P=\frac{1}{2}(\angle C+\angle D)$



又四邊形 ABCP ニ於テ

$\frac{1}{2}\angle A+\angle B+\frac{1}{2}\angle C$
$+$優$\angle APC=4\angle R$

四邊形 ADCP ニ於テ

$\frac{1}{2}\angle A+\angle D+\frac{1}{2}\angle C$
$+$劣$\angle APC=\angle B$

兩式ヨリ

優$\angle APC-$劣$\angle APC=\angle D-\angle R$

然ルニ 優$\angle APC-$劣$\angle APC=2\angle CPE$

$(\because\ \angle CPE=\angle APE')$

$\therefore\ 2\angle CPE=\angle D-\angle B$

$\angle CPE=\frac{1}{2}(\angle D-\angle B)$

$\therefore\ \angle Q=\frac{1}{2}(\angle D-\angle B)$

ABCQ ヲ凸四邊形トシタル場合ニハ結果ハ

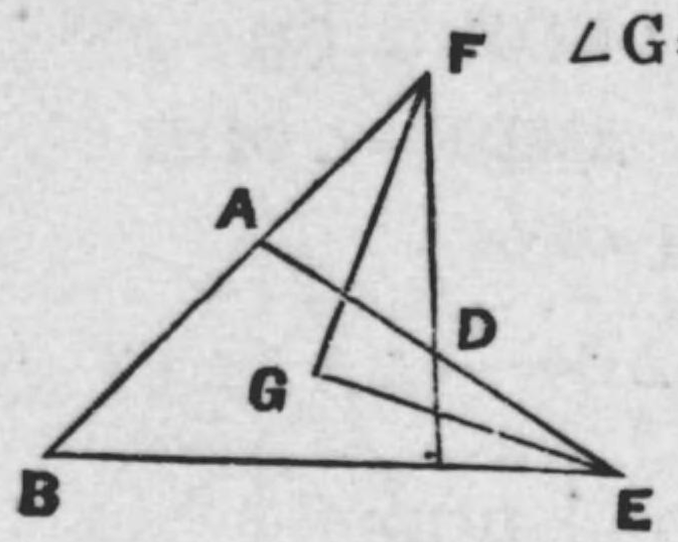
$\angle Q=\frac{1}{2}(\angle B+\angle D)$ トナル

9. 四邊形 ABCD ノ對邊 BA, CD ノ延長ノ交點ヲ F トシ, 又 AD, BC ノ交點ヲ E トシ, 角 E 及ビ F ノ二等分線 EG, FG ノ交點ヲ G トスレバ

$$\angle G=\frac{1}{2}(\angle B+\angle D)$$

書込欄

證明 四邊形 BEGF ニ於テ



$\angle G=\angle B+\angle BEG+\angle BFG$
$=\angle B+\frac{1}{2}(\angle E+\angle F)$ ..(1)

又四邊形 GEDF ニ於テ

$\angle D=\angle G+\angle GED$
$+\angle GFD$
$=\angle G+\frac{1}{2}(\angle E+\angle F)$

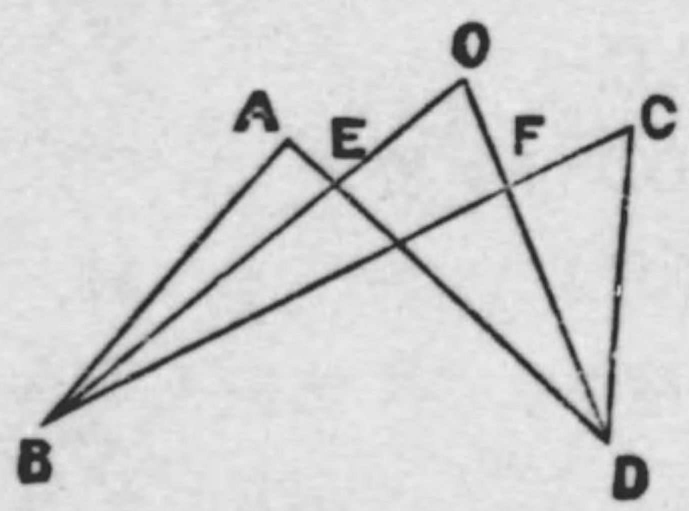
$\therefore\ \angle G=\angle D-\frac{1}{2}(\angle E+\angle F)$....(2)

(1) (2) ヲ加フレバ

$2\angle G=\angle B+\angle D$

$\therefore\ \angle G=\frac{1}{2}(\angle B+\angle D)$

10. 定直線上ノ二定點ヲ A, B トシ他ノ定直線上ノ二定點ヲ C, D トセバ $\angle ADC$, $\angle CBA$ ノ二等分スル直線ノナス角 BOD ハ $\angle DAB$ ト $\angle BCD$ ノ和ノ半ニ等シキコトヲ證セヨ, (陸經)



證明 $\angle OEA=\angle O$
$+\angle ODE$

$\angle OEA=\angle A+\angle ABE$

$\therefore\ \angle O+\angle ODE=\angle A$
$+\angle ABE$....(1)

又 $\angle OFC=\angle O+\angle OBF$

書込欄

$\angle OFC=\angle C+\angle CDF$

$\therefore\ \angle O+\angle OBF=\angle C+\angle CDF \ldots\ldots(2)$

然ルニ $\angle OBF=\angle ABE$, $\angle CDF=\angle ODE$

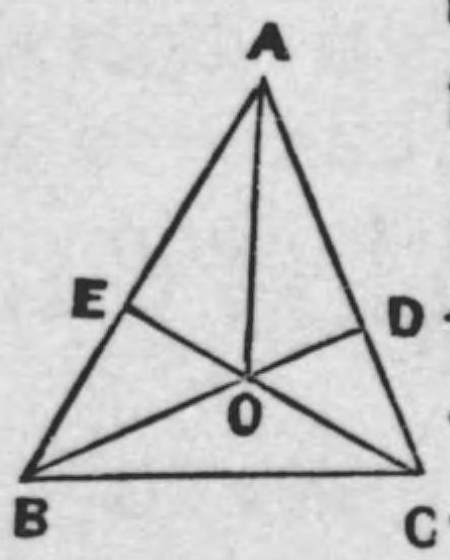
(1), (2) ヲ加ヘテ等量ヲ減ズレバ

$2\angle O=\angle A+\angle C \quad \therefore\ \angle O=\frac{1}{2}(\angle A+\angle C)$

$\therefore\ \angle BOD=\frac{1}{2}(\angle BAD+\angle BCD)$

11. 二等邊三角形ノ底邊ノ兩端ヨリ相對スル邊ヘ引ケル垂線ノ交點ト頂點トヲ結ビ付クル直線ハ頂角ヲ二等分ス

假設 二等邊三角形ヲ ABC トシ其ノ底ノ兩端 B, C ヨリ等邊ニ下ス垂線ヲ CE, BD トス



終結 $\angle EAO=\angle DAO$

證明

直角三角形 ABD ト ACE ニ於テ

$AB=AC$, $\angle BAC$ ハ共通

$\therefore\ \triangle ABD\equiv\triangle ACE$

$\therefore\ AD=AE$

又直角三角形 AOE ト AOD トニ於テ

$AE=AD$, AO ハ共通

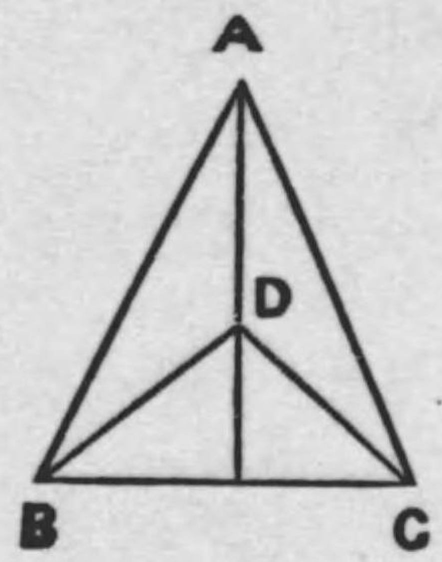
$\therefore\ \triangle AOE\equiv\triangle ADO$

$\therefore\ \angle EAO=\angle DAO$

依ツテ AO ハ $\angle BAC$ ヲ二等分線ス

書込欄

12. 底邊 BC ノ上ニ立ツ二等三角形 ABC, DBC ノ頂點ヲ結ブ直線 AD ハ BC ヲ直角ニ二等分ス



證明 $\triangle ABD$ ト $\triangle ADC$ ニ於テ

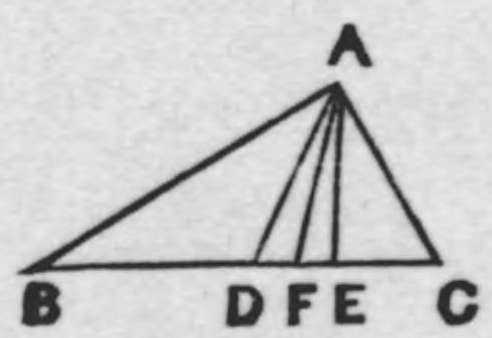
$AB=AC$, $BD=DC$ AD ハ共通

$\therefore\ \triangle ABD\equiv\triangle ADC$

$\therefore\ \angle BAD=\angle CAD$

故ニ二等邊三角形ノ頂角ノ二等分線ハ底邊ヲ垂直ニ二等分スルコトニヨリ $AD\perp BC$

13. 直角三角形 ABC ノ直角頂 A ヨリ BC ニ引ケル中線 AD ト垂線 AE トハ A 角ノ二等分線AF ト等角ヲナス。(東商)



證明 直角三角形 ABC ニ於テ

$AD=BD \quad \therefore\ \angle ABD=\angle BAD$

又 $AE\perp BC \quad \therefore\ \angle B=\angle CAE$

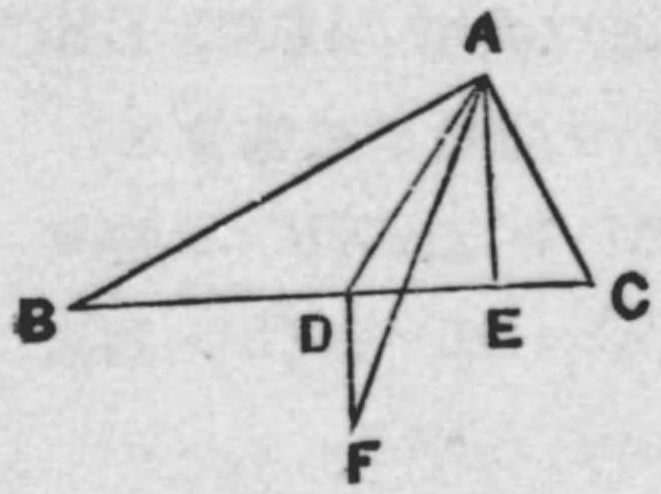
然ルニ $\angle BAF=\angle CAF$

故ニ $\angle BAF=\angle CAF$ ヨリ $\angle BAD=\angle CAE$ ヲ引ケバ

$\angle DAF=\angle EAF$

14. 直角三角形 ABC ノ直角 A ヲ二等分スル直線 AF ト斜邊 BC ノ中點 D ヨリ, AF ニ下ス垂線 DF トノ交點ヲ F トスレバ中線 AD ト垂線 DF トハ相等シ。

書込欄



證明 A ヨリ BC ニ垂線 AE ヲ下セバ，前題ニヨリ

$\angle EAF = DAF$

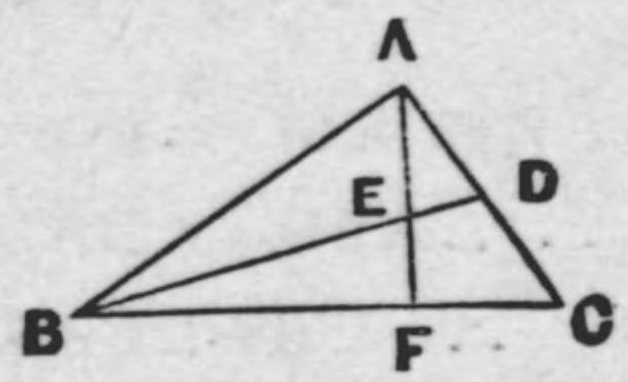
且ツ $AE \parallel DF$

$\therefore \angle EAF = \angle DFA$ （錯角）

$\therefore \angle DAF = DFA$

$\therefore AD = AF$

15. A ヲ直角トセシ $\triangle ABC$ ノ $\angle B$ ノ二等分線ガ AC ト交ハル點ヲ D トシ A ヨリ斜邊 BC ニ垂線 AF ヲ下シ AF ト BD ト E 點ニ於テ交ハレバ AE ト AD トハ相等シ。（商船）



證明 $\triangle ABD$ ト $\triangle BEF$ ニ於テ

$\angle A = \angle BFE = \angle R$

$\angle DBF = \angle ABD$ （假設）

$\therefore \angle BDA = \angle BFE$

然ルニ $\angle BFE = \angle AED$ （對頂角）

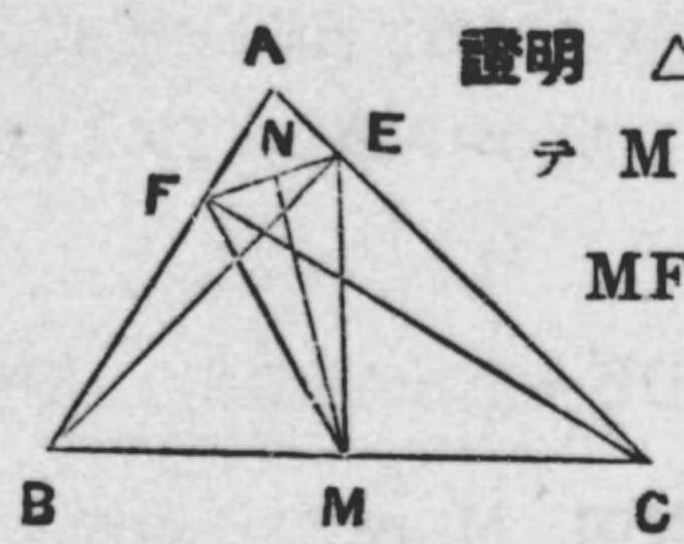
$\therefore \angle AED = \angle ADE$

$\therefore AE = AD$

16. 三角形 ABC ノ底角頂 B，C ヨリ對邊 AC，AB ニ各垂線 BE，CF ヲ下シ，其垂線ノ足ヲ結ビタル直線 EF ノ中點 N ト BC ノ中點 M トヲ結ベバ

$MN \perp EF$

書込欄



證明 $\triangle BEC$ ト $\triangle BFC$ トニ於テ M ハ BC ノ中點ナル故ニ

$MF = ME = \frac{1}{2}BC$

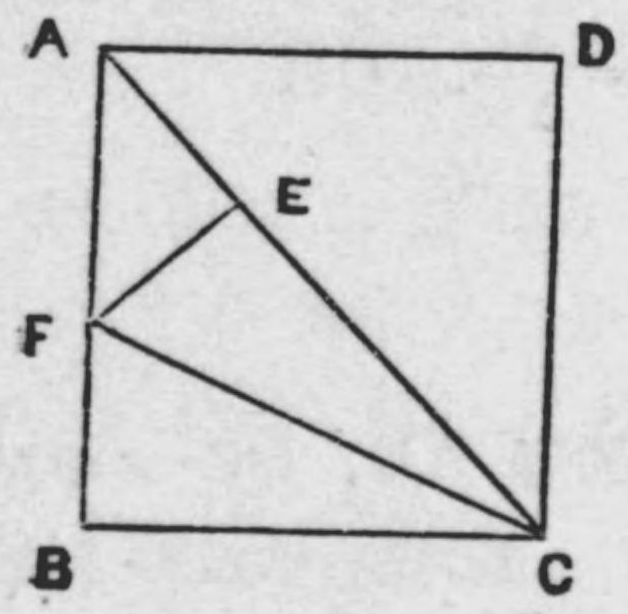
$\therefore MF = ME$

然ルニ $NF = NE$

$\therefore MN \perp EF$

17. 正方形 ABCD ノ對角線 AC 上ニ $BC = CE$ ニトリ E ヨリ AC ニ垂線ヲ立テ AB トノ交點ヲ F トスレバ

$AE = EF = BF$ （商船）



證明 直角三角形 EFC ト BFC ニ於テ

$BC = CE$，CF ハ共通

$\therefore \triangle EFC \equiv \triangle BFC$

$\therefore BF = EF$

又 ABCD ハ正方形ナル故ニ

$\angle EAF = \frac{1}{2}\angle R$

$\angle AEF = \angle R \quad \therefore \angle AFE = \frac{1}{2}\angle R$

$\therefore \angle EAF = \angle AFE$

$\therefore AE = EF$

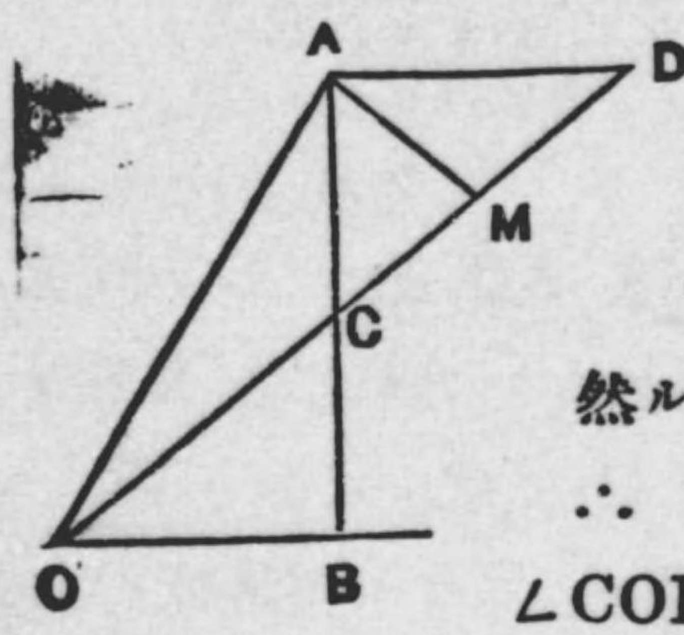
從ツテ $AE = EF = BF$

18. 鋭角 AOB ノ邊 OA 上ノ任意ノ點 A ヨリ O

書込欄

B ニ垂線 AB ヲ引キ，A ヨリ $OB /\!/ AD$ ヲ引キ，又 O ヨリ一直線ヲ引キ AB ト C ニ AD ト D ニ於テ交ハラシムルトキ

$CD=2OA$ ナラバ $\angle COB=\frac{1}{3}\angle AOB$



證明 M ヲCD ノ中點トス

然ルニ $BAD=\angle R$

$\therefore\ AM=\frac{1}{2}CD=CM=MD$

然ルニ $CD=2OA$

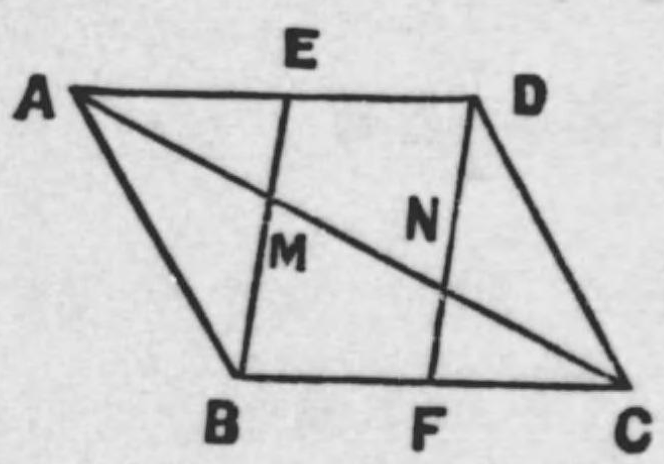
$\therefore\ AM=CM=OA$

$\angle COB=\angle D=\angle MAD$

$=\frac{1}{2}\angle AMC=\frac{1}{2}\angle AOM$

$\therefore\ \angle COB=\frac{1}{3}\angle AOB$

19. 平行四邊形 ABCD ノ對邊 AD, BC ノ中點ヲ E, F トスレバ BE, DF ハ對角線 AC ヲ三等分ス。（商船. 東工. 農大實）



證明 $AE=DE,\ BF=CF$

$\therefore\ ED \perp\!\!\!\!= BF,\ BE /\!/ DF$

依ツテ $\triangle ADN$ ニ於テ

$ME /\!/ DN$

$\therefore\ AM=MN$

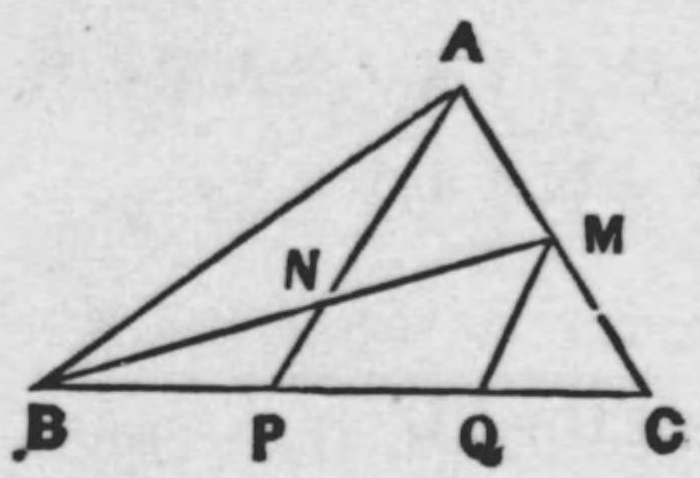
同様ニ $CN=MN$ 　故ニ $AM=MN=CN$

書込欄

20. $\triangle ABC$ ノ邊 AC ノ中點ヲ M, BM ノ中點ヲ N, AN ト BC トノ交點ヲ P トスレバ

$BP=\frac{1}{2}CP$

證明 $\triangle ACP$ ニ於テ



$AM=MC,\ PQ=CQ$

$\therefore\ MQ /\!/ AP$

又 $\triangle BMQ$ ニ於テ

$BM=MN,\ MQ /\!/ NP$

$\therefore\ BP=PQ$

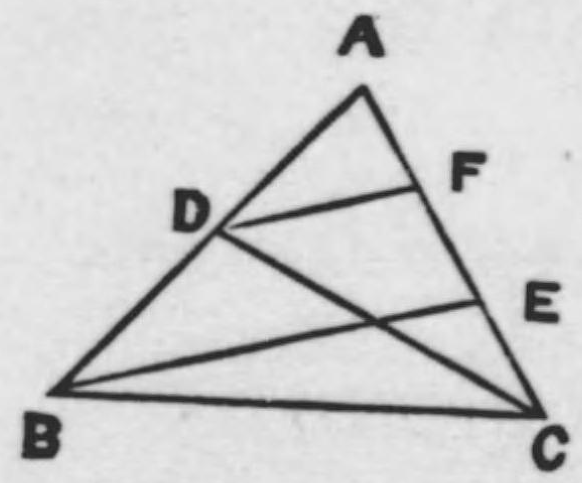
$\therefore\ BP=PQ=CQ$

$\therefore\ BP=\frac{1}{2}CP$

21. ABC ノ邊 AB ノ中點ヲ D トシ，邊 AC 上ニ AE ヲ AC ノ三分ノ二ニ取リ，CD, BE ノ交點ヲ O トセバ OE ハ BE ノ四分ノ一ナリ。

假設 $AE=\frac{2}{3}AC,\quad AD=DB$

終結 $OE=\frac{1}{4}BE$



證明 AE ノ中點ヲ F トスレバ D ハ AB ノ中點ナル故

$DF \perp\!\!\!\!= \frac{1}{2}BE$

又 E ハ CF ノ中點トナリ

$EB /\!/ FD$

書込欄

$\therefore$ $OE=\frac{1}{2}DF$

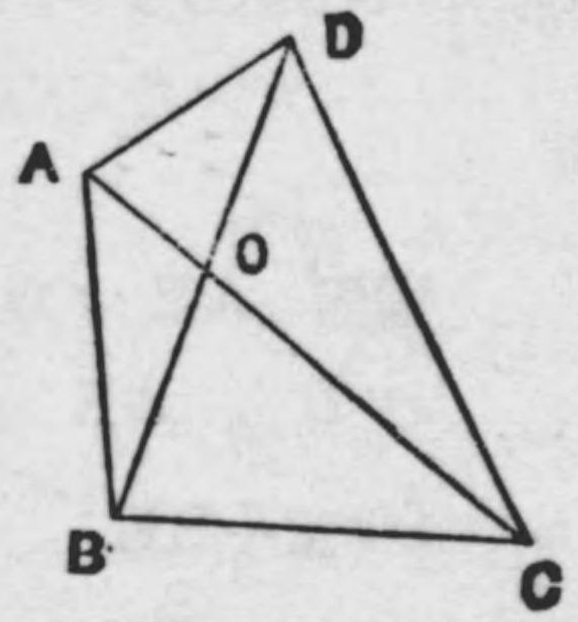
然ラバ $OE=\frac{1}{4}BE$

22. 四邊形 ABCD ノ對角線 AC, BD ノ和ハ其ノ對角線ノ交點外ノ任意ノ點 P ヨリ其ノ各角頂ニ至ル四直線 PA, PB, PC, PD ノ和ヨリ小ナリ。

證明
$$\begin{array}{l} AC<PA+PC \\ BD<PB+PD \\ \hline AC+BD<PA+PB+PC+PD \end{array}$$

23. 四邊形 ABCD ノ對角線 AC, BD ノ和ハ $\frac{1}{2}(AB+BC+CD+DA)$ ヨリモ大ニシテ AB+BC+CD+DA ヨリモ小ナリ。

證明
$$\begin{array}{l} AO+BO>AB \\ BO+CO>BC \\ CO+DO>CD \\ OD+OA>AD \\ \hline 2(AC+BD)>AB+BC+CD+AD \end{array}$$



$\therefore$ $AC+BD>\frac{1}{2}(AB+BC+CD+AD)$

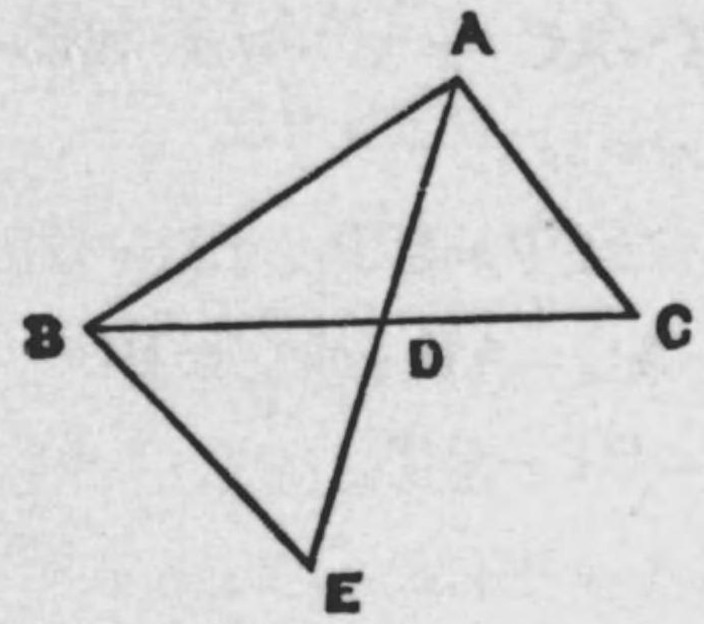
書込欄

又
$$\begin{array}{l} BD<AB+AD \\ BD<BC+CD \\ AC<AB+BC \\ AC<AD+CD \\ \hline 2(AC+BD)<2(AB+BC+CD+DC) \end{array}$$

$AC+BD<AB+BC+CD+DC$

24. 三角形 ABC ニ於テ AB>AC ナルトキ中線 AD ガ其ノ大邊 AB トナス角 BAD ハ小邊 AC トナス角 CAD ヨリ小ナリ。

證明 AD ヲ E ニ延長シ, AD=DE トスレバ



AD=DE,　DC=DB,

$\angle ADC=\angle EDB$

$\therefore \triangle ADC\equiv\triangle BDE$

$\therefore$ AC=BE

然ルニ AB>AC

$\therefore$ AB>BE

依ツテ $\angle BED=\angle DAC>\angle BAD$

$\therefore$ $\angle DAC>\angle BAD$

25. 三角形 ABC ノ頂點 A ヨリ BC ノ中點 D ヘ引ケル中線 AD ハ, 二邊 AB, AC ノ和ノ半ヨリ小ナリ。

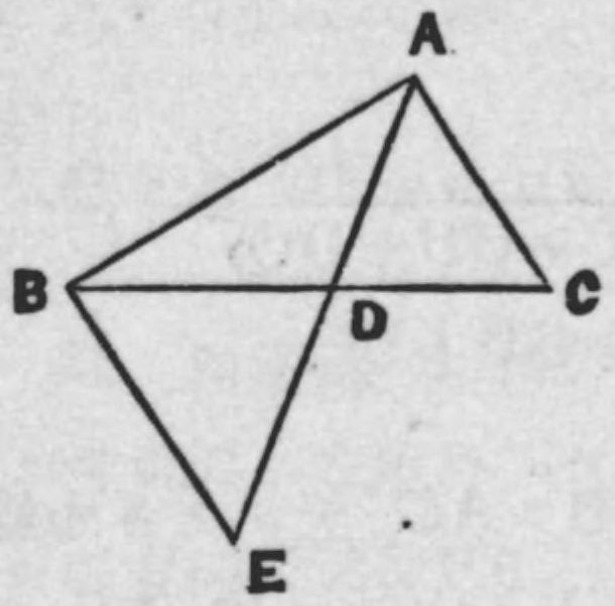
證明 AD ヲ延長シテ AD=DE ナラシム

$\triangle BDE$ ト $\triangle ADC$ ニ於テ

$\angle BDE=\angle ADC$, BC=CD, AD=DE

書込欄

∴ $\triangle BDE \equiv \angle \triangle ADC$



∴ $BE=AC$

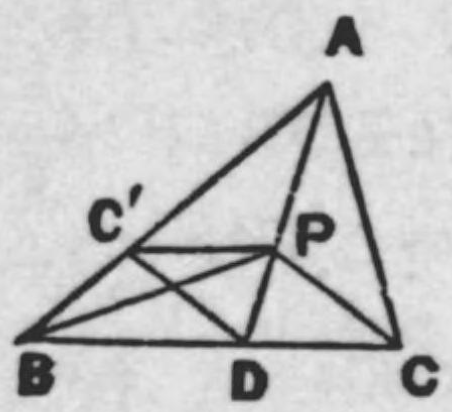
$\triangle ABE$ ニ於テ

$AB+BE>AE$

即チ $AB+AC>2AD$

∴ $\frac{1}{2}(AB+AC)>AD$

26. $\triangle ABC$ ノ頂角 A ノ二等分線上ノ一點ヲ P トスレバ $AB-AC>BP-CP$ ナルコトヲ證セヨ。



證明 $AB>AC$ ナリトシテ $AC=AC'$ トスレバ

$AC=AC'$, $CP=C'P$, $CD=C'D$

∴ $AB-AC=AB-AC'=BC'$

$BP-CP=BP-C'P$

然ルニ $\triangle BPC'$ ニ於テ

$BC'>BP-C'P$

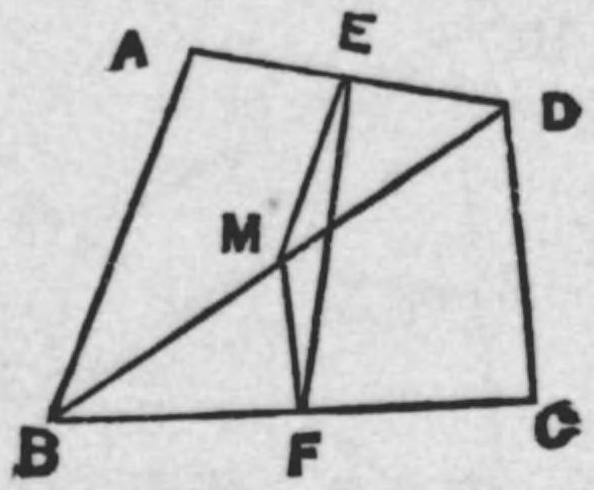
∴ $AB-AC>BP-CP$

27. 四邊形 ABCD ノ一双ノ對邊 AB, DC ガ平行セザルトキ他ノ一双ノ對邊 AD, BC ノ中點ヲ E, F トスレバ

$$EF>\frac{1}{2}(AB+DC)$$

若シ $AB=DC$ ナルトキハ AB, DC ハ EF ト等角ヲナス。

書込欄



證明 BD ヲ結ビ $BM=DM$ トシ EM, FM ヲ結ブ

$\triangle ADB$ ト $\triangle BDC$ トニ於テ

$AE=DE$, $BM=DM$,

$BF=CF$

∴ $EM \,\underline{\parallel}\, \frac{1}{2}AB$, $FM \,\underline{\parallel}\, \frac{1}{2}CD$

∴ $EM+FM=\frac{1}{2}(AB+CD)$

然ルニ $\triangle MFE$ ニ於テ

$EF<EM+FM$

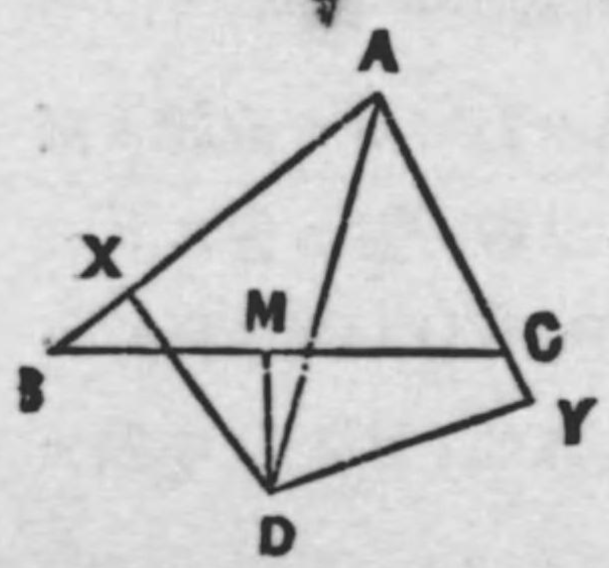
∴ $\angle EF<\frac{1}{2}(AB+CD)$

又 $AB=CD$ ナルトキハ

$EM=FM$

∴ $\angle MEF=\angle MFE$

28. 三角形 ABC ノ角 A ノ二等分線ト邊 BC ノ垂直二等分線トノ交點ヲ D トシ, D ヨリ AB, AC 若シクハ其ノ延長ヘ垂線 DX, DY ヲ引クトキハ $AX=AY$, $BX=CY$ ナリ。



證明 $\angle BAD=\angle DAY$,

$DX\perp AB$ $DY\perp AC$

∴ $DX=DY$

∴ $\triangle ADX\equiv\triangle ADY$

∴ $XA=YA$

書込欄

然ルニ $DM=CM$, $DM\perp BC$

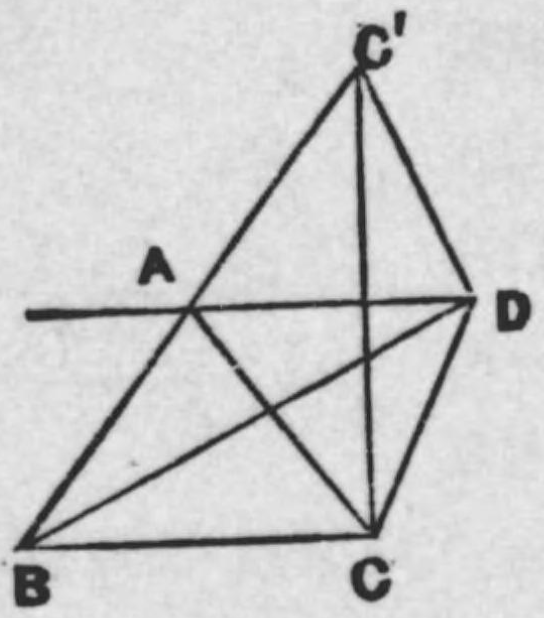
$\therefore\ BD=CD$

$\therefore\ \triangle DBX\equiv\triangle DCY$

$\therefore\ BX=CY$

29. 同底等高ヲ有スル三角形ノ中ニテ二等邊三角形ハ其ノ周最小ナリ。（海機. 東高工）

假設 BC ヲ同底トシ等高ヲ有シタル二等邊三角形ヲ ABC トシ三角形 DBC トス



總結 $AB+BC+AC<DB+BC+DC$

證明 BA ヲ延長シテ C 點ノ AD ニ關スル對稱點 C′ ヲ取レバ $AC=AC'$, $CD=C'D$

$AB+AC=BA+AC'=BC'$

$BD+DC=BD+DC'$

$\triangle C'BD$ ニ於テ

$BC'>BD+DC'$

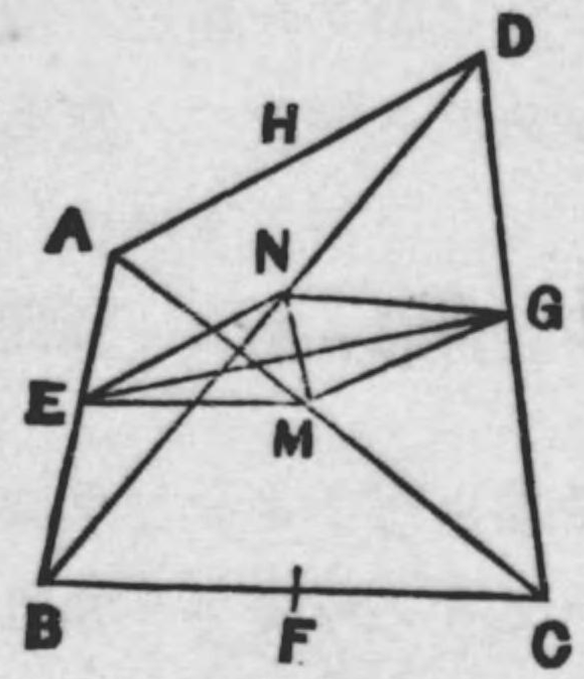
$\therefore\ AB+AC<BD+DC$

故ニ二等邊三角形 ABC ノ周ハ最小ナリ。

30. 四邊形ノ二双ノ對邊ノ中點ヲ結ビタル直線ト兩對角線ノ中點ヲ結ビタル直線トハ三線一點ニ會ス。

證明 四邊形 ABCD ニ於テ AB, CD, BC, DA ハ中點ヲ E, G, F, H 對角線 AC, BD ノ中點ヲ M, N トス

書込欄



總結 EG, MN, FH ハ一點ニ會ス

證明 AB, AC ノ中點 E, M ヲ結べバ

$EM\mathrel{\underline{\parallel}}\frac{1}{2}BC$

同樣ニ $NG\mathrel{\underline{\parallel}}\frac{1}{2}BC$

$\therefore\ EM\mathrel{\underline{\parallel}}NG$

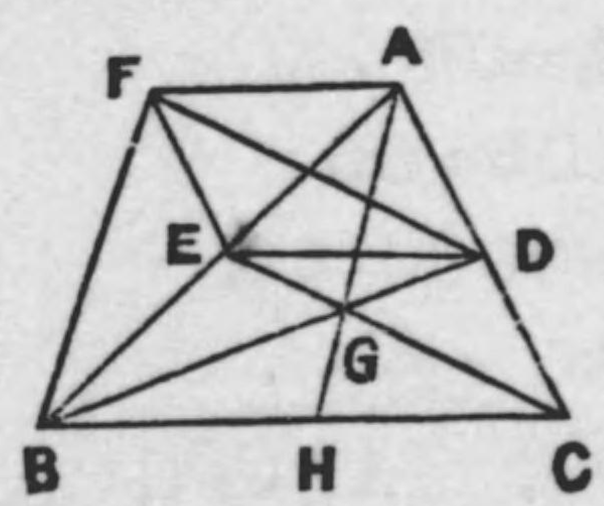
$\therefore$ EMGN ハ平行四邊形ナリ

$\therefore$ EG ハ MN ノ中點ヲ過ギル

同樣ニ FH モ亦 MN ノ中點ヲ過ギル

故ニ三線ハ一點ニ會スナリ

31. BD, CE ハ $\triangle ABC$ ノ中線ニシテ DF ハ D ヲ通リ CE ト同方向ニシテ且ツ之ニ等シキ線分ナリトスレバ $\triangle BDF$ ノ三邊ハ夫々 $\triangle ABC$ ノ三ツノ中線ニ等シ。



證明 $CE\mathrel{\underline{\parallel}}DF$

$\therefore$ EFDC ハ平行四邊形ナリ

$\therefore\ EF\mathrel{\underline{\parallel}}DC$ $\therefore\ EF\mathrel{\underline{\parallel}}DA$

$\therefore$ AFED ハ平行四邊形ナリ

$\therefore\ AF\mathrel{\underline{\parallel}}ED$

然ルニ E, D ハ AB, AC ノ中點ナリ

故ニ $ED\mathrel{\underline{\parallel}}\frac{1}{2}BC$

書込欄

$\therefore$ $AF \perp BH$

$\therefore$ $AFBH$ ハ平行四邊形ナリ

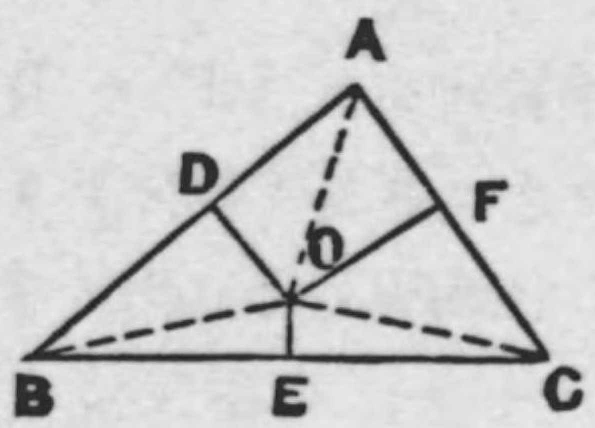
$\therefore$ $FB=AM$

$\therefore$ $\triangle BDF$ ハ三中線ニテ作ル三角形ナリ

32. 三角形ノ各邊ノ中點ヨリ各邊ニ作リタル三ツノ垂線ハ一點ニ會ス，而シテ其點ハ三ツノ角頂ヨリ等距離ニアリ。

注意 三角形ノ邊ヲ垂直二等分スル直線ハ一點ニ會ス 此點ヲ外心トイフ

假設 AB, BC, CA ノ中點 D, E, F, AB, BC ノ垂直二等分線ノ交點ヲ O トス

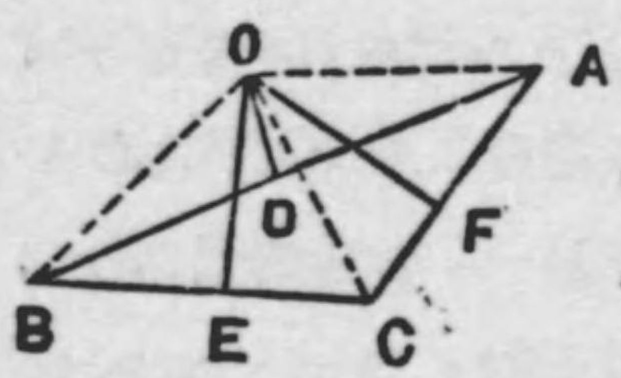


終結 AC ノ垂直二等分線ハ O ヲ過ギル，即チ $OF \perp AC$ ニテ O ハ外心ナリ

證明 $\triangle OAB$ ニ於テ

$AD=DB$,　$OD \perp AB$

$\therefore$ $OA=OB$



同理ニテ $OB=OC$

$\therefore$ $OA=OC$

$\therefore$ $\triangle ABC$ ニ於テ

$OA=OC$,　$AF=FC$

$OF \perp AC$

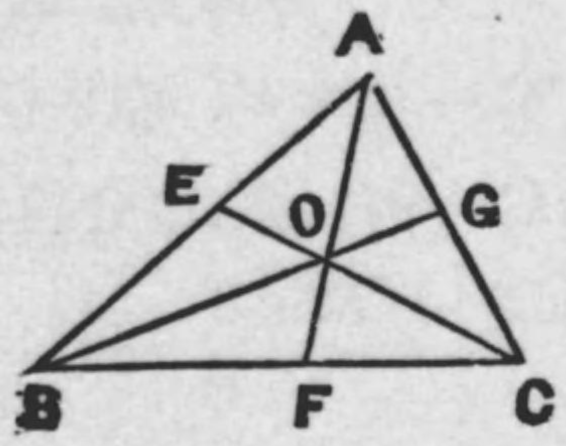
33. 三角形ノ各角ノ二等分線ハ一點ニ會ス而シテ此

書込欄

點ハ三邊ヨリ等距離ニアリ。（海機. 山商）

注意 三角形各内角ノ二等分線ハ一點ニ會ス，此點ヲ内心トイフ

假設 $\angle A$, $\angle B$ ノ二等分線ノ交點ヲ O トス



終結 $\angle C$ ノ二等分線ハ O ヲ過ギル即チ OC ハ二等分線, O ハ内心

證明 $\triangle OAG$, $\triangle OAE$ ニ於テ

$\angle G=\angle R=\angle E$

$\angle OAG=\angle OAE$

斜邊 AO ハ共通ナル故コノ直角三角形ハ斜邊一邊相等シク全等形ナリ

依ツテ $OG=OE$

同理ニテ $OE=OF$

$\therefore$ $OG=OF$

又直角 $\triangle OGC$, OFC ニ於テ

$OG=OF$,　OC ハ共通

$\therefore$ $\triangle OGC \equiv \triangle OFC$

$\therefore$ $\angle OCG=\angle OCF$

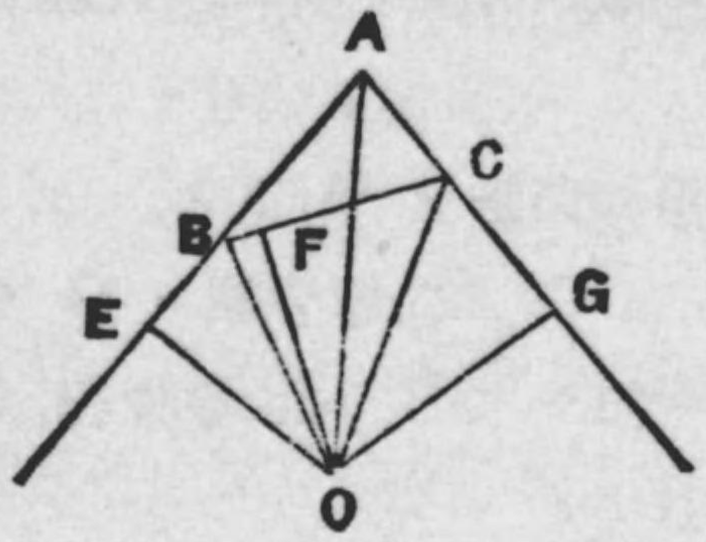
即チ OC ハ $\angle C$ ヲ二等分ス

34. 三角形ノ一内角ノ二等分線ト他ノ二外角ノ二等分線トハ一點ニ會ス，而シテ其ノ點ハ三邊ヨリ等距離ニアリ。（海機. 山商）

注意 三角形ノ一内角ト，他ノ二ツノ各外角トノ二等

書込欄

分線ハ一點ニ會ス此點ヲ傍心トイフ



假設 ∠A ト ∠B ノ外角トノ二等分線ノ交點ヲ O トス

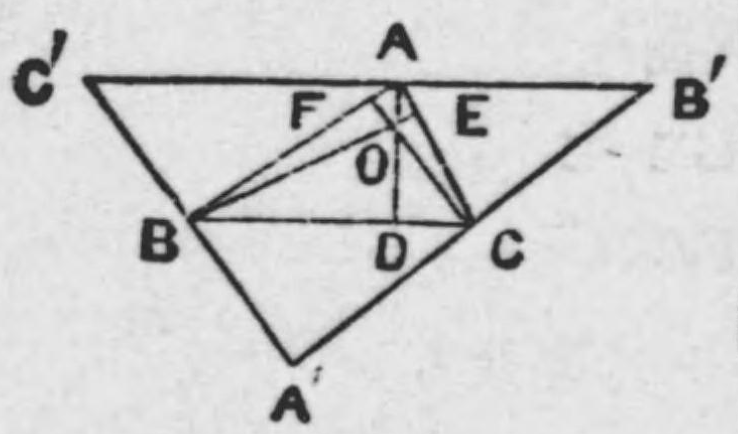
終結 ∠C ノ外角ノ二等分線ハ O ヲ過ギル，即チ OC ハ ∠C，外角ノ二等分線 O ハ傍心ナリ

證明 前題ト同樣

35. 三角形ノ各角頂ヨリ對邊ニ下セル三垂線ハ一點ニ會ス。（陸士）

注意 三角形ノ角頂ヲ過ギ對邊ニ垂直ナル三直線ハ一點ニ會ス，此點ヲ垂心トイフ

假設 △ABC ノ角頂 A, B, C ヲ過ギ對邊 BC, CA, AB ニ垂直ナル線ヲ AD, BE, CF トス



終結 AD, BE, CF ハ一點 O ニ合ス，O ハ垂心ナリ

證明 頂點ヲ過ギ對邊ニ平行線ヲ引キ其三線ニテ作ル三角形ヲ A′B′C′ トス

AB ∥ CB′

BC ∥ AB′

AB′＝BC

書込欄

同理ニテ AC′＝BC 從ツテ AB′＝AC′

AD⊥BC, BC ∥ B′C′

故ニ AD ハ B′C′ ヲ垂直ニ二等分ス

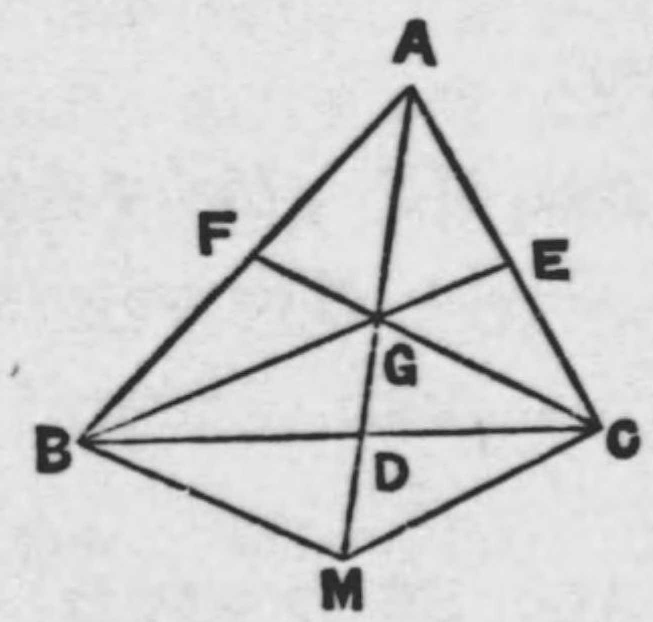
同理ニテ BE ハ C′A′ ヲ，CF ハ A′B′ ニ垂直ニ二等分ス

又 AD, BE, CF ハ △A′B′C′ ノ邊ヲ垂直二等分スル直線ナルヲ以テ外心ノ關係ニ依ツテ一點ニ會ス

∴ △ABC ノ垂心ハ △A′B′C′ ノ外心ナリ

36. 三角形ノ三中線ハ一點ニ會ス，而シテ其ノ點ハ頂點ヨリ各中線ノ三分ノ二ニ在リ。（熊工．陸士）

注意 三角形ノ三中線ハ一點ニ會ス，此點ヲ重心トイフ，而シテ重心ハ頂點ヨリ中線ノ三分ノ二ノ距離ニアリ



假設 △ABC ニ於テ BC, CA, AB ノ中點ヲ D, E, F トシ AD, BE ノ交點ヲ G トス

終結 CF ハ G ヲ通過ス，即チ G ハ重心ニシテ

$AG=\frac{2}{3}AD$

證明 GD ヲ延長シテ GD＝DM トシ四邊形 GBMC ヲ作レバ

BD＝DC, DG＝DM

∴ 平行四邊形ナルベシ

書込欄

∴ $EB /\!/ MC$

然ルニ $\triangle AMC$ ニ於テ E ハ AC ノ中點, $EG /\!/ CM$

∴ G ハ AM ノ中點ナリ

又 $\triangle ABM$ ニ於テ

G ハ AM ノ中點

F ハ AB ノ中點

∴ $GF /\!/ BM$

故ニ GF, GC 共ニ BM ニ平行スル故一直線ナリ

即チ CF ハ G ヲ通過ス, G ハ重心ナリ

又 $AG=GM$, $GM=DM$

∴ $AG=\frac{2}{3}AD$

37. 與ヘラレタル三角形ノ各頂點ヨリ各邊ニ交ハラザル一直線ニ引ク三平行線ノ和ハ重心ヨリ其ノ線ヘ引ク平行線ノ三倍ニ等シ。（商船）

假設 $\triangle ABC$ ノ頂點ヨリ一直線 MN ニ引ク平行線ノ長サヲ a, b, c トシ重心 G ヨリ MN ニ引ク平行線ノ長サヲ g トス

終結 $a+b+c=3g$

證明 G ハ重心ナルガ故ニ AG, BC ノ交點 D ハ BC ノ中點ナリ

D ヨリ MN ニ引ク平行線ノ長サヲ d トスレバ

$2d=b+c$ （第三ノ 22 問題）

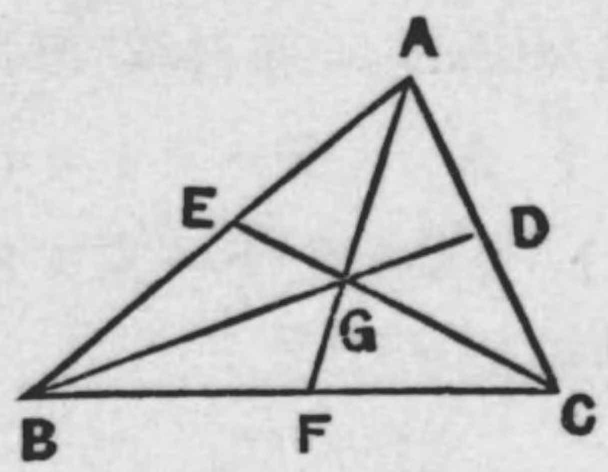
G ハ重心ナル故ニ $2GD=AG$

書込欄

第三ノ 22 問題ニヨリ $3g=a+2d$

∴ $3g=a+b+c$

38. 三角形ノ二角不等ナルトキ大角ノ頂點ヨリ引ク中線ハ他ノ角頂ヨリ引ク中線ヨリ小ナリ。（農大實）



假設 三角形 ABC ニ於テ $\angle C>\angle B$ 中線ヲ BD, CE トス

終結 $CE<BD$

證明 中線ノ交點ヲ G トスレバ

$\angle C>\angle B$ ナル故

$AB>AC$

$\triangle AFB$, $\triangle AFC$ ニ於テ

$BF=FC$, FA ハ共通

$AB>AC$ ナル故 $\angle AFB>\angle AFC$

又 $\triangle GFB$, $\triangle GFC$ ニ於テ

$BF=FC$, GF ハ共通

$\angle GFB>\angle GFC$ ナル故 $BG>GC$

然ルニ $BG=\frac{2}{3}BD$, $GC=\frac{2}{3}CE$

∴ $\frac{2}{3}BD>\frac{2}{3}CE$

∴ $BD>CE$

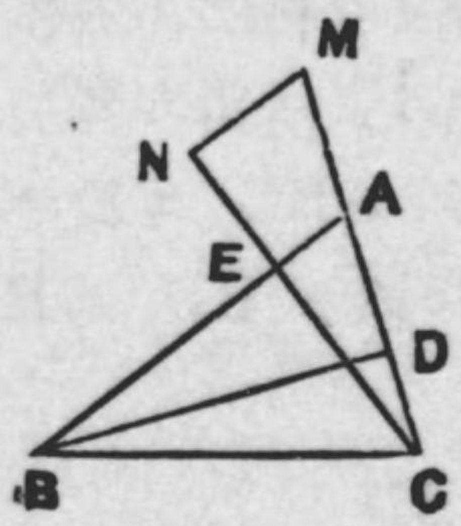
39. 三角形ノ二角不等ナルトキ大角ノ頂點ヨリ引ク

書込欄

垂線ハ他ノ各頂ヨリ引ク垂線ヨリモ小ナリ。

假設 BD, CE ヲ垂線

總結 CE<BD



證明 ∠C>∠B　∴ AB>CA

CA ヲ M マデ延長シテ CM=AB トス M ヲ過ギ AB ニ平行線 MN ヲ引キ CE ト N ニ交ハラシムレバ △CMN ト △CAE トハ夫々角ノ等シキ三角形ナリ

△CAE, △BAD ニ於テ

BD⊥AC, CE⊥AB

∴ ∠BDA=∠R=∠CEA

∠A ハ共通ナル故 ∠ACE=∠ABD

卽チ △CAE, △BAD ハ夫々角ガ相等シ

然ルニ △CMN ハ △CAE ト夫々等角ナリ

∴ △CMN ハ △BAD ト夫々等角ニシテ

AB=CM

依ツテ △CMN≡△BAD　∴ BD=CN

然ルニ CE<CN

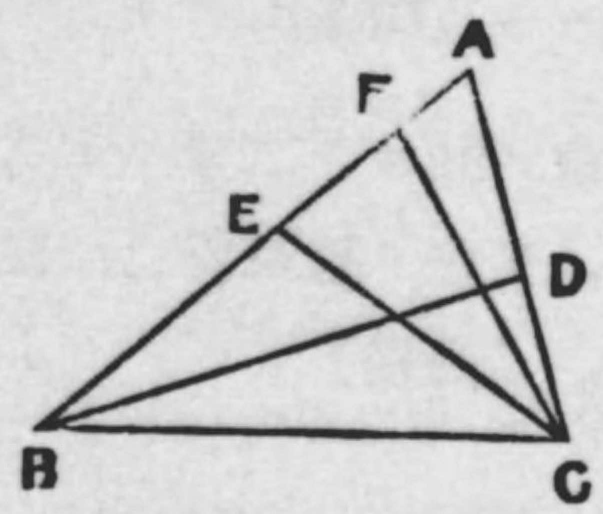
∴ CE<BD

40. 三角形ノ二角不等ナルトキ大角ノ頂點ヨリ引ク二等分線ハ他ノ角頂ノ二等分線ヨリモ小ナリ。(盛農)

總結 BD, CE ヲ夫々角ノ二等分線

書込欄

總結 CE<BD



證明 ∠C>CB ナル故其ノ各ノ半角ナル ∠ACE>∠ABD

∴ ∠ACE 內ニ CF ヲ引キ ∠ECF=∠ABD トス

然ラバ △ECF, △GFB トハ各角夫々相等ノ三角形トナリ

∠FBG=∠FCE,　∠DBC<∠ECB

∴ ∠FBC<∠FCB

∴ CF<BF

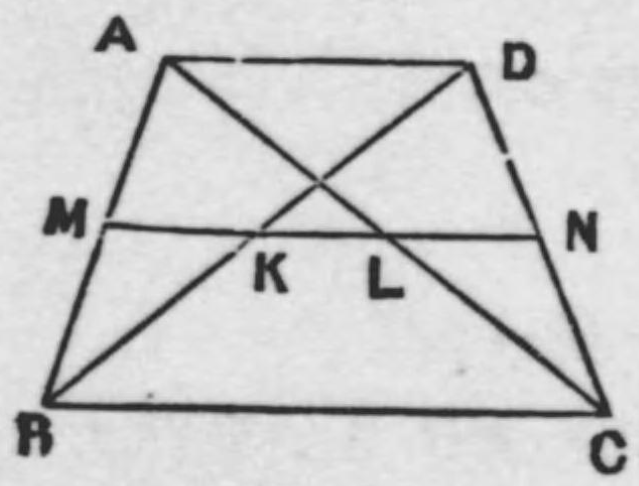
∴ CE<BF

然ルニ BG<BD

∴ CE<BD

41. 梯形 ABCD ニ於テ平行セザル二邊 AB, DC ノ中點ヲ M, N 對角線 BD, AC ノ中點ヲ K, L トスレバ M, K, L, N ノ四點ハ一直線上ニアリ。

(海機. 女高師)



證明 △ABD ニ於テ

AM=MB,　DK=BK

∴ AD∥MK

∴ MK∥BC

同様ニ △BDC ヨリ NK∥BC

依ツテ MK, NK ハ同ジ直線 BC ニ平行ナル故

M, K, N ノ三點ハ一直線上ニアリ

書込欄

同樣ニ M, L, N ノ三點ハ一直線上ニアリ

依ツテ M, K, L, N ノ四點ハ一直線上ニアリ

42. 二等邊三角形ノ底上ノ任意ノ點ヨリ二邊マデ次ノ如ク引ク線分ノ和ハ不易ナリ，又底ノ延長線上ノ點ヨリ引ケバ線分ノ差ハ不易ナリ。（商船）

I 各邊ニ平行

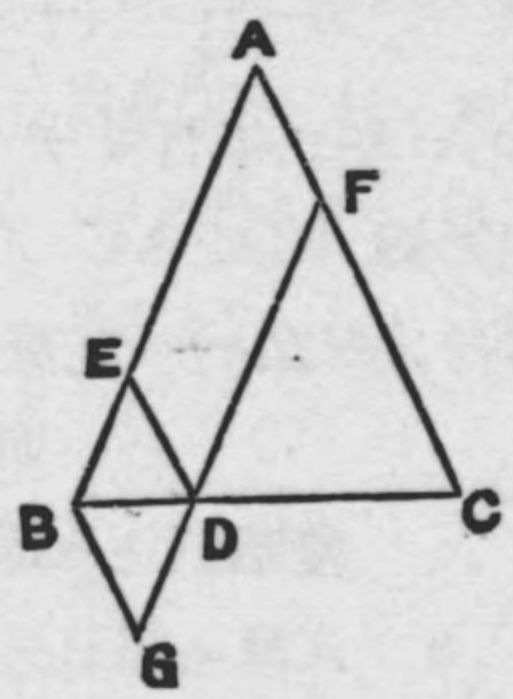
II 各邊ニ引ク垂直

I **假設** 二等邊三角形 ABC ノ底 BC, $DE \parallel AC$, $DF \parallel AB$

終結 D ガ B, C 間ニ在レバ $DF+DE=AB$

D ガ B, C 間ニ在ラザレバ $DF-DE=AB$

D ガ何レニ在ルモ一邊 AB ニ等シク不易ナリ



證明 何レノ場合ニテモ證明ハ同一ナリ

B ヲ過ギ AC ニ平行線ヲ引キ FD トノ交點ヲ G トス

$ED \parallel AC$ ナル故

$\angle EDB=\angle ACB$

書込欄

然ルニ $AB=AC$ ナル故 $\angle ACB=\angle ABC$

$\therefore \angle EDB=\angle ABC$

故ニ $\triangle EBD$ ハ BD ヲ底邊トスル二等邊三角形

又 $BG \parallel AC$ $\therefore \angle ACB=\angle GBD$

$DG \parallel AB$ $\therefore \angle ABC=\angle GDB$

故ニ $\triangle BGD$ ハ BD ヲ底邊トスル二等邊三角形

而シテ $\angle ABC=\angle ACB=\angle GBD$

$\therefore \triangle EBD \equiv \triangle GBD$

次ニ ABGF, AEDF ハ平行四邊形ナリ

$\therefore AB=CF, \quad DF=EA$

依ツテ左圖ニハ $DE+DE=AB$

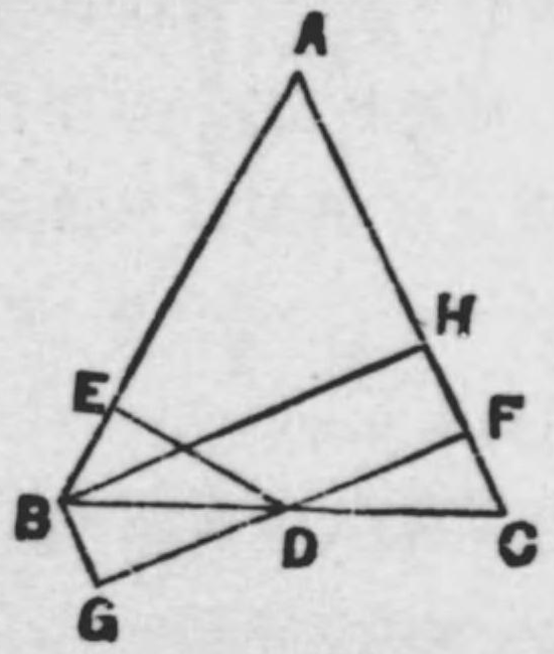
右圖ニハ $DF-DE=AB$

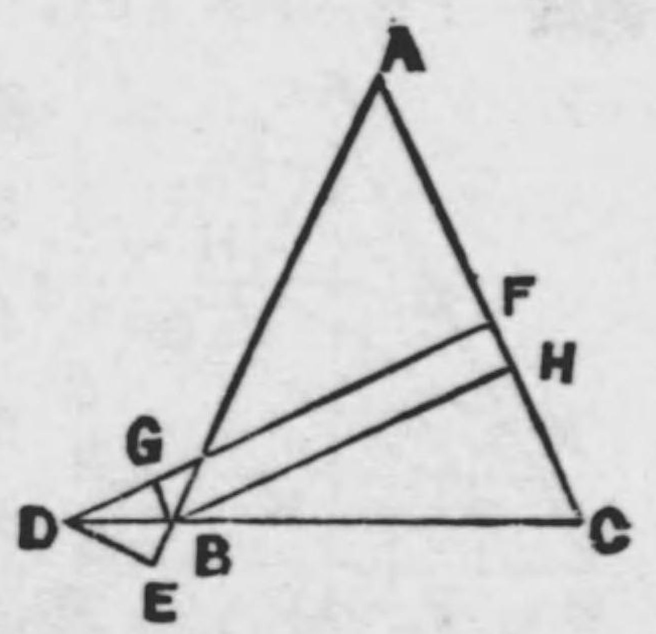
II **假設** 二等邊三角形ノ底ヲ BC, $DE \perp AB$, $DF \perp AC$

終結 D ガ B, C 間ニ在ラザレバ $DF+DE$

D ガ B, C 間ニ在ラザレバ $DF-DE$ ハ底ノ一端 B ヨリ AC ニ引ク垂線ノ線分 BH ニ等シ

證明 何レモ證明ハ同一ナリ





書込欄

B ヲ過ギ AC ニ平行線ヲ引キ FD ト／交點ヲ G トスレバ

$\angle GBD=\angle ACB=\angle ABC$

$DF\perp AC,\ AC /\!/ BG$

$\therefore\ \angle BGD=\angle R$

又 $DE\perp AB$ $\therefore\ \angle BED=\angle R$

$\therefore\ \triangle BED\equiv\triangle BGD$

$\therefore\ DE=DG$

故ニ $BH\perp AC,\ CF\perp AC,\ BG /\!/ FH$ ナル故ニ BGFH ハ平行四邊形

$\therefore\ BH=GF$

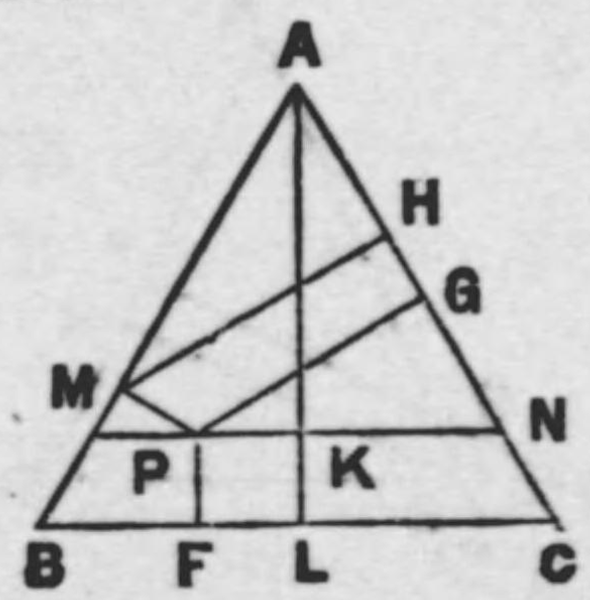
依ツテ左圖ニハ $DF+DE=BH$

右圖ニハ $DF-DE=BH$

43. 正三角形内ノ一點ヨリ各邊ヘ引ク三垂線ノ和ハ不易ナリ。（山商. 陸經）

假設 正三角形 ABC 内ノ一點 P ヨリ各邊ヘノ垂線 PE, PF, PG

終結 $PE+PF+PG$ ハ原三角形ノ高サ AL ニ等シ



證明 P ヲ過ギ BC ニ平行線 MN ヲ作レバ AMN モ亦正三角形ナリ

前題ノ(II)ニヨリ

$PE+PG=MH$（三角形ノ高サ）

正三角形ナル故

書込欄

$MH=AK$

故ニ $PE+PG+PF=AK+PF=AL$

注意 P ガ正三角形外ノ點ナルトキハ其ノ位置ニヨリ垂線ノ差ガ高サニ等シ

44. 二等邊三角形 ABC ノ底 BC 上ノ一點 D ヨリ BC ニ垂線ヲ作リ AB, AC（又ハ延長）ト交ハル點ヲ夫々 E, F トシ高サヲ AH トスレバ

(I) D ガ BC 内ニ在レバ

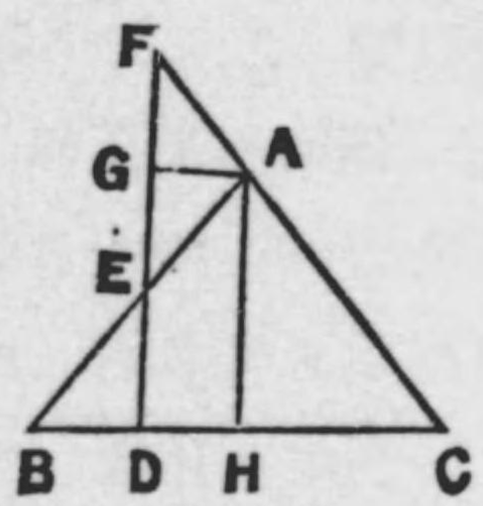
$DE+DF=2AH$

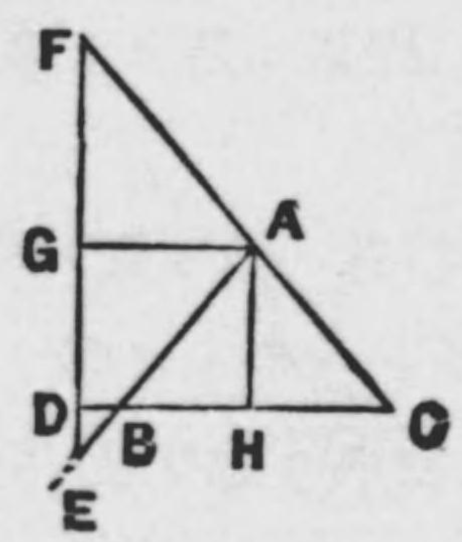
(II) D ガ延長ノ上ニ在レバ

$DF-DE=2AH$ （陸士）

證明 A ヲ過ギ BC 二平行線ガ DF ト交ヘル點ヲ G トス

AG ハ頂角 A ノ外角ヲ二等分ス





而シテ $AG\perp DF$

$\therefore\ \triangle AFE$ モ二等邊三角形ニシテ $FG=GE$

書込欄

∴ 左圖ニテハ

$DE+DF=2AH$

右圖ニテハ $DF-DE=2AH$

書込欄

第二編 圓

1. 圓ニ關スル重要ナル術語。

A 圓周　　B 中心

C 半徑　　D 直徑

E 中心角　　F 圓周角

G 弧（優弧，劣弧）　　H 弦

I 割線　　J 切線

K 弓形（優弓形，劣弓形）

L 二圓ノ內切，外切

M 內接形，外接形　　N 同心圓

2. 圓ニ關スル重ナル定理。

A 直徑ハ圓及圓周ヲ二等分ス

系 垂直ナル二直徑ハ互ニ二等分ス

B 半徑相等シキ圓ハ全等ナリ

C 圓周角ハ中心角ノ半分ナリ

系 ソノ一 弦ガ直徑ナル圓周角ハ直角

系 ソノ二 圓周角ガ直角ナル弦ハ直徑

D 同圓又ハ等圓ニ於テ

イ 等弧ノ中心角，圓周角，及ビ弦ハ相等シ

ロ 中心角カ圓周角カ弦ガ等シキ時ハ等弧ナリ

ハ 大弧ノ中心角，圓周角，及ビ弦（劣弧ノ）ハ大

ニ 中心角，圓周角カ，弦（劣弧ノ）ガ大ナレバ其ノ弧ハ大ナリ

書込欄

ホ　中心ヨリ等距離ナル弦ハ相等シ

ヘ　等弦ハ中心ヨリ等距離ナリ（ホノ逆ナリ）

ト　中心ヨリノ距離大ナル弦ハ小ナリ

チ　弦ガ小ナレバ中心ヨリノ距離ハ大ナリ（トノ逆ナリ）

E　中心ヨリ弦ニ引ケル垂線ハ此ヲ二等分ス

系ソノ一　中心ト弦ノ中點トヲ結ブ線ハ弦ハ垂直

系ソノ二　弦ノ中點ヲ過ギ夫レニ垂直ナル線ハ中心ヲ過ギル

F　一直線上ニナキ三點ヲ過ギル圓周ハ一ツアリ，唯一ツニ限ル

系　二圓ノ交點ハ二ツヨリ多カラズ

G　內接四邊形ノ對角ハ補角ヲナス

系　內接四邊形ノ一外角ハ其內對角ニ等シ

H　四邊形ハ一双ノ對角ガ補角ヲナストキ圓ニ內接ス

I　圓ト點トニ關シ中心ヨリノ距離ガ

イ　半徑ヨリ大ナレバ點ハ圓外ニ

ロ　半徑ニ等シケレバ點ハ圓周上ニ

ハ　半徑ヨリ小ナレバ點ハ圓內ニ

ニ　上ノ逆ハ何レモ眞ナリ

J　半徑ノ端ニ於テ此レニ垂直ナル線ハ切線ナリ

系　ソノ一　中心ヨリ切線ニ引ク垂線ハ切點ヲ過ギル

書込欄

系　ソノ二　切點ヲ過ギ切線ニ垂直ナル線ハ中心ヲ過ギル

系　ソノ三　圓ト直線トノ交點ハ二ツヨリ多カラズ

K　圓外ノ一點ヨリノ切線ハ二ツアリ，而シテ二ツニ限ル（此ノ二切線ハ等長ナリ）

系　此ノ點ト中心トヲ結ブ線ハ二切線ノナス角ヲ二等分ス

L　切線ト切點ヲ過グル弦ノ夾ム角ハ弦ノ反對ノ側ニ立ツ角ニ等シ

系　上ノ逆ハ眞ナリ

M　二圓ノ半徑ヲ r, r' トシ中心距離ヲ d トスレバ

イ　$r+r'<d$ ナルトキ二圓ハ互ニ離ル

ロ　$r+r'=d$ ナルトキ二圓ハ互ニ外接ス

ハ　$r+r'>d>r\sim r'$ ナルトキ二圓ハ互ニ外接ス

ニ　$r\sim r'=d$ ナルトキ內切ス

ホ　$r\sim r'>d$ ナルトキハ他ノ內ニ在リ

ヘ　上ノ定理モ亦タ眞ナリ

3.　一直線ト一圓ノ關係ハ次ノ三ニ限ル。

A　交ハラズ　　　B　切ス

C　交ハル

二圓ノ關係ハ次ノ五ツノ場合ニ限ル。

A　一圓ガ他ノ外ニ在リテ交ラズ

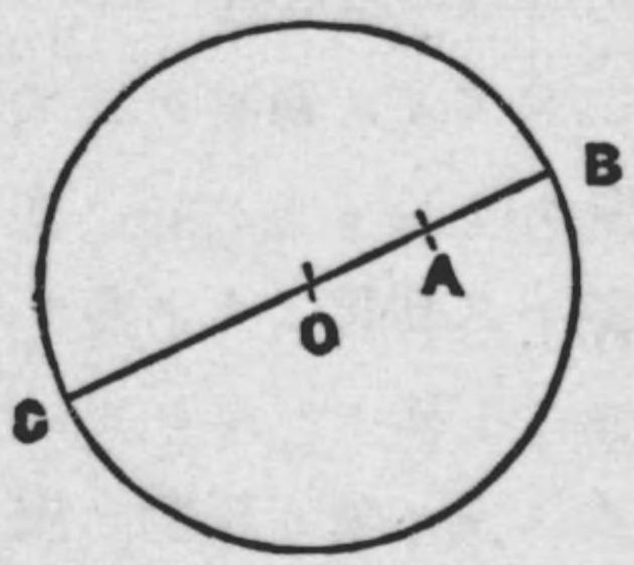
B　互ニ外切ス　　　C　交ハル

書込欄

D　互ニ內切ス

E　一ハ他ノ內ニ在リテ交ラザルトキ

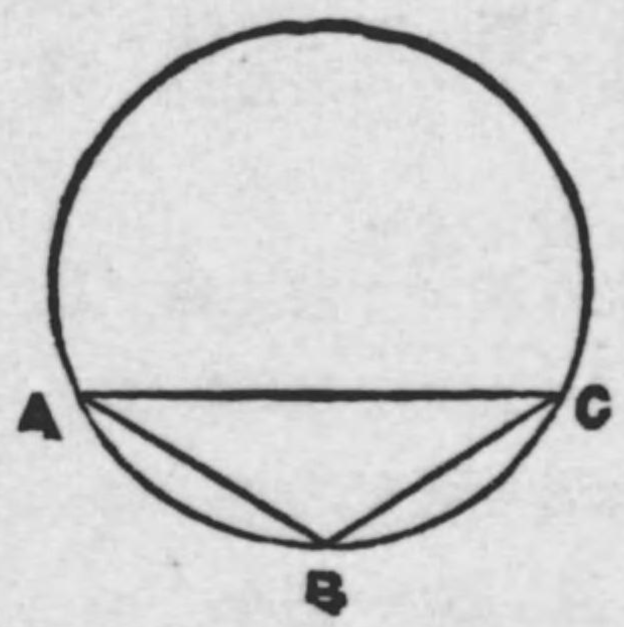
4.　圓ノ中心ハ唯一ツナリ。



題意　或ル圓ノ中心ヲ O トシ，O ニアラザル任意ノ點ヲ A トス。然ルトキ A ハ B，C ヨリ等距離ニ在ラズ

證明　O，A ヲ過グル直線ヲ過ギ直線ヲ引キ此線上ニテ O ノ兩側ニ OB=OC=(圓O ノ半徑) ヲトレ，然ルトキハ B，C ハ圓周上ニ在リテ O ハ線分 BC ノ中點

5.　弧ハ二倍スルモ，其弦ハ二倍トナラズ。



題意　2 弦 AB ≠ AC

證明　弧 AB=弧 BC

∴　弦 AB=弦 BC

三角形 ABC ニ於テ

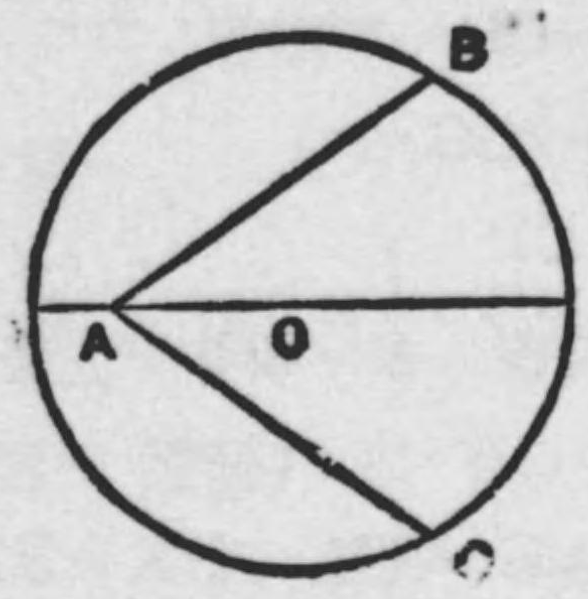
弦 AB+BC>弦 AC

∴　2 弦 AB>弦 AC

6.　圓內ノ一點ヨリ其ノ點ヲ過ギル直徑ト等角ヲ爲ス如ク兩側ニ直線ヲ引キ圓周ト交ラシムルトキ此二線分ハ相等シ。

題意　∠BAO=∠CAO　ナルトキ　AB=AC　ナリ

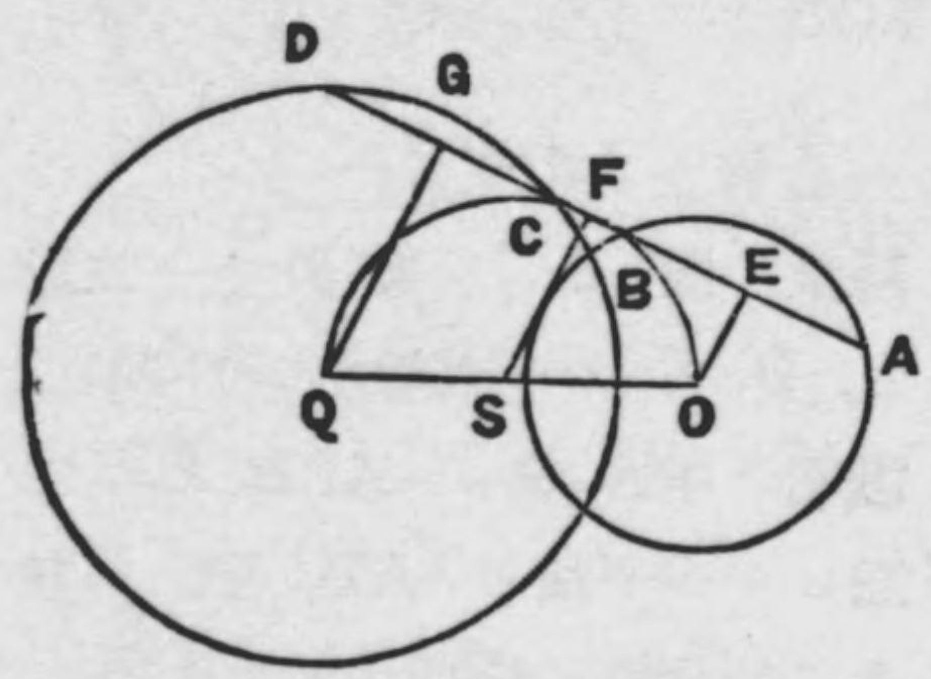
書込欄



證明　直徑 AO ヲ折目トシテ折リ返ストキハ下部ノ半圓ハ上部ト合シ ∠BAO=∠CAO ナル故 AB，AC ハ合ス，而シテ B，C ハ圓周上ニ在ル故合ス。

故ニ　AB=AC

7.　相交ハル二圓ノ中心ノ距離ヲ直徑トシテ圓ヲ畫キ，其直徑ノ同側ニ在ル二交點ヲ結ブ直線ガ原ノ各圓周ヨリ截リ取ラルヽ弦ノ部分ハ相等シ。



題意　相交二圓 O，Q ノ中心 O，Q ヲ結ビタル直線 OQ ヲ直徑トシテ圓 S ヲ畫キ OQ ノ同側ノ二交點ヲ通リ直線 AD ヲ引キ之ト圓周ト交ハル點ヲ A，D トスレバ

AB=CD ナリ

證明　O，S，Q ヨリ AD ニ垂線 OE，SF，QG ヲ引ク，然ルトキハ OE∥SF∥QG

且ツ　OS=QS ナル故

EF=GF ナリ；

尙ホ圓ノ弦ノ性質ヨリ　BF=CF ナリ。

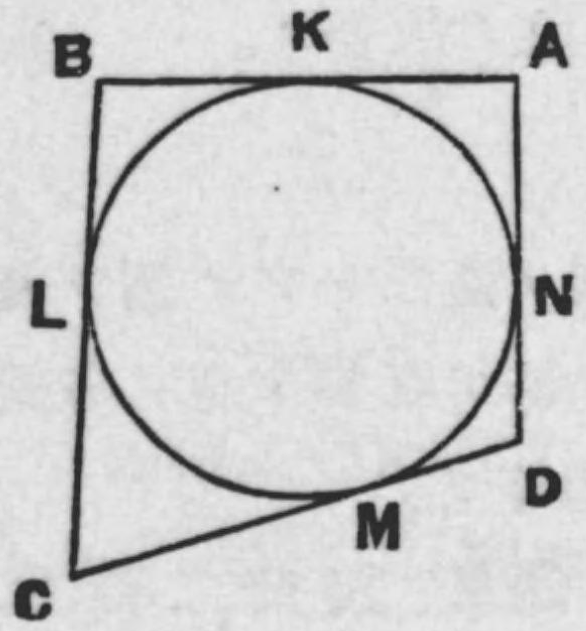
書込欄

故ニ　EB=CG

故ニ　2EB=2CG

即チ　AB=CD

8.　圓ニ外接スル四邊形ノ對邊ノ和ハ相等シ。(盛農山商)



題意　AK=AN,　BK=BL

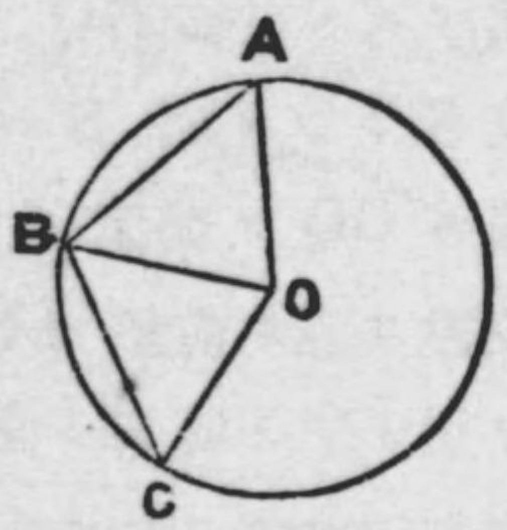
CL=CM, OM=ON

∴　AK+BK+CM+DM

=AN+BL+CL+DN

∴　AB+CD=BC+AD

9.　圓周上ノ三點ハ一直線上ニ在ラズ。



題意　圓 O ノ圓周上ノ三點 A, B, C ハ一直線上ニアラズ。

證明　中心 O ハ A, B, C ノ三點ヨリアリ故ニ AB, BC ノ垂直二等分線ノ交點ニアリ。

然ルニ A, B, C ノ三點ガ一直線上ニ在リトセバ A B, B C ノ垂直二等分線ハ交ハルコトナク依ツテ圓ヲナサズ。此レ假設ニモトル。

故ニ A, B, C ハ一直線上ニ在ラズ。

10.　三角形 ABC ガ圓ニ內切シ, DD′ ヲ夫々 $\overset{\frown}{BDC}$, $\overset{\frown}{BD'C}$ ノ中點トシ DE ヲ AB ニ垂線ナリト

書込欄

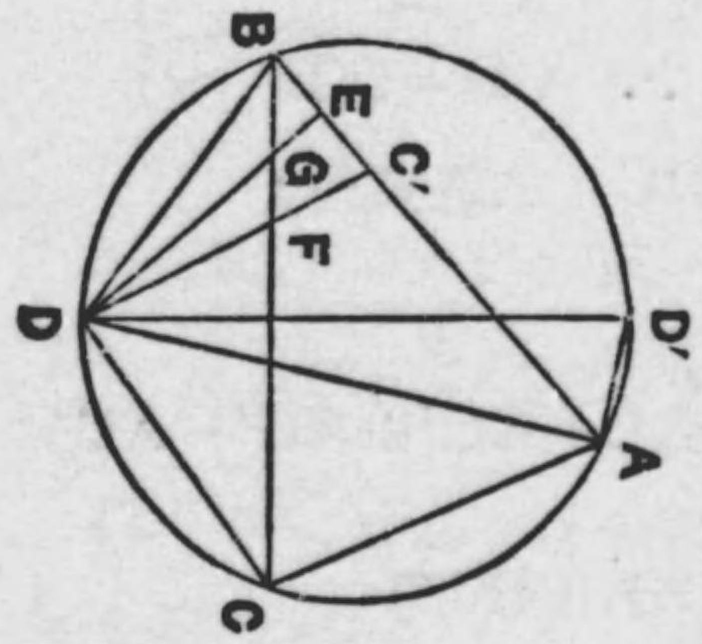
セバ次ノ各事項ヲ證セヨ (41 商船, 44 新醫)

第一　$\angle ADD'=\frac{1}{2}(\angle B\sim\angle C)$

第二　$BE=\frac{1}{2}(AB\sim AC)$, $AE=\frac{1}{2}(AB+AC)$

〔**第一　證明**〕　弧 BD+弧 BD′=弧 CD+弧 CD′

∴　DD′ ハ直徑ニシテ BC ヲ垂直ニ二等分ス BC トノ交リヲ F トスレバ



△BEG, △DFG ニ於テ

∠BEG=∠DFG (直角)

∠BGE=DGF (對頂角) ナル故

∠EBG=∠GDF ナリ

然ルニ ∠EBG=∠ADC

又 △ADD′, △BE ニ於テ

∠DAD′=∠BED,　∠AD′D=∠EBD

故ニ　∠EDB=∠ADD′ ナリ

依ツテ

$$\frac{1}{2}(\angle C-\angle B)=\frac{1}{2}(\angle BDA-\angle ADC)$$

$$=\frac{1}{2}(\angle BDE+\angle EDD'+\angle D'DA-\angle ADC)$$

$$=\frac{1}{2}(\angle BDE+\angle ADD')$$

書込欄

$=\frac{1}{2}\times 2\angle ADD'$

$=\angle ADD'$

即チ $\angle ADD'=\frac{1}{2}(\angle C\sim\angle B)$ ナリ

〔第二 證明〕 $\angle EDB$ ノ反對ノ側ニ之ト等シク $\angle EDC'$ ヲ作レバ $BD=DC'$, $BE=EC'$

又 $\angle ADC'=\angle ADC$

然ルニ $BD=CD$ $\therefore$ $CD=C'D$

$\therefore$ $\triangle ADC'=\triangle ADC$ (二邊夾角)

$\therefore$ $AC=AC'$

依ツテ $\frac{1}{2}(AB-AC)=\frac{1}{2}(BE+EC'+AC'-AC)$

$=\frac{1}{2}(BE+EC')$

$=\frac{1}{2}\times 2BE$

$=BE$

$\therefore$ $\frac{1}{2}(AB-AC)=BE$

又 $AE=AC'+C'E$

$=\frac{1}{2}(2AC'+2C'E)$

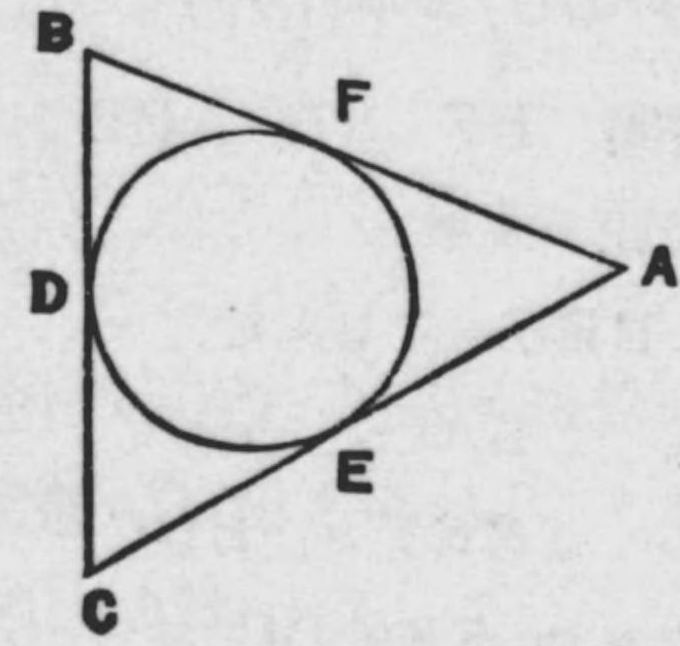
$=\frac{1}{2}(AC+AC'+C'E+EB)$

$=\frac{1}{2}(AC+AB)$

依ツテ $AE=\frac{1}{2}(AC+AB)$

書込欄

11. 三角形ノ一頂點ヨリ內接圓ノ接點ニ至ル長サハ其二邊ノ和ト底邊ノ差トノ半ニ等シ。



證明 $\triangle ABC$ ノ邊 BC, CA, AB ト內接圓トノ切點ヲ D, E, F トス

$AF=AB-BF=AB-BD$

$AE=AC-CE=AC-CD$

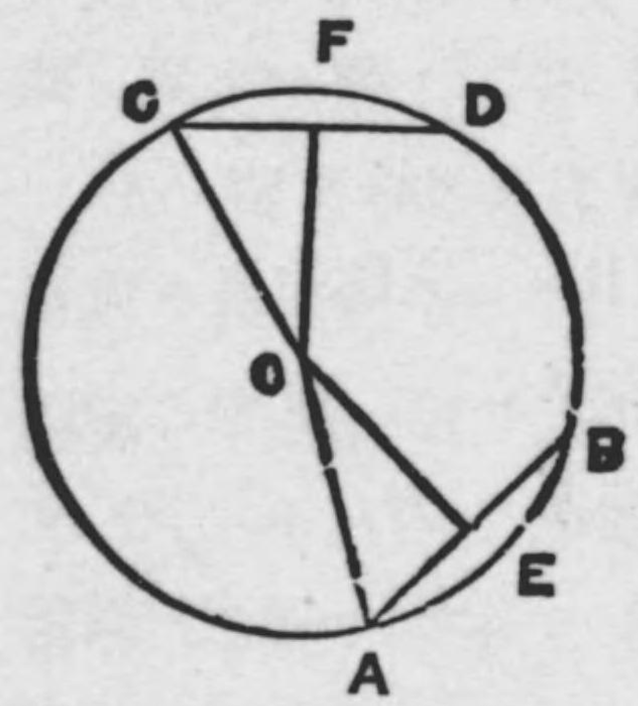
$AF+AE=AB+AC-BC$

然ルニ $AF=AE$

$\therefore$ $2AF=AB+AC-BC$

$AF=\frac{1}{2}(AB+AC-BC)$

12. 圓ノ中心ヨリ等距離ニ在ル二弦ハ相等シキコトヲ證セヨ。



題意 圓 O ノ二弦 AB, CD ト中心 O トノ距離 OE, OF ヲ相等シトス。然ルトキハ $AB=CD$ ナルコトヲ證セントス

證明 半徑 OA, OC ヲ引ケバ $\triangle OAE$, $\triangle OCF$ ニ於テ $OA=OC$, $OE=OF$, $\angle OFC=\angle OEA$

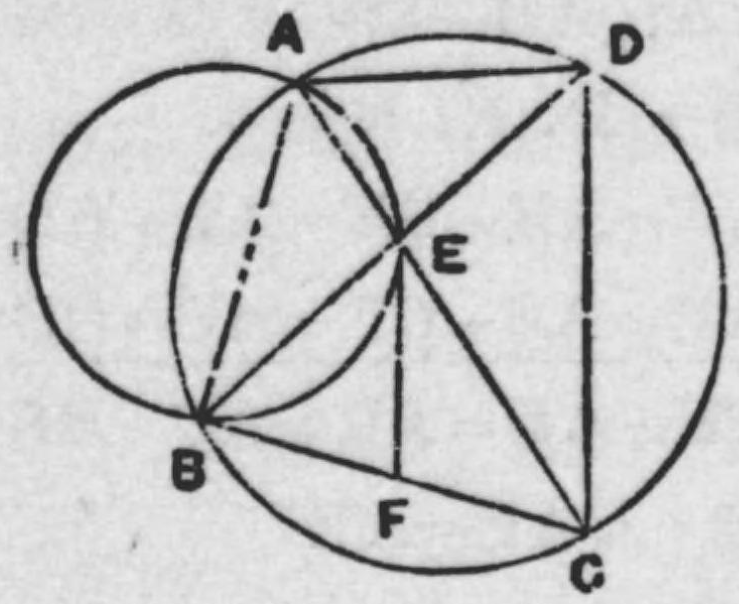
$\therefore$ $\triangle OFC=\triangle OEA$ (二邊相等シキ直角三角形)

$\therefore$ $AE=CF$ 然ルニ $AB=2AE$, $CD=2CF$

$\therefore$ $AB=CO$

書込欄

13. 圓ニ內接スル四邊形 ABCD ノ對角線 AC, BD ノ交點ヲ E トシ, A, B, E ノ三點ヲ過ギル圓ニ切線 EF ヲ引ケバ EF ハ DC ニ平行ナリ。



證明 EF ハ圓 ABE ノ切線ナル故

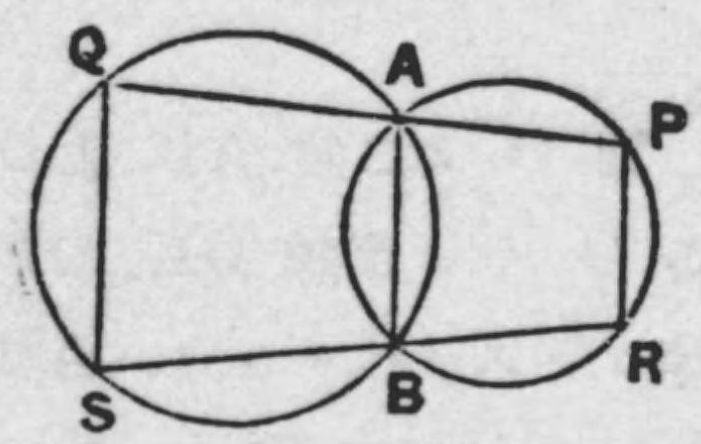
$\angle BEF=\angle BAE$

又 $\angle BAC=\angle BDC$

$\therefore\ \angle BEF=\angle BDC$

依ツテ $EF /\!/ DC$ ナリ

14. 相交二圓ノ二交點 A, B ヲ過リ直線 PAQ, RBS ヲ引キ, 圓周ト P, Q, R, S ニテ出會ハシムレバ $PR /\!/ QS$ ナリ。



證明 (A, B, P, R) (A, B, S, Q) ハ何レモ同一圓周上ニアルヲ以テ

$\angle APR=\angle ABS$

然ルニ $\angle ABS+\angle AQS=2\angle R$

$\therefore\quad \angle AQS+\angle APR=2\angle R$

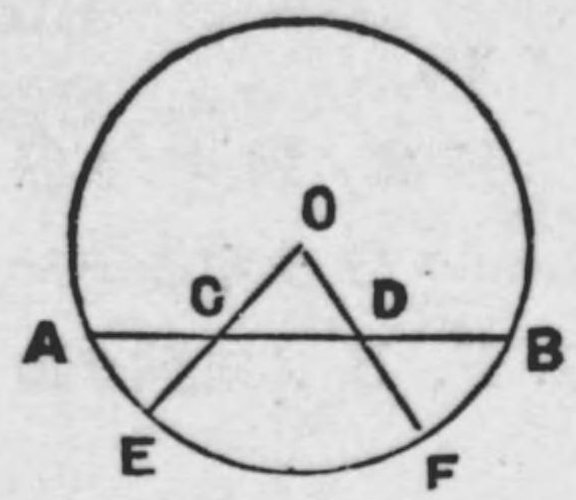
$\therefore\quad PR /\!/ QS$

15. 圓ノ弦ヲ三等分スル二ツノ半徑ハ, 其弦ニ對スル弧ヲ三等分セズ。

題意 圓 O ノ弦 AB ヲ C, D ニテ三等分シ C, D ヲ過ギル半徑ヲ OE, OF トスレバ, E, F ハ

書込欄

弧 AB ノ三等分點ナラズ。



證明 $\triangle AOD$ ニ於テ

$AC=CD,\ OA>OD$

$\therefore\ \angle AOC<COD$

$\therefore$ 弧 AE<弧 EF

16. 圓ノ中心ト弦ノ中點トヲ過ケル直線ハ其弦ニ垂線ナリ。

題意 O 圓ノ弦 AB ノ中點ヲ C トス, 然ルトキハ $OC\perp AB$ ナリ。

證明 半徑 OA, OB ヲ引ク

$\triangle OAC,\ \triangle OBC$ ニ於テ

$OA=OB,\ AC=BC$ OC ハ共通

$\therefore\ \triangle OAC\equiv\triangle OBC$

$\therefore\ \angle OCA=\angle OCB$

$\therefore\ OC\perp AB$

17. 圓ノ中心ヲ過ギテ弦ニ引ケル垂線ハ其ノ弦ノ中點ヲ過ケ。

題意 O 圓ノ弦ヲ AB トシ且ツ $OC\perp AB$ トスレバ OC ハ AB ノ中點ヲ過ケベシ。

證明 AB ノ中點ヲ D トスレバ OD ハ唯一ニシテ, OC モ又唯一ナリ。

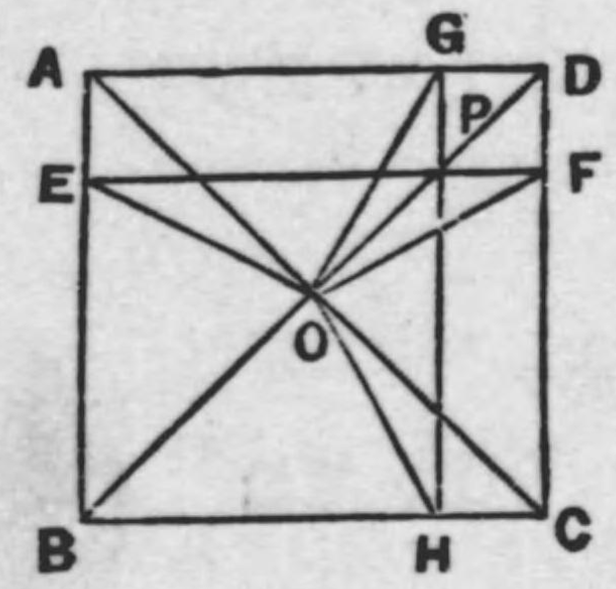
然ルニ $OD\perp AB$ ナレバ, OC ハ OD ト合致セザルベカラズ。卽チ OC ハ AB ノ中點 D ヲ過ケ。

18. 正方形ノ對角線上ノ任意ノ一點ヲ過ギ邊ニ平

書込欄

行ナル二直線ヲ引ケバ此二線ガ邊ト交ハル四點ハ對角線ノ交點ヲ中心トスル一圓周上ニアリ。

題意 正方形 ABCD ノ BD 上ニ任意ノ點 P ヲ取リ, EF∥AD, GH∥AB ナラシムレバ O ヲ中心トシ OE ヲ半徑トシテ作ル 圓周ハ G, F, H ノ三點ヲ通過ス。



證明 △AOE, △DOF ニ於テ

ABCD ハ正方形ナル故

OA=OB

AD∥EF ∴ AE=DF

又 $\angle OEF=\frac{1}{2}\angle R=\angle ODF$

∴ △OAE≡△ODF ∴ OE=F......(1)

同樣ニ OG=OF ....(2)

平行四邊形 GPFD ハ $\angle GDP=\frac{1}{2}\angle R$ ナル故ニ正方形ナリ。

∴ GD−DF, OD ハ共通, ∠ODG=∠R=∠ODF

∴ △ODG≡△ODF

∴ OG=OH ....(3)

(1)(2)(3) ヨリ OE=OG=OF=OH

故ニ O ヲ中心トシ OE ヲ半徑トスル圓周ハ G, F, H, E ノ四點ヲ通過ス。

19. 平行セル二絃ノ夾ム弧ハ相等シ。

書込欄

題意 弦 AB∥弦 CD ナレバ $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$ ナリ。

證明 AB∥CD

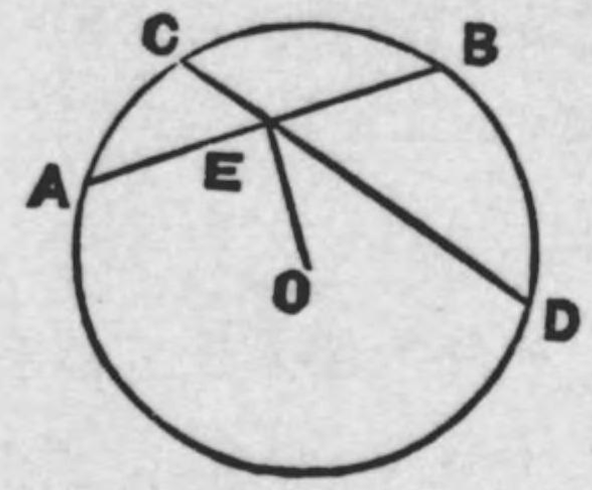
∴ ∠ABC=∠BCD

故ニ等角ニ對スル圓周角相等シ

依ッテ $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$

20. 相交ハル二弦ノ交點ハ兩方ノ弦ノ中點トナルコトナシ。

題意 O 圓ノ弦 AB, CD ノ交點ヲ E トスレバ AE=BE, CE=DE トナルコトナシ

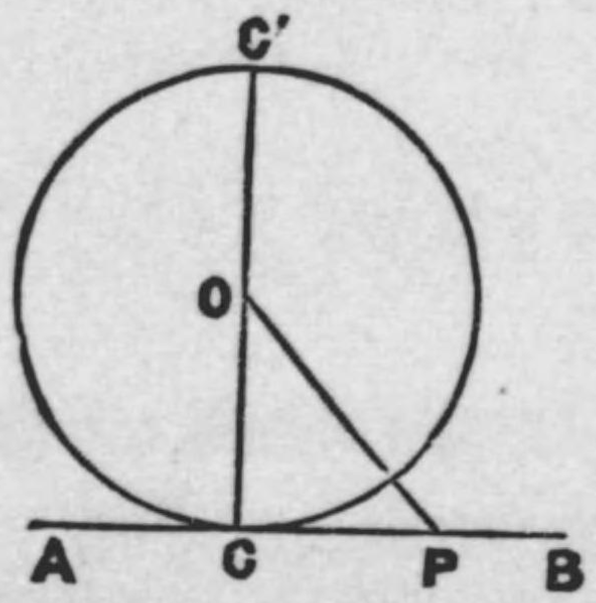


證明 若シ E ハ AB ノ中點ナラバ OE∠AB 而シテ若シ E ガ CD ノ中點ナラバ OE∠CD ナリ

然ラバ E ヲ過ギ EO= 二箇ノ垂線 AB, CD ヲ作ルコトトナリ不合理ナリ

故ニ E ハ兩方ノ中點トナルコトナシ

21. 直徑ノ一端ヨリ之ト直角ニ引ケル直線ハ圓ニ切ス。



證明 圓 O ノ直徑 C′OC ノ一端 C ニ於テ OC⊥AB ニ直線 AB ヲ引キ, AB 上ニ任意ノ點 P ヲトレバ

OP>OC (半徑)

故ニ P ハ圓外ニ在リ。即チ

書込欄

AB ハ一點 C ノ外ハ圓ト交ラザレバ AB ハ圓ニ接ス

22. 圓ノ弦ト其ノ一端ニ於ケル切線トノナス角ハ隣リノ弓形ノ含ム角ニ等シ。

題意 圓 ABE ノ弦 AB ノ一端 A ニ於ケル切線ヲ CD トスレバ $\angle BAC$, $\angle BAD$ ハ夫々 $\overset{\frown}{AEB}$, $\overset{\frown}{AFB}$ ノ含ム角ニ等シ。

證明 直徑 AE ヲ引カバ $AE \perp CD$ ナリ

$\therefore\ \angle BAC+\angle BAE=\angle R$

又 BE ヲ引クトキハ $\angle ABE=\angle R$ ナレバナリ

$\angle AEB+\angle BAE=\angle R$

$\therefore\ \angle BAC+\angle AEB$

又 $\angle BAD+\angle BAC=2\angle R$ ニシテ $\overset{\frown}{AFB}$ ノ含ム角モ $\angle AEB$ ノ補角ナリ。

故ニ $\angle BAD$ ハ $\overset{\frown}{AFB}$ ノ含ム角ニ等シ

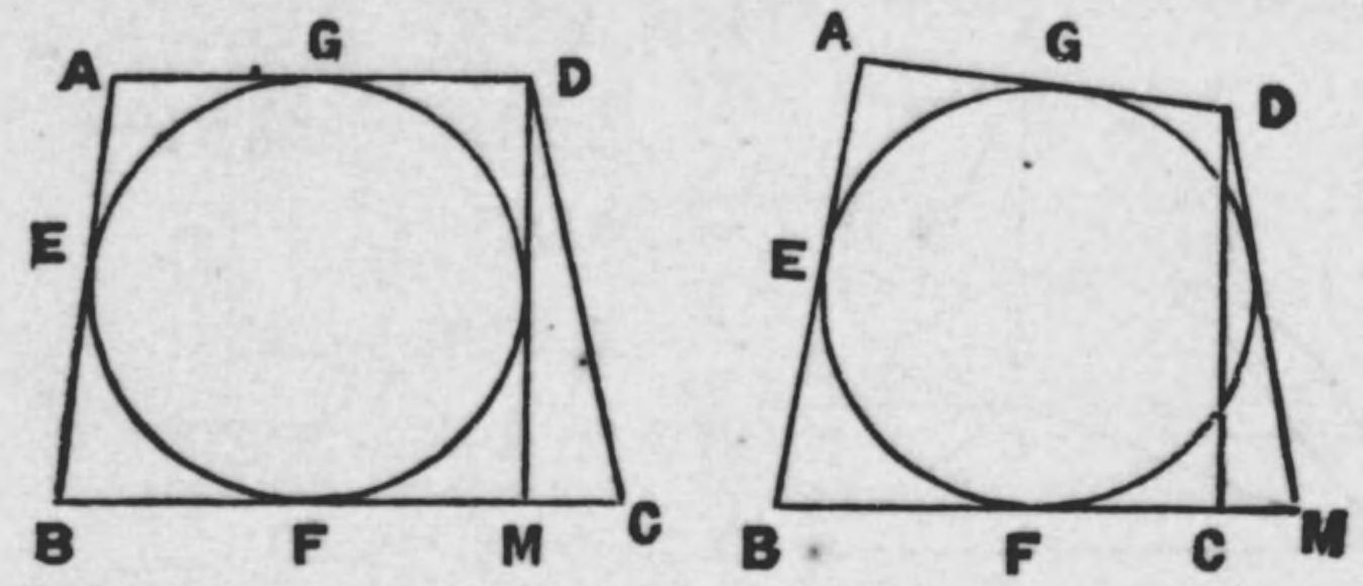
23. 四邊形ノ對邊ノ和ガ相等シキトキハ，此四邊形ハ圓ニ外切ス。(盛農山商)

題意 四邊形 ABCD ニ於テ $AB+CD=BC+DA$ ナルトキハ ABCD ハ圓ニ外切ス。

證明 $\angle DAB$, $\angle ABC$ ノ二等分線ガ相交ル點ヲ O トス

O ヲ中心トシ O ト AB トノ距離ヲ半徑トシテ圓ヲ作ルトキハ AB, BC, DA 及ビ CD ニ切スベシ

書込欄



若シ O ガ CD ニ接セズトシテ C ヨリ圓 O ニ切線 CE ヲ引ケバ

$AB+CE=BC+EA$............(1)

然ルニ $AB+CD=BC+DA$....(2)

(2) ヨリ (1) ヲ減ジテ

$CD-CE=DA-EA=DE$

是レハ背理ナリ

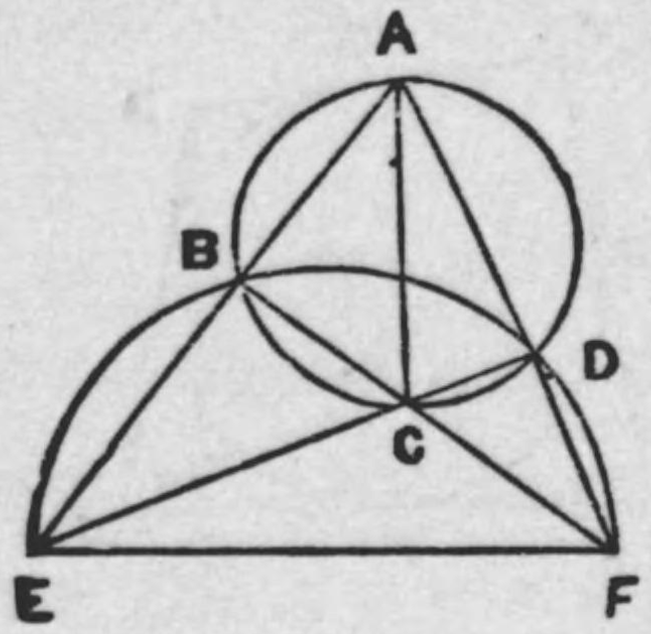
故ニ圓 O ハ CD ニモ切ス。

即チ ABC ハ圓 O ニ外接ス。

24. 一ツノ圓ニ內接スル四邊形 ABCD ノ二邊 AB, DC ヲ延長シテ E ニ交ラシメ，又 BC, AD ヲ延長シテ F ニ交ラシム，若シ B, E, F, D ヲ過ギテ一圓周ヲ描キ得レバ，AC ハ初ノ圓ノ直徑，EF ハ第二ノ圓ノ直徑ナリ。

證明 同弧ニ對スル圓周角 $\angle EBF=\angle EDF$ 然ルニ ABCD ハ圓ニ內接スル四邊形ナレバ

書込欄



外角 EBF$=\angle$ADC

$\therefore$ $\angle$EDF$=\angle$EBF

$=\angle$ADC

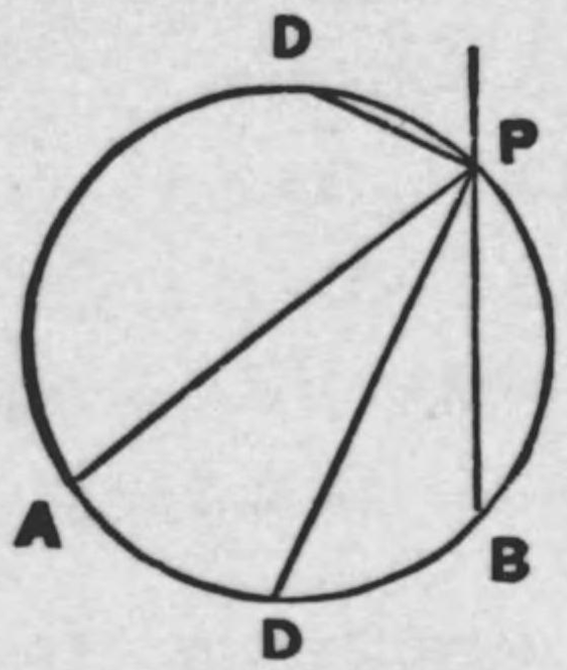
$\therefore$ $\angle$ADC$=\angle$R

依ツテ AC ハ直徑

又 $\angle$ADC$=\angle$R

依ツテ EF ハ直徑

25. AB ハ一ツノ圓ノ定マレル弦, P ハ圓周上任意ノ點ナリ。AP ト BP トガナス角ヲ二等分スル直線ハ皆ナ二定點ノ内ノ一ヲ過ギル。



證明 $\angle$APD$=\angle$DPB

$\therefore$ $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{DB}$

PD, P′D ハ直線上ノ接角ヲ二等分スルガ故ニ

$\angle$DPD′$=\angle$R ナリ

$\therefore$ DD′ ハ直徑ナリ

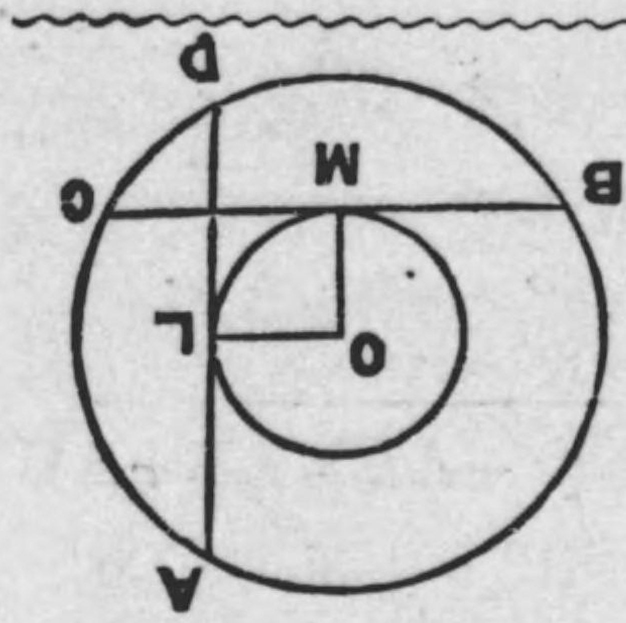
然ルニ $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{DB}$ ルヲ以テ $\overset{\frown}{AD'}=\overset{\frown}{D'B}$

依ツテ二等分線ハ弧ノ中點ヲ過ギル。

26. 等長ノ弦ハ一ツノ同心圓ニ切ス。

題意 圓 O ノ弦 AD ニ等長ニシテ任意ノ位置ニ在ル弦ヲ BC トスレバ O ヲ中心トシテ AD ニ切スル圓ハ BC ニ切ス。

書込欄



證明 中點ヨリ弦ヘノ距離ヲ OL, OM トスレバ

AD$=$BC $\therefore$ OL$=$OM

故ニ O ヲ中點トシ OL ヲ半徑トスル圓ハ點 M ヲ通過ス, 而シテ OM$\perp$BC ナリ。

故 BC ハ M ニ於テ其ノ圓ニ切ス

依ツテ AD ニ等長ナル任意ノ弦 BC ハ同心圓 LM ニ切ス

27. 三角形ノ一頂點ヨリ圓接圓ノ接點ニ至ル長サハ其二邊ノ和ト底邊ノ差トノ半(卽チ三角形ノ半周ト底邊ノ差)ニ等シ。

又一頂點ヨリ傍接圓ノ切點ニ至ル長サハ三角形ノ半周ニ等シ

證明 $\triangle$ABC ノ邊 BC, CA, AB ト內接圓及ビ傍接圓ノ切點ヲ D, E, F 及ビ D′, E′, F′ トス。

$$\begin{array}{l} AF=AB-BF=AB-BD \\ AE=AC-CE=AC-CD \\ \hline AF+AE=AB+AC-BC \end{array}$$

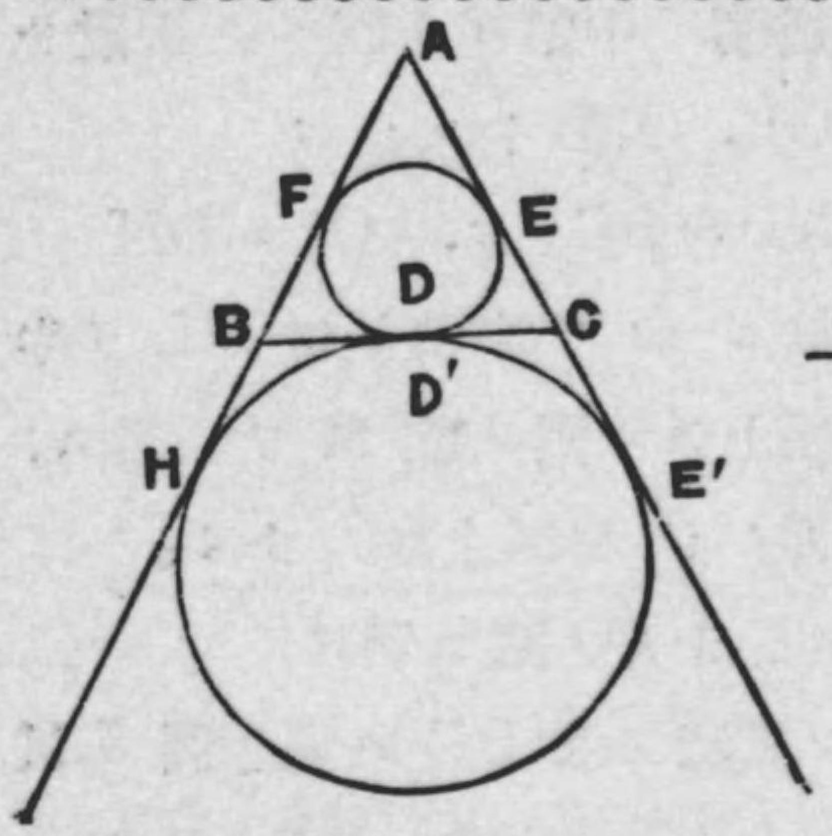
然ルニ AF$=$AE

$\therefore$ $2AF=AB+AC-BC$

$=$全周$-2BC$

$\therefore$ $AF=AE=\frac{1}{2}(AB+AC-BC)$

書込欄



$=$半周$-BC$

同様ニ

$AF'=AB+BD'$
$AE'=AC+CD'$

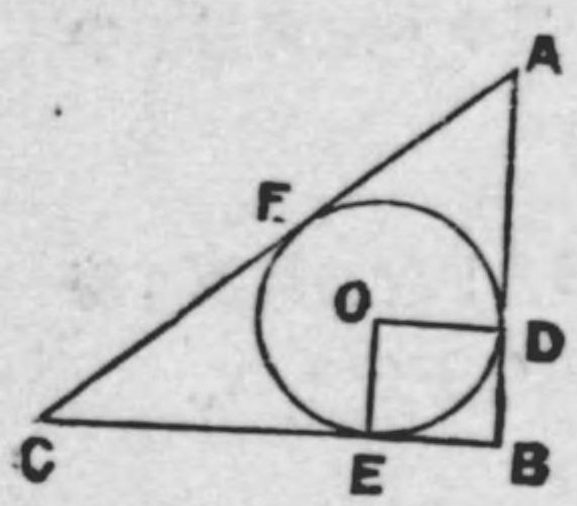
$AF'+AE=AB+AC$
$+BC=$全周

然ルニ $AF'=AE'$

$\therefore\ AF'=AE'=$半周

28. 直角三角形ノ斜邊ト他ノ二邊ノ和トノ差ハ一定ナリ。

題意 AC ヲ斜邊トスル直角三角形 ABC ニ於テ $(AB+BC)-AC$ ハ一定ナリ。



證明 內接圓ノ中心ヲ O トシ AB, BC, AC ノ切點ヲ D, E, F トスレバ,

$AD=AF,\ CE=CF$

$\therefore$ OEBD ハ正方形ナリ

$\therefore\ AB+BC-AC=(AD+BD)+(BE+CE)$
$-(AF+CE)$
$=DB+BE$
$=DO+EO=$直徑

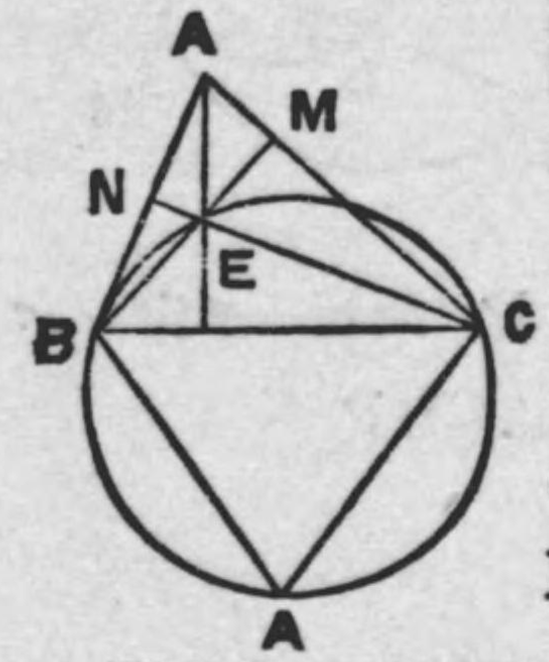
故ニ一定ナリ

29. 三角形ノ垂心ト二ツノ角頂ヲ過ギル圓ハ三

書込欄

ツ共ニ相等シ。

題意 三角形ノ垂心ヲ E トスレバ $\triangle EBC,\ \triangle ECA$ $\triangle EAB$ ノ外接圓ハ相等シ



證明 茲 BA′ ヲ作リ

$\angle ABC=\angle A'BC$ トスレバ

$\angle EMA=\angle R=\angle ANE$

$\therefore\ \angle BAC+\angle MEN=2\angle R$

$\therefore\ \angle BAC+\angle BEC=2\angle R$

BA′CE ハ內接四邊形ナレバ

$\angle BA'C+\angle BEC=2\angle R$

$\therefore\ \angle BAC=\angle B'A'C$

$\therefore\ \angle BCA=\angle BCA'$

$\therefore\ \triangle ABC\equiv\triangle A'BC$

故ニ BA′CE ノ外接圓ハ △ABC ノ外接圓ニ等シ

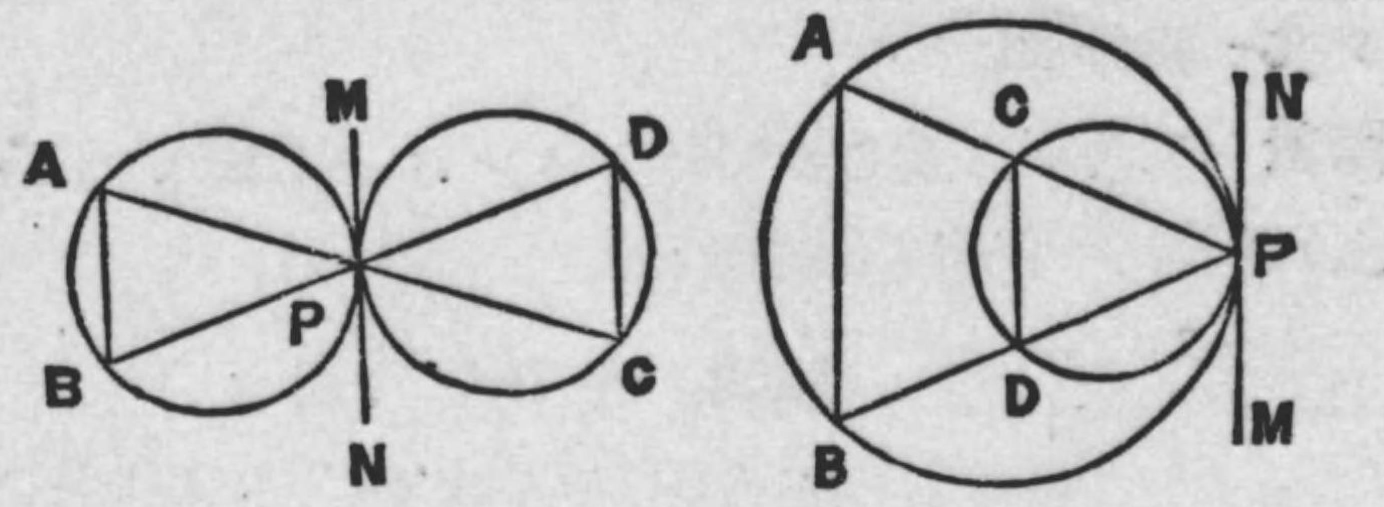
同理ニテ △ECA, △EAB ノ外接圓モ △ABC ノ外接圓ニ等シキガ故ニ三圓相等シ。

30. 相切スル二圓ノ切點ヲ過ギル任意二直線ガ其ノ兩圓周ヨリ截リ取ル弧ハ平行ス (仙醫、盛農)

注意 相切スル二圓ニハ必ズ內切ト外切トアルコトヲ忘ルベカラズ。

題意 二圓ノ切點ヲ P トシ, 截リ取ル弧ヲ $\overparen{AB},\ \overparen{CD}$ トスレバ $AB\parallel CD$ ナリ。

書込欄



證明 P ニ於テ二圓ニ共通切線 MN ヲ作レバ

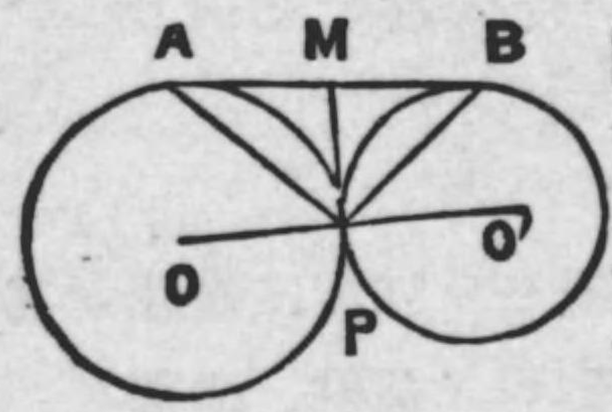
$\angle ABP=\angle APM=\angle CPN=\angle CDP$

$\therefore\ \angle ABP=\angle CDP$

$\therefore\ AB \parallel CD$

31. 外切二圓ニ共通ナル切線ノ切點ヲ A, B トスレバ AB ヲ直徑トスル圓ト切點ニ於テ中心ヲ過ギル直線ニ切ス。

題意 切點ヲ P, 兩中心ヲ O, O′ トスレバ ABヲ直徑トスル圓ハ P ヲ過ギテ P ニ於テ OO′ ニ切ス



證明 P ニ於ケル共通切線ガ AB ト M ニ交ハルトセバ

$MA=MP=MB$

故ニ P ヲ過ギル

次ニ $\angle OPM=\angle R=\angle APB$

$\therefore\ \angle OPA=\angle MPB$

然ルニ $\angle MPB=\angle MBP$

$\therefore\ \angle OPA=\angle MBP$

書込欄

依ツテ OO′ ニ切ス

32. △ABC ノ垂心ヲ E, 直徑ヲ BD, 中心 O ヨリ BC ヘノ垂線ノ足ヲ H, AE ト BC, $\overset{\frown}{BC}$ ノ交點ヲ夫々 F, G トスレバ,

(I) $AE=DC$

(II) $AE=2OH$ (盛農)

(III) $EF=FG$

I 證明 BD ガ直徑ナル故

$\angle BCD=\angle R$

$\therefore\ DC\perp BC$ 又 $AE\perp BC$

$\therefore\ AE\parallel DC$

同樣ニ $DA\perp AB$, 又 $CE\perp AB$

$\therefore\ CE\parallel DA$

∴ AECD ハ平行四邊形ナリ

依ツテ $AE=DC$

II 證明 $OH\perp BC$, $DC\perp BC$

$\therefore\ OH\parallel DC$

而シテ O ハ BD ノ中心ナリ

$\therefore\ 2OH=DC$ 即チ $AE=2OH$

III 證明 BE, AC ノ交點ヲ K トスレバ

$\angle BKA=\angle R$, $\angle BFA=\angle R$

故ニ A, B, F, K ハ圓周上ニ在リ

依ツテ左圖ニテハ $\angle FBK=\angle FAK=\angle CAG$

右圖ニ於テハ $\angle FBK=\angle FAK$ ノ外角ニ $\angle CAG$

書込欄

何レニテモ $\angle CAG=\angle CBG$

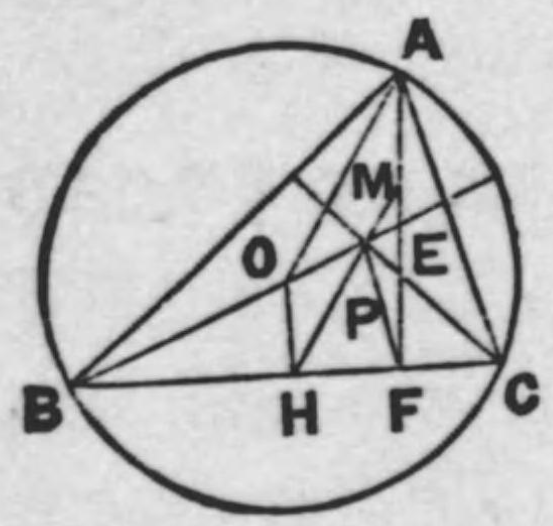
$\therefore\ \angle FBK=\angle CBG$

故ニ $\triangle BEG$ ノ頂角ノ二等分線 BF ガ底 EG ニ垂線トナル

$\therefore\ EF=FG$

33. 外接圓ノ中心ト垂心トノ中點ヲ中心トシ外接圓ノ半徑ヲ直徑トシテ畫ク圓ハ，邊ノ中點，垂線ノ足，頂點ヨリ垂線マデノ中點，卽チ九點ヲ通過ス。

證明 前題ト同樣ノ圖ニ於テ AE ノ中點ヲ M トスレバ



$AE=2OH$

$\therefore\ AM \mathrel{\underline{\parallel}} OH,\quad ME \mathrel{\underline{\parallel}} OM$

$\therefore\ AO=MH$

又 $OP=PE,\quad PH=PM$

故ニ P ヲ中心トシ $MH=AO$ ヲ直徑トスル圓周ハ H, M ヲ通過ス

然シテ MHF ハ直角三角形ニシテ P ハ斜線ノ中點ナリ

$\therefore\ PF=PH=PM$

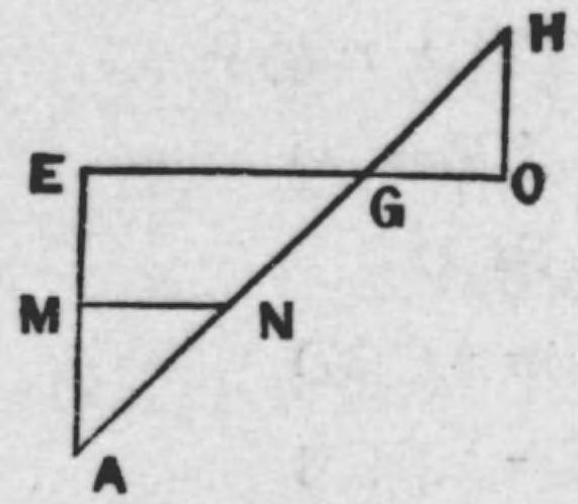
故ニ OE ノ中點 P ヲ中心トシ，外接圓ノ半徑 OA ノ半ナル PF ヲ半徑トスル圓ハ邊ノ中點 H，垂足 F，頂點ト垂心ノ中點 M ヲ通過ス

同樣ニ其ノ圓ハ他ノ二邊ノ中點其他ノ點ヲ通ル

34. 三角形ノ外心，垂心，重心及ビ九點圓ノ中心ハ

書込欄

一直線上ニアリ。



證明 前題ノ圖ニヨリ外心，垂心，九點圓ノ中心ハ一直線上ニアリ

次ニ $MN \parallel EG$ トスレバ M ハ AE ノ中點ナル故 N ハ AG ノ中點ナリ

然シテ $AE \mathrel{\underline{\parallel}} 2OH$

$\therefore\ AM \mathrel{\underline{\parallel}} OH,\quad MN \parallel OG$

$\therefore\ \triangle AMN \equiv \triangle HOG$

$\therefore\ GH=AN=NG$

$\therefore\ AG=\frac{2}{3}AH,$

然ルニ AH ハ中線ナル故 G ハ $\triangle ABC$ ノ重心ニシテ OE 線上ニ在リ

35. 正三角形 ABC ニ外接スル圓周上任意ノ點ヲ D トスレバ線分 AD, BD, CD ノ內最大ナルモノハ他ノ二ツノ和ニ等シ。

D ガ圓周外ニ在ラバ如何

題意 D ガ $\overset{\frown}{BC}$ ノ上ニ在ルトキ $AD=BD+CD$ ナリ

證明 $\angle ACD>\frac{2}{3}\angle R$

$\angle DAC=\frac{2}{3}\angle R$

$\therefore\ AD>CD$

書込欄

CD=AE トスレバ

△ABE, △CBD ニ於テ

AB=BC, AE=CD

∠BAE=∠BCD

∴ △ABE≡△CBD

∴ ∠ABE=∠DCB

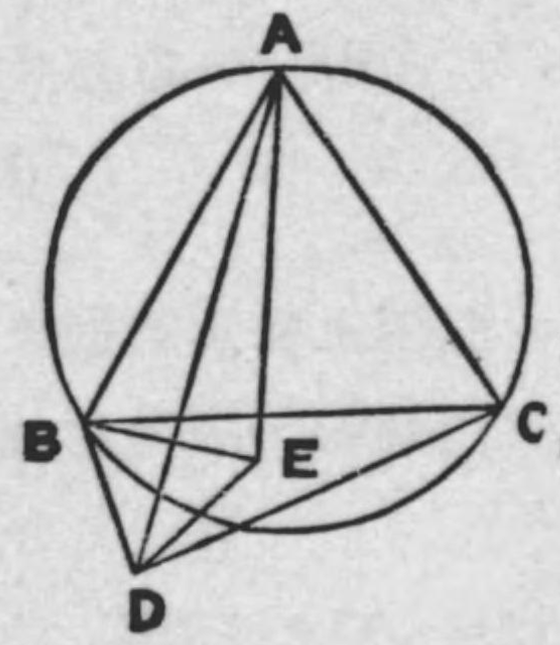
從ツテ $\angle DBE=\angle ABC=\frac{2}{3}\angle R$

$\angle BDA=\angle ACB=\frac{2}{3}\angle R$

故ニ △BDE モ亦正三角形トナリ

BD=DB

∴ AD=AE+ED=CD+BD



D ガ圓外ニ在ル場合ニハ

∠BAE=∠BCD, ∠ABE=∠CBD トスレバ AB=BC

∴ △ABE≡△DBC

從ツテ BE=BD, AE=DC,

$\angle EBD=\angle ABC=\frac{2}{3}\angle R$

故ニ二等邊三角形ノ頂角ガ直角ノ三分ノ二ナルトキハ正三角形ナル故ニ DB=DE

∴ DB+DC=DE+EA>AD

∴ AD<DB+DC

36. 任意ノ三角形 ABC ノ各邊上ニ原形ト反對ノ側

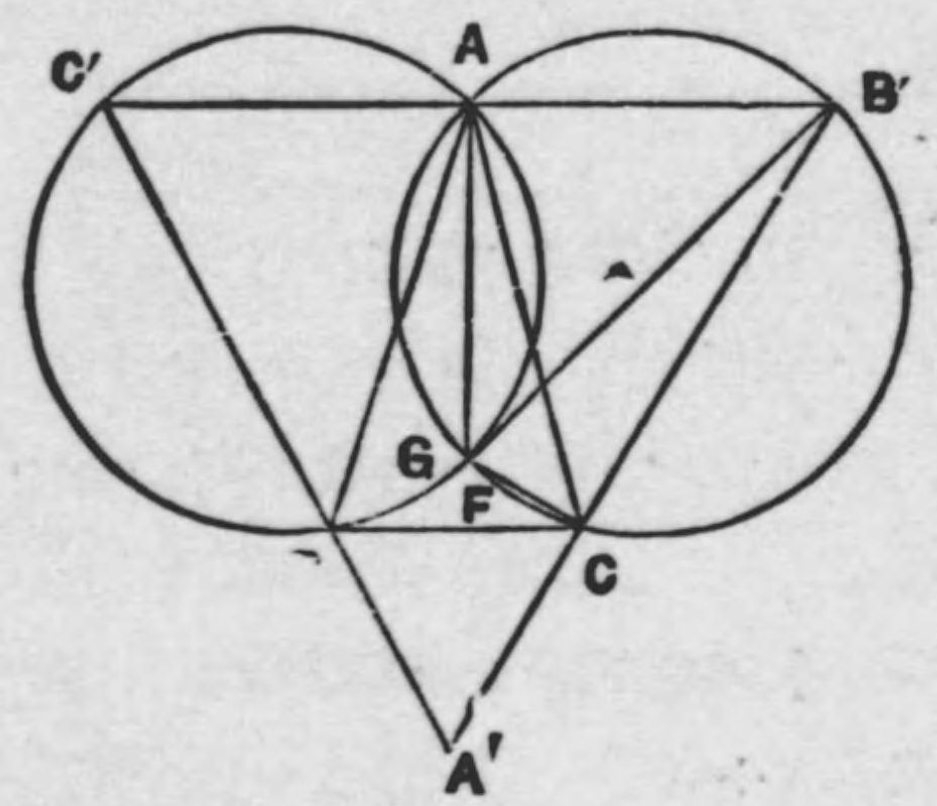
書込欄

ニ正三角形 A′BC, B′AC, C′AB ヲ作ルトキハ,

(I) 其ノ三ツノ三角形ノ外接圓ハ一點ニ會ス

(II) AA′, BB′, CC′ ハ等長ニシテ外接圓ノ交點 F ニテ會ス

(III) 交點 F ハ三點 A, B, C ヘノ距離ノ和ガ最小ナル點ナリ



I 證明 △B′AC, △C′AB ノ外接圓ノ交點ヲ F トスレバ

∠AFC+∠B′=2∠R

∠AFB+∠C′=2∠R

B′+C′=∠BFC

然ルニ $\angle B'=\angle C'=\angle A'=\frac{2}{3}\angle R$

∴ ∠B′+∠C′+∠A′=2∠R

∴ ∠BFC+∠A′=2∠R

故ニ △A′BC ノ外接圓ハ F ヲ通過ス

II 證明 $\angle CFB'=\angle CAB'=\frac{2}{3}\angle R$

∴ ∠BFC+CFB′=2∠R′

故ニ BF, FB′ ハ一直線ナリ, 卽チ BB′ ハ F ヲ通過ス

書込欄

同樣ニ CC', AA' モ亦 F ヲ過ル

次ニ $\triangle ACA'$, $\triangle BCB'$ ニ於テ

$\angle BCA'=\frac{2}{3}\angle R=\angle ACB'$

$\therefore\ \angle ACA'=\angle BCB'$

$AC=CB'\quad CA'=C'B$

$\therefore\ \triangle ACA'\equiv\triangle BCB'$

$\therefore\ AA'=BB'$

同樣ニ $BB'=CC'$

III **證明** 前題ニヨリ $FB'=FA+FC$

$\therefore\ FA+FB+FC=BB'$

茲ニ任意ノ點ヲ G トスレバ, G ハ三圓中何レカノ圓外ニ在ルベシ

故ニ G ヲ圓 $AB'C$ 外ノ點トスレバ

前題ニヨリ $GB'<GA+GC$

$B'B<GB+GB'$

$\therefore\ B'B<GB+GA+GC$

$\therefore\ FA+FB+FC<GA+GB+GC$

依ッテ $FA+FB+FC$ ハ最小ナリ

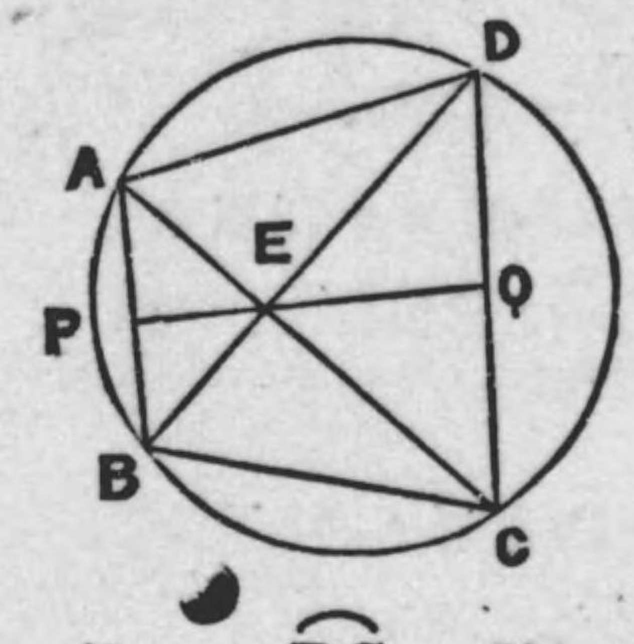
37. 圓ニ內接スル四邊形ノ對角線ガ直交スルトキ其ノ交點ヨリ一邊ヘ引ケル垂線ノ延長ハ之ニ對スル邊ヲ二等分ス。(**ブラーメグプタ**ノ定理)(盛農.陸經.高等其他)

題意 四邊形 ABCD ノ對角線ノ交點 E ヲ過ギ AB

書込欄

ニ引ク垂線ヲ EP, PE ト DC トノ交點ヲ Q トスレバ

$QD=QC$



證明 $\angle DEQ=\angle PEB$

$\angle EPB=\angle R$

$\therefore\ \angle PEB+\angle PBE=\angle R$

$\angle AEB=\angle R$

$\therefore\ \angle EAB+\angle ABE=\angle R$

$\therefore\ \angle DEB=\angle EAB$

然ルニ $\overset{\frown}{BC}$ ニ對スル圓周角 $\angle BAC=\angle BDC$

$\therefore\ \angle DEQ=\angle PEB=\angle BAC=\angle BDC$

$\therefore\ \angle DEQ=\angle BDC\qquad\therefore\ DQ=QE$

次ニ $\angle DEQ+\angle QEC=\angle R=\angle EDQ+\angle DCE$

$\angle DEQ=\angle BDC\qquad\therefore\ \angle QEC=\angle DCE$

$\therefore\ QE=QC$

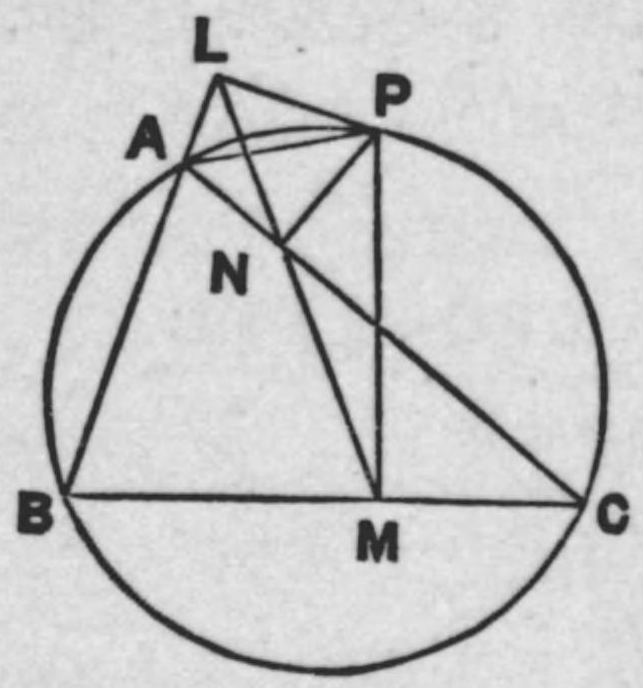
依ッテ $QC=DQ$

38. 三角形ノ外接圓周上任意ノ點ヨリ三邊或ハ其ノ延長線ニ引ク垂線ノ足ハ一直線上ニアリ。(**シムソン線**)(海機.東高師.陸經其他)

題意 $\triangle ABC$ ノ外接圓周上ノ任意ノ點 P ヨリ三邊ヘノ垂線ノ足ヲ L, M, N トスレバ LN, NM ハ一直線上ニアリ

證明 內接四邊形ノ外角ハ其ノ內對角ニ等シキ故

書込欄



$\angle PCB=\angle PAL$....(1)

$\angle PLA=\angle R$, $\angle PNA=\angle R$

故ニ AP ヲ直徑トスル圓ハ ANPL ニ外接ス

故ニ等弧ニ對スル圓周角 $\angle PAL=\angle PNL$....(2)

$\angle PNC=\angle R=\angle PMC$

故ニ PNMC ハ圓ニ內接スル四邊形ナリ

$\therefore$ $\angle PNM+\angle PCM=2\angle R$....(3)

(1)(2)(3) ヨリ $\angle PNM+\angle PNL=2\angle R$

故ニ LN, NM ハ一直線ヲナス

39. 前題ノ逆ヲ證明セヨ。(東師. 陸經. 千醫)

題意 前圖ヲ用キテ, ABC ノ三邊ヘ引ク垂線ガ一點 P ニ會シ, 其ノ垂足ガ一直線上ニアレバ, P ハ $\triangle ABC$ ノ外接圓周上ニ在リ

證明 前題ト同樣ニ $\angle PAL=\angle PNL$

LNM ハ一直線ナル故 $\angle PNL=PCB$

$\therefore$ $\angle PAL=\angle PCB$

$\therefore$ $\angle PAC+\angle PCB=2\angle R$

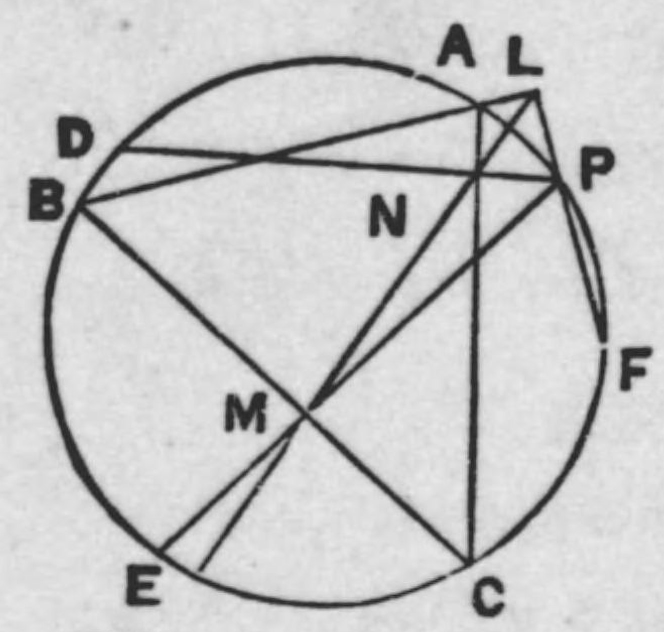
故ニ ABCP ハ圓ニ內接スル四邊形ナリ

即チ P ハ $\triangle ABC$ ノ外接圓周ノ上ニアリ

40. $\triangle ABC$ ノ外接圓周上任意ノ點 P ヨリ一邊ヘ引ク垂線ガ圓周トノ交點ト其ノ邊ニ對スル頂點トヲ結

書込欄

ブ直線ハ P ニ於ケルシムソン線ニ平行ス



證明 $\angle DBA=\angle DPA$

A, N, P, L ハ一圓周上ニ在ルガ故ニ

$\angle NPA=\angle NLA$

$\therefore$ $\angle DBA=\angle NLA$

$\therefore$ $DB \parallel LM$

同樣ニ $AE \parallel LM$, $CF \parallel LM$

書込欄

第三編 面 積

1. 面積トハ何ゾヤ

面積トハ面ノ大サナリ

2. 面積ニ關スル重要ナル定理。

(A) 平行四邊形又ハ三角形ニ於テ

イ. 等底，等高ナレバ等積ナリ

ロ. 等底，等積ナレバ等高ナリ

ハ. 等高，等積ナレバ等底ナリ

系 I. 等底等積ノ三角形ノ頂點ガ底ノ同側ニ在ルトキニ其ノ頂點ヲ過ギル直線ハ底ニ平行ナリ

系 II. 等底ノ三角形ノ頂點ヲ過ギル直線ガ底ニ平行スレバ等積ナリ

(B) 三角形ハ等底，等高ノ平行四邊形ノ半ナリ

(C) A, B, C ヲ線分トシ，A^2, B^2 ヲ正方形，A, B ヲ矩形トスレバ

イ. $A.B+A.C=A(B+C)$

ロ. $(A+B)^2=A^2+B^2+2A.B$

ハ. $(A-B)^2=A^2+B^2-2A.B$

ニ. $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$

(D) 直角三角形ニ於テ斜邊ヲ A，他ノ二邊ヲB,C トスレバ

$$A^2=B^2+C^2$$

(E) 三角形ノ頂點 A ヨリ BC ヘノ垂線ノ足ヲ D トスレバ

書込欄

イ. $\angle ACB<\angle R$

$$\overline{AB^2}=\overline{AC^2}+\overline{BC^2}-2\overline{BC}.\overline{CD}$$

$$\overline{AC^2}=\overline{AB^2}+\overline{BC^2}-2\overline{BC}.\overline{BD}$$

ロ. $\angle ACB>\angle R$

$$\overline{AB^2}=\overline{AC^2}+\overline{BC^2}+2\overline{BC}.\overline{CD}$$

$$\overline{AC^2}=\overline{AB^2}+\overline{BC^2}+2\overline{BC}.\overline{CD}$$

(F) △ABC ノ底 BC ノ中點ヲ D トスレバ

$$\overline{AB^2}+\overline{AC^2}=2(\overline{AD^2}+\overline{BD^2})$$

第一 直線ニ關スル面積

1. 三角形 ABC ノ面積ハ底邊 BC ト高サ AD トノ乘積ノ半ニ等シ。

證明 A ヨリ AE∥BC, C ヨリ CE∥AB ヲ引クトキハ兩線ハ E ニテ會ス

然ルトキ

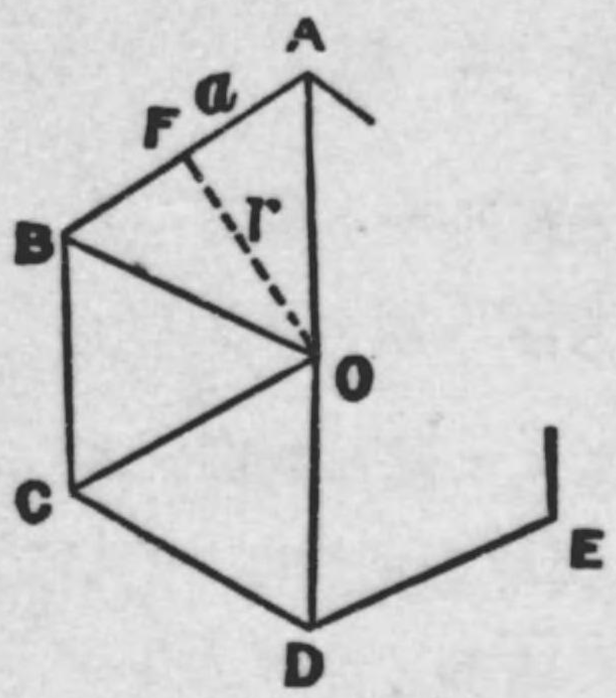
$$\triangle ABC=\frac{1}{2}AB.CE$$

$$=\frac{1}{2}AC,AD$$

2. 正 n 邊形ノ一邊ヲ a トシ邊心距ヲ r トスレバ其ノ面積ハ $\frac{n}{2}ar$ ナリ

假設 正 n 邊形 ABCDE...... ノ一邊 AB ヲ a トシ邊心距離 OF ヲ r トス

書込欄



總結 ABCDE....$=\frac{n}{2}ar$

證明 半徑 OA, OB, OC, OD, OE...... ヲ引ケバ

$\triangle OAB\equiv\triangle OBC\equiv\triangle OCD\equiv\triangle ODE$......

$\therefore$ ABCDE....$=\triangle OAB+\triangle OBC+OCD+\triangle ODC$..$+\triangle ODE$......

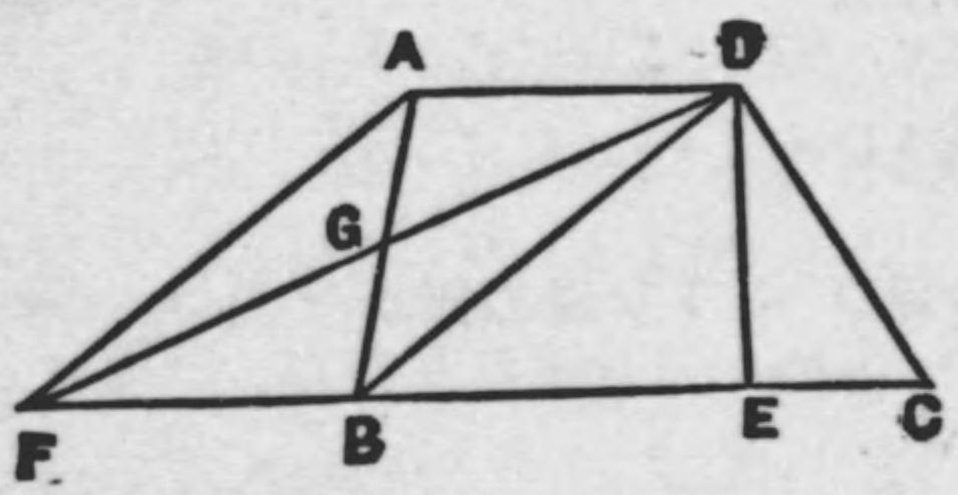
$=n\triangle OAB$

然ルニ三角形ノ面積ハ $\frac{1}{2}ar$

$\therefore$ ABCDE....$=n.\frac{1}{2}ar$

$=\frac{n}{2}ar$

2. 梯形ノ面積ハ底邊ノ和ト高サトノ乘積ノ半ニ等シ。



假設 AD∥BCナル梯形ニ於テ DEヲ高サトス

總結 $ABCD=\frac{1}{2}(AD+BC)DE$

證明 對角線 DB ヲ引キテ

A ヨリ AF∥DB ヲ引キ CB ノ延長トノ交點ヲ F

書込欄

トス

△AGD ト △FGB トニツキ

三角相等シ

$\therefore\ \triangle AGD=\triangle FGB$

$\therefore\ ABCD=\triangle DFC$

$\therefore\ ABCD=\frac{1}{2}FC.DE$

然ルニ四邊形 ABCD ハ平行四邊形

$\therefore\ FB=AD$

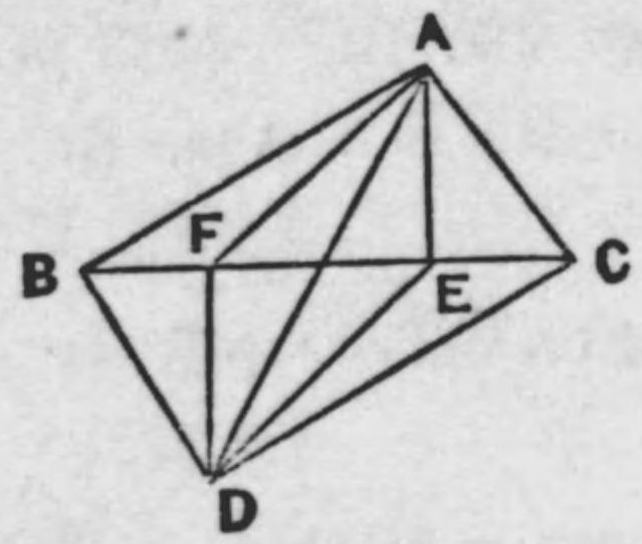
$\therefore\ FC=FB+BC=AD+BC$

$\therefore\ ABCD=\frac{1}{2}(AD+BC)DE$

4. 等積ナル三角形ガ同底ノ反對ノ側ニ在ルトキ頂點ヲ結ブ線分ハ底ニテ二等分セラル。（東高師. 商船. 上置）

假設 $\triangle ABC=\triangle DBC$ ハ BC ノ異側ニ在リ

總結 線分 AD ハ BC ニテ二等分セラル



證明 A, D ヨリ BC ヘノ垂線ノ足ヲ夫々 E,F トス

AE∥DF

然ルニ $\triangle ABC=\triangle DBC$

$\therefore\ AE=DF$

$\therefore$ AFDEハ平行四邊形ナリ

故ニ其ノ對角線 AD ハ EF ニテ二等分セラル

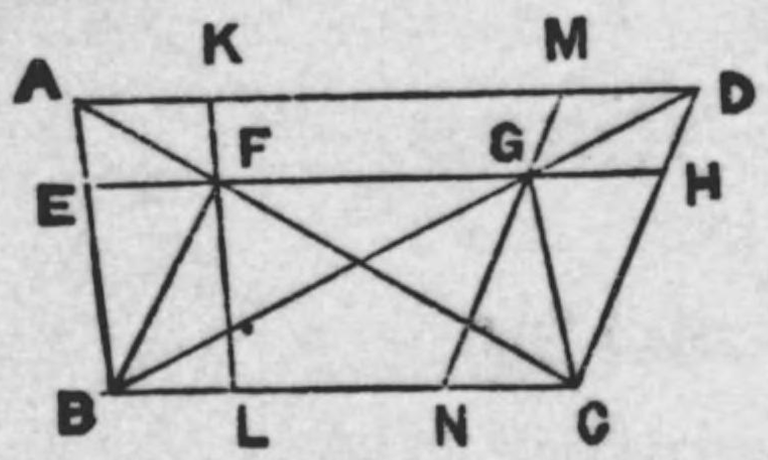
5. 等積ナル三角形ガ同底ノ同側ニ在ルトキ，底邊

書込欄

ニ平行ナル一直線ヲ引キテ其ノ各邊ヲ截ラシメバ，三角形ノ二邊ノ間ニ夾マレタル部分ハ相等シ。

假設 BC ヲ底邊トスル $\triangle ABC=\triangle DBC$ ヲ BC ニ平行ナル直線 EH ニテ截ル

終結 $EF=GH$



證明 $EH=BC$

$\therefore\ \triangle FBC=\triangle GBC$

又 $\triangle ABC=\triangle DBC$

$\triangle FAB=\triangle GDC$

AD ヲ結ビ F, G ヨリ AB, DC ニ平行ナル直線 KL, MN ヲ引ケバ

□ABLK, □DCNM ハ各々平行四邊形ナリ

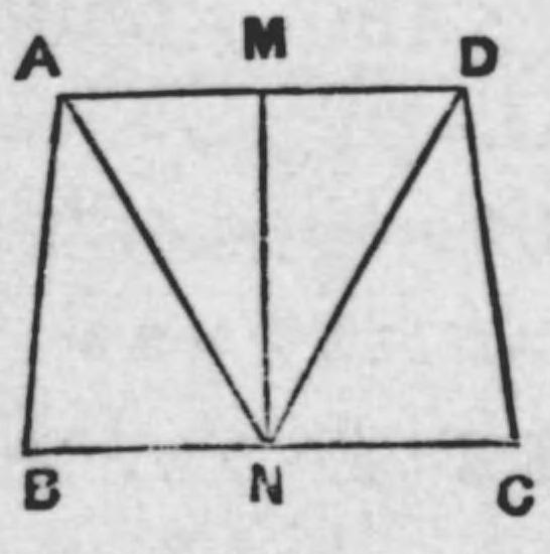
□ABLK$=2\triangle FAB$

□DCNM$=2\triangle GDC$

$\therefore$ □ABLK$=$□DCNM

$\therefore\ AK=MD$ 從ッテ $EF=GH$

6. 四邊形 ABCD ノ對邊 AD, BC ノ中點 MN ヲ結ブ直線ガ四邊形ヲ二等分スルトキハ AD, BC ハ平行ナリ。



證明 M ハ AD ノ中點ナル故ニ

$\triangle ANM=\triangle NDM$

假設ニヨリ $ABNM=CDMN$

$\therefore\ \triangle ABN=\triangle DCN$

書込欄

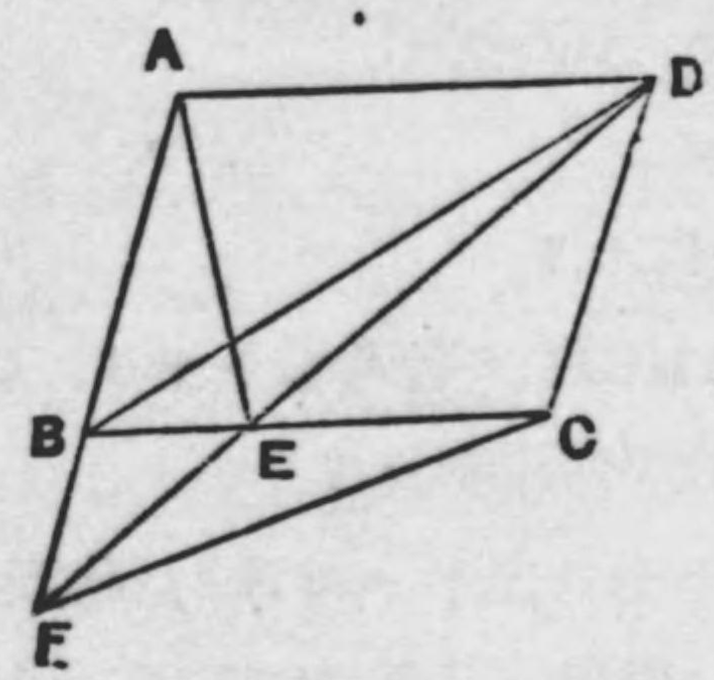
然ルニ $BN=CN$

故ニ等底等積ナル $\triangle ABN, \triangle DCN$ ハ等高ナリ.

$\therefore\ AD \parallel BC$

7. 平行四邊形 ABCD ノ D ヲ通リテ直線ヲ引キ，底邊 BC ト E, AB ノ延長ト F テ於テ交ラシムレバ

$\triangle ABE=\triangle CEF$ （名工）



證明 $AD \parallel BC$ ナル故 $\triangle ABE$ ヲ $\triangle BDE$ ニ移動シテモ面積ニ變化ナシ

又 $AF \parallel DC$

$\therefore\ \triangle BED=\triangle EFC$

（對頂三角形）

$\therefore\ ABE=\triangle EFC$

8. 四邊形內ノ一點ヲ四ツノ頂點ニ結ビツケテ得ル四ツノ三角形ガ皆等積ナルトキハ原形ハ平行四邊形ニシテ其ノ點ハ對角線ノ交點ナリ。

假設 四邊形 ABCD 內ノ一點 O ヨリ A, B, C, D ヘ結ビツケテ得ル $\triangle OAB, \triangle OBC, \triangle OCD, \triangle ODA$ ハ等積ナリ

終結 ABCD ハ平行四邊形ニシテ O ハ對角線ノ交點ナリ

證明 線分 BD ノ中點ヲ P ト假定ス

書込欄

△DAO=△BAO

故ニ問題 4 ニヨリテ AO ハ P ヲ通過ス

又 △DOC=△BOC

∴ CO ハ P ヲ通過ス

故ニ AO, OC ハ共ニ P ト O トヲ通過スル故同一直線ナリ

次ニ △DAO=△DOC, AOC ハ一直線

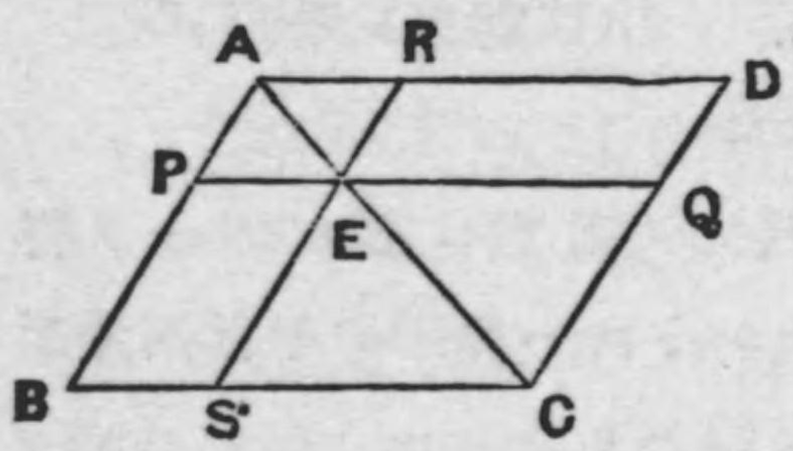
故ニ等高等積ナルヲ以ツテ AO=OC

∴ O ハ AC ノ中點ナリ

同理ニテ O ハ BD ノ中點ナリ

∴ AC, BD ハ四邊形 ABCD ノ對角線トナリ，互ニ二等分セラルヽヲ以テ行平四邊形ナリ

9. 平行四邊形ノ對角線ニ沿フ餘形ハ相等シ (秋鑛)



假設 平行四邊形 ABCD ノ對角線上ノ任意ノ一點 F ヲ過リ BC∥PQ ヲ引キ此直線ト AB, DC ト交ル點ヲ P, Q トス

又 E ヲ過リ AB∥RS ヲ引キ，此直線ト AD, BC ト交ル點ヲ R, S トス

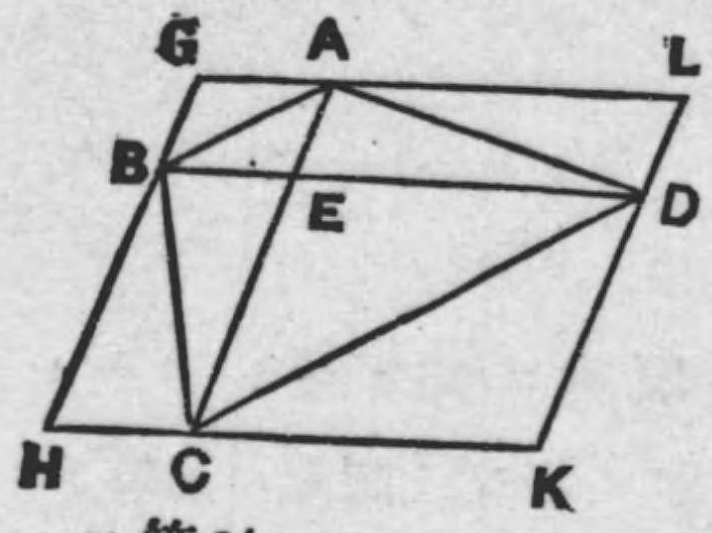
總結 □PBSE=□REQD

證明 △ABC＝△CDA ヨリ △APE＝△ARE, △ESC=△CQE ヲ減ジタル商

書込欄

□PBSE=□REQD

10. 四邊形ノ面積ハ其ノ對角線ヲ邊トシ對角線ノナス角ヲ夾角トスル三角形ノ面積ニ等シ。



假設 四邊形 ABCD ノ對角線ノ交點ヲ E トス

總結 □ABCD ハ AC, BD ヲ二邊トシ，∠AED ヲ夾角トスル三角形ノ面積ニ等シ

證明 A, B ヲ通リテ BD ニ平行ニ GL, HK 及ビ GH, LK ヲ引ケバ GHKL ハ平行四邊形ナリ

∴ GH=LK=AC

GL=HK=BD

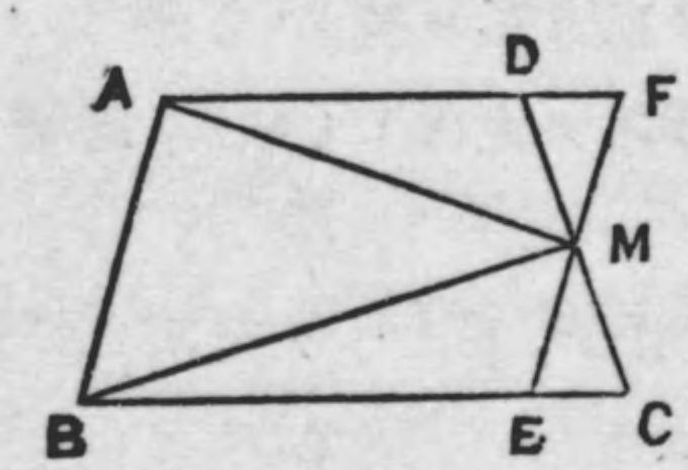
故ニ AC, BD ハ GH, HK, ニ移リ，∠AED ノ夾角ハ ∠GHK ニ移ル 而シテ

$$\square ABCD=\frac{1}{2}\square EFGH$$
$$=\triangle EFG$$

11. 梯形 ABCD ノ平行線ヲ AD, BC トシ CD ノ中點ヲ M トスレバ

$$\triangle ABM=\frac{1}{2}ABCD$$ (商船)

證明 M ヲ通リテ AB ニ平行ナル線 EF ヲ引キ，BC, AD ノ延長ト交ル點ヲ夫々 E F, トスレバ



△DMF=△EMC

書込欄

∴ □ABEF=□ABCD

△ABM ト平行四邊形 ABEF ニ於テ

AB ハ同底 AB∥EF

∴ $\triangle ABM=\frac{1}{2}ABEF$

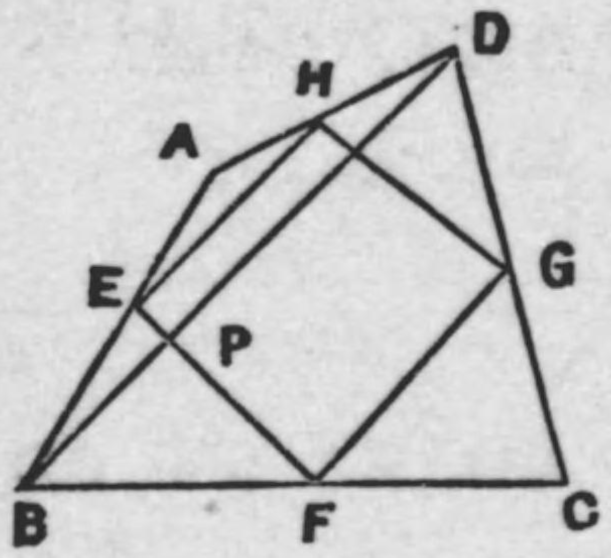
$=\frac{1}{2}ABCD$

12. 四邊形ノ各邊ノ中點ヲ順次ニ結ビ付ケテナル平行四邊形ノ面積ハ原形ノ半分ニ等シ（商船. 高等）

假設 四邊形 ABCD ノ各邊ノ中點ヲ E, F, G, H トス

總結 平行四邊形 EFGH=$\frac{1}{2}$□ABCD

證明



對角線 BD ヲ引キ EF, HG トノ交點ヲ P, Q トス

然ルトキハ

平行□EPQH=$\frac{1}{2}$△ABD

平行□GQPP=$\frac{1}{2}$△CBD

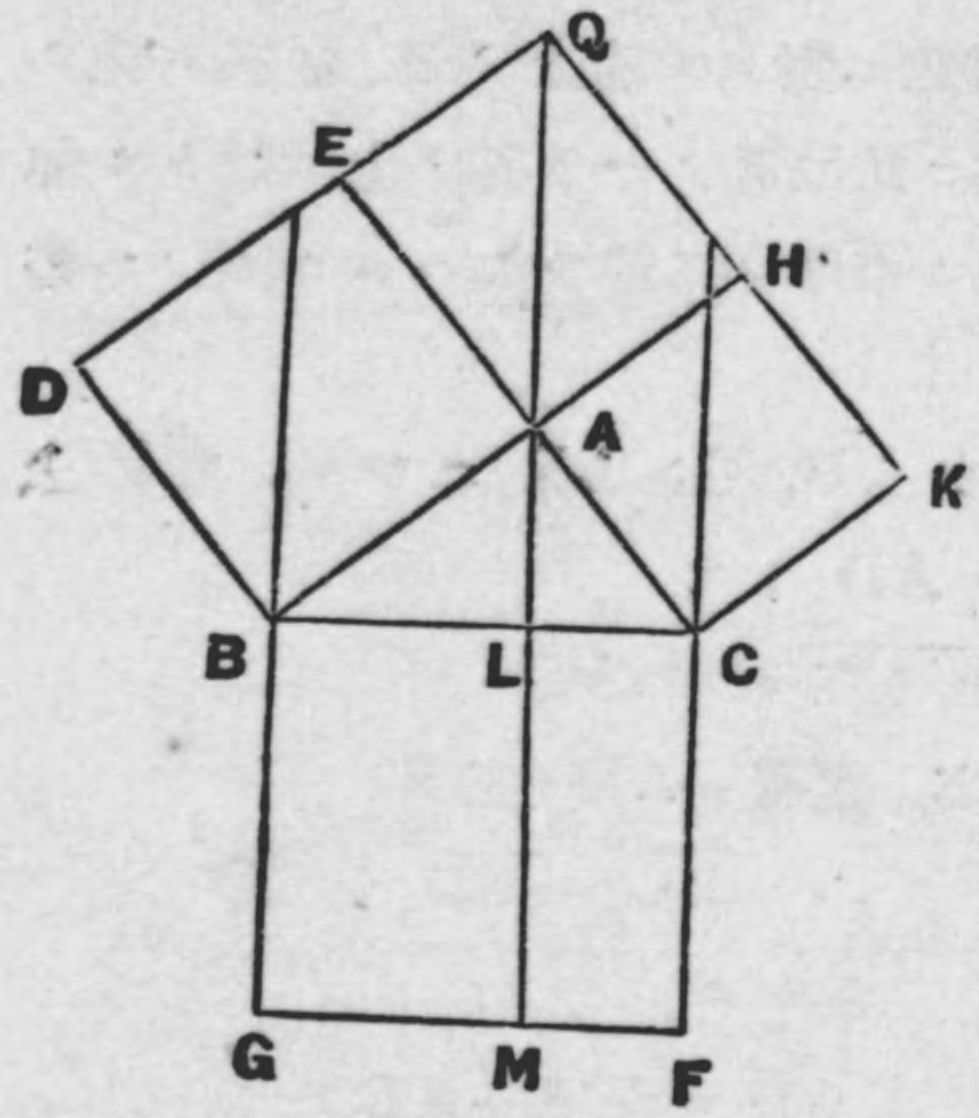
平行□EFGH=$\frac{1}{2}$▱ABCD

13. 直角三角形ノ斜邊上ノ正方形ハ他ノ二邊上ノ正方形ノ和ニ等シ.（**ピタゴラス**ノ定理）（海兵. 海機陸士）

假設 ∠BAC=∠R, $\overline{AB^2}$, $\overline{BC^2}$, $\overline{CA^2}$ ヲ夫々 ABDE, BCFG, CAHK トス

書込欄

總結 $\overline{BC^2}=\overline{AB^2}+\overline{AC^2}$



證明 DE, KH ノ延長ノ交點ヲ Q トス △ABC ト △HQA ニツキ ∠QHA=∠R=∠BAC

AH=AC

HQ=AE=AB

∴ △ABC≡△HQA

∴ A=BC,

∠HAQ=∠ACB

A ヨリ BC ニ垂線ヲ下シ BC トノ交點ヲ L, GF トノ交點ヲ M トス

∠QAL ニ於テ ∠HAC ハ直角, 又 ∠ACL ト ∠CAL ハ餘角ニシテ, ∠ACL=∠QAH ナレバ ∠QAH ト ∠CAL トモ餘角ナリ。

故ニ QALM 一相線ヲナス

而シテ QA=BG=LM

FC, GB ヲ夫々延長シテ KQ, DQ ト出會フマデ延長スレバ

□ABDE=▱BQ=□BM

□ACKH=▱CQ=□LF

∴ □ABDE+□ACKH=□BGFC

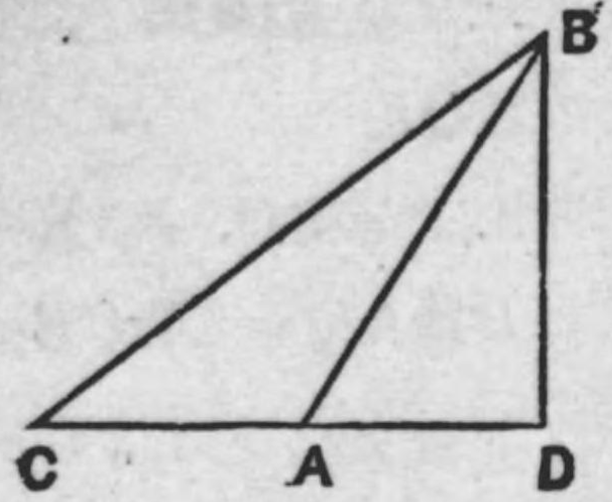
書込欄

∴ $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$

14. 鈍三角形ノ鈍角ニ對スル邊上ノ正方形ハ他ノ二邊上ノ正方形ノ和ニ此二邊ノ一ト其ノ上ニ於ケル他ノ邊ノ正射影トノ包ム矩形ノ二倍ヲ加ヘタルモノニ等シ。

假設 △ABC ニ於テ ∠BAC>∠R ニシテ，CA 上ニ於ケル正射影ヲ AD トス

終結 $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{CA}^2+2CA.AD$



證明 ∠D=△R

∴ $\overline{BC}^2=\overline{BD}^2+\overline{CD}^2$

然ルニ

$\overline{CD}^2=(CA+AD)^2$

$=CA^2+\overline{AD}^2+2CA.AD$

∵ $\overline{BC}^2=\overline{DB}^2+\overline{CA}^2+\overline{AD}^2+2CA.AD$

$=\overline{BD}^2+\overline{AD}^2+\overline{CA}^2+2CA.AD$

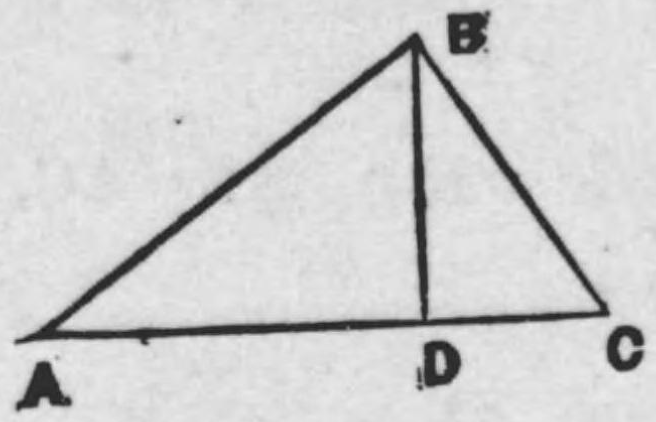
$=\overline{AB}^2+\overline{CA}^2+2CA.AD$

15. 三角形ノ鋭角ニ對スル邊上ノ正方形ハ他ノ二邊上ノ正方形ノ和ヨリ此二邊ノ一ト其ノ上ニ於ケル他ノ邊ノ正射影トノ包ム矩形ノ二倍ヲ減ジタルモノニ等シ。

假設 △ABC ニ於テ ∠A<∠R トシ，CA 上ニ於ケル AB ノ正射影ヲ AD トス

終結 $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{CA}^2-2CA.AD$

書込欄



證明 ∠BDC=∠R

∴ $\overline{BC}^2=\overline{BD}^2+\overline{DC}^2$

然ルニ $\overline{CD}^2=(CA-AD)^2$

$=\overline{CA}^2+\overline{AD}^2-2CA.AD$

∴ $\overline{BC}^2=\overline{BD}^2+\overline{CA}^2+\overline{AD}^2-2CA.AD$

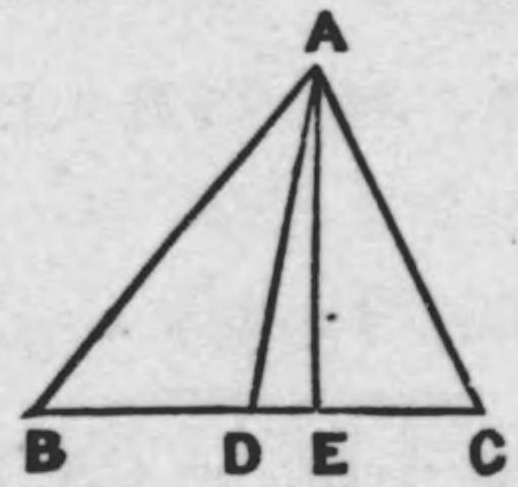
$=\overline{BD}^2+\overline{AD}^2+\overline{CA}^2-2CA.AD$

$=\overline{AB}^2+\overline{CA}^2-2CA.AD$

16. 三角形ノ二邊上ノ正方形ノ和ハ其夾角頂ヨリ引ケル中線ト殘リノ邊ノ半トノ上ノ正方形ノ和ノ二倍ニ等シ（東師・高等）

假設 △ABC ニ於テ BD=DC トス

終結 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AD}^2+\overline{BD}^2)$



證明 BC 上ニ於ケル AD ノ正射影ヲ ED トスレバ

$\overline{AB}^2=\overline{AD}^2+\overline{BD}^2-2BD.ED$

$\overline{AC}^2=\overline{AD}^2+\overline{DC}^2+2DC.ED$

然ルニ BD=DC

∴ $\overline{AD}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AD}^2+\overline{BD}^2)$

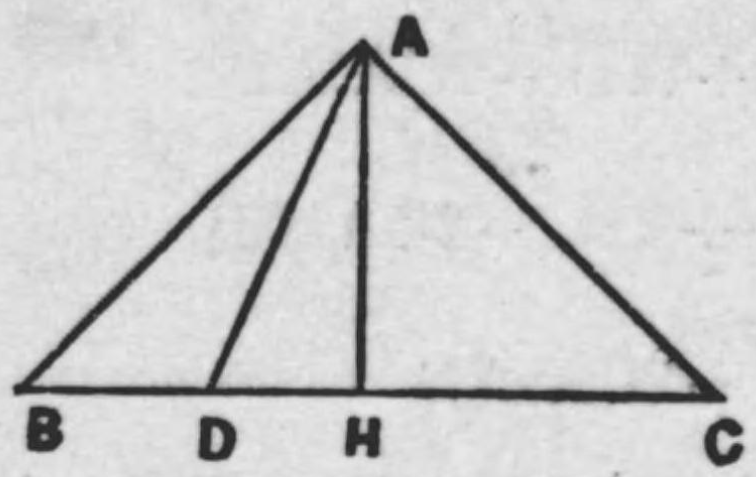
17. 直角三角形ニ於テ，直角ヲ夾ム二邊ガ等シク，斜邊ノ上ニ任意ノ點ヲ取リテ分ケタル二線ノ上ノ正方形

書込欄

ノ和ハ相角頂ト任意ノ點トヲ結ビタル線上ノ正方形ノ二倍ニ等シキコトヲ證明セヨ。

假設 ∠A=∠R トスル △ABC ニ於テ AB=AC, D ヲ BC 上ノ任意ノ點トス

終結 $\overline{BD}^2+\overline{CD}^2=2\overline{AD}^2$



證明 BCノ中點ヲHトス

∠BAC=∠R, AB=AC

∴ AH=BH=CH,

AH⊥BC

$\therefore\ \overline{BD}^2+\overline{CD}^2=(BH-DH)^2+(BH+DH)^2$

$=2(\overline{BH}^2+\overline{DH}^2)$

$=2(\overline{AH}^2+\overline{DH}^2)$

$=2\overline{AD}^2$

18. 三角形ノ三中線ノ上ノ正方形ノ和ハ三邊ノ上ノ各正方形ノ和ノ四分ノ三ナリ。

假設 △ABC ニ於テ AD, BE, CF ヲ中線トス

終結 $\overline{AD}^2+\overline{BE}^2+\overline{CF}^2=\frac{3}{4}(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2)$

證明 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2\overline{AD}^2+2\overline{BD}^2$

$\therefore\ 2\overline{AB}^2+2\overline{AC}^2=4\overline{AD}^2+4\overline{BD}^2$

然ルニ $4\overline{BD}^2=(2\overline{BD})^2=\overline{BC}^2$

書込欄

故ニ位置ヲ移シテ $4\overline{AD}^2=2\overline{AB}^2+2\overline{AC}^2-\overline{BC}^2$

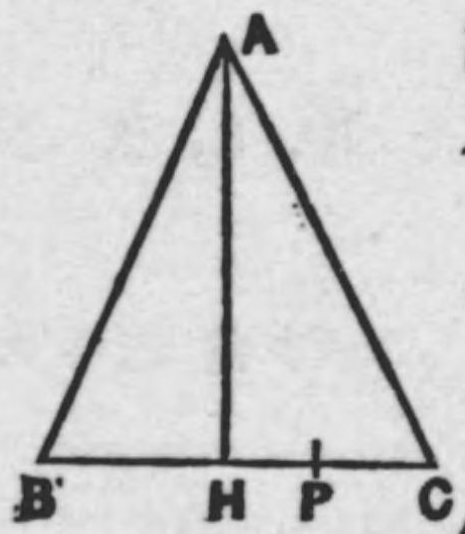
同理ニテ $4\overline{BE}^2=2\overline{BC}^2+2\overline{BA}^2-\overline{CA}^2$

$4\overline{CF}^2=2\overline{CA}^2+2\overline{CB}^2-\overline{AB}^2$

$4(\overline{AD}^2+\overline{BE}^2+\overline{CF}^2)=(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2)$

$\therefore\ \overline{AD}^2+\overline{BE}^2+\overline{CF}^3=\frac{3}{4}(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2)$

19. △ABC ニ於テ BC 上ノ任意ノ一點ヲ P トスルトキ $\overline{AB}^2-\overline{AP}^2=BP.CP$ ナラバ △ABC ハ二等邊ナリ。



證明 A ヨリ BC ヘ垂線 H ヲ下ス

$\overline{AB}^2-\overline{AP}^2=\overline{BH}^2-\overline{PH}^2$

$=(BH+PH)(BH-PH)$

$=BP(BH-PH)$

然ルニ $\overline{AB}^2-\overline{AP}^2=BP.CP$(假設)

∴ BP(BH−PH)=BP.CP

∴ BH−PH=CP

∴ BH=PH+CP

∴ BH=CH ∴ AB=AC

∴ △ABC ハ二等邊ナリ

20. 平行四邊形ノ四邊ノ上ノ各正方形ノ和ハ，其ノ兩對角線上ノ各正方形ノ和ニ等シ（海機．商船．山高）

假設 平行四邊形 ABCD ノ兩對角線 AC, BD ノ交點ヲ O トス

總結 $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2=\overline{AC}^2+\overline{BD}^2$

證明 AO ハ △ABD ノ中線ナリ

∴ $\overline{AB}^2+\overline{AD}^2=2\overline{AO}^2+2\overline{BO}^2$

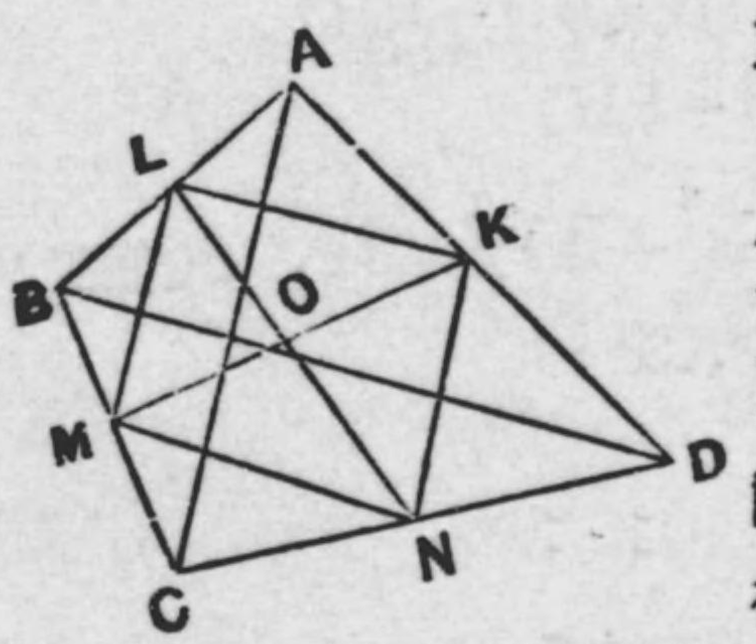
又 $\overline{BC}^2+\overline{CA}^2=2\overline{CO}^2+2\overline{BO}^2$

$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2+\overline{AD}^2=4\overline{AO}^2+4\overline{BO}^2$

$=(2AO)^2+(2BO)^2=\overline{AC}^2+\overline{BD}^2$

21. 四邊形ノ對角線ノ上ノ正方形ノ和ハ對邊ノ中點ヲ結ブ線分ノ上ノ正方形ノ和ノ二倍ナリ。(陸士.山商. 京藝)

特設 四邊形 ABCD ノ各邊ノ中點ヲ K, L, M, N トシ



KM, LN ヲ對角線トスレバ

$\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=2(\overline{KM}^2+\overline{LN}^2)$ ナリ

證明 四邊形 KLMN ハ平行四邊形ナル故ニ

KL=MN, KN=LM

然ルニ $\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=4\overline{KL}+4\overline{KN}^2$

$=2(\overline{KL}^2+\overline{MN}^2+\overline{KN}^2+\overline{LM}^2)$

$=2(\overline{KM}^2+\overline{LN}^2)$

22. △ABC ノ垂心ヲ H トスレバ

$\overline{AB}^2+\overline{CH}^2=\overline{AC}^2+\overline{BH}^2$

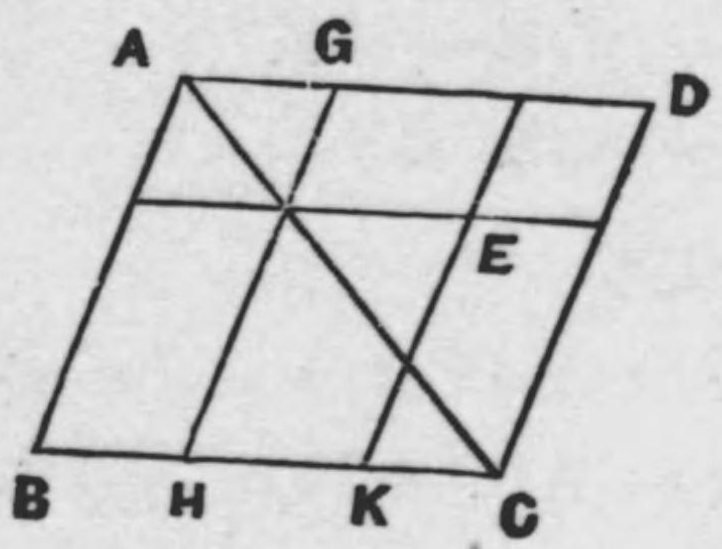
證明 AD⊥BC

∴ $\overline{AB}^2-\overline{AC}^2=\overline{BD}^2-\overline{CD}^2$

$=\overline{BH}^2-\overline{CH}^2$

∴ $\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=\overline{AC}^2+\overline{BH}^2$

23. 平行四邊形 ABCD 內ノ對角線上ニ在ラザル任意ノ點 E ヲ通リ AB, BC ニ夫々平行線ヲ作レバ，二ツノ平行四邊形 DE, BE ノ面積ノ差ハ △AEC 面積ノ二倍ニ等シ。



證明 BC ノ平行線ガ AC ト交ル點ヲ F トス F ヲ過ギ AB ニ平行線 GH ヲ引キ AD, BC ニ G, H ニ交ラバ

▱FD ト ▱BF トハ對角線ニ沿フ餘形ナル故等積ナリ

▱BE=▱BF+▱HE

▱ED=▱FD−▱GE

然ルニ ▱BF=▱FD

∴ ▱BF−▱ED=▱HE+▱GE

▱HE=2△CFE

▱GE=2△AFE

書込欄

$\therefore\quad ▱BE-▱ED=2(\triangle CEF+\triangle AFE)$

$=2\triangle EAC$

24. 24ノ問題ニ於テ E ガ ABCD ノ外ニ在ルトキハ

$▱DE+▱BE=2\triangle AEC$

證明 24ノ問題ト同樣ニ $▱BF=▱FD$

$\therefore\quad ▱BE+▱DE=▱FD+▱FK+▱DE$

$=▱GK$

然ルニ $2\triangle AFE=▱GE$

$2\triangle CFE=▱FK$

$\therefore\quad 2(\triangle AFE+\triangle CFE)=▱GE+▱FK$

$=▱GK$

$\therefore\quad 2\triangle ACE=▱BE+▱DE$

25. 直角三角形 ABC ノ $\angle A=\angle R$ トスレバ，斜邊 BC 上ノ正三角形ノ面積ハ，AB, AC 上ノ正方形ノ面積ノ和ニ等シ。

證明 $\triangle ABE$, $\triangle GBC$ ニ於テ

$AB=BG,\ BE=BC,\ \angle CBE=\frac{2}{3}\angle R=\angle GBA$

$\therefore\quad \triangle ABE=\triangle GBC$

$GH\perp AB$ トスレバ $GH\parallel AC$

$\therefore\quad \triangle GAC=\triangle HAC$

然ルニ H ハ AB ノ中點ナルヲ以ッテ

$\triangle HAC=\frac{1}{2}\triangle ABC$

書込欄

$\therefore\quad \triangle GAC=\frac{1}{2}\triangle ABC$

$\therefore\quad \triangle ABE+\frac{1}{2}\triangle ABC=\triangle GBC+\triangle GAC$

$=\triangle AGB+\triangle ABC$

$\therefore\quad \triangle ABE+\frac{1}{2}\triangle ABC=\triangle AGB+\triangle ABC$

同樣ニ $\triangle ACE+\frac{1}{2}\triangle ABC=\triangle AFC+\triangle ABC$

故ニ二式ヲ相加ヘレバ

$\triangle ABE+\triangle ACE+\triangle ABC=\triangle AGB+\triangle AFC$

$+2\triangle ABC$

即チ $\triangle EBC+2\triangle ABC=\triangle AGB+\triangle AFC$

$+2\triangle ABC$

$\therefore\quad \triangle EBC=\triangle AGB+AFC$

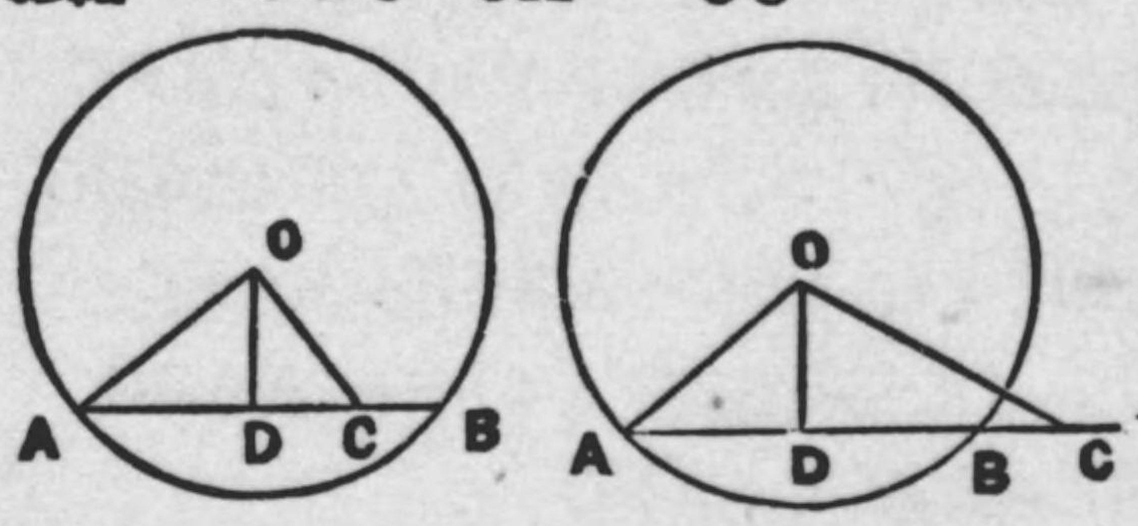
書込欄

第二　圓ニ關スル面積

1. 圓ノ弦ヲ二ツニ内分又ハ外分スルトキハ，其二部分ノ積ハ半徑及ビ分點ト中心トヲ連ネ線分ノ上ノ正方形ノ差ニ等シ。

假設　圓 O ノ弦 AB ヲ内分又ハ外分シタル點ヲ C トス

終結　$AC.BC=\overline{OA}^2-\overline{OC}^2$



證明　$OD\perp AB$ トスレバ $AD=DB$

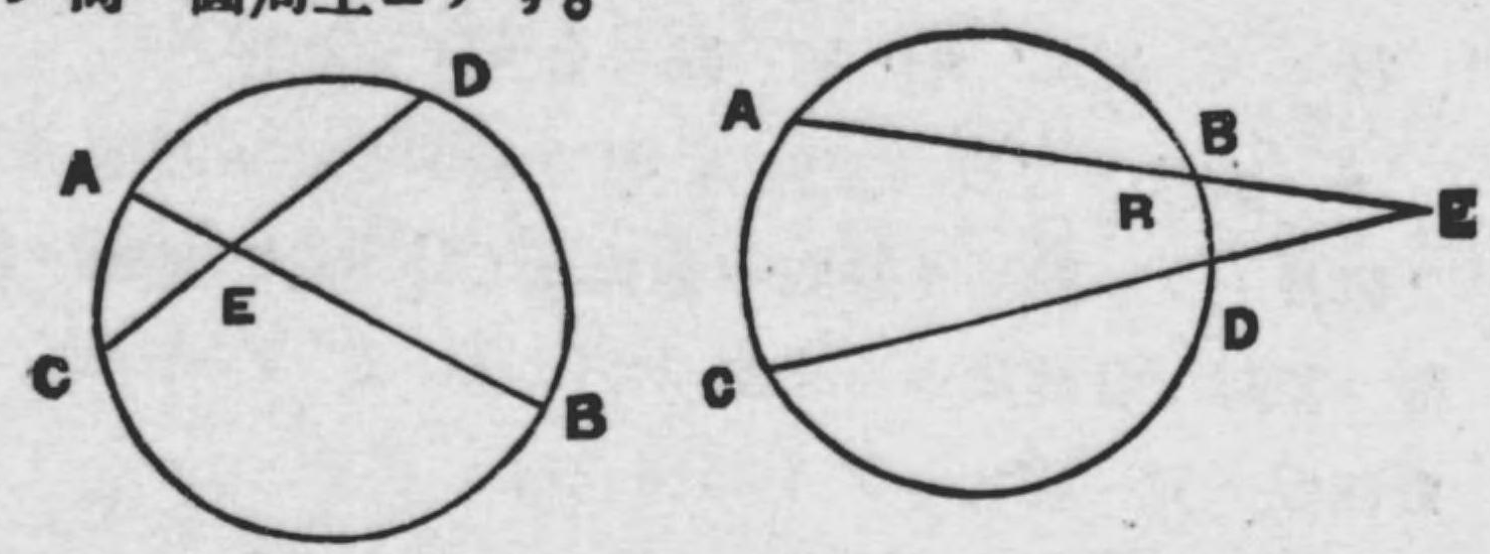
$$\therefore\ AC.BC=(AD+DC)(BD-DC)$$
$$=(AD+DC)(AD-DC)$$
$$=\overline{AD}^2-\overline{DC}^2$$
$$=\overline{OA}^2-\overline{OC}^2$$

2. O 圓外ノ點 P ヨリ其ノ圓ニ割線 PB 及ビ切線 PC ヲ引キ圓トノ交點ヲ A, B 及ビ切點ヲ C トスレバ $PA.PB=\overline{PC}^2$

證明　$PA.PB=\overline{OP}^2-\overline{OF}^2$
$$=\overline{OP}^2-\overline{CO}^2$$
$$=\overline{CP}^2$$

書込欄

二線分 AB, CD 或ハ此等ノ延長ノ交點ヲ E トスルトキ AEBE=CEDE トナレバ A, B, C, D ハ同一圓周上ニアリ。



證明　三點 A, C, D ヲ過ギル AB 或ハ B ノ延長上デ交ル點ヲ B′ ト假定スレバ

$$CE.DE=AE.EB'$$

然ルニ假設ニヨリ　$CE.DE=AE.EB$

$\therefore$　$AE.BE'=AE.BE$

$\therefore$　$BE'=BE$

故ニ B, B′ ノ兩點ハ同一點ナリ

$\therefore$　A, B, C, D ハ同一線上ニアリ

4. ∠P ノ一邊上ノ二點ヲ A, B トシ他ノ邊上ノ一點ヲ C トスルトキ $PA.PB=\overline{PC}^2$ トナレバ PC ハ圓 OAC ニ切ス。

證明　AC 或ハ PC ノ延長ガ再ビ圓ト交ル點ヲ C′ トス

$PB.PA=PC.PC'$

然ルニ假設ニヨリ

$PA.PB=\overline{PC}^2$

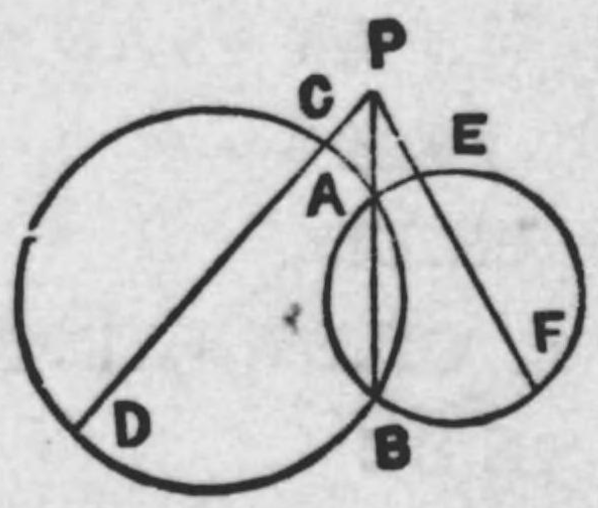
書
込
欄

∴ $\overline{PC}^2$=PC.PC′

∴ PC=PC′

故ニ C ト C′ トハ同一點ニ合セザルヲ得ズ

5. 相交ル二圓ノ交點A, Bヲ結ビ付クル直線ABノ延長上ノ一點ヨリ各圓ヘ割線PCD.PEFヲ引キ此等ノ割線ト各圓周トノ交點ヲ C, D, E, F トスレバ此四點ハ同一線上ニアリ。



證明 PC.PD=PA.PB

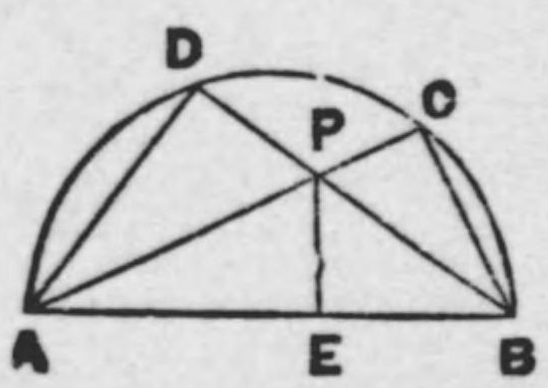
PE, PF=PA.PB

∴ PC.PD=PE.PF

故ニC, D, E, Fノ四點ハ同一周圓上ニアリ

6. 圓ノ直線ABノ兩端ヨリ二ツノ絃AC, BDヲ引キ互ニPニテ交ラシムレバ

$$\overline{AB}^2=AC.AP+BD.BP$$



證明 PヨリABニ垂線PEヲ引ク 然ルトキハ ▱DAFP ▱CBEPハ倶ニ圓內四邊形ナリ

∴ AB.AE=AC.AP

書
込
欄

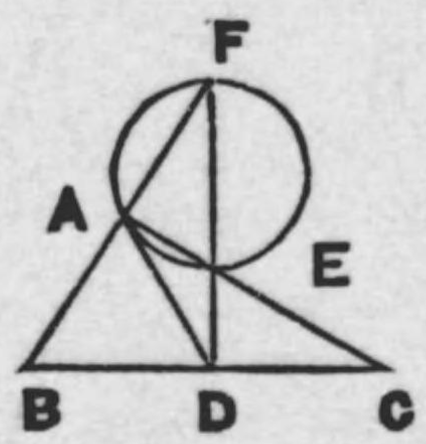
AB.BE=BD.BP

相加ヘレバ

$\overline{AB}^2$=AC.AP=BD.BP

7. 直角三角形ABCノ斜邊BCノ中點Dヨリ此邊ヘ垂線ヲ引キ,之レト他ノ二邊トノ交點ヲE, Fトスレバ

$$\overline{AD}^2=DE.DF$$



證明 △ABCハ直角三角形ナル

故ニ AD=BD=CD

故ハ △DACハ二等邊三角形

∠DAC=∠DCA

=(Bノ餘角)

∠FDB=∠R ナル故ニ ∠AFE=(Bノ餘角)

∴ ∠DAC=∠AFE

故ニ A, E, F 三點ヲ通ル圓ハ AD ニ切ス

∴ $\overline{DA}^2$=DE.DF

8. 三角形ノ各角頂ヨリ對邊ニ引ケル三ツノ直線ガ同一點ヲ通リ且ツ此點ニ於テ分タレタル直線ノ部分ノ包ム矩形ガ相等シケレバ此點ハ此三角形ノ垂線ナリ。

假設 △ABCニ於テAD, BE, CFノ三直線ガ一點Hニ於テ交リ, AH.DH=BH.EH=CH.FH

終結 Hハ重心ナリ

書込欄

證明 $BH.EH=CH.FH$

故ニ F, B, C, E ハ同一圓周上ニアリ

$\therefore\ \angle BEC=\angle CFB$

又 $\angle BEA=\angle AFC$

$CH.FH=AH.DH$

故ニ F, A, C, D ハ同一圓周上ニアリ

$\therefore\ \angle CFB=\angle ADB$

$AH.DH=BH.EH$

故ニ E, A, B, D ハ同一周圓上ニアリ

$\therefore\ \angle ADB=\angle BEA$

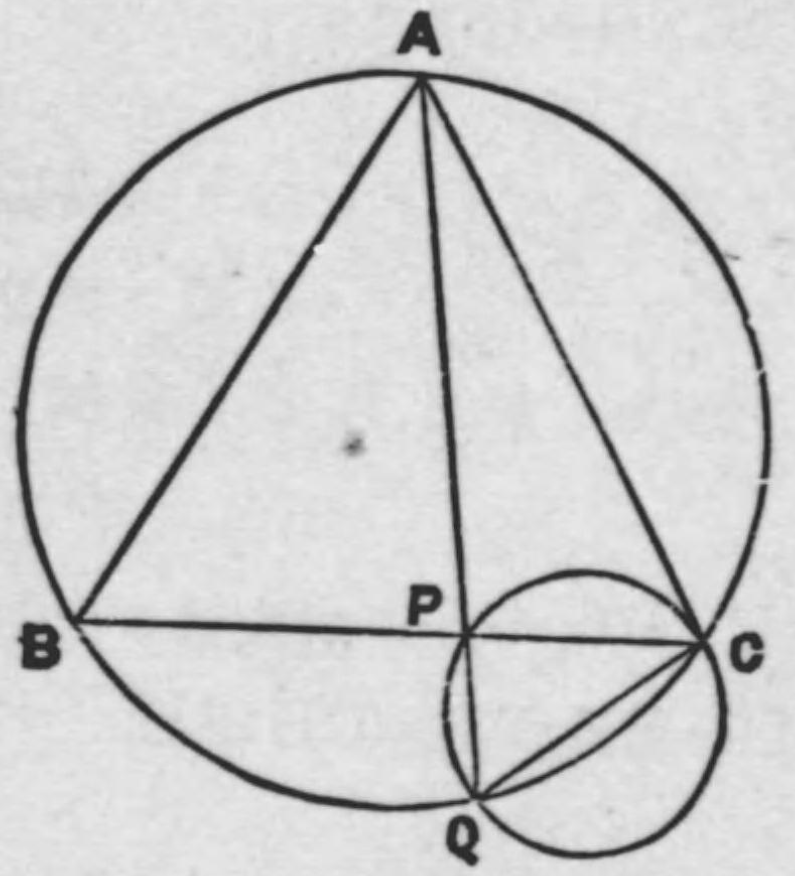
$\therefore\ \angle BEC=\angle BEA=\angle R$

卽チ BE ハ AC ニ垂直ナリ

同理ニテ $CF\perp AB,\ AD\perp BC$

故ニ H ハ垂心ナリ

9. 圓ニ内接セル二等邊三角形 ABC ノ頂點 A ヨリ任意ノ直線 APQ ヲ引キ，底邊 BC ト P ニテ交ラシメ外接圓周ト Q ニテ交ラシムルトキ AP, AQ ノ包ム面積ハ恒ニ一定不易ナリ。



證明 CQ ヲ結プトキハ

$\angle ABC=\angle ACB$

$=\angle AQC$

故ニ P, Q, C 三點ヲ通ル圓ハ AC ニ切ス

故ニ $AP.AQ=\overline{AC}^2$

（一定量）

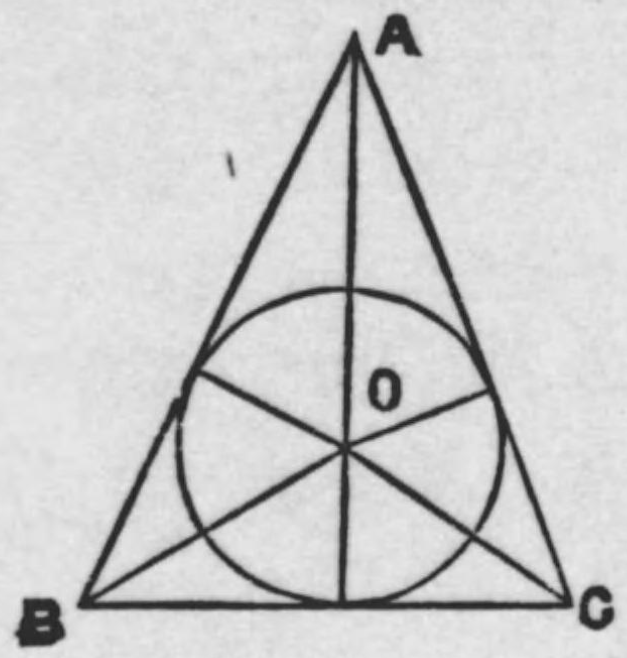
10. 三角形ノ面積ハ其

書込欄

ノ周ノ半ト內切圓ノ半徑トノ乘積ニ等シ。

假設 △ABC ノ周ノ半ヲ S トシ內切圓 O ノ半徑ヲ r トス

終結 $\triangle ABC==Sr$



證明 OA, OB, OC ヲ引キ O ト各切點トヲ連ヌルトキハ此等ノ半徑ハ夫々各邊ニ垂直ナリ

$\triangle ABC=\triangle OAB+\triangle OBC$

$+\triangle OCA$

$=\frac{1}{2}cr+\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br$

$=\frac{1}{2}(a+b+c)r$

$=Sr$

11. 半徑 R ナル圓ニ內接セル正方形ノ一邊ハ $R\sqrt{2}$ ニシテ，面積ハ $2R^2$ ナリ。

證明 邊ハ

$$\sqrt{R^2+R^2}=\sqrt{2R^2}=R\sqrt{2}$$

$$R\sqrt{2}\times R\sqrt{2}=R^2\times 2=2R^2$$

12. 半徑 R ナル圓ニ內接セル正三角形ノ一邊ハ $\sqrt{3}R$ ニシテ，面積ハ $\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$ ナリ

證明 $x=2\sqrt{R^2-\frac{R^2}{4}}$

書込欄

$$=2\sqrt{\frac{4R^2-R^2}{4}}=2\sqrt{\frac{3R^2}{4}}$$

$$=\sqrt{3R^2}=R\sqrt{3}$$

又 $R+\frac{1}{2}R=\frac{2R+R}{2}=\frac{3R}{2}$

$\therefore\ \frac{3R}{2}=$高サ

$$\therefore\ \frac{\text{高サ}\times\text{邊}}{2}=\frac{3R}{2}\times\sqrt{3R}\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$$

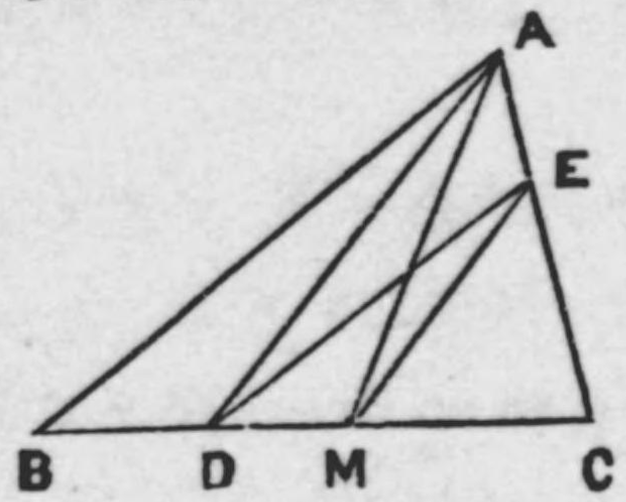
書込欄

第三 面積ニ關スル作圖

1. 三角形ノ一邊ノ上ニ在ル點ヲ過ギ直線ヲ引キ原形ヲ二等分セヨ。

特說 △ABC ノ一邊 BC 上ノ一定點 D ヲ過ギ DE ヲ引キテ三角形ヲ二等分スルコト

作圖 BC ノ中點 M ヲ過ギテ AD ニ平行線ガ AC ト交ル點ヲ E トスレバ DE ハ求ムル直線ナリ



證明 BM=MC

$\therefore$ △ABM=△AMC

故ニ △ABM 原形ノ二分ノ一ナリ

AD ∥ EM

$\therefore$ △MAD=△EAD

△MAB=△ABD+△MAD

=△ABD+△EAD

$\therefore$ ▱ABDE=△MAB=$\frac{1}{2}$△ABC

依ツテ DE ハ原形ヲ二等分ス

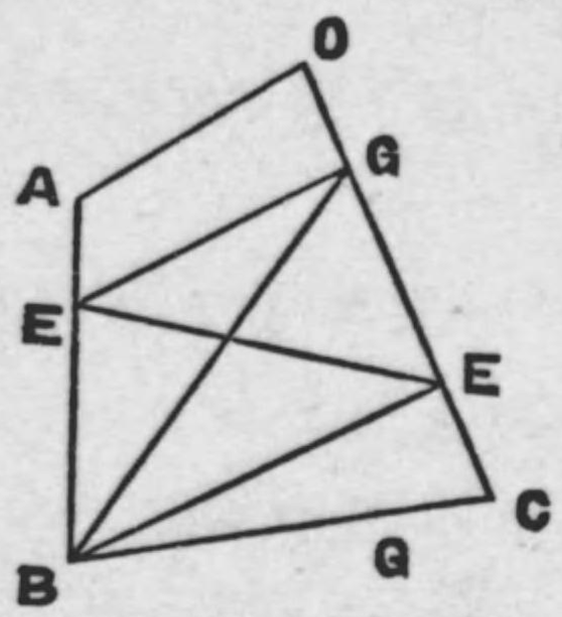
吟味 D ガ B, C ノ内ニ在レバ必ズ解法一ツアリ

2. 四邊形ノ一邊上ニ在ル一點ヲ過ギ直線ヲ引キ原形ヲ二等分セヨ。

特說 ▱ABCD ノ一邊 AB 上ニ在ル點 E ヲ過ギ直線 EF ヲ引キ ▱ABCD ヲ二等分スルコト

書込欄

作圖 ABCD ヲ二等分スル線 BG ヲ引キ，EG ヲ結ビテ夫レニ平行ニ BF ヲ引キテ DC ト F ニ交ラシムレバ EF ハ求ムル直線ナリ



證明 EG∥BF

∴ $\triangle GBF=\triangle EBF$

依ツテ $\triangle GBC=\frac{1}{2}\square ABCD$

∴ $\square EBCF=\frac{1}{2}\square ABCD$

吟味 B ヲ過ギテ二等分線 GB ヲ引ク如ク A ヲ過ギ二等分線 AG′ ヲ引キ得ベシ

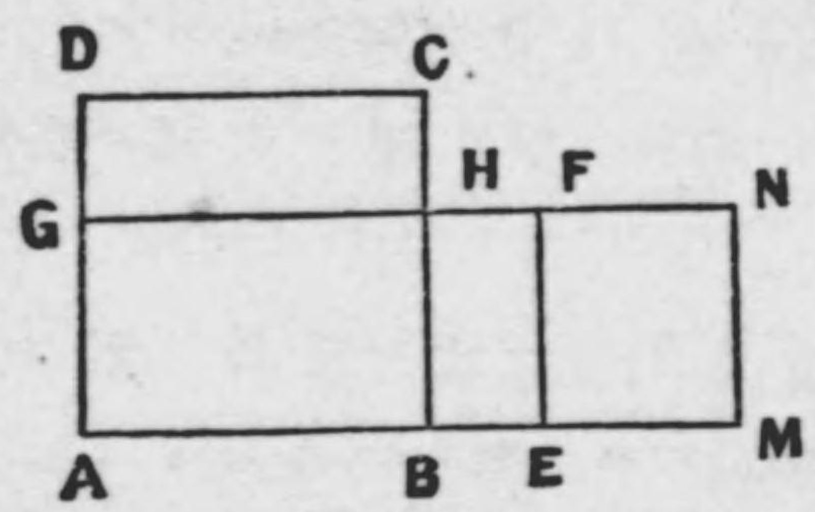
而シテ EG∥BF ガ G ト同ジ邊ニ F ニテ交ラバ EF ハ求ムル線ナル故通常ハ解法二ツアリ

若シ A ヲ過ギ EG′ ニ平行線ガ BC ト交ラズ BC ト交ル時ハ解法一ツアリ

3. 矩形ノ周ガ定長ナルトキ面積ノ最大ナルモノヲ作レ。

作圖 定長ノ四分ノ一ヲ一邊トスル正方形ナリ

證明 定長ノ周ノ任意ノ矩形ヲ AFFG トス，正方形ヲ ABCD トス



周ガ等シケレバ二隣邊ノ和モ相等シ

AB+BC=AE+EF

∴ BC=BE+EF

∴ HC=BE

書込欄

$\square$DH，$\square$HE ニ於テ

HC=BE, DE=BC>HB

∴ $\square DH>\square HE$

各邊ニ $\square$GB ヲ加ヘテ $\square DB>\square GE$

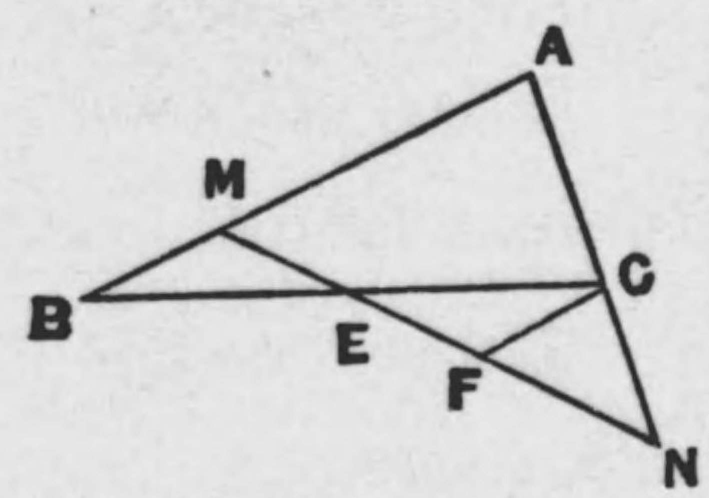
∴ HC+HB>BM+MN

各ニ AB ヲ加ヘテ AB+BC>AM+MN

故ニ正方形ノ周ハ等積ノ任意ノ周ヨリ大ナリ

4. 與ヘラレタル角 BAC 内ノ一點 E ヲ過ル直線ヲ底トシテ其ノ二邊ニテナス三角形中最小ナルモノヲ作レ。

特設 E ニテ二等分セラルヽモノヲ底トスル三角形ガ最小ナリ



證明 E ヲ過ギル任意ノ線 MN ヲ作リ C ヲ過ギ BM ニ平行線 CF ヲ作レバ

BE=EC

∴ $\triangle BEM<\triangle CEN$

依ツテ $\triangle ABC<\triangle AMN$

5. 三角形ノ頂角ト高サヽガ與ヘラレタルトキ面積ノ最小ナルモノヲ求メヨ。

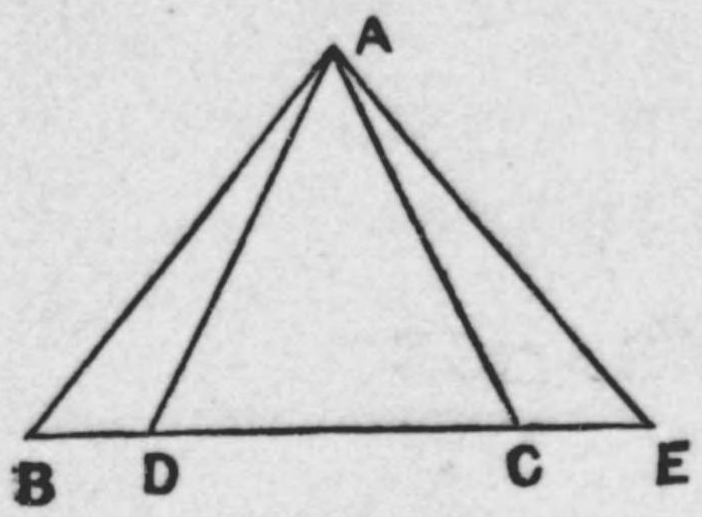
作圖 頂角ト高サトヲ與ヘラレタル二等邊三角形 ABC ヲ作レバ可ナリ

證明 頂角ト高サト共ニ等シキ任意ノ三角形 ADE ヲ

書

込

欄



作リ △ABC ト頂角ノ底ヲ合ハストキ

AD<AE トスレバ

△ABD, △ACF ニ於テ

AB=AC, AD<AE

然ルニ ∠BAD=∠CAE

∴ △ABD<△ACE

兩方ニ △ADC ヲ加ヘテ △ABC<△ADE

書

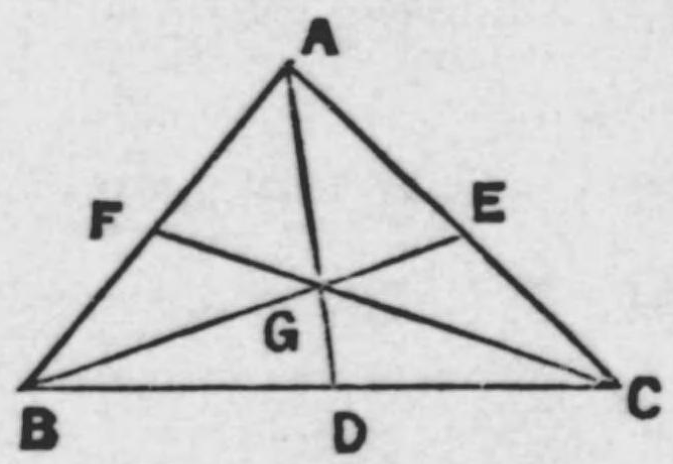
込

欄

第四 研究餘錄

1. 三角形 △ABC ノ重心ヲ頂點トシ一邊 BC ヲ底トスレバ

$$\triangle GBC=\frac{1}{3}\triangle ABC$$



證明 頂點ト重心Gトヲ過ギル線ハ對邊ヲ二等分ス

故ニ D, E, F ハ夫々邊ノ中點ナリ

等底等高ナレバ等積ナル故

$\triangle ABD=\triangle ADC$

$\triangle GBD = \triangle GDC$

$\therefore\ \triangle AGB = \triangle AGC$

同理ニテ $\triangle AGB = \triangle BGC$

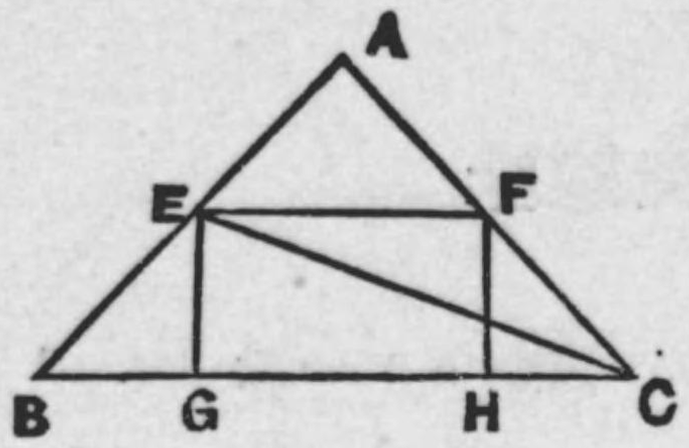
$\therefore\ \triangle AGB = \triangle AGC = \triangle BGC$

$\therefore\ \triangle AGB = \frac{1}{3}\triangle ABC$

2. 三角形 ABC ノ邊 AB, AC ノ中點ヲ E, F トシ H, F ヨリ邊 BC ニ垂線ヲ引キ其ノ足ヲ夫々 G, H トスレバ

$$\square EGHF=\frac{1}{2}\triangle ABC$$

書込欄



證明 $AE=BE,\ AF=FC$

$\therefore\ EF /\!/ BC$

$\therefore$ 矩形 $EGHF$

$=2\triangle CEF$

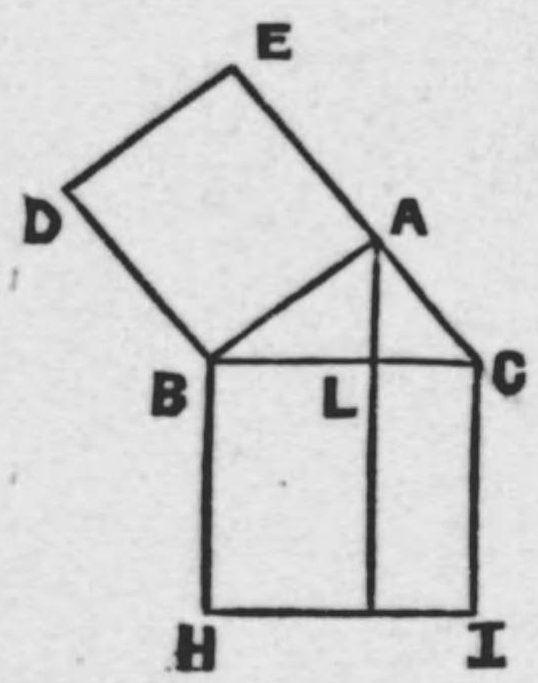
$=\triangle AEC$

$=\frac{1}{2}ABC$

3. 直角三角形ノ上ノ正方形ハコノ邊ガ斜邊上ニ投ズル正射影ト斜邊トノ積ニ等シ。

假設 $\angle A=\angle R$ トスル $\triangle ABC$ ノ AB, 又ハ AC ノ斜邊上ニ投ズル正射影ヲ BL 又ハ LC トス

終結 $\overline{AB}^2=BL.BC$ 又ハ $\overline{AC}^2=CL, CB$



證明 ヒタゴラスノ定理ヨリ

$\square ABDE=\square HL$

然ルニ

$\square HL=BL.BH$

$=BL.BC$

$\therefore\ \square ABDE=BL.BC$

$\therefore\ \overline{AB}^2=BL.BC$

同樣ニ $\overline{AC}^2=CL.BC$

4. 直角三角形ノ直角ノ頂點ヨリ斜線ヘ下ス垂線ノ上ノ正方形ハ垂線ノ足ガ斜邊ヲ分ツ二部分ノ積ニ等シ。

書込欄

假設 $\angle A$ ヲ直角トスル三角形ノ A ヨリ下ス垂線ヲ AP トス

終結 $\overline{OP}^2=BP.CP$

證明 BC ノ中點 O ト A トヲ結ベバ

$\overline{AP}^2=\overline{AO}^2-\overline{OP}^2$

$=(AO+OP)(AO-OP)$

$=(BO+OP)(CO-OP)$

$=BP.CP$

5. $\angle A=\angle R$ ナル $\triangle ABC$ ノ AB ノ中點 D ヨリ BC ヘ垂線 DE ヲ下セバ

$$\overline{AC}^2=\overline{BE}^2-\overline{CE}^2$$

證明 $\overline{BE}^2-\overline{CE}^2=\overline{BD}^2-\overline{CD}^2$

$=\overline{AD}^2-\overline{CD}^2=\overline{AC}^2$

6. 三角形ノ頂點ヨリ重心マデノ線分ノ上ノ正方形ノ和ハ三邊上ノ各正方形ノ和ノ $\frac{1}{3}$ ニ等シ。

證明 重心 G ヲ通ル AG, BG, CG ノ延長ト各邊ノ交點ヲ夫々 D, E, F トス

$\therefore\ BD=CD$

$\therefore\ \overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2\overline{AD}^2+2\overline{BD}^2$

$=\frac{9}{2}\overline{AG}^2+\frac{1}{2}\overline{BC}^2$

書込欄

∴ $2\overline{AB}^2+2\overline{AC}^2-\overline{BC}^2=9\overline{AG}^2$

同樣ニ $2\overline{BC}^2+2\overline{AB}^2-\overline{CA}^2=9\overline{BG}^2$

$2\overline{CA}^2+2\overline{BC}^2-\overline{AB}^2=9\overline{CG}^2$

$3(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2)=9(\overline{AG}^2+\overline{AG}^2+\overline{CG}^2)$

∴ $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2=3(\overline{AG}+\overline{BG}^2+\overline{CG}^2)$

7. 三角形ノ重心ヲGトスレバ次ノ關係アルコトヲ證セヨ。

(A) $\overline{AB}^2+3\overline{CG}^2=\overline{BC}^2+3\overline{AG}^2=\overline{CA}^2+3\overline{BG}^2$

(B) 任意ノ一點ヲPトスレバ

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=\overline{GA}^2+\overline{GB}^2+\overline{GC}^2+3\overline{PG}^2$

(A) 證明 BCノ中點ヲDトスレバ

$\overline{GB}^2+\overline{GC}^2=2(\overline{GD}^2+\overline{BD}^2)$

二倍スレバ $2\overline{GB}^2+2\overline{GC}^2=4\overline{GD}^2+4\overline{BD}^2$

然ルニ $4\overline{GD}^2=(2GD)^2=\overline{GA}^2$

$4\overline{BD}^2=(2BD)^2=\overline{BC}^2$

∴ $2\overline{GB}^2+2\overline{GC}^2+2\overline{GA}^2=\overline{BC}^2+3\overline{GA}^2$

同樣ニ $2(\overline{GB}^2+\overline{GC}^2+\overline{GA}^2)=\overline{CA}^2+3\overline{GB}^2$

又 $2(\overline{GB}^2+\overline{GC}^2+\overline{GA}^2)=\overline{AB}^2+3\overline{GC}^2$

∴ $\overline{AB}^2+3\overline{GC}^2=\overline{BC}^2+3\overline{GA}^2=\overline{CA}^2+3\overline{GB}^2$

書込欄

(B) 證明 AGノ中點ヲKトス

$\overline{PA}^2+\overline{GP}^2=2(\overline{PK}^2+\overline{GD}^2)$............(1)

$\overline{PK}^2+\overline{PD}^2=2(\overline{PG}^2+\overline{GD}^2)$

$2\overline{PK}^2+2\overline{PD}^2=4\overline{PG}^2+4\overline{GD}^2$............(2)

(1)ト(2)トヲ加ヘレバ

$4\overline{GD}^2=\overline{GA}^2$

$\overline{PA}^2+2\overline{PD}^2=3\overline{PG}^2+\overline{GA}^2+2\overline{GD}^2$

$\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=2\overline{PD}^2+2\overline{BD}^2$

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=3\overline{PG}^2+\overline{GA}^2+2\overline{GD}^2+2\overline{BD}^2$

∴ $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=3\overline{PG}^2+\overline{GA}^2+\overline{GB}^2+\overline{GC}^2$

8. 相交ル二圓ノ交點 A, B ヲ結ビ付クル直線 AB ノ延長上ノ一點 P ヨリ各圓ヘ切線 PT.PO ヲ引キ，其ノ切線ヲ T.Q トスレバ PT=PQ

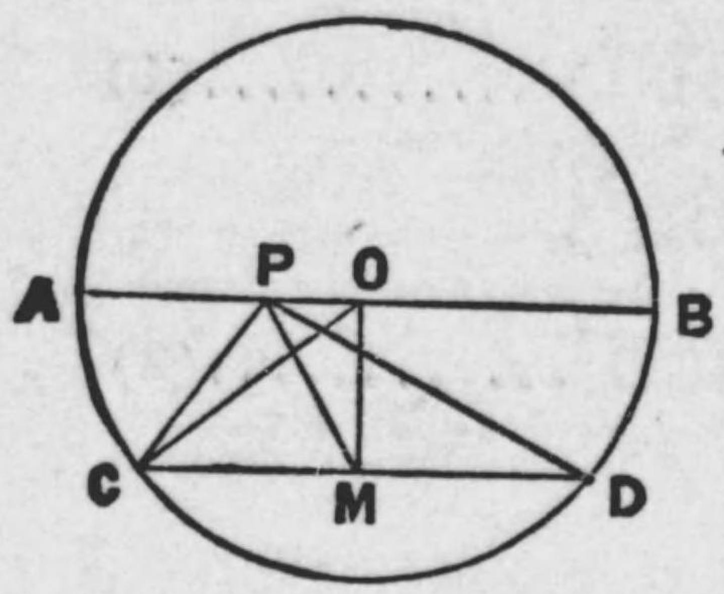
證明 $\overline{PT}^2=PA.PB$　$\overline{PQ}^2=PA.PB$

$\overline{PT}^2=\overline{PQ}^2$　∴ PT=PQ

9. 圓 O ノ直徑 AB 上ノ一點ヲ P トシ，此直徑ニ平行ナル絃ヲ CD トスレバ

書込欄

$\overline{PC}^2+\overline{PD}^2=\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$



證明 Mヲ CDノ中點トス

$\overline{PC}^2+\overline{PD}^2$

$=2(\overline{CM}^2+\overline{PM}^2)$

$=2\{(\overline{CO}^2-\overline{OM}^2)$

$+\overline{OM}^2+\overline{PO}^2)\}$

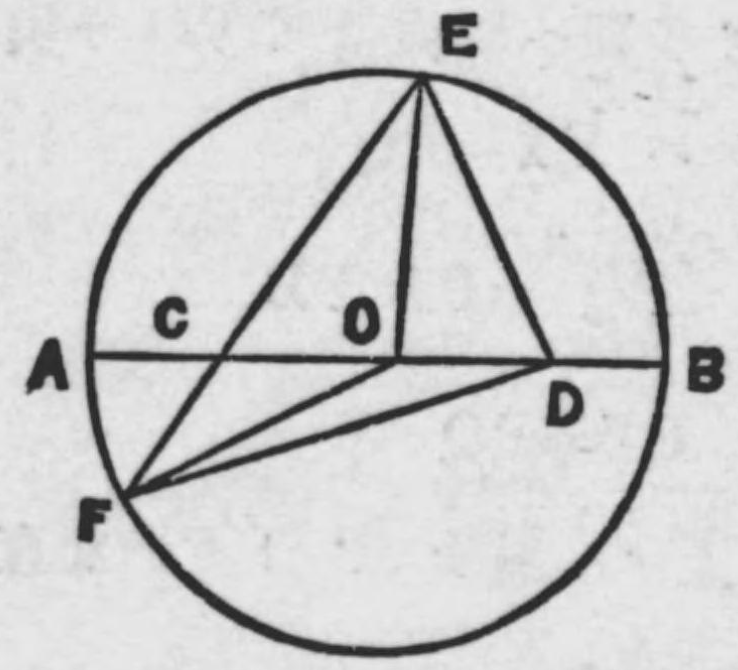
$=2(\overline{CO}^2+\overline{PO}^2)$

$=2(\overline{AO}^2+\overline{PO}^2)$

$=(AO+\overline{PO})^2+(AO-PO)^2$

$=\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$

10. 中心 O ナル圓ノ直徑 AB 或ハ其ノ延長上ニ二點 C, D ヲ定メ, OC=OD ナラシム, C ヲ過ギル任意ノ絃 EF ヲ引キ DE, DF ヲ結ブトキハ三角形 DEF ノ各邊ノ上ノ正方形ノ和ハ恒ニ一定ノ大サヲ有ス。



證明 OC=OD

$\therefore\ \overline{EC}^2+\overline{ED}^2=2$

$(\overline{OE}^2+\overline{OC}^2)$……(1)

$\overline{FC}^2+\overline{FD}^2$

$=2(\overline{OF}^2+\overline{OC}^2)$..(2)

書込欄

而シテ

EC.FC=AC.BC

=(OA−OC)(OA+OC)

$=\overline{OA}^2-\overline{OC}^2$

$2EC.FC=2(\overline{OA}^2-\overline{OC}^2)$…………(3)

(1), (2), (3) ヲ加ヘテ

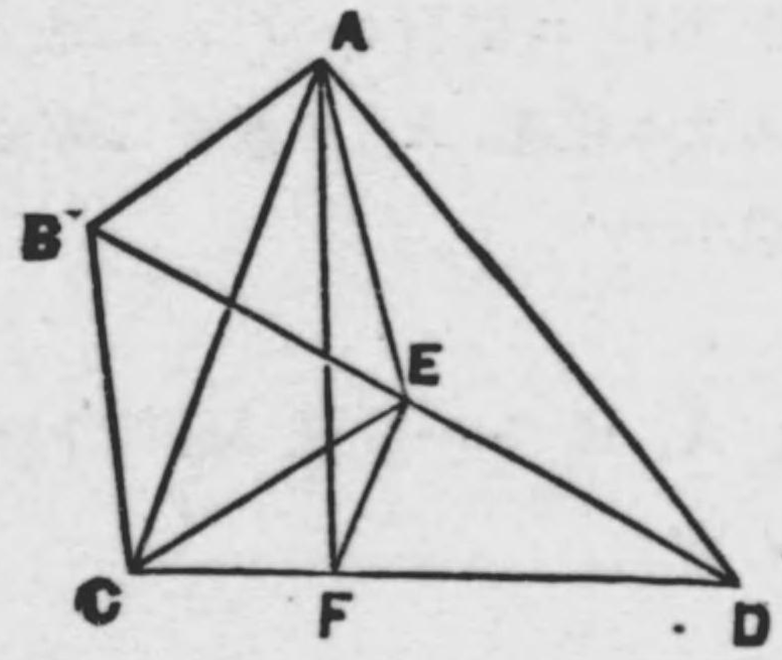
$\overline{EF}^2+\overline{ED}^2+\overline{FD}^2=6$(半徑)$^2+2\overline{OC}^2$

故ニ一定量ナリ

11. 四邊形ノ一角頂ヨリ直線ヲ引キ原形ヲ二等分セヨ。

特說 ▱ABCD ノ角頂 A ヨリ直線 AF ヲ引キ二等分スルコト

作圖 BD ノ中點ヲ E トシ, E ヲ過ギ AC ニ平行線 EF ヲ引キ CD ト F ニ交ラシムレバ AF ハ求ムル直線ナリ



證明 BE=ED

∴ △ABE=△ADE

△BCE=△DCE

▱ABCD=▱ADCE

故ニ此各ハ原形ノ半ナリ

AC∥EF

∴ △EAC=△FAC

∴ ▱ABCE=△ABC+△AEC

書込欄

$=\triangle ABC+\triangle AFC$

$=ABCF$

故ニ $\square ABCF$ ハ原式ノ二分ノ一ナリ

吟味 恒ニ唯一ノ解法アリ

12. 面積ガ一定ナル矩形ノ中周ガ最小ナルモノヲ作レ。

作圖 等積ナル正方形

證明 圖ニ於テ正方形 ABCD ＝矩形 AMNG ナルトキ

$\square DH=\square HM$

然ルニ $DC>HB$

$\therefore\ HC<BM$

故ニ正方形ハ任意ノ矩形ヨリ大，即チ最大ナリ

13. 底ト面積トヲ與ヘテ周ノ最小ナル三角形ヲ作レ。

作圖 底ト積ヲ知ルトキハ高サヲモ求ムルコトヲ得ベク其ノ長サヲ h トス底 BC ニ平行シ h ノ距離ヲ有ツ直線 MN ヲ引キ其上ニ頂點 A ヲ置ク二等邊 $\triangle ABC$ ハ求ムル周ノ最小ナリ

證明 略ス

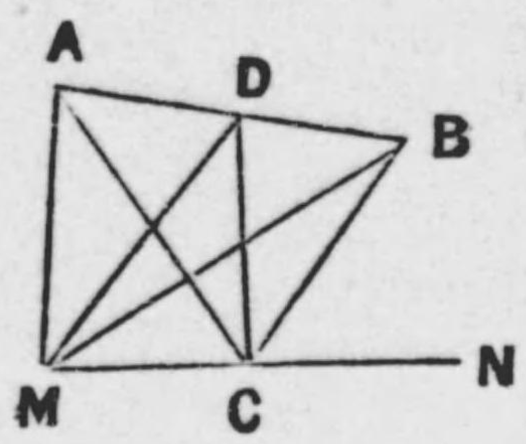
14. 與ヘラレタル二點 A, B ト一直線 MN トアリ MN 上ニ C ヲ求メテ

$\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$ ヲ最小ナラシメヨ

作圖 AB ノ中點 D ヨリ MN ニ引ク垂線ノ足ヲ C

書込欄

トスレバ C ハ求ムル點ナリ



證明 $\overline{CA}^2+\overline{CB}^2$

$=2(\overline{CD}^2+\overline{AD}^2)$

MN 上任意ノ點ヲ M トスレバ

$\overline{MA}^2+\overline{MB}^2=(\overline{MD}^2+\overline{AD}^2)$

$CD\perp MN\quad \therefore\ DC<DM$

$\therefore\ 2(\overline{CD}^2+\overline{AD}^2)<(\overline{MD}^2+\overline{AD}^2)$

即チ $\overline{CA}^2+\overline{CB}^2<\overline{MA}^2+\overline{MB}^2$

故ニ $\overline{CA}^2+\overline{CB}^2$ ハ最小ナリ

豫備書込欄

豫備書込欄

豫備書込欄

錄備書込欄

昭和九年[illegible]月一日印刷
昭和九年四月五日發行

自學自習 記入式參考書

定價金四十錢

不許複製

著作者　吉田書店出版部編輯所
代表者　吉田百邦

東京市深川區常盤町二丁目一番地
發行者　吉田百邦

東京市京橋區築地四丁目四番地
印刷者　鈴木茂

東京市品川區東大崎三ノ一二三九番地
印刷所　中屋三間印刷株式會社

發行所（東京市深川區常盤町二丁目一番地　振替東京三九八六六番）吉田書店出版部

發賣所
（東京）東京堂・東海堂・北隆館・大東館・大阪屋・上田屋
栗田書店・六合館・文林堂・文盛堂
（大阪）登美屋書店・柳原書店（京都）京都書籍株式會社
（名古屋）川瀨書店（九州）菊竹金文堂・大坪惇信堂
（神戶）寶文館支店・神戶登美屋書店（北海堂）富貴堂

理學博士 山口鋭之助先生
文學博士 藤岡勝二先生 監修
吉田書店出版部編輯部編纂

ポケット型新活字採用　圖版多數挿入

現代學生智識の泉源
豫習復習受驗の要書
雜記帳代用記入欄付

（學生の良師となれ
簡明にして要を盡せ
確實にして權威あれ
學生に興味あらしめよ）

以上をモットーとして
本書の編纂をなす

定價 各四十錢　送料各六錢

中等學生受檢

自學自習記入式

日本地理　上下二冊
世界地理　上下二冊
地理通論　全一冊
日本史　上下二冊
西洋紙　上下二冊
東洋史　全一冊
算術　全一冊
代數　全一冊

近時諸種の參考書が續々出版される折柄時代の進運に鑑み内容は固より定價の犧牲的低廉に至るまであらゆる美點を網羅せる本書自學自習記入式參考書がこゝに生る、吾が記入式參考書は現代學生智識の泉源たり又豫習復習受驗

難關突破の虎の巻

參考書

幾何學　全一冊
植物學　全一冊
動物學　全一冊
鑛物學　全一冊
生理衛生　全一冊
物理學　上下二冊
化學　上下二冊
國文解釋　全一冊
英文法　全一冊

等の要書として前條のモットーに基き理學博士山口、文學博士藤岡の兩先生監修の下に各專門家之を分擔執筆せられ鋭意努力の結果完成せる參考書なれば良く學習の伴侶と成り又受驗優勝の祕訣には實に本書の熟讀が最善の近道たり。

◆内容は專ら根柢となるべき智識の養成に努む◆

本書の特色

價格至廉なるは大量部數の印刷する結果である。
内容豐富なるは新式活字採用の爲め類書數册に優る。
記事問題の正確なるは實地の教材を悉く收めたる結果である。
挿圖の鮮明印刷の鮮明なるは類書の追從を許さざるところ。
インク留用純良質・書込欄を設け雜記帳代用たらしめたこと。