中學校師範學校用

民國新教科書

三角學

美國哈佛大學天算碩士秦汾編

商務印書館發行

編輯大意

是書依據教育部令編輯，專爲中學校，女子中學校，及師範學校，女子師範學校之用。說理務求完備，俾學者思想得漸趨精密，豫備進習專門。用是書者宜注意下列數端。

一. 本書首論坐標，正負及任何角等。此種觀念，不獨爲全書之基礎，並於高等學科大有關係，愼勿以其較難領會而舍之。

二. 本書於對數僅述大略，足備檢表之用而已。至於對數原理，則宜於高等代數求之。

三. 三角表及對數表之造法，三角級數 Trigonometric Series，複素量 Complex Quantities，特麥佛氏定理 De Moivre's Theorem，指數式 Exponential Form，雙曲線函數 Hyperbolic Function 等，超越中學範圍，均不備論。

四. 本書內節款之不甚緊要，及問題之較難演算者，均以[*]爲記。倘時間無多，概可略去。

五. 本書習題，均附章節之末，旣免間斷正文，並使

學者不能豫知應用法術公式。演算時不致強爲牽合。

六. 各校程度時間未必盡同。教材問題或當增損。是在教者。

七. 反三角函數記號宜用arc。但英美諸書多用 -1 指數。蓋習慣使然。不易驟革。吾國尚無定規。本書均用arc，期與德法諸書一律。

八. 西文名詞，間有不甚允洽，或不甚便利者。狃於習慣不易更變。其爲吾國尙未規定者，則爲特製新名，以便學者。

九. 本書習題答案。另刊小本。專供教員之用。

十. 本書重要名詞。於始見時均附註英字。卷末並列索引。以備檢查。

編輯時參攷書籍。其最要者則爲Todhunter, Hobson, Casey, Locke, Hall and Knight, Loney, Wentworth, Granville 之作。習題亦多取於是。餘則編者教授及試驗時所命之題也。

編者識

三角學總目

(章) (頁)

第五章　幾角諸函數間之關係

第六章　斜角三角形

第七章　三角形之性質及多邊形

中學新教科書

三角學

第一章

論角

第一節　角之計算法

1. 角　兩不同向之直線相交則成角 Angle。

角之大小視兩相交線中間之開闊而定，與相交線之長短無涉。

凡量角必先指定一角爲單位 Unit。

2. 六十分法　兩互垂線相交而成之角，謂之直角。故半周等於兩直角，全周等於四直角。

設以直角分爲九十等份，則每份謂之一度之角 An angle of one degree。此一度之角往往用爲量角之單位。凡一角能適容此單位角若干次者，則謂之若干

度之角，或謂之等於若干度。

例如，一直角等於九十度，全周等於四直角，卽爲三百六十度。

以一度之角分爲六十等份，所得之每份卽謂之**一分之角** An angle of one minute。凡角之適能容此一分之角若干次者，可以幾分，或幾度幾分表之。

例如，二度半之角，可謂之二度三十分。

以一分之角分爲六十等份，每份卽謂之**一秒之角** An angle of one second。凡角之等於幾度幾分有零者，以幾度幾分幾秒表之。

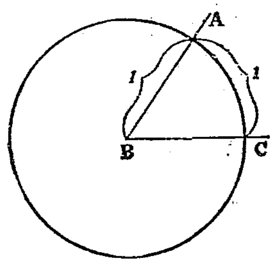
例如，三度五分半之角，可以三度五分三十秒表之；三度八分之一，等於三度七分三十秒。

度，分，秒三字往往用 °，′，″ 三符號表之。如三度七分三十秒，寫作 3° 7′ 30″。

用度，分，秒表角之大小謂之**六十分法** Sexagesimal system。

3. 圜周法 設有一角 ABC，試以角尖 B 爲心以 1 爲半徑作圜，是圜與 BC 及 BA 線交於 C 點及

A 點。如是，則$\angle ABC$爲中心角，故與其弧 AC 成正比例。故$\angle ABC$之大小可以 AC 弧之長量之。若 AC 弧等於半徑(卽 1)，則$\angle ABC$卽爲圓周法 Circular System 內之單位角，其名曰半徑度 Radian。若某角與此單位角之比爲若干，則此角卽謂之等於若干半徑度。



4. 由幾何學之理，知圓周C與其半徑R之比爲2π。故若$R=1$，則$C=2\pi$，故全圓周四直角等於2π半徑度。故

$$360^\circ=2\pi \text{ 半徑度。}$$

於是，得
$$1 \text{ 半徑度}=\frac{360}{2\pi}\text{度}=57^\circ\ 17'\ 45'',$$

$$1 \text{ 度}=\frac{2\pi}{360}\text{半徑度}=0.017453 \text{ 半徑度。}$$

以半徑度爲量角之單位者，謂之圓周法。此法在高等數學多用之。

習 題 I

1. $24\frac{8}{9}$度, $30\frac{2}{3}$度, 37820分, 89624秒 試化成度分秒式.

2. $3\frac{2}{3}$直角, $\frac{58}{3}$直角, $\frac{72}{7}$直角; 試化成度分秒式.

3. 1直角, 3直角, $\frac{4}{3}$直角; 各等於若干半徑度.

4. 30°, 45°, 60°, 180°, 270°; 各等於若干半徑度.

5. 37°30′, 123°45′, 11°15′; 各等於若干半徑度.

6. π半徑度, $\frac{4}{3}\pi$半徑度, $\frac{5}{4}\pi$半徑度, $\frac{7}{4}\pi$半徑度, $\frac{9}{4}\pi$半徑度, 各等於若干度.

7. 3半徑度, 5.2半徑度; 各等於若干度.

$$(\pi = 3\cdot1416)$$

8. 試徒手作 30°, 60°, 45°, 120°, 160° 等角.

9. 試徒手作 1半徑度, 2半徑度, 3半徑度等角.

10. 地球之半徑為4000英里. 有同在赤道上兩點, 其經度相差63° 30′. 問兩點相距若干英里.

11.　有齒輪其半徑為三尺．上有齒一百十三個．問二齒間之距離為幾尺．

12.　設時鐘分針之長為三寸半．問其極端於二十五分鐘內行過之弧長幾何．

13.　在赤道上經度相差 1 度，則距離為 69·170 英里．問赤道之半徑為若干英里．

14.*　**百分法** Centesimal System 內所用之單位角為直角之百分之一．此單位角名曰級 Grade．問一級等於若干度，一級等於若干半徑度．

15.*　50 級，72 級，34 級，諸角各等於若干度．

16.*　π 半徑度，$\frac{3}{4}\pi$ 半徑度，3 半徑度，5 半徑度，諸角各等於若干級．

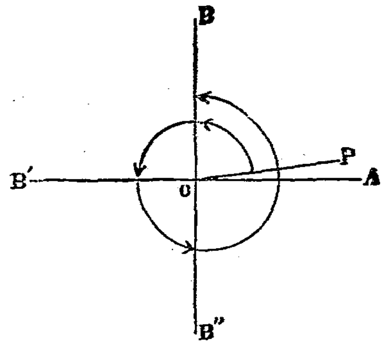
17.*　$54°32'$，$78°49'$，$182°34'30''$，諸角各等於若干級．

第二節　角之廣義

5. 有同在一處之兩線。若一線在線上之一點旋轉，則此線與不動之線成各種之角。

此線旋過若干度，即謂此線與不動線成若干度之角。例如，設 OP 線本與 OA 線同在一處。今 OP 在 O 點旋

轉。OP 旋轉至 OB 時與 OA 成一直角。至 OB′ 時與 OA 成二直角至 OB″ 時與 OA 成三直角，若 OP 旋過 OA 而再至 OB，則與 OA 成五直角，即 450°。



依此則 OP 與 OA 所成之角，不限定小於 360°。若OP旋轉不已，則與 OA 所成之角，可大於任若干度。

故依角之廣義，則一角之大小，不僅視其二邊間之開闔而定，並須視旋轉之邊，曾經過他邊幾次。

例如，若 OP 旋轉，曾經過 OA 四次而後至 OB，則 OP 與 OA 成 $4\times360^\circ+90^\circ$ 之角。

第三節　角之正負號

6. 正負　凡幾何之可有相反之兩方向者，則可用正負號表其方向。

例如，寒暑表以冰點爲零度。溫度可高於冰點，並可

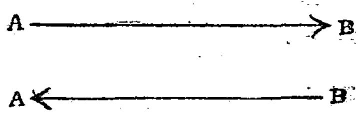
scalar
vector

低於冰點。高於冰點若干度謂之正若干度。低於冰點若干度謂之負若干度。

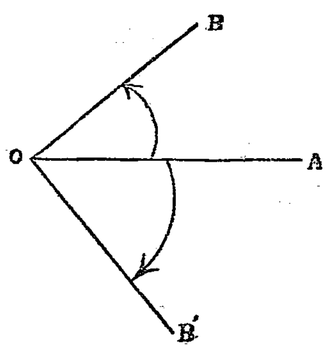
7. 正負線　一點引長則成線。若有 AB 一線，可作爲自 A 點引至 B 點而成，亦可作爲自 B 點引至 A 點而成。欲表明其分別，則 AB 線可謂之正線，而 BA 線則謂之負線。蓋此二線之長雖等而方向則相反。故

$$AB=-BA,$$

$$BA=-AB。$$



8. 正負角　若兩線本同在一處，而一線旋轉則與他線成角。如 OP 線本與 OA 線同在一處。若 OP 順右手指(卽逆鐘向 Counter-clockwise) 旋轉至 OB，則與 OA 成 $\angle AOB$。若 OP 線逆右手指(卽順鐘向 Clockwise) 旋轉至於 OB′，則與 OA 成 $\angle AOB'$。欲表兩角旋出方向之分別，則以前角爲正角，以後角爲負角。究竟



何種角應作為正，並無一定之理由。惟依向來之習慣。凡角之因其一邊順右手指旋轉而成者，謂之**正角**，如$\angle AOB$。逆右手指旋轉而成者，謂之**負角**，如$\angle AOB'$。

故若$\angle AOB$與$\angle AOB'$之大小同，則$\angle AOB=-\angle AOB'$

若OP順右手指旋至OB，

則$\angle AOB=+90°$，若至OB″，

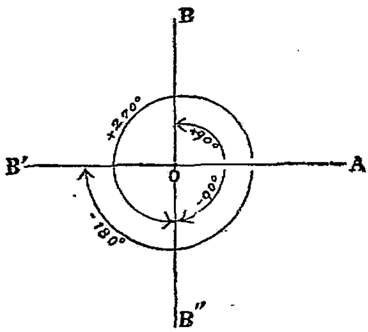
則$\angle AOB''=+270°$。

若OP逆右手指旋至OB″，

則$\angle AOB''=-90°$，若至OB′，

則$\angle AOB'=-180°$，若經過OA而再至OB″，

則$\angle AOB''=-450°$。



第四節 角之位置

9. 象限 若通過一點作兩互垂線，則此兩線等分全平面為四份。每份謂之一**象限** Quadrant。

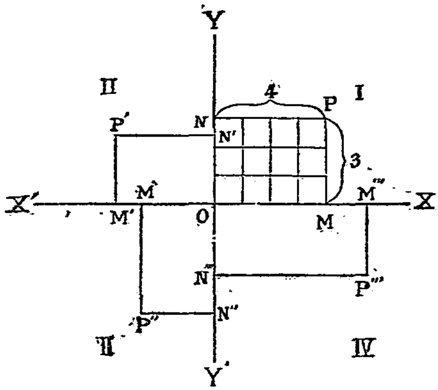
上左角一份名為第一象限，

上右角一份名為第二象限，

下右角一份名為第三象限，

下左角一份名為第四象限。

10. 點之位置　設 XX′ 及 YY′ 為通過 O 點之兩互垂線，P 為平面上之任一點。則 P 之位置視 P 至 YY′ 線之距離及至 XX′ 之距離(即 NP 及 MP) 而定。例如，某點至 YY′ 之距離為 4，至 XX′ 之距離為 3，則此點必在 P 處(見圖)。



NP 及 MP 兩幾何謂之P點之坐標 Co-ordinates。NP 名橫坐標 Abscissa。MP 名縱坐標 Ordinate。XX′ 及 YY′ 兩線謂之坐標軸 Axes of Co-ordinates。XX′ 謂之 X-軸，YY′ 謂之 Y-軸。O 點謂之原點 Origin。

設 P 為第一象限內之點，則 P 之橫坐標為 NP，
縱坐標為 MP。

設 P′為第二象限內之點，則 P′之橫坐標為 N′P′，
縱坐標為 M′P′。

設 P'' 爲第三象限內之點，則 P'' 之橫坐標爲 $N''P''$，縱坐標爲 $M''P''$。

設 P''' 爲第四象限內之點，則 P''' 之橫坐標爲 $N'''P'''$，縱坐標爲 $M'''P'''$。

凡向右引成之線作爲正，向左引成之線作爲負。向上引成之線作爲正，向下引成之線作爲負。

例如，NP 爲正，$N'P'$ 爲負，MP 爲正，$M'''P'''$ 爲負。

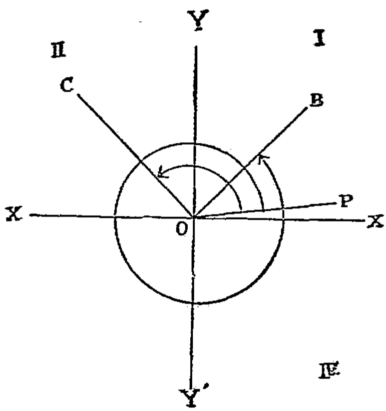
故 在象限 I，橫坐標爲正，縱坐標爲正，
在象限 II，橫坐標爲負，縱坐標爲正，
在象限 III，橫坐標爲負，縱坐標爲負，
在象限 IV，橫坐標爲正，縱坐標爲負。

故若知某點之二坐標之正負，則可知此點所在之象限。

例如，若知 P 之橫坐標爲負，縱坐標爲負，則知 P 必在第三象限內。

11. 角之位置 設 OP 自 OX 起，順右手指旋轉，若 OP 在某象限內，則 OP 與 OX 所成之角亦在某象限內。

例如，若 OP 旋轉至 OC，則與 OX 成 ∠XOC。此角在象限 II，若經過 OX 而至 OB 則與 OX 成 360°+∠XOB。此角在象限 I。



故自 0° 至 90° 諸角均在象限 I。

自 90° 至 180° 諸角均在象限 II。

自 180° 至 270° 諸角均在象限 IV。

自 270° 至 360° 諸角均在象限 IV。

自 360° 至 360°+90° 諸角均在象限 I。

自 360°+90° 至 360°+180° 諸角均在象限 II。

自 360°+180° 至 360°+270° 諸角均在象限 III。

廣言之，正角 $(n\times360^\circ+x)$ 所在之象限，視 x 角所在之象限而定，式內 n 爲正整數。

例如，$728^\circ=(2\times360^\circ+8^\circ)$。今 8° 之角在象限 I，故 728° 之角亦在象限 I。

論負角,則 自 0° 至 -90° 諸角均在象限 IV。

自 -90° 至 -180° 諸角均在象限 III。

自 -180° 至 -270° 諸角均在象限 II。

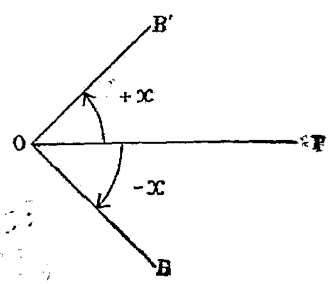
自 -270° 至 -360° 諸角均在象限 I。

自 -360° 至 $-360^\circ-90^\circ$ 諸角均在象限 IV。

廣言之,負角 $(n\times360^\circ-x)$ 所在之象限,視 $-x$ 角所在之象限而定,式內 n 爲負整數。

例如, $-3663^\circ=(-10\times360^\circ-63^\circ)$。故在象限 IV。

12。 $(n\times360^\circ\pm x)$ 角之邊與 $\pm x$ 角之邊同在一處。式內 n 爲整數,或正或負均可 x 爲任何角,或大或小於 360° 均可。蓋若 OP 旋至 OB 時成 $\pm x$ 角 (順旋則爲 $+x$,逆旋則爲 $-x$),則 OP 順旋或逆旋過 OP n 次而再至 OB 時,必成 $(n\times360^\circ\pm x)$ 之角。



例如, $623^\circ=(2\times360^\circ-97^\circ)$,

故 623° 角之邊與 -97° 角之邊同在一處。$3248^\circ=(9\times360^\circ+8^\circ)$,故 3248° 角之邊與 8° 角之邊同在一處。

$-1098°=(-3\times360°-18°)$，$-946°=(-3\times360°+34°)$。故

$-1098°$ 角與 $-18°$ 角，$-946°$ 角與 $34°$ 角之邊同在一處。

13. 若前款式內 $n=1$，x 為小於 $360°$ 之角，則正角 $(360°-x)$ 之邊與負角 $-x$ 之邊同在一處。

例如，$-30°$ 與 $(360°-30°)=330°$ 兩角之邊，同在一處。

習　題　II

1. 若有一輪每分鐘旋轉二十九次，問每秒鐘旋過若干度之角.

2. 一線順右手指旋轉，經過其原在之位置十二次又過 $36°$。問此線與其原在之位置成若干度之角.

3. 一線順右手指旋轉而與其原在之位置成 $3598°$ 角，問此線須經過其原在之位置幾次.

4. 試舉幾何之具有相反之兩方向者數種，及無相反之兩方向者數種.

5. 試徒手作下諸角：　$568°$，　$746°$，　$3645°$　$-30°$，$-270°$，　$-390°$，　$-720°$.

6. P 之橫坐標為正，縱坐標為負，

Q 之橫坐標為負，縱坐標為負，

R 之橫坐標為正, 縱坐標為正,

S 之橫坐標為負, 縱坐標為正,

問 P, Q, R, S 四點各在第幾象限.

7. 試徒手作下列諸點:

(a) 橫坐標 $=+3$. 縱坐標 $=-4$

(b) 橫坐標 $=+5$, 縱坐標 $=+5$

(c) 橫坐標 $=-6$, 縱坐標 $=-3$

(d) 橫坐標 $=+3$, 縱坐標 $=-3$

(e) 橫坐標 $=0$, 縱坐標 $=+1$

(f) 橫坐標 $=0$, 縱坐標 $=0$

(g) 橫坐標 $=-3$, 縱坐標 $=0$

(h) 橫坐標 $=0$, 縱坐標 $=-4$

(i) 橫坐標 $=\frac{1}{3}$ 縱坐標 $=2\frac{1}{4}$

8. $486°$, $-30°$, $-382°$, $1634°$, $342°8'$, $634°$, 諸角各在第幾象限.

9. $-30°$, $-96°53'48''$, $-45°$, $-342'$, 諸角之邊各與何正角之邊同在一處.

10. $27°38'$, $38°$, $136°10'$, $283°30'$, 諸角之邊各與何負角之邊同在一處.

11. 792°, 389°40′, 360089°40′, 523°10′30″, 諸角之邊. 各與 360° 以下何角之邊同在一處.

12. −3246°, −5829°, −3628°, 諸角之邊. 各與 360° 以下何角之邊同在一處.

13. 原點之橫縱坐標各爲何.

14. 若 P 點在 X-軸, 問 P 之縱坐標爲何.

若 P 點在 Y-軸, 問 P 之橫坐標爲何.

15.* 以原點爲中心, 5 爲半徑作一圓。問此圓與兩標軸交點之坐標各爲何。

16.* 有一綫, 其一端之橫坐標爲 4, 縱坐標爲 0. 其他一端之橫坐標爲 0, 縱坐標爲 6. 問此綫中點之橫縱坐標各爲何.

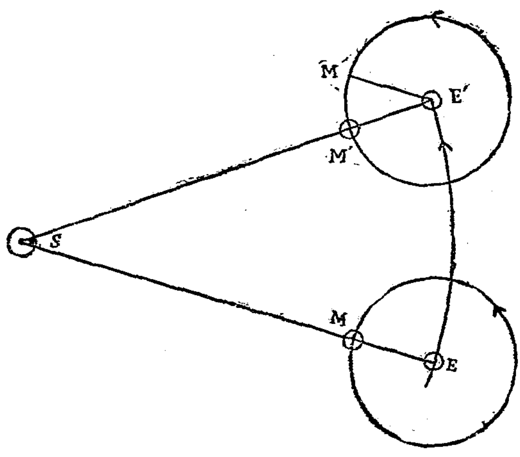
17.* 有一綫其中點之橫縱坐標各爲 0. 一端之橫坐標爲 −3, 縱坐標爲 5. 問他一端之橫縱坐標各爲何.

18. 設 OP 一綫本與 X-軸同在一處。若 OP 在原點 0 旋轉, 則與 X-軸成各種之角. 問 OP 與 X-軸成 30°30′, 142°32′, 183°22′, 223°, 462°30′, 8346°32′54″, −728°20′, −7633°54′48″, −842°30′, −7346°52′, 諸角時, P 之縱橫

坐標爲正抑爲負.

19. 有螺旋釘,每兩螺紋相距$\frac{1}{8}$寸.若此螺旋釘旋進四寸半,則須旋過若干度.

20. 地球繞日旋轉自西至東,每365·25日繞日一周.月球繞地旋轉亦自西至東,每27·3日繞地一周.問兩朔相距幾日.



〔解法〕 設兩朔相距 t 日.在 t 日內地球自E行至E′。設弧 $EE'=x$ 度,則$\frac{360^\circ}{365\cdot25}t=x$度。

月球於 t 日內自 M 東旋經其原處而至 M′。則弧 MM′ $=x$ 度。 故 $\frac{360^\circ}{27.3}t=(x+360)$ 度。

故 $\left(\frac{360^\circ}{27.3}-\frac{360^\circ}{365.25}\right)t=360^\circ$。

解之，得 $t=29\frac{1}{2}$ 日。

第二章

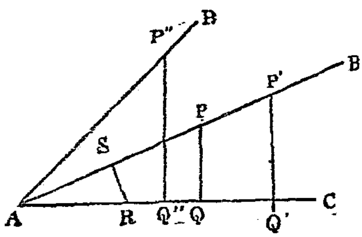
銳角之三角函數

第一節 三角比定義

14. 角之大小雖與其兩邊之長短無涉。然若就一三角形上諸角言之，則其大小與諸邊不盡無關係。例如，若三角形之邊相等，則其三角亦必相等，而每角必等於兩直角之三分之一，卽 60°。又若三角形之三邊爲 3, 4, 5，則此三角形之一角必爲直角。

故三角形上諸角之大小，可以其各邊之關係表示之。故若自角之一邊上之某點作線至他邊，則成三角形。而此角之大小，卽可以此三角形各邊之關係表示之。

15. 銳角之三角比 今先就 0° 與 90° 間諸角言之。



設 AB 線本與 AC 同在一處。令 AB 在 A 點旋轉而至 AB，則與 AC 成角 CAB。（∠CAB 在 0° 與 90° 之間。）在 AB 上

任一點 P 作垂線 PQ 至 AC。則

$$\frac{QP}{AP},\quad \frac{QP}{AQ},\quad \frac{AQ}{AP},$$

$$\frac{AP}{QP},\quad \frac{AQ}{QP},\quad \frac{AP}{AQ},$$

六比謂之 $\angle CAB$ 之三角比。Trigonometrical Ratio。

此六比之值不因 P 之位置而變。蓋若自另一點 P′ 作垂線 P′Q′ 至 AC，則直角三角形 APQ 與直角三角形 AP′Q′ 相似。故此兩三角形之諸邊相比，而

$$\frac{Q'P'}{AP'}=\frac{QP}{AP},\quad \frac{Q'P'}{AQ'}=\frac{QP}{AQ}$$ 等等。

且若自他一邊 AC 上一點 R 作垂線 RS 至 AB，則 SR, AS, AR 三邊之諸比，與 QP, AQ, AP 三邊相當之諸比亦相等。蓋直角三角形 ARS 與直角三角形 APQ 相似。故其諸邊相比，而 $\frac{QP}{AP}=\frac{SR}{AR}$, $\frac{AP}{QP}=\frac{AR}{SR}$ 等等。

由此可見，若有一角 CAB，則其六比各有定值。

若角 CAB 變大，或變小，則六比之值亦必變。譬如若 $\angle CAB$ 變為 $\angle CAB'$。在 AB′ 上之一點 P″，作垂線至 AC，即 P″Q″。三角形 AP″Q″ 與三角形 APQ 不相似。

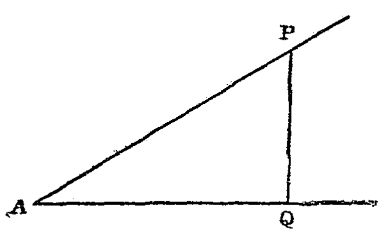
故其諸邊不相比，而 $\frac{Q''P''}{A\ P''}$, $\frac{Q''P''}{A\ Q''}$ 等等，不等於 $\frac{QP}{AP}$, $\frac{QP}{AQ}$ 等等。

16. 三角函數 從上款見六比與角 CAB 有密切之關係。**知角之值，則知六比之值。反之，知六比之值，則知角之值。**(角可有無數之值，見後第四章第六節)

此六比亦謂之 CAB 角之**三角函數**。Trigonometrical Functon。

六比之外尚有兩比，即 $\frac{AP-AQ}{AP}$ 與 $\frac{AP-QP}{AP}$。此二比亦爲 CAB 角之三角函數，惟不常用。

三角比之名義列下：



(1) $\frac{QP}{PA}$ 即 $\frac{\text{垂線}}{\text{斜邊}}$ 謂之 A 之**正弦**(*sine*)，略爲 **sinA**。

(2) $\frac{AQ}{AP}$ 即 $\frac{\text{平邊}}{\text{斜邊}}$ 謂之 A 之**餘弦**(*cosine*)，略爲 **cosA**。

(3) $\frac{QP}{AQ}$即$\frac{垂線}{平邊}$謂之 A 之正切(*tangent*)，略爲 tanA。

(4) $\frac{AQ}{QP}$即$\frac{平邊}{垂線}$謂之 A 之餘切(*cotangent*)，略爲 cotA。

(5) $\frac{AP}{AQ}$即$\frac{斜邊}{平邊}$謂之 A 之正割(*secant*)，略爲 secA。

(6) $\frac{AP}{QP}$即$\frac{斜邊}{垂線}$謂之 A 之餘割(*cosecant*)，略爲 cscA。

(7) $\frac{AP-AQ}{AP}=1-\cos A$，謂之 A 之正矢(*versed sine*)，

略爲 versA。

(8) $\frac{AP-QP}{AP}=1-\sin A$，謂之 A 之餘矢(*coversed sine*)，

略爲 coversA。

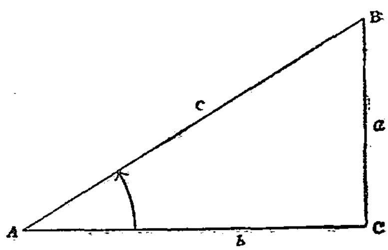
17. 設 CAB 爲直角三角形之一角，其對邊爲 a，近邊爲 b，斜邊爲 c。

則 $c^2=a^2+b^2$，而

$$\sin A=\frac{a}{c},\quad \cos A=\frac{b}{c},$$

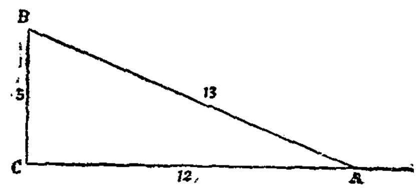
$$\tan A=\frac{a}{b},\quad \cot A=\frac{b}{a},$$

$$\sec A=\frac{c}{b},\quad \csc A=\frac{c}{a},$$



例如，若A之對邊爲5，近邊爲12，斜邊爲13，則

A之正弦卽 $\sin A=\frac{5}{13}$,



A之餘弦卽 $\cos A=\frac{12}{13}$,

A之正切卽 $\tan A=\frac{5}{12}$,

A之餘切卽 $\cot A=\frac{12}{5}$,

A之正割卽 $\sec A=\frac{12}{13}$,

A之餘割卽 $\csc A=\frac{13}{5}$.

習　題　III

1. 若B角之對邊爲12，近邊爲5，斜邊爲13，問B角之八比各等於若干.

2. 若一直角三角形上之一銳角爲A，他銳角爲B，試證：

$$\sin A=\cos B,\quad \cos A=\sin B,$$
$$\tan A=\cot B,\quad \cot A=\tan B,$$
$$\sec A=\csc B,\quad \csc A=\sec B,$$
$$\operatorname{vers} A=\operatorname{covers} B,\quad \operatorname{covers} A=\operatorname{vers} B.$$

3. 設直角三角形之三邊等於下列各數，試求二銳角之各比之值：

(1)　3, 4, 5,　(2)　8, 15, 17,　(3)　9, 40, 41,

(4)　3.9, 8, 8.9,　(5)　1.19, 1.20, 1.69.

4. 設直角三角形之三邊有下列各值，試求兩角各比之值：

(1)　$2mn,\ m^2-n^2,\ m^2+n^2$,　(2)　$\dfrac{2ab}{a-b},\ a+b,\ \dfrac{a^2+b^2}{a-b}$,

(3)　$abc,\ bcd,\ cda$,　(4)　$\dfrac{mn}{pq},\ \dfrac{mv}{sq},\ \dfrac{nr}{ps}$,

5. a 及 b 爲直角三角形之勾與股. 若 a 及 b 有下列各值，試求兩銳角各比之值：

(1)　$a=24,\ b=143$,　(2)　$a=1.25,\ b=3.92$.

(3)　$a=\sqrt{2},\ b=\sqrt{3}$,　(4)　$a=\frac{1}{2}\sqrt{2},\ b=\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

6. a 及 b 爲直角三角形之勾與股，c 爲弦。若

(1)　$a=\sqrt{p^2+q^2},\ b=\sqrt{2pq}$，試求兩銳角之各比，

(2)　$a=\sqrt{p^2+pq},\ c=p+q$，試求兩銳角之各比，

(3)　$b=2\sqrt{pq},\ c=p+q$，試求兩銳角之各比。

7. a, b, c 爲直角三角形之勾，股，弦. 若

(1)　$a=5b$,　(2)　$c=3a$,　(3)　$a+b=\frac{5}{4}c$,

試求兩銳角之各比之值.

8. 有直角三角形 ABC. B 之橫縱坐標均爲 0. C

之橫坐標爲 4, 縱坐標爲 0. A 之橫坐標爲 4, 縱坐標爲 3. 求 *sin* A, *tan* A, *csc* A, *cos* B, *vers* B, *tan* B 之值.

9. 有直角三角形 ABC. C 之橫縱坐標均爲 0, A 之橫坐標爲 0, 縱坐標 8. B 之橫坐標 3.9, 縱坐標爲 0. 求 *tan* A, *sin* A, *sec* B, *cot* B, 之值.

10. 有直角三角形 ABC, 其位置如下:—

A 之橫坐標爲 3, 縱坐標爲 2,

B 之橫坐標爲 7, 縱坐標爲 5,

C 之橫坐標爲 3, 縱坐標爲 5,

試求 *sin* A, *cos* A, *tan* A, *cot* A, *sec* B, *csc* B 之值.

11. A, B, C 及 a, b, c 爲直角三角形之三角及三邊.

若 $\tan A = \frac{3}{4}$, $a=3$, 求 b 及 c,

若 $\sin A = \frac{4}{5}$, $a=4$, 求 b 及 c,

若 $\cos B = .3428$, $a=62.3$, 求 b 及 c,

若 $\sec B = 2.9$, $c=3.4$, 求 a 及 b.

12. 試用圓規作 30° 之直角三角形, 量其各邊, 而算出 30° 角之各比.

13. 試用圓規作 15° 之直角三角形, 量其各邊, 而算出 15° 角之各比.

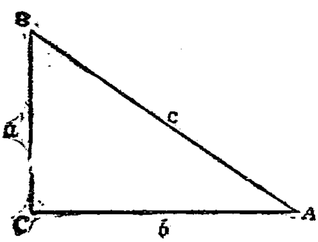
問 15° 角之各比較 30° 角相當之各比大小何如。

14. 在地球視月球. 見月球之全徑爲 30′ 之角之通弦. 知月球距地球 240,000 英里. 問月球之半徑等於若干英里. ($tan\,15' = .0044$)

15. 日光照塔成影, 影長 200 尺. 知日高 56° 6′ (卽日之光線與地平成 56° 6′ 之角). 若 $tan\ 56°6' = 1.488$, 問塔高若干尺.

第二節　餘角之各比

18. 設 A 及 B 爲直角三角形之兩銳角, 則 $(A+B)=90°$, $B=(90°-A)$。依第十七款



$$sin\,A = \frac{a}{c}, \quad sin\,B = \frac{b}{c},$$

$$cos\,A = \frac{b}{c}, \quad cos\,B = \frac{a}{c},$$

$$tan\,A = \frac{a}{b}, \quad tan\,B = \frac{b}{a},$$

$$cot\,A = \frac{b}{a}, \quad cot\,B = \frac{a}{b},$$

$$sec\,A = \frac{c}{b}, \quad sec\,B = \frac{c}{a},$$

$$csc\,A = \frac{c}{a}, \quad csc\,B = \frac{c}{b}.$$

故 $\sin A=\cos(90°-A)$, $\cos A=\sin(90°-A)$,

$\tan A=\cot(90°-A)$, $\cot A=\tan(90°-A)$,

$\sec A=\csc(90°-A)$, $\csc A=\sec(90°-A)$。

故，若兩角互爲餘角 Complementary angle，則一角之各函數等於他一角之餘函數 Co-named function。

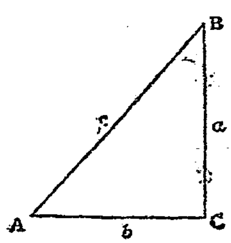
〔正弦與餘弦，正切與餘切，正割與餘割，正矢與餘矢均互爲餘函數〕

故欲求大於 45° 諸銳角之函數之值，祇須求其餘角（卽小於 45° 者）之餘函數之值。

例 欲求 $\sin 60°$, $\cot 60°$, $\sec 49°$ 之值祇須求 $\cos 30°$, $\tan 30°$, $\csc 41°$ 之值。

第三節 同銳角諸比間之關係

19. 從直角三角形 ABC,



得 $\sin A=\frac{a}{c}$, $\cos A=\frac{b}{c}$。

今 $c^2=a^2+b^2$

故 $(\sin A)^2+(\cos A)^2=\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}=\frac{c^2}{c^2}=1$。

[$(\sin A)^2$ 爲 $\sin A$ 之平方，以 $\sin^2 A$ 表之]

於是得公式　$\sin^2 A+\cos^2 A=1$ ……………………[I]

例曰　一銳角之正弦之方與其餘弦之方之和恆等於 1。

20.　$\tan A=\frac{a}{b}$，　$\sin A=\frac{a}{c}$，　$\cos A=\frac{b}{c}$。

故　$$\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}=\frac{a}{b}。$$

於是得公式　$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}$ ……………………[II]

例曰，一銳角之正切等於其正弦與餘弦之比。

21.　$\sin A=\frac{a}{c}$，　$\cos A=\frac{b}{c}$，　$\tan A=\frac{a}{b}$。

$\csc A=\frac{c}{a}$，　$\sec A=\frac{c}{b}$，　$\cot A=\frac{b}{a}$。

故　$\sin A\ \csc A=1$ ……………………[III]

36　$\cos A\ \sec A=1$ ……………………[IV]

$\tan A\ \cot A=1$ ……………………[V]

例曰，一銳角之正弦與餘割之積餘弦與正割之積，正切與餘切之積均等於 1。

22.　以上公式五個爲三角內基本公式，學者宜熟習之。從上五公式得下諸式：

從[I]，得 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}$ ……………………(1)

$\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}$ ……………………(2)

從[II]及[V]，得 $\cot A=\dfrac{\cos A}{\sin A}$ ……………………(3)

從[II]， $\tan^2 A=\dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}$，

故 $1+\tan^2 A=1+\dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}=\dfrac{\cos^2 A+\sin^2 A}{\cos^2 A}$，

故 $1+\tan^2 A=\dfrac{1}{\cos^2 A}$，

於是從[IV]，得 $1+\tan^2 A=\sec^2 A$ ……………………(4)

依同法，得 $1+\cot^2 A=\csc^2 A$ ……………………(5)

上列五式亦甚緊要。

23. 知一角某比之值，用以上諸式可求得此角諸他比之值。

例題(*1*) 知 $\sin A=\dfrac{4}{5}$，求A角之他比之值。

〔解法〕 $\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\sqrt{\frac{9}{25}}=\dfrac{3}{5}$，

$\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}=\dfrac{4}{5}\times\dfrac{5}{3}=\dfrac{4}{3}$，

$\cot A=\dfrac{\cos A}{\sin A}=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{5}{4}=\dfrac{3}{4}$，

$$sec\ A=\frac{1}{cos\ A}=1\times\frac{5}{3}=\frac{5}{3},$$

$$csc\ A=\frac{1}{sin\ A}=1\times\frac{5}{4}=\frac{5}{4}。$$

例題(2)　知 cos A=m, 求 A 角他比之值。

〔解法〕　$sin\ A=\sqrt{1-cos^2A}=\sqrt{1-m^2}$,

$$tan\ A=\frac{sin\ A}{cos\ A}=\frac{\sqrt{1-m^2}}{m},$$

$$cot\ A=\frac{1}{tan\ A}=\frac{m}{\sqrt{1-m^2}},$$

$$sec\ A=\frac{1}{cos\ A}=\frac{1}{m},$$

$$csc\ A=\frac{1}{sin\ A}=\frac{1}{\sqrt{1-m^2}}。$$

〔注意〕 本節所論之 A 角不等於 0° 或 90°。A 必小於 90° 而大於 0°。

習　題　IV

1. 試將下列諸角之函數化爲小於 45° 之角之函數：

sin 72° 30′, *cot* 53° 8′ 50″, *sec* 72°, *tan* 89°30′, *csc* 58° 32′ 10″, *cot* 83° 40′, *sin* 45° 1′ 10″.

2. 若 $a=\frac{\pi}{5}$ 半徑度，問其餘角等於若干半徑度.

3. 試將下列諸角之函數化為小於$\frac{\pi}{4}$半徑度之角之函數：

$$\cos\frac{\pi}{3},\quad \tan\frac{3\pi}{7},\quad \cot\frac{5\pi}{12},\quad \sec\frac{7\pi}{16},\quad \cot\frac{2\pi}{5}.$$

4. 若 $\sin 45°=\frac{1}{2}\sqrt{2}$，問 $\cos 45°$ 等於若干.

5. 若 $\tan 30°=\frac{1}{3}\sqrt{3}$，問 $\cot 30°$ 等於若干.

6. 知 $\cos x=\sin 3x$，求 x 之值.

7. 知 $\tan 2x=\cot\frac{1}{6}x$，求 x 之值.

8. 知 $\tan(45°+x)=\cot x$，求 x 之值.

9. 知 $\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=\cot 2\theta$，求 θ 之值.

10. 知 $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)$，求 θ 之值.

11. 試證 $vers\,A=covers\,(90°-A)$.

12. 設 $\sin A=s$，求 A 之他諸比之值.

13. 設 $\tan A=t$，求 A 之他諸比之值.

14. 設 $\cot A=r$，求 A 之他諸比之值.

15. 設 $\sec A=p$，求 A 之他諸比之值

16. 設 $\csc A=q$，求 A 之他諸比之值.

17. 設 $\sin 45^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{2}$, 求 45° 角他諸比之值.

18. 設 $\tan 30^\circ=\frac{1}{3}\sqrt{3}$, 求 30° 角他諸比之值.

19. 設 $\tan 60^\circ=\sqrt{3}$, 求 60° 角他諸比之值.

20. 設 $\sin A=\frac{3}{4}$, $\tan B=\frac{5}{2}$, $\cos C=\frac{5}{6}$, $\sec D=\sqrt{2}$, 試作 A, B, C, D 諸角.

21. 試證
$$\sin A \sec A = \tan A,$$
$$\sin A \cot A = \cos A,$$
$$\cos A \csc A = \cot A,$$
$$\tan A \cos A = \sin A.$$

22. 試證
$$\sin A \sec A \cot A=1,$$
$$\cos A \csc A \tan A=1.$$

23. 試證
$$(1-\cos^2 A)\cot^2 A=\cos^2 A,$$
$$(1+\tan^2 A)\cos^2 A=1.$$

24. 試證 $\text{vers}^2 A+\text{covers}^2 A=3-2\sin A-2\cos A.$

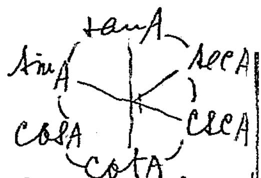
25. 試證 $\sec^2 A\csc^2 A=\sec^2 A+\csc^2 A.$

26. 試證 $\sin^4 A-\cos^4 A=\sin^2 A-\cos^2 A.$

27. 試證
$$(\sin A+\cos A)^2=1+2\sin A\cos A.$$
$$(\sin A-\cos A)^2=1-2\sin A\cos A.$$

 opposite functions are reciprocal.

28. 試證　$\frac{\sin a}{\cos a}+\frac{\cos a}{\sin a}=\sec a \csc a.$



29. 試證　$\frac{1-\sin a}{1+\sin a}=(\sec a-\tan a)^2$

30. 試證　$\frac{1+\cos a}{1-\cos a}=(\csc a+\cot a)^2.$

Each function is equal to the product of its adjacent two.

31. 試證　$\frac{\cot a+\tan \beta}{\tan a+\cot \beta}=\cot a \tan \beta.$

32. 試證　$\frac{\tan a+\tan\beta}{\cot a+\cot \beta}=\tan a \tan \beta.$

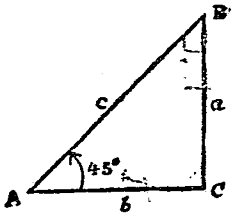
Each function is equal to the quotient of its next one by the still next

〔注意〕　凡以**六十分法**計算之角,用**拉丁字** A. B, x, y等代表之.凡以**圜周法**計算者,用**希臘字** α, β, θ, 等代表之.

第四節　45°, 60°, 30° 等諸角之各比。

24.　尋常一角。其諸比之值,須用繁雜之法,始可求得之。惟下列諸角之諸比之值,可用幾何定理求得之。

25.　令 ABC 爲兩等邊直角三角形。則 ∠A=∠B。但　A+B=90°, 故 A=B=45°。$a=b$, 而 $c^2=a^2+b^2$, $=2a^2$
故　$c=a\sqrt{2}$。　　$C=a\sqrt{2}$



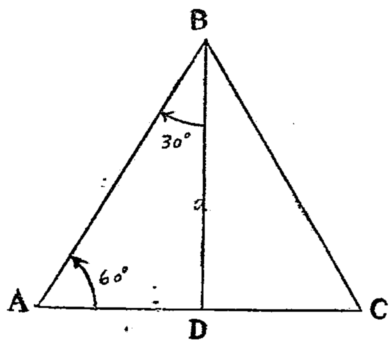
故 $\sin 45^\circ=\dfrac{a}{c}=\dfrac{a}{a\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2}$,

$\cos 45^\circ=\dfrac{b}{c}=\dfrac{a}{c}=\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\tan 45^\circ=\dfrac{a}{b}=1$,

$\cot 45^\circ=\dfrac{b}{a}=1$。

26. 令 ABC 爲三等邊三角形, 則 $\angle A=\angle B=\angle C$。但 $A+B+C=180^\circ$, 故 $A=60^\circ$。作垂線 BD 自 B 至 AC;



則 $\angle ABD=\frac{1}{2}A=30^\circ$,

$AD=\frac{1}{2}AB$。

設 $AB=a$, 則 $AD=\frac{1}{2}a$,

$BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

故 $\sin A=\cos\angle ABD=\dfrac{DB}{AB}$

$=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{1}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$。

卽　　$\sin 60^\circ=\cos 30^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{3}$。

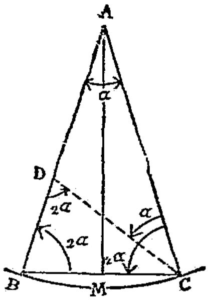
依同法, 得　　$\cos 60^\circ=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$,

$\tan 60^\circ=\cot 30^\circ=\sqrt{3}$。

$\cot 60^\circ=\tan 30^\circ=\frac{1}{3}\sqrt{3}$。

Sec 60° =

27.* 18°角之諸比 以 AB 爲半徑, A 爲心, 作



弧 BC, 令 D 點分 AB 爲中外比 Extreme and mean ratio, 則 BD : AD = AD : AB。令 BC = AD, 作 AC, 則三角形 BDC 與三角形 BCA 相似。蓋 $\angle DBC = \angle CBA$, 而 BD : BC = BC : AB。今 AC = AB, 故 BC = DC。故 DC = DA。故 $\angle DCA = \angle DAC$。

令 $\angle DAC = \alpha$. 則 $\angle DCA = \alpha$。 故 $\angle BDC = 2\alpha$。

故 $\angle DBC = \angle BDC = \angle ACB = 2\alpha$。

於是則 $\angle A + \angle DBC + \angle ACB = 5\alpha = 180°$。

故 $\angle A = \alpha = 36°$。

自 A 至 BC 作垂線 AM。則 $\angle BAM = 18°$, BM = CM。

令 $BC = 2m$。則 $AB(AB - AD) = AD^2 = 4m^2$。

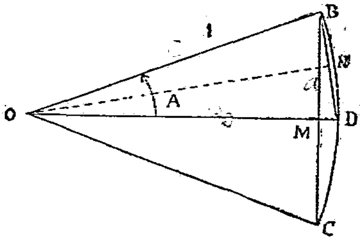
故 $AB^2 - 2mAB = 4m^2$。故 $AB = m(1+\sqrt{5})$。

故 $\sin 18° = \dfrac{BM}{AB} = \dfrac{m}{m(1+\sqrt{5})} = \dfrac{1}{1+\sqrt{5}} = \cos 72°$。

其他諸函數, 可依同法求得。

28.* 求$\frac{1}{2}$A之各比法 若知 sin A 之值，則 $sin\frac{1}{2}$A 之值，可用下法求得之。

令 $\angle BOC=2A$。以 O 爲心，1 爲半徑，作弧 BC。自 O 至通弦 BC 作垂線 OM。



則 $\angle BOM=\frac{1}{2}\angle BOC=A$。

$$sin\ A=\frac{BM}{1}=BM。$$

設 OM 與弧交於 D 點，

令 $sin\ A=BM=m$。

則 $BD=\sqrt{2-\sqrt{4-BC^2}}$

$$=\sqrt{2-\sqrt{4-4m^2}}=\sqrt{2(1-\sqrt{1-m^2})}$$ （見幾何）。

自 O 至 BD 作垂線 ON，則 $\angle BON=\frac{1}{2}A$。

故 $sin\ \angle BON=\frac{BN}{1}=BN=\frac{1}{2}\sqrt{2(1-\sqrt{1-m^2})}$。

故若 $\sin A=m$，則 $\sin\frac{1}{2}A=\frac{1}{2}\sqrt{2(1-\sqrt{1-m^2})}$。　(1)

例如，$sin\ 30°=\frac{1}{2}$，

故 $sin\ 15°=\frac{1}{2}\sqrt{2(1-\sqrt{1-\frac{1}{4}})}=\frac{1}{2}\sqrt{2\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\frac{1}{2}\sqrt{(2-\sqrt{3})}$。

$sin\ 45°=\frac{1}{2}\sqrt{2}$，

故 $sin\ 22°30'=\frac{1}{2}\sqrt{2(1-\sqrt{1-\frac{1}{2}})}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$。

29. 30°, 45°, 60° 諸角之函數之值。

角　A	$30°=\frac{\pi}{6}$	$45°=\frac{\pi}{4}$	$60°=\frac{\pi}{3}$
sin A	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
cos A	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$
tan A	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$

下列本節求得諸函數之值備查。

角 A	9°	15	18°	30°	36°	45°	60°	72°
sin A	0·1564	0·2588	0·3090	0 5000	0·5878	0·7071	0·8660	0·9511
cos A	0·9877	0·9659	0·9511	0·8660	0·8090	0 7071	0·5000	0·3090
tan A	0·1584	0·2679	0·3249	0·5774	0·7265	1·0000	1·7321	3·0777

30. 三角方程解法　設有方程，內容角之一函數或幾函數，而求 x 角之值，是謂解三角方程。

解法，先將方程內各函數，均用某函數表之。求此函數之值。倘知此值爲某角同函數之值，則 x 可爲某角。(x 亦可爲他角，其故見後)

例題 (1)　　$2\sin x=\csc x$，求 x 之值。

〔解法〕　　$\csc x=\frac{1}{\sin x}$,

故　$2\sin x=\frac{1}{\sin x}$,

$2\sin^2 x=1$。

故　$\sin x=\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$。　(負號之義容後詳論)

但　$\sin 45^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{2}$，故　$x=45^\circ$。

例題 (2)　$2\sin^2 x=3\cos x$，求 x 之值。

〔解法〕　$\sin^2 x=1-\cos^2 x$,

故　$2(1-\cos^2 x)=3\cos x$,

$2\cos^2 x+3\cos x-2=0$,

$(2\cos x-1)(\cos x+2)=0$。

故　$\cos x=\frac{1}{2}$，或　$\cos x=-2$。(cos x 不能等於 -2)

但　$\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$，故　$x=60^\circ$。

例題 (3)　$3\sec^2 x=8\tan x-2$，求 x 之值。

〔解法〕　$\sec^2 x=1+\tan^2 x$,

故　$3(1+\tan^2 x)=8\tan x-2$,

$3\tan^2 x-8\tan x+5=0$,

$(3\tan x-5)(\tan x-1)=0$。

故　$\tan x=\frac{5}{3}$，或　$\tan x=1$。

但　$\tan 45^\circ=1$，故　$x=45^\circ$。

今未知何角之正切為$\frac{5}{3}$。故從 $\tan x=\frac{5}{3}$. 無從求得 x 之值。

習 題 V

試求以下諸式之值：

1. $\tan^2 60+2\tan^2 45^\circ$.

2. $\tan^2 45^\circ+4\cos^3 60^\circ$.

3. $\tan^2 45^\circ\sin 60^\circ\tan 30^\circ\tan^2 60^\circ$.

4. $\cot^2\frac{\pi}{6}+4\cos^2\frac{\pi}{6}+3\sec^2\frac{\pi}{6}$.

5. $\left(\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}\right)\left(\sin\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{3}\right)\sec\frac{\pi}{3}$.

6. 試證 $2\sin 30^\circ\cos 30^\circ\cot 60^\circ$

$$=\cot^2 45^\circ-\tfrac{3}{4}\cot^2 60^\circ+\cos 60^\circ-\sin^2 60^\circ.$$

試解下列諸方程.

7. $4\sin x=\csc x$.

8. $\tan x=2\sin x$.

9. $\tan x+\cot x=2$.

10. $\sqrt{2}\cos x=\cot x$.

11. $\tan^2 x-\sec x=1$.

12. $2\cos x+\cancel{\csc}\,x=3$.

sec

13.　$4\sin\theta = 12\sin^2\theta - 1$

14.　$\sin^2\theta + \tan^2\theta = 3\cos^2\theta$

15.　$\tan\theta - \cot\theta = \csc\theta$

16.　$2\cos\theta + 2\sqrt{2} = 3\sec\theta$

17.　$2\sin\theta\tan\theta + 1 = \tan\theta + 2\sin\theta$

18.　$3\tan\theta + \cot\theta = 5\csc\theta$

設有直角三角形 ABC. $C=90^\circ$, a, b, c 爲 A, B, C 角之對邊. (用 29 款表內之值).

19.　若 $A=18^\circ$, $b=312{\cdot}2$, 求 a 之值.

20.　若 $B=9^\circ$,　$c=32{\cdot}6$, 求 b 之值.

21.　若 $c=333$, $b=102{\cdot}9$, 試證 $A=72^\circ$.

22.　日之高度 Altitude 爲 36°, 若有樹高 52 尺, 問其影長若干.

23.　在某時旗竿之高與其影之長相等, 問其時日之高度爲何.

24*.　知 $\sin 18^\circ = \dfrac{1}{1+\sqrt{5}}$, 試用 28 款之法, 求 $\sin 9^\circ$ 之值.

25*.　知 $\sin A = m$, 試用 28 款之法 (反用) 求 2A 之正弦之值.

*26.** 知 $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$, 求 $\sin 60^\circ$ 之值.

*27.** 知 $\sin 18^\circ=\dfrac{1}{1+\sqrt{5}}$, 求 $\sin 36^\circ$ 之值.

*28.** 試證 $\sin^2 36^\circ=\sin^2 30^\circ+\sin^2 18^\circ$.

*29.** $4(\cos^2 x-\sin^2 x)=1+\sqrt{5}$, 求 x 之值.

*30.** 試求 $\sin 12^\circ$ 之值。(用幾何作十五邊正式形法)

31. 試自下二聯立方程求 x 及 y 之值.

$$\begin{cases}\sin x+\cos^2 y=1, & (1)\\ 4\sin x-2\sin^2 y=1. & (2)\end{cases}$$

〔解法〕 先以 4 乘(1), 減去(2), 卽消去 $\sin x$

32. 試自下二聯立方程求 x 及 y 之值.

$$\begin{cases}\sin^2 x+\cos^2 y=1,\\ \sin x+\cos y=\sqrt{2}.\end{cases}$$

33. 試自下二聯立方程求 x 及 y 之值.

$$\begin{cases}\tan^2 x+\sin y=\frac{3}{2},\\ \sec^2 x+\cos^2 y=\frac{11}{4}.\end{cases}$$

第三章

對數及三角表　直角三角形

第一節　對數

31. 對數定義　若 $a=b^c$，則 c 謂之 a 之 b 底對數 Logarithm of a to base b。此恆以 $log_b a$ 表之，如 $c=log_b a$。

例如，　$16=2^4$。故 16 之 2 底對數爲 4，卽 $log_2 16=4$，

$16=4^2$。故 16 之 4 底對數爲 2，卽 $log_4 16=2$，

$1000=10^3$。故 1000 之 10 底對數爲 3，卽 $log_{10}1000=3$。

$\frac{1}{4}=2^{-2}$。故 $\frac{1}{4}$ 之 2 底對數爲 -2，卽 $log_2\frac{1}{4}=-2$。

$1=a^0$。故 1 之任何底對數爲 0。卽 $log_a 1=0$。

32. 對數之底　由上節例可見，若底 Base 不同則同數之對數亦不同。故言對數必先表明以何數爲底。

通用之對數底有二：—

(1)　自然底 Natural base 其數恆以 e 表之，爲下列級數之極限：

$$e=lim\left\{1+\frac{1}{1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 4}+\frac{1}{\lfloor 5}+\cdots\right\}=2\cdot71828\cdots$$

(2) 尋常底 Common base 其數爲 10。

自然底於高等數學恆用之。在尋常數學所用者，恆爲尋常底。

33. 以 10 爲底之對數 若 $a=10^b$，則 $log_{10}a=b$。若並無別解，則可省去 10 而寫作 $\log a=b$。

今……………………，	故……………………，
$\cdot 0001=10^{-4}$,	$log\cdot 0001=-4$,
$\cdot 001=10^{-3}$,	$log\cdot 001=-3$,
$\cdot 01=10^{-2}$,	$log\cdot 01=-2$,
$\cdot 1=10^{-1}$,	$log\cdot 1=-1$,
$1\cdot 0=10^{0}$,	$log\ 1=0$,
$10\cdot 0=10^{1}$,	$log\ 10=1$,
$100\cdot 0=10^{2}$,	$log\ 100=2$,
$1000\cdot 0=10^{3}$,	$log\ 1000=3$,
……………………，	……………………，

因一數之對數隨數而大小，

故凡 1 與 10 間各數之對數在 0 與 1 之間，

凡 10 與 100 間各數之對數在 1 與 2 之間，

凡 100 與 1000 間各數之對數在 2 與 3 之間，

……………………………………………………………，

凡 1 與 ·1 間各數之對數在 0 與 −1 之間.

凡 ·1 與 ·01 間各數之對數在 −1 與 −2 之間,

凡 ·01 與 ·001 間各數之對數在 −2 與 −3 之間,

……………………………………………………………。

於是可見, 凡n位數之對數必在(n−1)與 n 之間,

凡n位小數之對數必在−(n+1)與−n之間。

例如, $\log 342 = 2\cdot53403$, $\log\cdot032 = -\cancel{2\cdot49485}$, 50515

$\log 3420 = 3\cdot53403$, $\log\cdot0032 = -\cancel{2\cdot49485}$。

爲便利起見, 凡負對數均寫作一正數減 10 (或 10 之倍數)。

log·032 = −1·49485
= −1−·49485
= −1−1+(1−·49485)
= ·2 + ·50515
= 8·50515−10

例如, $\log\cdot032 = -1\cdot49485 = 8\cdot50515-10$,

$\log\cdot0032 = -2\cdot49485 = 7\cdot50515-10$。

〔注意〕 數之對數往往爲無盡數。用時則僅截取其小數後若干位。

例如, $\log 342 = 2\cdot53403$…………。若截取其初三位用之,

則 $\log 342 = 2\cdot534$, $\log 3420 = 3\cdot534$。

34. 若 $a = 10^c$, 則 $\log a = c$。

今 $a\times10^n = 10^{c+n}$, 故 $\log(a\times10^n) = c+n = (\log a)+n$。

式內 n 爲整數或正或負。

例如，$\log 342=2\cdot53403$。$34200=342\times10^2$，

故　$\log 34200=2\cdot53403+2=4\cdot53403$。

$\cdot342=342\times10^{-3}$，故 $\log\cdot342=2\cdot53403-3=9\cdot53403-10$，

$\cdot00342=342\times10^{-5}$，故 $\log\cdot00342=2\cdot53403-5$

$=7\cdot53403-10$。

35. 對數之性質　若 $m=b^c$，$n=b^d$，

則
$$m\,n=b^cb^d=b^{(c+d)},$$
$$\frac{m}{n}=\frac{b^c}{b^d}=b^{(c-d)}。$$

故
$$\log_b(mn)=c+d=\log_b m+\log_b n, \qquad (1)$$
$$\log_b\left(\frac{m}{n}\right)=c-d=\log_b m-\log_b n。 \qquad (2)$$

若
$$m=b^c,$$
則
$$m^x=(b^c)^x=b^{xc},$$
$$\sqrt[x]{m}=\sqrt[x]{b^c}=b^{\frac{c}{x}}。$$

故
$$\log_b m^x=xc=x\log_b m, \qquad (3)$$
$$\log_b\sqrt[x]{m}=\frac{c}{x}=\frac{1}{x}\log_b m。 \qquad (4)$$

於是得例曰：

(1) 一數乘他數，其積之對數等於此數與他數之對數相加而得之和。

(2) 一數除他數，其商之對數等於自他數之對數減去此數之對數而得之較。

(3) 一數之 x 次羃之對數等於 x 乘此數之對數所得之積.

(4) 一數之 x 次根之對數等於 x 除此數之對數所得之商。

例如，$\log 2 = \cdot 30103$，　$\log 4 = \cdot 60206$,

則　$\log(2\times 4) = \cdot 30103 + \cdot 60206 = \cdot 90309$,

$\log \frac{4}{2} \quad = \cdot 60206 - \cdot 30103 = \cdot 30103$,

$\log 2^2 \quad = 2 \times \cdot 30103 = \cdot 60206$,

$\log \sqrt[2]{4} \quad = \frac{1}{2} \times \cdot 60206 = \cdot 30103$。

第二節　對數表及三角表之檢查

36. 對數表及三角表 尋常應用之表有三：

(1)　眞數對數表 Logarithm table of natural numbers 載各數之對數，

(2)　三角函數表 Table of trigonometrical functions 載各角之諸三角函數之值。

(3)　三角對數表 Logarithm table of trigonometrical functions 載各角之諸三角函數之對數.

尋常所用之表。眞數對數表載自 1 至 1000 諸數，三角表載自 0° 至 90° 內每分之角。各對數及函數之值有截取初四位，初五位，初六位小數者。數理精蘊之表，眞數對數載初十一位，常用以載初五位者爲便。

檢表之法往往附載表內。今舉例以明之。(用蓋氏對數表)

37. 由眞數求對數 (第一表) 例(1) 試求 324 之對數。

檢表第七頁[N]直行下得 324。往右看，在[O]直行內得 51055，此卽爲 324 之對數之初五位小數。324 爲三位之數，故其對數必在 2 與 3 之間。故小數前之整數爲 2。

於是得 $\log 324=2\cdot51055$。

依同法求得：

$\log 3240=3\cdot51055$, $\log 529=2\cdot72346$,

$\log 3\cdot24=0\cdot51055$, $\log 83\cdot1=1\cdot91960$,

$\log \cdot0324=8\cdot51055-10$, $\log\cdot00342=7\cdot53403-10$。

例(2) 試求 5826 之對數。

檢表第十二頁[N]直行下至 582, 往右看在[6]直行內得 76537。5826 爲四位之數, 故 $\log 5826=3\cdot76537$。

依同法求得:

$\log 582600=5\cdot76537$,　　$\log 20670=4\cdot31534$,

$\log 0\cdot5826=9\cdot76537-10$,　$\log 32\cdot37=1\cdot51014$。

例(3)　試求 72·837 之對數。

檢表第十五頁, 得　$\log 72\cdot840 = 1\cdot86237$,

$\log 72\cdot830 = 1\cdot86231$。

故　　　　眞數差 10 當對數差 6。

若對數之差與眞數之差作爲相比, 則眞數差 7, 對數當差 4·2。(蓋 4·2 : 7=6 : 10)。故 72·837 之對數必較 72·830 之對數大 4。故 $\log 72\cdot837=1\cdot86235$ 比得之數可檢 P·P· 行下得之。

依同法求得:

$\log 7283700=6\cdot86235$,　　$\log 82155=4\cdot91464$,

$\log \cdot072837=8\cdot86235-10$,　$\log 72\cdot458=1\cdot86009$

38. 由對數求眞數 (第一表)　例(1)　求 2·24846 之眞數。

檢第四頁,對數內得 24846。其相當之眞數爲 1772。因此對數在 2 與 3 之間,故眞數之位數爲三。故所求之眞數爲 177·2。

依同法求得:

$0\cdot24846= log\ 1\cdot772,\qquad 1\cdot35411= log\ 22\cdot6,$

$9\cdot24846-10= log\ \cdot01772,\quad 2\cdot79000= log\ 616\cdot6$。

例(2) 求 9·23486−10 之眞數。

檢第四頁,得　對數 23502 當眞數 17180,

　　　　　　　對數 23477 當眞數 17170。

故　　　　　　對數差 25 當眞數差 10。

今 23486 較 23477 大 9,故 23486 所當之眞數必較 23477 所當之眞數大 3·6 (蓋 25:9=10:3·6)。

故 23486 所當之眞數爲 17170+3·6=17174。因此對數在 −1 與 0 之間,故其眞數爲 0·17174。

依同法求得:

$3\cdot23486= log\ 1717\cdot3,\qquad 3\cdot82940= log\ 6751\cdot5,$

$6\cdot23486= log\ 1717300,\quad 1\cdot23687= log\ 17\cdot254$。

[注意] 在 1717300,右兩位爲未確定之數非眞爲零。

39. 由角求其函數之值 (第四表)　例(1)　試求 $\sin 39^\circ$ 之值。

檢表第 69 頁上左角度 [°] 直行下至 39, 往右看至 [0′] 直行內得 0·6293, 卽是 $\sin 39^\circ$ 之值。

例(2)　試求 $\cos 52^\circ \underline{20'}$ 之值。

檢表第 69 頁下右角度 [°] 直行上至 52, 往左看至 [20′] 直行內得 0·6111, 卽是 $\cos 52^\circ 20'$ 之值。

依同法求得:

$\sin 53^\circ 10' = 0{\cdot}8004$,　　$\tan 23^\circ 40' = 0{\cdot}4383$,

$\cos 89^\circ 50' = 0{\cdot}0029$,　　$\cot 51^\circ 50' = 0{\cdot}7860$,

$\tan 60^\circ 40' = 1{\cdot}780$.　　$\cot 43^\circ 10' = 1{\cdot}066$。

例(3)　試求 $\cos 59^\circ 16'$ 之值。

檢表第 69 頁得 $\cos 59^\circ 20' = 0{\cdot}5100$,

$\cos 59^\circ 10' = 0{\cdot}5125$,

角大 10′ 則餘弦小 25。

若角之差與其函數之差作爲相比, 則 $\cos 59^\circ 16'$ 之值必較 $\cos 59^\circ 10'$ 之值小 15。(蓋 $10:25=6:15$)。

故 $\cos 59^\circ 16' = 0{\cdot}5110$。

依同法得:

$\sin 46°55' = 0{\cdot}7304$,　　$\cot 19°11' = 2{\cdot}874$,

$\tan 51°43' = 1{\cdot}267$，　　$\cot 25°27' = 2{\cdot}102$。

40. 由函數之值求角之值 (第四表)　**例** 何角之正弦為 $0{\cdot}2345$。

檢表第 69 頁得　$0{\cdot}2363=\sin 13°40'$,

$$\underline{0{\cdot}2334=\sin 13°30'},$$

正弦大 29, 則角大 $10'$。

$0{\cdot}2345$ 較 $0{\cdot}2334$ 大 11, 故其相當之角必較 $13°30'$ 大 $3'{\cdot}8$。$(29:10=11:3{\cdot}8)$。故 $0{\cdot}2345=\sin 13°34'$。

依同法求得：

$0{\cdot}3591=\cos 68°58'$,　　$3{\cdot}1243=\tan 72°15'$,

$0{\cdot}5552=\sin 33°43'$,　　$0{\cdot}2045=\cot 78°27'$。

41. 由角之值求其函數之對數 (第三表)

例　試求 $\sin 30°43'$ 之對數。

檢表第 54 頁得 30°。在上左角分[′]直行下得 43, 往左看至[L·*sin*]直行內得 9·70824。

故　　　$\log\sin 30°43'=9{\cdot}70824-10$。

〔注意〕表內不載 -10。

依同法求得：

$\log\cos 43°52'=9.85791-10$,

$\log\tan 82°\ 3'=10.85496-10$,

$\log\cos 85°47'=8.86645-10$,

$\log\cot 4°\ 11'=11.13583-10$。

若遇帶秒之角，其函數之對數須用比例法求之。

如　$\log\sin 23°52'15''=9.60711-10$,

$\log\tan 19°22'32''=9.54614-10$,

$\log\cos 82°40'55''=9.10589-10$。

42. 由函數之對數求角 (第三表)　例 何角之正弦之對數為 $9.48062-10$。

檢表第 41 頁[L·*sin*]直行下得

$$\begin{aligned}9.48094-10 &= \log\sin 17°37',\\ \underline{9.48054-10} &\underline{= \log\sin 17°36'}。\end{aligned}$$

正弦之對數大 40　　則角大　　$1'$ 即 $60''$。

$9.48062-10$ 較 $9.48054-10$ 大 8，故其相當之角必較 $17°36'$ 大 $12''$。$(40:60=8:12)$。

故　$9.48062-10=\log\sin 17°36'12''$

依同法求得：

$$9.63713-10=\log\tan 23°\,26'\,37'',$$

$$9.85243-10=\log\sin 45°\,23'\,28''。$$

〔注意〕 **差數比例** 在 37 款對數之差與眞數之差作爲相比，在 39 款函數之差與角之差亦作爲相比。就理論上言之，差數並不相比，惟與相比所差甚微。今表內所載對數及函數僅截取其初五位與初四位小數，故所差不能顯出。故差數可作爲相比。

譬如，.43261224 與 .86322791 之比不等於 1 與 2 之比，但若僅就其初五位言之，則 $.43261:.86322=1:2$。

習 題 VI

1. 若以 3 爲底，試求 9, 27, 81, 729 之對數。

2. 若以 a 爲對數底，則 a 之對數爲 1，試證之。

3. 試證 $\log_2 64=\dfrac{\log_2 4}{\log_2 2}\log_4 64$。

4.* 試證 $\log_c a\times\log_a N=\log_c b\times\log_b N$。 a, b, c, N 均爲任何正數。

〔解法〕 令 $N=a^n$， $N=b^m$， 則 $a^n=b^m$。

故 $n\log_c a=m\log_c b$， c 爲任何底。

5. 問零之對數爲何。

6. 問負數，如 -3，-10 等，可有對數否.何故.

7. 下列諸對數試各寫作一正數減 10 或 10 之倍數：

$-3\cdot24582$,　$-1\cdot24687$,　$-14\cdot86231$,　$-23\cdot48021$.

8. 試求下列各數之對數：—

$382\cdot96$,　5362,　$\cdot00073432$,　$5682\cdot2$

9. 試求 $\sqrt[6]{3429\times32\cdot82\times1001}$,　$\sqrt[3]{482\cdot34\times1067}$。

10. 試求　$(486\times321\cdot08)^{\frac{3}{5}}$, $\left(\frac{345\times528}{589\cdot01}\right)^3$。

11. 求 $(\sin 32^\circ 19' 55'')\times329$, $(\tan 31^\circ 19')(\sin 4^\circ 35' 22'')$.

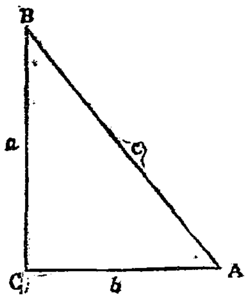
12. 若 $\sin A=\frac{435\times\tan 82^\circ 30'}{5620}$，問 A 等於若干度.

13. 若 $\tan\frac{1}{2}A=\frac{932\times\tan 3^\circ 40'\times\sin 59^\circ 10'}{934\cdot5}$，問 A 等於若干度.

14. 若 $\cos 3A=\frac{\sin 40^\circ 30' 10''\times\tan 22^\circ 23' 20''}{9\cdot1202\times\tan 45^\circ 20'}$，問 A 等於若干度.

第三節　直角三角形

43. 設有直角三角形 Right Triangle ABC，知其二邊，或一邊一角.則其他之邊及角，可依第二章之公式求得之。



例如，(1)知 a 及 b 求 C, A, B。

因　$a^2+b^2=c^2$，故　$c=\sqrt{a^2+b^2}$。

$\tan A=\frac{a}{b}$，檢表得 A 之值。

$B=90°-A$。

(2)知 a 及 A，求 B, b, c。

$B=90°-A$。

因　$\frac{a}{c}=\sin A$，故 $c=\frac{a}{\sin A}$。因　$\frac{b}{a}=\cot A$，故 $b=a.\cot A$。

檢表得 $\sin A$ 及 $\cot A$ 之值，代入，卽得 c 及 b。

44. 不用對數之解法

例題(1)　知 $A=43°17'$, $c=26$，求 B, a, b。

1. $B=90°-A=46°43'$。

2. $a=c\sin A=26\sin 43°17'=26\times 0.6856=17.8256$。

3. $b=c\cos A=26\cos 43°17'=26\times 0.7280=18.9280$。

例題(2)　知 $a=47$, $c=63$，求 A, B, b。

1. $\sin A=\frac{a}{c}=\frac{47}{63}=0.7460$，故 $A=48°15'$。

2. $B=90°-A=41°45'$。

3. $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{(c+a)(c-a)}=\sqrt{110\times 16}=41\cdot 95$。

45. 對數解法

例題(1)　知 $A=62°10'$, $a=78$, 求 B, b, c。

1. $B=90°-A=27°50'$。

2. $\frac{b}{a}=\cot A$, 故 $\log b=\log a+\log\cot A$。

3. $\frac{a}{c}=\sin A$, 故 $\log c=\log a-\log\sin A$。

$\log 78$	$=1\cdot89209$	$\log 78$	$=1\cdot89209$
$\log\cot 62°10'$	$=9\cdot72262-10$	$\log\sin 62°10'$	$=9\cdot94660-10$
$\log b$	$=1\cdot61471$	$\log c$	$=0\cdot94549$
故 b	$=41\cdot182$。	c	$=88\cdot204$。

例題(2)　知 $c=58\cdot40$, $a=47\cdot55$, 求 A, B, b。

1. $\sin A=\frac{a}{c}$, 故 $\log\sin A=\log a-\log c$。

2. $B=90°-A$。

3. $\frac{b}{a}=\cot A$, 故 $\log b=\log a+\log\cot A$。

$\log 47\cdot55$	$=1\cdot67715$	$\log 47\cdot55$	$=1\cdot67715$
$\log 58\cdot40$	$=1\cdot76641$	$\log\cot 54°31'$	$=9\cdot85300-10$
$\log\sin A$	$=9\cdot91074-10$	$\log b$	$=1\cdot53015$
故	$A=54°31'$,	b	$=33\cdot896$。

$B=35°29'$。

$\tan B = \cot A = \frac{b}{a}$

46. 直角三角形之面積

設有直角三角形ABC。令其面積 Area 爲 F,

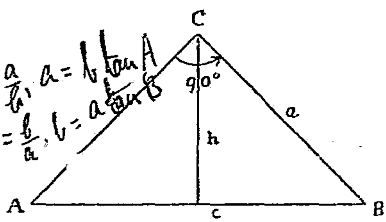
則依幾何理, $F=\frac{1}{2}ab$。(1)

因 $b=a\tan B$, 故

$F=\frac{1}{2}a^2\tan B$。(2)

$\tan A = \frac{a}{b}$, $a = b\tan A$

$\tan B = \frac{b}{a}$, $b = a\tan B$



$\sin A = \frac{a}{c}$

因　$a=c\sin A$, $b=c\cos A$,

故　$F=\frac{1}{2}c^2\sin A\cos A$。(3).

故, I.　知直角三角形之二邊, 或一角一邊, 則可求其面積。

II.　知直角三角形之面積及一邊或一角,則可求他之邊及角。

例題(1)　知 $a=52{\cdot}36$, $A=42°19'$。求面積 F。

$B=90°-A=47°41'$, 故 $F=\frac{1}{2}(52{\cdot}36)^2\tan 47°41'$。

$$
\begin{array}{lr}
\log(52{\cdot}36)^2=2\times1{\cdot}71900= & 3{\cdot}43800 \\
\log\tan 47°41' & =10{\cdot}04074-10 \\
\hline
 & 3{\cdot}47874 \\
\log 2 & =0{\cdot}30103 \\
\hline
 & \log F= 3{\cdot}17771
\end{array}
$$

故 $F= 1505{\cdot}8$。

例題(2)　知 $F=100$, $c=22$, 求 A, B, b, a。

$4F^2=a^2b^2$　$\therefore b^2=\frac{4F^2}{a^2}$

$a^4+4F^2=a^2c^2$

$$2F=ab,\quad a^2+b^2=c^2,\quad 故\ a^2+\frac{4F^2}{a^2}=c^2。$$

故　$a^4-a^2c^2=-4F^2$,　$a^4-(22)^2a^2=-4\times(100)^2$。

解之, 得　$a^2=105\cdot75$,　$a=10\cdot28$。

既得 a, 依 43 款法, 可求得 A, B, b。

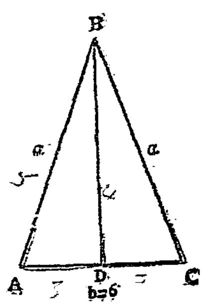
47. 兩等邊三角形

凡兩等邊三角形可分爲兩相等直角三角形。故關於此種問題, 可用直角三角形之法解之。

例題　設有兩等邊三角形 ABC, 知其底邊 $b=6$, 面積 $F=12$。試求等邊 a, 高 h, 等角 A 及 C, 尖角 B。

自 B 至 AC 作垂線 BD。

則 $AD=CD=\frac{1}{2}b=3$。



$F=\frac{1}{2}bh$,　故 $h=\frac{2F}{b}=\frac{24}{6}=4$,

故 $BD=4$。

故 $a=\sqrt{4^2+3^2}=5$。

$\sin A=\frac{h}{a}=\frac{4}{5}=0\cdot8000$,

故 $A=C=53°8'$,

$B=2(90°-A)=73°44'$。

習 題 VII

試用 44 款法(不用對數)解下列諸三角, $C=90°$:

1. 知 $a=95$, $b=37$, 求 A, B 及 c.
2. 知 $a=53$, $B=77°43'$, 求 b, A 及 c.
3. 知 $a=20$, $A=46°11'$, 求 b, B, 及 c.
4. 知 $a=6$, $c=12$, 求 b, A 及 B.
5. 知 $b=4$, $A=37°56'$, 求 a, B 及 c.
6. 知 $b=19$, $c=23$, 求 A, B 及 a.
7. 知 $c=26$, $A=37°42'$, 求 b, a 及 B.
8. 知 $C=100$, $B=25°43'$, 求 a, b 及 A.

試用 45 款法(用對數)解下列諸三角, $C=90°$:

〔注〕下列諸題凡角均算至分.

9. $a=98$, $A=46°27'$, 求 b, B, c.
10. $a=3{\cdot}12$, $B=5°8'$, 求 A, b, c.
11. $c=2194$, $b=1312{\cdot}7$, 求 A, B, a.
12. $b={\cdot}008$, $B=86°$, 求 A, a, c.
13. $a=415{\cdot}38$, $b=62{\cdot}080$, 求 A, B, c.
14. $c=91{\cdot}92$, $A=1°22'$, 求 B, a, b.
15. $a=992$, $B=76°19'$, 求 A, b, c.
16. $c=8590$, $a=4476$, 求 A, B, b.

注〕下列諸題凡角均算至秒(17－21).

17. $a=1\cdot1293$, $B=74°13'27''$, 求 A, b, c.

18. $a=21\cdot34$, $c=47\cdot653$, 求 A, B, b.

19. $b=96\cdot42$, $c=114\cdot81$, 求 A, a, B.

20. $c=28\cdot453$, $a=18\cdot197$, 求 A, B, b.

21. $b=3456\cdot4$, $B=37°15'42''$, 求 A, a, c.

22. 知 $a+c=18$, $b=12$, 求 A, B, a, c.

23. 知 $c=3a$, 求 A, B.

24. 知 $A=7B$, $a=3$, 求 A, B, b, c.

25. 知 $A-B=20°$, $a-b=2$, 求 A, B, a, b, c.

26. 知 $a=0\cdot615$, $c=70$, 求面積 F.

27. 知 $a=\sqrt[3]{2}$, $c=\sqrt{3}$, 求 F.

28. 知 $a=12$, $B=29°8'$, 求 F.

29. 知 $F=12$, $A=29°$, 求 a, b, c, B.

30. 知 $F=14\cdot5$, $a=5$, 求 A, B, b, c.

31. 設有兩等邊三角形, 其高 $h=6\cdot45$, 其面 $F=42\cdot93$, 求各邊之長.

32. 設有兩等邊三角形, 其尖角 $C=52°37'$, 其高 $h=30\cdot2$, 求各邊之長.

33*. 設有兩等邊三角形，其底邊爲 b，等邊爲 a。今知 $(a-b)a=b^2$，求尖角 C. 36°

34*. 設有兩等邊三角形，其三邊之和爲 9，其尖角爲等角之二倍，求各邊之值.

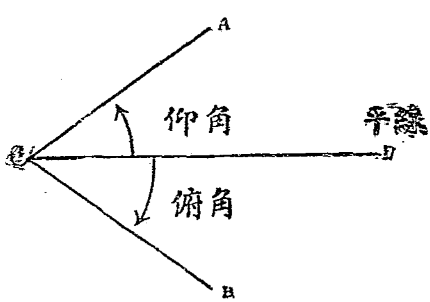
35*. 設平行長方形之兩鄰邊爲 10·452 與 22·483，兩邊間之角爲 32° 48′ 50″，求此形之面積.

36*. 設有斜三角形 ABC，AB=50，BC=23，B=52°43′，求自 C 角至 AB 之垂線及三角形之面積.

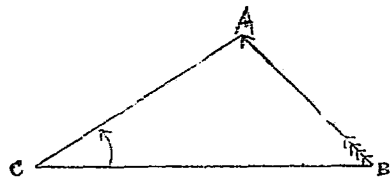
第四節 應用問題

48. 仰角 在 C 視 A，若 A 高於 C，則視線 CA 與其豎立平面 Vertical plane 上之平線 Horizontal line 相交之角謂之 A 之仰角 Angle of elevation。如 ∠ACD 是。

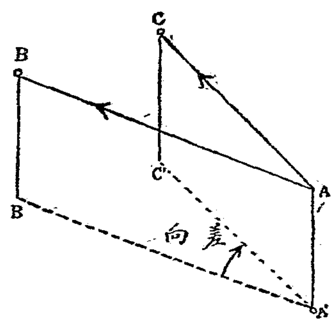
俯角 在 C 視 B，若 B 低於 C，則視線 CB 與其豎立平面上之平線相交之角謂之 B 之俯角 Angle of depression。如∠BCD 是。



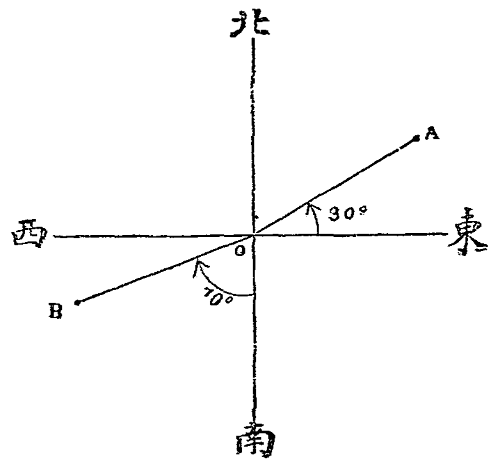
49. 對角　若在 C 點視物 AB, 則 ∠ACB 謂之物 AB 在 C 點之對角 The angle subtended by AB at C。



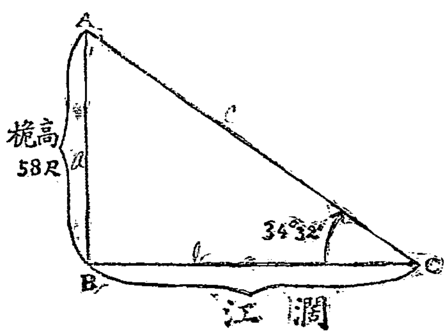
50. 向差　在 A 處視空間 B 與 C 兩物。通過 AC 與 AB 之兩豎立平面間之角, 謂之 B 與 C 在 A 點之向差 Angular distance。若 CC′ 及 BB′ 爲自 C 及 B 至地平之垂線, AA′ 爲自 A 至地平之垂線, 則 ∠B′A′C′ 卽是 B 與 C 在 A 點之向差。



51. 方向　自 O 望 A, 若 ∠東 OA=30°, 則 A 之方向以「東 30° 北」或「北 60° 東」表之。自 O 望 B, 若 ∠南 OB=70°, 則 B 之方向以「南 70° 西」或「西 20° 南」表之。



52. 例題　在江邊測對岸船桅，得桅頂之仰角爲 $34°32'$。今知桅高五十八尺，問江闊若干尺。



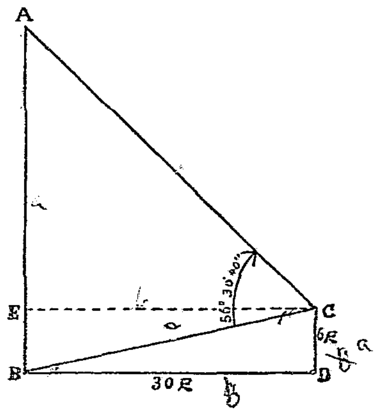
令 AB 爲桅高，BC 爲江闊，BC $= x$。

$x = 58 \cot 34°32'$。

$$\begin{aligned} \log 58 &= 1{\cdot}76343 \\ \log \cot 34°32' &= 10{\cdot}16232-10 \\ \hline \log x &= 1{\cdot}92575 \end{aligned}$$

故 $x = 84{\cdot}28$ 尺.

53. 例題　有人在窗口視旗竿，見旗竿之對角為 $56°30'40''$。若旗竿離窗口三十尺，窗口高於平地六尺，問旗竿高幾尺。



令 AB 為旗竿，C 為窗口，

則 $\tan \angle CBD=\frac{6}{30}=\frac{1}{5}=\cdot2000$。

故 $\angle ECB=\angle CBD=11°18'40''$。

故 $\angle ACE=56°30'40''-11°18'40''$

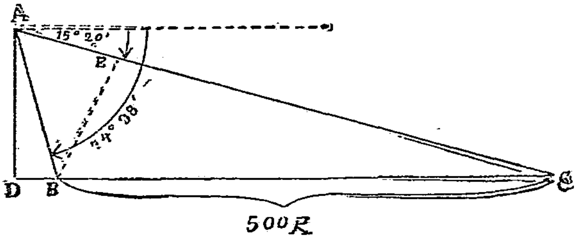
$=45°12'$。

$AE=EC \tan \angle ACE$

$=30 \tan 45°12'=30\cdot21$。

故 $AB=AE+EB=30\cdot21+6=36\cdot21$ 尺。

54. 例題　有兩船適在巖之正東。自巖頂望之，其俯角為 $15°20'$ 與 $74°38'$。若兩船相距 500 尺，問巖高幾尺。



令 B 與 C 為船，A 為巖頂，

則 $\angle BAC = 74°38' - 15°20' = 59°18'$。

自 B 至 AC 作垂線 BE。

$BE = BC \sin \angle ACB$。

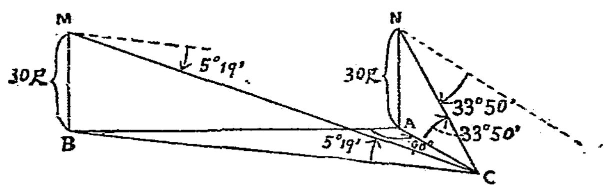
$$AB = \frac{BE}{\sin \angle CAB}$$

$$AD = AB \sin \angle ABD = \frac{BC \sin \angle ACB \sin \angle ABD}{\sin \angle CAB}$$

$$= \frac{500 \sin 15°20' \sin 74°38'}{\sin 59°18'} = 148.27\text{ 尺。}$$

55. 例題　有浮表適在船之南面。自舵樓望之，見其俯角為 33。50'。船向西行一分鐘後再視浮表，見俯角為 5°19'。今知舵樓高於水面三十尺，問船每鐘行若干里。

令 C 為浮表之位置，A 及 B 為船之起初與後來之位置。因 C 在 A 之南，B 在 A 之西，故 $\angle CAB = 90°$。



$AC = AN \cot \angle NCA = 30 \cot 33°50' = 44.76$，

$CB = BM \cot \angle MCB = 30 \cot 5°19' = 322.37,$

故 $AB = \sqrt{CB^2 - AC^2} = \sqrt{322.37^2 - 44.76^2} = 319.24$ 尺。

故船每分鐘行 319.24 尺。

習　題　VIII

1. 自樹頭俯視界石，俯角為 60°30′。若界石離樹 60 尺，問樹高幾尺。166

2. 立竿見影。設竿長十二尺，其影在某時長七尺，問其時日高若干度。

3. 自船望燈塔仰角為 3°21′。若燈塔高 240 尺，船每分鐘能行 400 尺，問船至燈塔需時幾何。

4. 有 A 及 B 兩塔隔江相對。自 A 塔沿江行 73 尺至 C 處。再望 B 塔，知 ∠ACB 為 68°52′。問兩塔相距幾尺。

5. 今以 30 尺長之梯升 22 尺高之樓，問梯之斜度為何。

6. 有人執竿垂釣，見竿與水面成 54°30′ 角時，其影最長，若竿長十八尺，問其時日高若干度，影長幾尺。

7. 登山瞭望見地平線之俯角為 2°13′50″。若山高三英里，問地球之半徑為幾英里。

8. 某處之緯度爲 $42°22'49''$. 問此處緯線之半徑爲幾英里(知地球之半徑爲 3956·2 英里).

9. 地球每日自轉一周, 凡地面之物均隨之而轉. 問在北緯 $51°25'$ 之物, 每句鐘轉過若干英里.

10. 有兩船均在燈塔之正南. 自塔望船, 俯角爲 $32°43'$ 與 $12°48'$. 若塔高 208 尺, 問兩船相距幾尺.

11. 有人在離石象八尺處視象, 見象頭之仰角爲 $12°30'$, 象趺之俯角爲 $48°23'$. 問象高幾尺.

12. 有山高 3300 英尺. 自某處望山, 仰角爲 $60°$. 有氣球自此處上升, 越五分鐘自氣球望山頂, 見仰角爲 $30°$. 問氣球每句鐘上升若干英里.

13. 自樓頂視塔尖, 仰角爲 $30°$. 自樓下望之, 仰角爲 $60°$. 若樓高 50 尺, 問塔高幾尺.

14. 立竿山麓. 自山頂望之, 竿之上端之俯角爲 $23°17'$, 下端之俯角爲 $24°19'$. 若竿高 48·62 尺, 問山高幾何.

15. 植竿山巔. 自海濱望之, 竿之上下端之仰角爲 $47°12'$ 與 $45°13'$. 若竿高 25 尺, 問山高幾何.

16. 有兩船均在山之正南. 自山巔望船, 俯角為 5° 與 15°. 若兩船相距二英里, 問山高幾尺.

17. 有人在某處望塔, 見仰角為 $24^\circ\ 19'$. 向塔行走 3695 尺, 則見塔之仰角為 $75^\circ\ 32'$. 問塔高幾尺.

18. 自塔頂望樹頂, 俯角為 $10^\circ\ 23'$. 自塔座望樹頂, 仰角為 $42^\circ\ 38'$. 若塔高 103 尺, 問樹高幾尺.

19. 在舵樓測敵艦. 其烟囱上端之仰角與下端之俯角為 $30'$ 與 $16'$. 知烟囱高 58 尺, 試求敵艦之遠近.

20. 有人在平地上望塔頂, 見其上所植旗竿之上下端之仰角為 51° 與 40°. 退行 300 尺望之, 見竿頂之仰角為 $33^\circ\ 45'$. 問旗竿長幾尺.

21. 在某處望氣球, 見氣球在正南向, 仰角為 60°. 在此處之西一英里處望之, 見氣球之仰角為 45°. 問氣球高幾何.

22.* 有人在塔之南面平地上某處望塔, 見塔頂之仰角為 30°. 自此處向西行 50 尺, 則見塔之仰角為 18°. 試證塔之高為 $\dfrac{50}{\sqrt{2+2\sqrt{5}}}$.

23. 有人在燈塔之南,見己影長 24 尺.向東行50尺,則見己影長 30 尺. 若此人身長 6 尺,問燈高幾尺.

*24.** 江之對岸有塔 C,今欲求其高. 自 A 處測得塔之仰角爲 34°18′. 再至 B 處測得塔之仰角爲 25°37′. 若 AB 與 AC 成 90° 之角,而 AB 等於 94 尺,問塔高幾尺.

*25.** 在 A 與 B 兩處望氣球,仰角爲 60° 與 30°. 在 AB 間適中處望之,仰角爲 45°. 若 A 與 B 相距一英里. 試證氣球之高爲 $1320\sqrt{6}$ 英尺.

〔若 AD 爲 △ABC 之中線,則 $2\,AD^2 + 2\,BD^2 = AB^2 + AC^2$〕

*26.** 平地上有界石三塊同在一直線. 第一與第二塊及第二與第三塊相距各一英里. 自某山望之,其俯角爲 α, β 與 γ. 試證山之高爲

$$5280\sqrt{2}\Big/\sqrt{\cot^2\alpha - 2\cot^2\beta + \cot^2\gamma}\ \text{尺}.$$

*27.** 在 A,B 兩處各有一塔,其高爲 a 與 b. 在 AB 線上某點見塔頂之仰角均爲 α. 在 AB 線外某點 C 見塔頂之仰角爲 β 與 γ. 若 ∠ACB 爲直角,試證

$$(a+b)^2\cot^2\alpha = b^2\cot^2\gamma + a^2\cot^2\beta.$$

第四章

任何角之三角函數

第一節　任何角之八比定義

56. 第二章八比定義僅就 0° 與 90° 間諸角論之。今將第 16 款之定義推廣之，論任何角之八比。

令 XX' 與 YY' 爲橫縱坐標軸。設 OB 線本與 OX 同在一處，而 OB 在 O 點順右手指旋轉。則 OB 與 OX 成角 XOB。設 P 爲 OB 上任一點，自 P 作垂線 PM 至 OX。

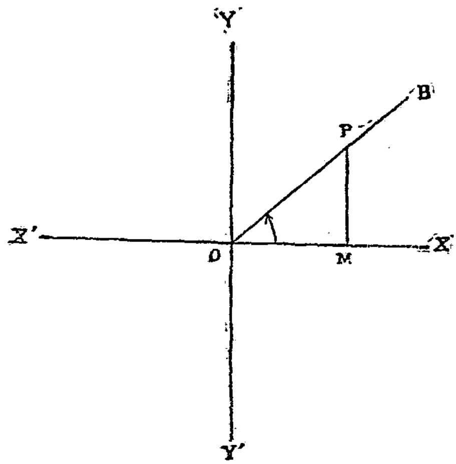
於是，OP 爲 O 與 P 之距離，

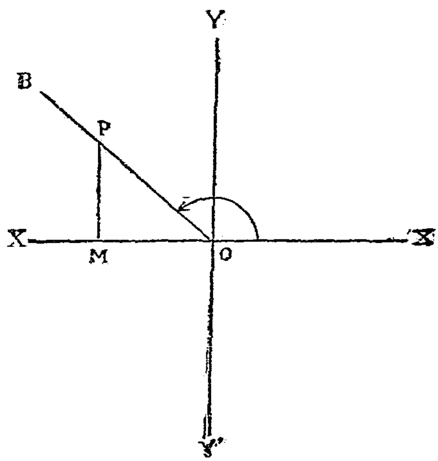
OM 爲 P 之橫坐標，

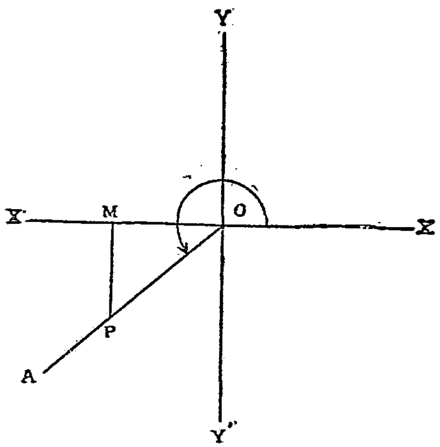
MP 爲 P 之縱坐標。

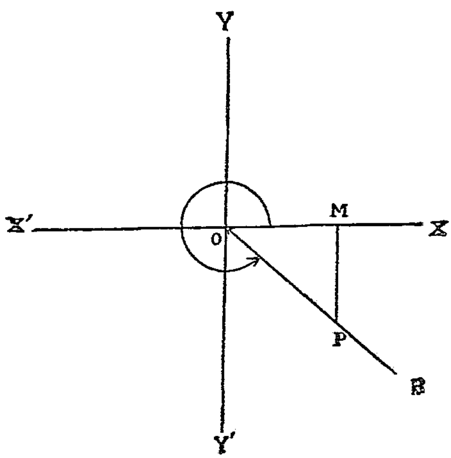
OM 與 MP 有正負之分而 OP 則常作爲正。

若 $\angle XOB = A$ 在 0° 與 90° 之間，則 P 在第一象限，而 P 之橫縱坐標 OM 與 MP 均爲正。


Y
B
P
X'
O
M
X
Y'


Y
B
P
X
M
O
X
Y'


Y
X′
M
O
X
P
A
Y′


Y
X′
O
M
X
P
B
Y′

故依第 16 款定義，則

$$\sin A=\frac{MP}{OP}=\frac{P\text{之縱坐標}}{O\text{與}P\text{之距離}}\text{ 為正數,}$$

$$\cos A=\frac{OM}{OP}=\frac{P\text{之橫坐標}}{O\text{與}P\text{之距離}}\text{ 為正數,}$$

$$\tan A=\frac{MP}{OM}=\frac{P\text{之縱坐標}}{P\text{之橫坐標}}\text{ 為正數,}$$

$$\cot A=\frac{OM}{MP}=\frac{P\text{之橫坐標}}{P\text{之縱坐標}}\text{ 為正數,}$$

$$\sec A=\frac{OP}{OM}=\frac{O\text{與}P\text{之距離}}{P\text{之橫坐標}}\text{ 為正數,}$$

$$\csc A=\frac{OP}{MP}=\frac{O\text{與}P\text{之距離}}{P\text{之縱坐標}}\text{ 為正數。}$$

57. 任何角各比之定義 若 $\angle XOB=A$ 為任何角，在第二第三或第四象限。則 A 之各比之定義如下：—

$$\sin A=\frac{P\text{ 之縱坐標}}{O\text{與}P\text{之距離}}=\frac{MP}{OP},$$

$$\cos A=\frac{P\text{ 之橫坐標}}{O\text{與}P\text{之距離}}=\frac{OM}{OP},$$

$$\tan A=\frac{P\text{ 之縱坐標}}{P\text{ 之橫坐標}}=\frac{MP}{OM},$$

$$\cot A=\frac{\text{P之橫坐標}}{\text{P之縱坐標}}=\frac{OM}{MP},$$

$$\sec A=\frac{\text{O與P之距離}}{\text{P之橫坐標}}=\frac{OP}{OM},$$

$$\csc A=\frac{\text{O與P之距離}}{\text{P之縱坐標}}=\frac{OP}{MP}。$$

〔注意〕 A 爲任何角。大於 360° 亦可，爲負角亦可。OB 與標軸同在一處時 (如 A=90°, 270°, 450°)，A 之各比於下節另論。

58. 90° 與 360° 間角之各比

若 A 在 90° 與 180° 之間，則 P 在象限 II，OM 爲 −，MP 爲 +。

若 A 在 180° 與 270° 之間，則 P 在象限 III，OM 爲 −，MP 爲 −。

若 A 在 270° 與 360° 之間，則 P 在象限 IV，OM 爲 +，MP 爲 −。

故，I. **90° 與 180° 間諸角之正弦，餘割爲正數。餘弦，正切，餘切，正割均爲負數。**

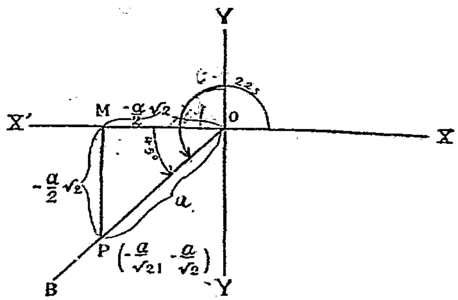
II. **180° 與 270° 間諸角之正弦，餘弦，正割，餘割爲負數，正切，餘切爲正數。**

III. **270° 與 360° 間諸角之餘弦，正割爲正數。正弦，正切，餘切，餘割均爲負數。**

例如　若 $A=150°$。則 $\angle X'OP=30°$。

故若命 $OP=a$，　則 $MP=+\frac{1}{2}a$，　$OM=-\frac{\sqrt{3}}{2}a$，

故　　$\tan 150°=\frac{MP}{OM}=\frac{\frac{1}{2}a}{-\frac{\sqrt{3}}{2}a}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$。



又如　$\sin 225°=\frac{MP}{OP}=\frac{-\frac{a}{2}\sqrt{2}}{a}=-\frac{1}{2}\sqrt{2}$。

$\tan 225°=\frac{MP}{OM}=\frac{-\frac{a}{2}\sqrt{2}}{-\frac{a}{2}\sqrt{2}}=+1$。

A	象限	*sin* A	*cos* A	*tan* A	*cot* A	*sec* A	*csc* A
$0°<A<90°$	I	+	+	+	+	+	+
$90°<A<180°$	II	+	−	−	−	−	+
$180°<A<270°$	III	−	−	+	+	−	−
$270°<A<310°$	IV	−	+	−	−	+	−

59. 大於 360° 之角之各比　設 A 大於 360°, $A=(n\times 360^\circ+x)$。依第 12 款, A 角之邊與 x 角之邊同在一處。式內 n 爲正整數, $x<360^\circ$。故 $A=(n\times 360^\circ+x)$ 角之邊上任一點 P 之橫縱坐標及 P 與 O 之距離, 與 x 角邊上任一點 P′ 之橫縱坐標及 P′ 與 O 之距離相比。

故依第 57 款定義, **$A=(n\times 360^\circ+x)$ 角之各比與 x 角之各比相同。**

例如,　$\sin 730^\circ=\sin(2\times 360^\circ+10^\circ)=\sin 10^\circ$,

$\tan 982^\circ=\sin(2\times 360^\circ+262^\circ)=\tan 262^\circ$。

60. 負角之各比　若負角 $A=(n\times 360^\circ+x)$, 則依第 12 款, 負角 A 之邊與正角 x 之邊同在一處。式內 n 爲負整數。

故依第 57 款定義, **負角 $A=(n\times 360^\circ+x)$ 之各比與正角 x 之各比相同。**

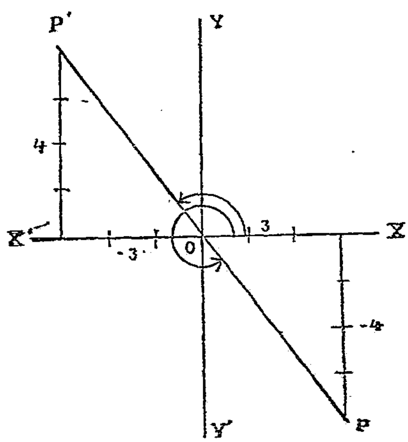
例如,　$-850^\circ=(-3\times 360^\circ+230^\circ)$, 故 -850° 角之各比與 230° 角之各比同。如 $\sin(-850^\circ)=\sin 230^\circ$, $\tan(-850^\circ)=\tan 230^\circ$。

又如,　$-135^\circ=(-360^\circ+225^\circ)$, 故 $\sin(-135^\circ)=\sin 225^\circ$。

61. 例題　知 $\tan A=-\frac{4}{3}$, $\sin A$ 爲負，試作 A 角。

〔解法〕作 P 點其橫坐標爲 3，縱坐標爲 -4，則 $\tan\angle XOP=-\frac{4}{3}$，作 P′ 點其橫坐標爲 -3，縱坐標爲 4，則 $\tan\angle XOP'=-\frac{4}{3}$，

故 $\angle XOP$ 及 $\angle XOP'$ 均可爲所求之角。但 $\sin A$ 爲負，故 A 不能在象限 II。



故 $\angle XOP$ 爲所求之角。

習　題　IX

1. 問下列諸角內何角之正弦爲正數：

233°, 155°, 72°, 339° 30′ 52″, 48° 30′, 123°.

2. 問下列諸角內何角之正切爲正數：

310° 30′, 42°, 152° 12′, 312°, 253° 25′, 100° 10′.

3. 問下列諸角內何角之正割爲正數：

242°, 333°, 111°, 295° 12′, 312°, 353° 45′, 199° 10′.

4. 問下列諸角內何角之正弦爲正數，何角之餘弦爲負數：

$\frac{5\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{5}$, $\frac{11\pi}{9}$, $\pi+2\cdot5$, $5\cdot03$, $\frac{4\pi}{5}$, $2\cdot002$ 半徑度.

5. 問下列諸角內何角之正弦及正切均爲正數：

$33°40'$, $150°12'$, $339°36'32''$, $243°40'$, $349°$.

6. 問下列諸角內何角之餘弦及餘割均爲負數：

$230°$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{3}$, $\frac{9\pi}{5}$, $\frac{11\pi}{7}$, $2\cdot5$ 半徑度.

7. 問下列諸角內其正弦爲負數而正切爲正數者爲何角：

$\frac{5\pi}{4}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{139\pi}{78}$, $\frac{523\pi}{222}$, $\frac{3\pi}{1\cdot8}$, $\frac{5\pi}{2\cdot5}$, $\frac{22\pi}{7}$, 半徑度.

8. 若 $\sin A$ 爲正，$\cos A$ 爲負，問 A 在第幾象限.

若 $\sin A$ 爲負，$\cos A$ 爲負，問 A 在第幾象限.

若 $\sin A$ 爲負，$\cos A$ 爲正，問 A 在第幾象限.

9. 若 $\tan A$ 爲正，$\cos A$ 爲負，問 A 在第幾象限.

若 $\tan A$ 爲負，$\sec A$ 爲正，問 A 在第幾象限.

若 $\tan A$ 爲負，$\sin A$ 爲負，問 A 在第幾象限.

10. 若 $\cos A$ 爲正，$\cot A$ 爲正，問 A 在第幾象限.

若 $\cos A$ 爲負, $\cot A$ 爲負, 問 A 在第幾象限.

若 $\sin A$ 爲正, $\cot A$ 爲負, 問 A 在第幾象限.

11. 若 $\sin A$ 爲正, $\sec A$ 爲負, 問 A 在第幾象限.

若 $\tan A$ 爲正, $\sec A$ 爲負, 問 A 在第幾象限.

若 $\sec A$ 爲正, $\cot A$ 爲正, 問 A 在第幾象限.

12. 若 $\cos A$ 爲正, $\sec A$ 爲正, 問 A 可在何二象限.

若 $\tan A$ 爲負, $\cot A$ 爲負, 問 A 可在何二象限.

13. 若知 $\sin A$ 及 $\csc A$ 之號, 可否知 A 所在之象限.

14. 若知 $\sin A$ 及 $\cos A$ 之號, 可否知 A 角其餘諸函數之號.

15. 若 $\tan A$ 爲正, $\cos A$ 爲負, 問 $\sin A$, $\cot A$, $\sec A$ 爲正抑爲負.

16. 試論下列諸角各函數之正負:

373°, 3605°, 752°, 725°, 532°, 2379°, $5226'$, 452°, 1000°, $10345^\circ\,42'$.

17. 試論下列諸角各函數之正負:

-35°, -72°, -155°, -729°, -3006°, -892°, -9005°, -281°, -366°, -210°.

18. 知 $\sin A = -\frac{5}{9}$, $\cos A$ 爲負, 試作 A 角.

19. 知 $\tan A=+\frac{5}{2}$, $\sin A$ 爲正, 試作 A 角.

20. 知 $\sec A=-8$, $\sin A$ 爲正, 試作 A 角.

21. 知 $\cot A=+5$, $\cos A$ 爲負, 試作 A 角.

22. 知 $\cos A=-\frac{1}{2}$, $\sin A$ 爲正, 試作 A 角.

23. 知 $\csc A=+2$, $\cot A$ 爲負, 試作 A 角.

24. 求下列諸函數之值：〔用 58 款例法〕

$\sin 120°$, $\tan 330°$, $\cos 150°$, $\sin 210°$.

25. 求下列諸比之值：〔用 58 款例法〕

$\sin 135°$, $\cos 225°$, $\tan 315°$, $\sin 405°$.

26. 求下列諸比之值：〔用 58 款例法〕

$\sin 108°$, $\cos 162°$, $\tan 342°$, $\cot 252°$.

27. 下列諸比等於 360° 以下何角之同比：

$\sin 892°$, $\tan 360056°$, $\cot 502°$, $\sec 1000°$.

28. 下列諸角各比與360°以下何正角之各比相同：

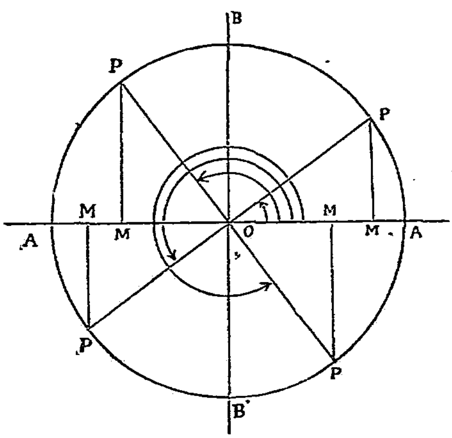
$-80°$, $-2071°$, $-536°$, $-40°$, $-1000°$, $-5480°$.

第二節　各比之變更; 0°, 90°, 180°, 270°, 360°之各比

62. 設 OP 線自 OA 起, 以 O 爲心旋轉一周。則 P

$\sin x = \frac{PM}{r}$ 0° 90° 180° 270° 360°

	0°	90°	180°	270°	360°
$\sin x = \frac{PM}{r}$	0	1	0	-1	0
$\cos x = \frac{OM}{r}$	1	0	-1	0	1
$\tan x = \frac{PM}{OM}$	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0



之軌迹爲一圓。

P 之横坐標爲 OM,

P 之縱坐標爲 MP。

令 $\angle XOP = x$, $OP = r$, 則

$\sin x = \frac{MP}{r}$, $\cos x = \frac{OM}{r}$,

$\tan x = \frac{MP}{OM}$, $\cot x = \frac{OM}{MP}$,

$\sec x = \frac{r}{OM}$, $\csc x = \frac{r}{MP}$。

63. 在象限 I, 若 x 漸變大, 則 MP 漸變長, OM 漸變短。

故 $\sin x = \frac{MP}{r}$, $\tan x = \frac{MP}{OM}$, $\sec x = \frac{r}{OM}$, 均漸變大,

$\cos x = \frac{OM}{r}$, $\cot x = \frac{OM}{MP}$, $\csc x = \frac{r}{MP}$, 均漸變小。

若 x 愈近 90°, 則 MP 愈近 r, OM 愈近零。

若 x 接近其極限 90°, 則 MP 接近其極限 r, OM 接近其極限 0。於是 $\frac{MP}{r}$ 接近其極限 1, $\frac{OM}{r}$ 接近其極限 0, $\frac{MP}{OM}$ 增至無窮盡,[*] $\frac{OM}{MP}$ 接近其極限 0,

[*] 爲便利起見「增至無窮盡」恆以「等於 ∞」表之。

$\frac{r}{OM}$ 增至無窮盡，　$\frac{r}{MP}$ 接近其極限 1。

故　$\sin 90^\circ = 1$，　$\tan 90^\circ = +\infty$，　$\sec 90^\circ = +\infty$，

$\cos 90^\circ = 0$，　$\cot 90^\circ = 0$，　$\csc 90^\circ = 1$。

若 x 漸變小，則 MP 漸變短，OM 漸變長。

若 x 接近其極限 0°，則 MP 接近其極限 0，OM 接近其極限 r。於是 $\frac{MP}{r}$ 接近其極限 0，$\frac{OM}{r}$ 接近其極限 1，

$\frac{MP}{OM}$ 接近其極限 0，$\frac{OM}{MP}$ 增至無窮盡，

$\frac{r}{OM}$ 接近其極限 1，$\frac{r}{MP}$ 增至無窮盡。

故　$\sin 0^\circ = 0$，　$\tan 0^\circ = 0$，　$\sec 0^\circ = 1$，

$\cos 0^\circ = 1$，　$\cot 0^\circ = +\infty$，$\csc 0^\circ = +\infty$。

故在象限 I，x 自 0° 漸增至 90°，則

$\sin x$ 自 0 漸增至 1，　$\cos x$ 自 1 漸減至 0，

$\tan x$ 自 0 漸增至 $+\infty$，$\cot x$ 自 $+\infty$ 漸減至 0。

$\sec x$ 自 1 漸增至 $+\infty$，$\csc x$ 自 $+\infty$ 漸減至 1。

64. 在象限 II，若 x 漸變大，則 MP 漸變短，OM 漸變長。但 OM 爲負，故

$sin\,x=\dfrac{MP}{r}$, $cos\,x=\dfrac{OM}{r}$, $cot\,x=\dfrac{OM}{MP}$ 均漸變小，

$tan\,x=\dfrac{MP}{OM}$, $sec\,x=\dfrac{r}{OM}$, $csc\,x=\dfrac{r}{MP}$ 均漸變大。

〔注意〕 $cos\,x$, $cot\,x$ 均爲負，其絕對值變大，$tan\,x$, $sec\,x$ 亦均爲負，其絕對值變小。

若 x 接近其極限 180°，則 MP 接近其極限 0，OM 接近其極限 $-r$。於是 $\dfrac{MP}{r}$ 及 $\dfrac{MP}{OM}$ 接近其極限 0，$\dfrac{OM}{r}$ 及 $\dfrac{r}{OM}$ 接近其極限 -1，$\dfrac{r}{MP}$ 增至無窮盡，$\dfrac{OM}{MP}$ 恆爲負而其絕對值則增至無窮盡（爲便利起見以「等於 $-\infty$」表之）。

故 $\sin 180°=0$, $\tan 180°=0$, $\sec 180°=-1$,

$\cos 180°=-1$, $\cot 180°=-\infty$, $\csc 180°=+\infty$,

若 x 漸變小，而接近其極限 90°，則 MP 接近其極限 r，OM 接近其極限 0。於是 $\dfrac{MP}{r}$ 及 $\dfrac{r}{MP}$ 接近其極限 1，$\dfrac{OM}{r}$ 及 $\dfrac{OM}{MP}$ 接近其極限 0，$\dfrac{MP}{OM}$ 及 $\dfrac{r}{OM}$ 恆爲負，而其絕對值則增至無窮盡。

故　$\sin 90^\circ=1$,　$\tan 90^\circ=-\infty$,　$\sec 90^\circ=-\infty$,

　$\cos 90^\circ=0$,　$\cot 90^\circ=0$,　$\csc 90^\circ=1$。

故在象限 II, x 自 90° 漸增至 180°, 則

$\sin x$ 自 1 漸減至 0,　$\cos x$ 自 0 漸減至 -1,

$\tan x$ 自 $-\infty$ 漸增至 0,　$\cot x$ 自 0 漸減至 $-\infty$,

$\sec x$ 自 $-\infty$ 漸增至 -1, $\csc x$ 自 1 漸增至 $+\infty$。

65. 90° 各比之值　由上兩款可見, 若 90° 作為 x 在象限 I 漸增時之極限, 則 $\tan x=+\infty$,　$\sec x=+\infty$, 若作為在象限 II 漸減時之極限, 則 $\tan x=-\infty$,　$\sec x=-\infty$。

故　$\tan 90^\circ=\pm\infty$,　$\sec 90^\circ=\pm\infty$。

x 經過 90°, 則 $\tan x$ 與 $\sec x$ 自 $+\infty$ 驟變為 $-\infty$。

66. 依同法可證

在象限 III, x 自 180° 漸增至 270°, 則

$\sin x$ 自 0 漸減至 -1,　$\cos x$ 自 -1 漸增至 0,

$\tan x$ 自 0 漸增至 $+\infty$,　$\cot x$ 自 $+\infty$ 漸減至 0,

$\sec x$ 自 -1 漸減至 $-\infty$, $\csc x$ 自 $-\infty$ 漸增至 -1。

在象限 IV, x 自 270° 漸增至 360°, 則

$\sin x$ 自 -1 漸增至 0, $\cos x$ 自 0 漸增至 1,

$\tan x$ 自 $-\infty$ 漸增至 0, $\cot x$ 自 0 漸減至 $-\infty$,

$\sec x$ 自 $+\infty$ 漸減至 1, $\csc x$ 自 -1 漸減至 $-\infty$。

並可證

$\sin 180^\circ=0,\quad \tan 180^\circ=0,\quad \sec 180^\circ=-1,$

$\cos 180^\circ=-1,\quad \cot 180^\circ=\mp\infty,\quad \csc 180^\circ=\pm\infty$。

$\sin 270^\circ=-1$。 $\tan 270^\circ=\pm\infty,\quad \sec 270^\circ=\mp\infty,$

$\cos 270^\circ=0,\quad \cot 270^\circ=0,\quad \csc 270^\circ=-1$。

$\sin 360^\circ=0,\quad \tan 360^\circ=0,\quad \sec 360^\circ=1,$

$\cos 360^\circ=1,\quad \cot 360^\circ=\mp\infty$。 $\csc 360^\circ=\mp\infty$。

67。 諸比之變更及 0°, 90°, 180°, 270°, 360° 角各比之值列表於下

	$0^\circ=0$	象限 I	$90^\circ=\frac{\pi}{2}$	象限 II	$180^\circ=\pi$
$\sin x$	0	0 增至 1	1	1 減至 0	0
$\cos x$	1	1 減至 0	0	0 減至 -1	-1
$\tan x$	0	0 增至 $+\infty$	$\pm\infty$	$-\infty$ 增至 0	0
$\cot x$	$\mp\infty$	$+\infty$ 減至 0	0	0 減至 $-\infty$	$\mp\infty$
$\sec x$	1	1 增至 $+\infty$	$\pm\infty$	$-\infty$ 增至 -1	-1
$\csc x$	$\mp\infty$	$+\infty$ 減至 1	1	1 增至 $+\infty$	$\pm\infty$

	象限 III	$270^\circ=\frac{3\pi}{2}$	象限 IV	$360^\circ=2\pi$
$\sin x$	0 減至 -1	-1	-1 增至 0	0
$\cos x$	-1 增至 0	0	0 增至 1	1
$\tan x$	0 增至 $+\infty$	$\pm\infty$	$-\infty$ 增至 0	0
$\cot x$	$+\infty$ 減至 0	0	0 減至 $-\infty$	$\mp\infty$
$\sec x$	-1 減至 $-\infty$	$\mp\infty$	$+\infty$ 減至 1	1
$\csc x$	$-\infty$ 增至 -1	-1	-1 減至 $-\infty$	$\mp\infty$

第三節　任何一角諸比之關係

68. 依第57款任何角諸比之定義,知凡第七節之公式於任何角A均適用。

例如, 依定義 $\sin A=\frac{MP}{OP}$, $\cos A=\frac{OM}{OP}$, $\tan A=\frac{MP}{OM}$,

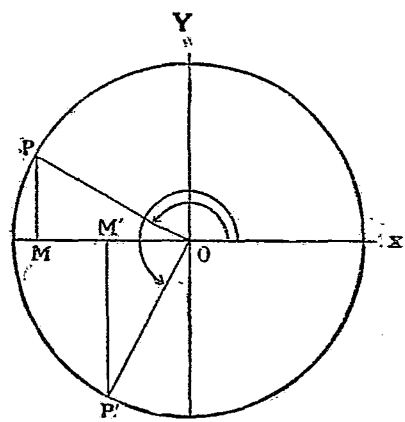
故 $\frac{\sin A}{\cos A}=\tan A$。不論P在何處 $\overline{MP}^2+\overline{OM}^2=\overline{OP}^2$,

故 $\sin^2 A+\cos^2 A=1$。

但若知某角一比之值,而欲用公式以求其他比之值,則須先知此角所在之象限。蓋若僅有一比之值,則角可在兩不同象限內任一象限,故他比之值不能預決。例如,若僅知 $\sin A=\frac{3}{5}$,則A可在象限I,亦可在象限II。故 $\cos A=\pm\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\pm\frac{4}{5}$,爲正爲負無從決定。若再知A在第二象限,則 $\cos A$ 必爲 $-\frac{4}{5}$,可以決定矣。

第四節 (90°±x)，(180°±x)，(270°±x)，(360°±x) 之諸比

69. 設 OP 自 OX 起順旋至 OP，則與 OX 成角 XOP$=x$。



令 ∠XOP′$=(90°+x)$，則 OP′ 與 OP 必成直角。

OP＝OP′＝r。

故 △POM＝△OP′M′。

因 OP 與 OP′ 必在鄰近之兩象限內，故 OM 與 M′P′ 之號必相似，OM′ 與 MP 之號必不相似。

故 OM＝M′P′，OM′＝－MP。依定義

$$\sin x=\frac{MP}{r},\qquad \sin(90°+x)=\frac{M'P'}{r},$$

$$\cos x=\frac{OM}{r},\qquad \cos(90°+x)=\frac{OM'}{r},$$

$$\tan x=\frac{MP}{OM},\qquad \tan(90°+x)=\frac{M'P'}{OM'},$$

$$\cot x=\frac{OM}{MP},\qquad \cot(90°+x)=\frac{OM'}{M'P'},$$

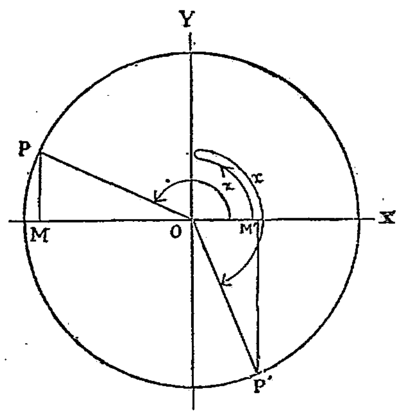
故　$\sin(90°+x)=\cos x$,　　或 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$,

$\cos(90°+x)=-\sin x$,　　$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$,

$\tan(90°+x)=-\cot x$,　　$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\cot\theta$,

$\cot(90°+x)=-\tan x$。　　$\cot\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\tan\theta$。

70. 設 OP 自 OX 起順旋至 OP, 與 OX 成 x 度角。



令 OP 自 OX 起順旋至 OY, 再退旋 x 度至 OP',

則 $\angle XOP'=(90°-x)$。

$\angle POM=\angle M'P'O$,

$OP=OP'=r$,

故 $\triangle POM=\triangle OP'M'$。

因 OP 與 OP' 必在同象限 (I 或 III), 或相對之兩象限 (II 與 IV) 內, 故 OM 與 M'P' 之號必相似, MP 與 OM' 之號亦必相似。

故　$OM=M'P'$, $OM'=MP$。

故 $\sin(90^\circ-x)=\cos x,$ 或 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta,$

$\cos(90^\circ-x)=\sin x,$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta,$

$\tan(90^\circ-x)=\cot x,$ $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta,$

$\cot(90^\circ-x)=\tan x.$ $\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\tan\theta.$

〔注意〕 x 爲任何角，不必小於 90°。

71. $(180^\circ\pm x)$ 諸比之值可依上式推得之如下：

$$\sin(180^\circ+x)=\sin(90^\circ+[90^\circ+x])=\cos(90^\circ+x)=-\sin x.$$

$$\sin(180^\circ-x)=\sin(90^\circ+[90^\circ-x])=\cos(90^\circ-x)=\sin x.$$

依同法得其餘諸比。

故 $\sin(180^\circ\pm x)=\mp\sin x,$ 或 $\sin(\pi\pm\theta)=\mp\sin\theta,$

$\cos(180^\circ\pm x)=-\cos x,$ $\cos(\pi\pm\theta)=-\cos\theta,$

$\tan(180^\circ\pm x)=\pm\tan x,$ $\tan(\pi\pm\theta)=\pm\tan\theta,$

$\cot(180^\circ\pm x)=\pm\cot x.$ $\cot(\pi\pm\theta)=\pm\cot\theta.$

72. $(270^\circ\pm x)$ 諸比之值亦可依此推得之如下：

$$\sin(270^\circ+x)=\sin(180^\circ+[90^\circ+x])=-\sin(90^\circ+x)=-\cos x.$$

$$\sin(270^\circ-x)=\sin(180^\circ+[90^\circ-x])=-\sin(90^\circ-x)=-\cos x.$$

依同法得其餘諸比。

故　$\sin(270°\pm x)=-\cos x$, 或, $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\pm\theta\right)=-\cos\theta$,

$\cos(270°\pm x)=\pm\sin x$, $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\pm\theta\right)=\pm\sin\theta$,

$\tan(270°\pm x)=\mp\cot x$, $\tan\left(\frac{3\pi}{2}\pm\theta\right)=\mp\cot\theta$,

$\cot(270°\pm x)=\mp\tan x$。 $\cot\left(\frac{3\pi}{2}\pm\theta\right)=\mp\tan\theta$,

73. $(360°\pm x)$ 諸比之值亦可依此法推得之如下:

$\sin(360°+x)=\sin(270°+[90°+x])=-\cos(90°+x)=\sin x$。

$\sin(360°-x)=\sin(270°+[90°-x])=-\cos(90°-x)=-\sin x$。

依同法得其餘諸比。

故　$\sin(360°\pm x)=\pm\sin x$, 或 $\sin(2\pi\pm\theta)=\pm\sin\theta$,

$\cos(360°\pm x)=+\cos x$, $\cos(2\pi\pm\theta)=+\cos\theta$,

$\tan(360°\pm x)=\pm\tan x$, $\tan(2\pi\pm\theta)=\pm\tan\theta$,

$\cot(360°\pm x)=\pm\cot x$, $\cot(2\pi\pm\theta)=\pm\cot\theta$。

第五節　任何象限內諸比化至第一象限法

74. 若 x 爲銳角, 則

$\{n\times360°+(90°+x)\}$ 及 $\{n\times360°+(180°-x)\}$ 爲象限 II 內之正角,

$\{n\times360^\circ+(180^\circ+x)\}$ 及 $\{n\times360^\circ+(270^\circ-x)\}$ 爲象限 III 內之正角,

$\{n\times360^\circ+(270^\circ+x)\}$ 及 $\{n\times360^\circ+(360^\circ-x)\}$ 爲象限 IV 內之正角。

(n 爲零或正整數)。

依第 59 款, $\{n\times360^\circ+(90^\circ+x)\}$角之各比與$(90^\circ+x)$之各比同。依第 69 款公式, $(90^\circ+x)$之各比可化爲 x 之各比。故第二象限內任何角 $\{n\times360^\circ+(90^\circ+x)\}$ 之各比可化爲一銳角 x 之各比, 其餘可依此類推。

故凡第二, 第三, 第四象限內正角之諸比均可依下例化爲第一象限內角之比:

例曰: $(n\times360^\circ+90^\circ)$ 或 $(n\times360^\circ+270^\circ)$加減銳角 x 之函數與 x 之餘函數有相同之絕對值。$(n\times360^\circ+180^\circ)$或 $n\times360^\circ$ 加減銳角 x 之函數與 x 之同函數有相同之絕對值。其正負號則視角所在之象限而定。

例如, $\sin 330^\circ=\sin(360^\circ-30^\circ)=-\sin 30^\circ$,

$$\cos 660^\circ=\cos\{360^\circ+(270^\circ+30^\circ)\}$$
$$=\cos(270^\circ+30^\circ)=\sin 30^\circ,$$

$\tan 240° = \tan(270° - 30°) = \cot 30°,$

$\sin 910° = \sin\{2 \times 360° + (180° + 10°)\}$

$= \sin(180° + 10°) = -\sin 10°$。

75. 依第 12 款，任何負角 $(-x)$ 之邊與 $(360° - x)$ 角之邊同在一處。

故　$\sin(-x) = \sin(360° - x) = -\sin x$。

依同法得

$$\sin(-x) = -\sin x,$$

$$\cos(-x) = \cos x,$$

$$\tan(-x) = -\tan x,$$

$$\cot(-x) = -\cot x。$$

故凡負角 $-x$ 之諸比可化爲正角 x 之諸比。若 x 不在第一象限，則可依第 74 款法化至第一象限。故任何負角之諸比可化爲第一象限內角之比。

例如，$\sin(-30°) = -\sin 30°,$

$\tan(-230°) = -\tan 230° = -\tan(270° - 40°) = -\cot 40°$。

第六節　等比之角

76 知角之值，則其各比均有一定之值。但若知某比之值而欲求其相當之角，則此角可有多數之值。

例如，知 $\sin x=\frac{1}{2}$，則 x 可等於 30° 或 150°，或 390° 等。

77. 等正弦之角 Equi-sinal angles 設 A 爲最小之正角，其正弦等於 a 者。則依第71款，(180°−A)角之正弦亦爲 a。依第 57 款定義，凡角之其邊與此兩角之邊同在一處者，其正弦均爲 a。依第 12 款，$[n\times360°+A]$ 角之邊與A角之邊同在一處，$[n\times360°+(180°-A)]$ 角之邊與(180°−A)角之邊同在一處。n 爲整數，或正或負。

故(1)$\sin(n\times360°+A)=a$,　　(n 爲零或整數，正負均可)。

(2)$\sin(n\times360°+180°-A)=a$,($n$ 爲零或整數，正負均可)。

故　$\sin(2n\times180°+A)=a$,　　$\sin[(2n+1)180°-A]=a$。

偶倍 180° 之後爲 +A，奇倍 180° 之後爲 −A。故上兩式可合併爲一式．即 $\sin[p\times180°+(-1)^pA]=a$，$p$ 爲零或整數，或正或負。

故凡與 A 等正弦及等餘割之角，可以下式概之：

$$[p\times180°+(-1)^pA],\ (p\ 爲零或整數，或正或負)。$$

例題　若 $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$，問 x 可等於何。

最小之正角其正弦等於$\frac{\sqrt{3}}{2}$者爲 60°，故

$x=[p\times180°+(-1)^p60°]$，$p$ 爲零，或整數或正或負。

78. 等餘弦之角 Equi-cosinal angles 設A為最最小之正角,其餘弦等於 a 者。則依第73款,正角$(360°-A)$之餘弦亦為 a。依第57款定義,凡角之其邊與此兩角之邊同在一處者,其餘弦均為 a。

故(1) $\cos(n\times360°+A)=a$, (n 為零或整數,或正或負)。

(2) $\cos(n\times360°+360°-A)=a$, ($n$ 為零或整數,或正或負)。

故 $\cos(2n\times180°+A)=a$, $\cos[(2n+2)180°-A]=a$。

於是可見凡偶倍180°加減A之餘弦均等於 a。故與A等餘弦及等正割之角,可以下式概之:

$$[2p\times180°\pm A],$$ (p 為零,或整數或正或負)。

例題 知 $\cos^2x=\cos^2A$,試求 x 之值。

$\cos x=\cos A$, 或 $\cos x=-\cos A=\cos(180°-A)$。

故 $x=[2p\times180°\pm A]$, 或 $x=[2p\times180°\pm(180°-A)]$。

故 $x=[q\times180°\pm A]$, q 為零或整數,或正或負,或奇或偶。

79. 等正切之角 Equi-tangential angles 設A為最小之正角,其正切等於 a 者。則依第71款,$(180°+A)$之正切亦為 a。凡角之其邊與此兩角之邊同在一處者,其正切均為 a。

故(1) $\tan(n\times 360^\circ+A)=a$,　　(n 爲零或整數,或正或負)。

(2) $\tan(n\times 360^\circ+180^\circ+A)=a$, (n 爲零或整數,或正或負)。

故　$\tan(2n\times 180^\circ+A)=a$,　　$\tan[(2n+1)\times 180^\circ+A]=a$。

於是可見奇倍或偶倍 180° 加 A 角之正切均爲 a。故與 A 等正切及等餘切之角可以下式概之:

$$[p\times 180^\circ+A],\quad (p\text{ 爲零,或整數或正或負})。$$

習　題　X

1. 試將下列諸函數化爲小於 45° (或$\frac{\pi}{4}$半徑度) 角之函數:

$\cos 182^\circ$,　$\sin 490^\circ$,　$\tan 339^\circ$,　$\cot 556^\circ$,

$\tan \frac{15}{4}\pi$,　$\cos \frac{17}{3}\pi$,　$\sin \frac{20}{3}\pi$,　$\cot \frac{30}{7}\pi$.

2. 試將下列諸函數化爲小於 45° 正角之函數:

$\sin(-45^\circ)$,　$\cos(-330^\circ)$,　$\tan(-240^\circ)$,　$\cot(-3333^\circ)$,

$\sin(-662^\circ)$,　$\cos(-188^\circ)$.

3. 求下列諸角之各函數之値:

120°, 150°, 240°, 330°, 315°, 300°, −30°.

4. 知 $\sin x=\frac{4}{5}$, $\cos x$ 爲負, 求 x 之各函數之値.

5. 知 $\tan x=-2$, $\sec x$ 爲正, 求 x 之各函數之値.

6. 知 $\sin x=-\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\tan x$ 爲正, 求 x 各函數之值.

7. 知 $\tan x=+\frac{\sqrt{3}}{4}$, x 在象限 III, 求 x 各函數之值.

8. 知 $\cos x=-\frac{1}{4}$, x 在象限 III, 求 x 各函數之值.

9. 問 360° 之內, 角之正弦爲 $\frac{3}{4}$ 者有幾角.

10. 問 7248° 之內, 角之正切爲 -4 者共有幾角.

11. 問 598° 之內, 何角之正弦均爲 $-\frac{1}{2}$.

12. 問 720° 之內, 何角之正切均爲 $\sqrt{3}$.

13. 知 $\tan 238^\circ=1\cdot 6$, 求 $\sin 122^\circ$ 之值.

14. 知 $\cos 333^\circ=0\cdot 89$, 求 $\tan 117^\circ$ 之值.

15. 求 $[\cos 0^\circ \sin^2 270^\circ-2\cos 180^\circ \tan 45^\circ]$ 之值.

16. 求 $[3\sin 0^\circ \sec 180^\circ+2\csc 90^\circ-\cos 360^\circ]$ 之值.

17. 求 $\left[2\sec^2\pi\cos 0+3\sin^3\frac{3\pi}{2}-\csc\frac{\pi}{2}\right]$ 之值.

18. 求 $[\tan\pi\cos\frac{3}{2}\pi+\sec 2\pi-\csc\frac{3}{2}\pi]$ 之值.

19. 下列諸函數等於 A 角之何函數:

$\cos(A-270^\circ)$, $\sin(A-90^\circ)$, $\tan(A-360^\circ)$, $\cos(A-180^\circ)$.

20. 下列諸函數等於 θ 角之何函數:

$\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)$, $\tan(\theta-6\pi)$, $\cos(2n\pi+\theta)$, $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$.

21. 若 $\cos^2 x=\cos^2 15^\circ$, 問 x 可等於若干度 (360° 之內).

22. 若 $\tan^2 x=\tan^2 20^\circ$, 問 x 可等於若干度(720° 之內)

23. $\sin x+\cos x$ 爲正, 問 x 在 360° 之內何兩角之間.

$\sin x+\cos x$ 爲負, 問 x 在 360° 之內何兩角之間.

24. $\sin x-\cos x$ 爲正, 問 x 在 360° 之內何兩角之間.

$\sin x-\cos x$ 爲負, 問 x 在 360° 之內何兩角之間.

25. 若 A,B,C 爲三角形上之三角, 試證:

(1) $\sin\left(\frac{B+C-A}{2}\right)=\cos A,$

(2) $\cos\left(\frac{B+C-A}{2}\right)=\sin A,$

(3) $\sin\left(\frac{B+C-5A}{2}\right)=\cos 3A,$

(4) $\sin\left(\frac{5A+B+C}{2}\right)=\cos 2A.$

26. 試依第 64 款之法, 述在象限 III, x 自 180° 漸增至 270° 時, x 之各比之變更.

27. 試依第 64 款之法, 述在象限 IV, x 自 270° 漸增至 360° 時, x 之各比之變更.

28. 若 $\tan x=\infty$, 問 $3\tan x$ 等於何, $(\tan x+53)$ 等於何.

29. 若 $x=\infty$, $y=\infty$, 問 x 與 y 是否必相等.

30. 知 $\sin 90°=1$, $\cos 90°=0$, 可否證

$$\sin^2 90°+\cos^2 90°=1.$$

31. 知 $\sin 90°=1$, $\cos 90°=0$, $\tan 90°=\infty$, 可否證

$\tan 90°=\dfrac{\sin 90°}{\cos 90°}$, 試言其故.

32. 知 $\tan 90°=\dfrac{\sin 90°}{\cos 90°}$, $\sin 90°=1$, $\cos 90°=0$, 可否證

$\tan 90°=\infty$, 試言其故.

33. 知 $\sec 90°=\infty$, $\cos 90°=0$, 可否證

$\sec 90° \cos 90°=1$, 試言其故.

34. 知 $\sec 90° \cos 90°=1$, $\sec 90°=\infty$, 可否證

$\cos 90°=0$, 試言其故.

35. 問 vers $90°$, covers $90°$, vers $180°$, covers $180°$, vers $270°$ vers $270°$ 各等於若干.

36. 試述 vers x 之變更, x 自 $0°$ 漸增至 $360°$.

37. 試述 covers x 之變更, x 自 $0°$ 漸增至 $360°$,

38*. $\sin x=\frac{1}{2}$, 試證 $x=[n\times 180°+(-1)^n 30°]$.

39*. $\cos^2 x=\frac{1}{2}$, 試證 $x=[n\times 180°\pm 45°]$.

40*. $\tan^2 x=\tan^2 A$, 試證 $x=(n\times 180°\pm A)$.

41.* $\tan 2x=\tan x$, 試證 $x=(n\times 180^\circ)$.

42.* $\cos 3x=\cos 2x$。試證 $x=(2n\times 180^\circ)$ 或 $(2n\times 36^\circ)$.

43.* $\csc 3x=\csc 3A$,試證 $x=[n\times 60^\circ+(-)^n A]$.

44.* 試求等正弦及餘弦之角.

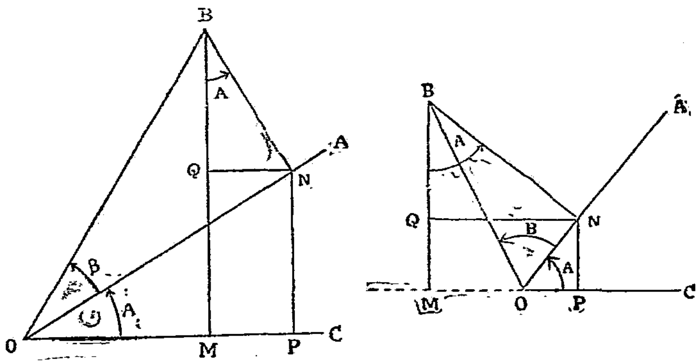
45.* 試求等正切及餘切之角.

第五章

幾角諸函數間之關係

第一節　兩角之和之函數

80.　$\sin(A+B)$, $\cos(A+B)$　令 $\angle COA=A$, $\angle AOB=B$, A 與 B 均小於 90°。$\angle COB=(A+B)$。



自 B 至 OC 及 OA, 作垂線 BM 及 BN。自 N 至 OC, 作垂線 NP。自 N 至 BM, 作垂線 NQ。

則 $\angle QBN=\angle QNO=A$。

故 $\frac{QN}{NB}=sin\angle QBN=sin\,A,\ \frac{QB}{NB}=cos\angle QBN=cos\,A$。

$\frac{NB}{OB}=sin\angle AOB=sin\,B,\ \frac{ON}{OB}=cos\angle AOB=cos\,B$。

$\frac{PN}{ON}=sin\angle COA=sin\,A,\ \frac{OP}{ON}=cos\angle COA=cos\,A$。

觀上圖可見無論(A+B)大於 90° 或小於 90°，必得

$$\sin(A+B)=\frac{MB}{OB}=\frac{MQ+QB}{OB}=\frac{PN}{OB}+\frac{QB}{OB}$$

$$=\frac{PN}{ON}\cdot\frac{ON}{OB}+\frac{QB}{NB}\cdot\frac{NB}{OB}$$

$$=\sin A\ \cos B+\cos A\ \sin B。\qquad (1)$$

$$\cos(A+B)=\frac{OM}{OB}=\frac{OP-MP}{OB}=\frac{OP}{OB}-\frac{QN}{OB}$$

$$=\frac{OP}{ON}\cdot\frac{ON}{OB}-\frac{QN}{NB}\cdot\frac{NB}{OB}$$

$$=\cos A\ \cos B-\sin A\ \sin B。\qquad (2)$$

81. 若 A 或 B 大於 90°，或均爲任何角，則上兩式亦確。此可依上款之法作圖以證之，或證之如下：

設 $A=90°+A'$，

則 $(A+B)=(90°+A'+B)$。

故　$sin(A+B)=sin(90^\circ+A'+B)=cos(A'+B)$,

$cos(A+B)=cos(90^\circ+A'+B)=-sin(A'+B)$。

$sin\,A=sin(90^\circ+A')=cos\,A'$, $cos\,A=cos(90^\circ+A')=-sin A'$。

故若　$cos(A'+B)=cos\,A'\,cos\,B-sin\,A'\,sin\,B$,　(1)

$sin(A'+B)=sin\,A'\,cos\,B+cos\,A'\,sin\,B$,　(2)

則　$\sin(A+B)=cos(A'+B)=\sin A\ \cos B+\cos A\ \sin B$,　(3)

$\cos(A+B)=-sin(A'+B)=\cos A\ \cos B-\sin A\ \sin B$。(4)

今知若 $A'<90^\circ$, $B<90^\circ$, 則公式(1)及(2)爲眞確, 故公式(3)及(4)亦眞確。卽是, 若 A 在象限 II, 則公式(1)及(2)爲眞確, 故(3)及(4)亦眞確。若依此法推演, 則知 A 在象限 III, 象限 IV, B 在象限 II, 象限 III, 象限 IV, 時, 公式(3)及(4)亦眞確。

故, A 及 B 爲任何角, 得公式:

$$\sin(A+B)=\sin A\ \cos B+\cos A\ \sin B \cdots\cdots [VI]$$

$$\cos(A+B)=\cos A\ \cos B-\sin A\ \sin B \cdots\cdots [VII]$$

82. **tan(A+B),cot(A+B)**　設 A 及 B 爲任何角,

則　$tan(A+B)=\dfrac{sin(A+B)}{cos(A+B)}=\dfrac{sin\,A\ cos\,B+cos\,A\ sin\,B}{cos\,A\ cos\,B-sin\,A\ sin\,B}$。

以 $\cos A\ \cos B$ 除分子與分母，得

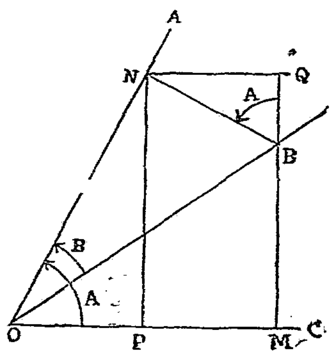
$$\tan(A+B)=\frac{\dfrac{\sin A\ \cos B+\cos A\ \sin B}{\cos A\ \cos B}}{\dfrac{\cos A\ \cos B-\sin A\ \sin B}{\cos A\ \cos B}},$$

即 $$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\ \tan B}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\ [\text{VIII}]$$

依同法得，$$\cot(A+B)=\frac{\cot A\ \cot B-1}{\cot B+\cot A}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\ [\text{IX}]$$

第二節　兩角之較之函數

83. $\sin(A-B)$，$\cos(A-B)$



令 $\angle COA=A$，$\angle BOA=B$，$A>B$，A 與 B 均爲小於 $90°$ 之角。$\angle COB=(A-B)$。

自 B 至 CO 及 OA 作垂線 BM 及 BN。自 N 至 OC 作垂線 NP。自 N 至 BM 作垂線 NQ。

則 $\angle QBN=90°-\angle BNQ=\angle BNP=A$。

故 $\dfrac{NQ}{NB}=\sin\angle QBN=\sin A$，$\dfrac{BQ}{NB}=\cos\angle QBN=\cos A$。

$$\frac{NB}{OB}=sin\angle BOA=sin\,B,\quad \frac{ON}{OB}=cos\angle BOA=cos\,B。$$

$$\frac{PN}{ON}=sin\angle COA=sin\,A,\quad \frac{OP}{ON}=cos\angle COA=cos\,A。$$

故 $$\sin(A-B)=\frac{MB}{OB}=\frac{MQ-BQ}{OB}=\frac{PN}{OB}-\frac{BQ}{OB}$$

$$=\frac{PN}{ON}\cdot\frac{ON}{OB}-\frac{BQ}{NB}\cdot\frac{NB}{OB}$$

$$=\sin A\cos B-\cos A\sin B。\qquad(1)$$

$$\cos(A-B)=\frac{OM}{OB}=\frac{OP+PM}{OB}=\frac{OP}{OB}+\frac{NQ}{OB}$$

$$=\frac{OP}{ON}\cdot\frac{ON}{OB}+\frac{NQ}{NB}\cdot\frac{NB}{OB}$$

$$=\cos A\cos B+\sin A\sin B。\qquad(2)$$

84. 若 A 及 B 爲任何角，則上兩式亦眞確。此可用第 81 款之法證之。但公式 (1) 及 (2)，可自公式 [VI] 及 [VII] 得之如下。今公式 [VI] 及 [VII] 既可適用於任何角 A 及 B，則 (1) 及 (2) 自然亦可適用於任何角 A 及 B。

設 A 及 B 爲任何角，(A−B)+B=A，依公式 [VI] 及 [VII]，得

$$\sin[(A-B)+B]=\sin A=\sin(A-B)\cos B+\cos(A-B)\sin B,$$

$$\cos[(A-B)+B]=\cos A=\cos(A-B)\cos B-\sin(A-B)\sin B。$$

以 $\cos B$ 乘第一方程，$\sin B$ 乘第二方程之兩端，得

$$\sin A\ \cos B=\sin(A-B)\cos^2 B+\cos(A-B)\sin B\ \cos B,$$

$$\cos A\ \sin B=\cos(A-B)\cos B\ \sin B-\sin(A-B)\sin^2 B。$$

相減得 $\sin A\cos B-\cos A\sin B=\sin(A-B)\ (\sin^2 B+\cos^2 B)$。

但 $\sin^2 B+\cos^2 B=1$,

故 $\mathbf{\sin(A-B)=\sin A\ \cos B-\cos A\ \sin B}$ ....[X]

以 $\sin B$ 乘第一方程，$\cos B$ 乘第二方程之兩端，相加，

則得 $\mathbf{\cos(A-B)=\cos A\ \cos B+\sin A\ \sin B}$ ....[XI]

85. $\tan(A-B)$, $\cot(A-B)$ 設 A 及 B 爲任何角.

依第 82 款之法，得

$$\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\ \tan B}\ \text{........................[XII]}$$

$$\cot(A-B)=\frac{\cot A\ \cot B+1}{\cot B-\cot A}\ \text{........................[XIII]}$$

公式[VI]至[XIII]可併寫之如下：

(1) $\sin(A\pm B)=\sin A\ \cos B\pm\cos A\ \sin B$,

(2) $\cos(A\pm B)=\cos A\ \cos B\mp\sin A\ \sin B$,

(3) $\tan(A \pm B) = \dfrac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$,

(4) $\cot(A \pm B) = \dfrac{\cot A \cot B \mp 1}{\cot B \pm \cot A}$。

第三節　兩角函數之和較及積

86. 兩角函數之積 設 A 及 B 爲任何角, 依公式 [VI] [VII], [X] 及 [XI], 則

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B, \qquad (1)$$

$$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B, \qquad (2)$$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B, \qquad (3)$$

$$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B。 \qquad (4)$$

(1),(2)相加, 得

$$\sin A \cos B = \tfrac{1}{2}[\sin(A+B) + \sin(A-B)] \cdots\cdots\cdots [XIV]$$

(1),(2)相減, 得

$$\cos A \sin B = \tfrac{1}{2}[\sin(A+B) - \sin(A-B)] \cdots\cdots\cdots [XV]$$

(3),(4)相加, 得

$$\cos A \cos B = \tfrac{1}{2}[\cos(A+B) + \cos(A-B)] \cdots\cdots\cdots [XVI]$$

(3),(4)相減, 得

$$\sin A \sin B = -\tfrac{1}{2}[\cos(A+B) - \cos(A-B)] \cdots [XVII]$$

87. 兩角函數之和較　令 $S=(A+B)$，　$T=(A-B)$，則 $A=\frac{1}{2}(S+T)$，$B=\frac{1}{2}(S-T)$，代入上款諸式，得

$$\sin S+\sin T=2\sin\tfrac{1}{2}(S+T)\cos\tfrac{1}{2}(S-T)\cdots\cdots[\text{XVIII}]$$

$$\sin S-\sin T=2\cos\tfrac{1}{2}(S+T)\sin\tfrac{1}{2}(S-T)\cdots\cdots\cdots[\text{XIX}]$$

$$\cos S+\cos T=2\cos\tfrac{1}{2}(S+T)\cos\tfrac{1}{2}(S-T)\cdots\cdots\cdots[\text{XX}]$$

$$\cos S-\cos T=-2\sin\tfrac{1}{2}(S+T)\sin\tfrac{1}{2}(S-T)\cdots\cdots[\text{XXI}]$$

88. 例題(1)　試求 $\cos 75^\circ$ 之值。

$$\cos 75^\circ=\cos(45^\circ+30^\circ)=\cos 45^\circ\cos 30^\circ-\sin 45^\circ\sin 30^\circ。$$

故 $\cos 75^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$。

例題(2)　試求 $\cos 20^\circ+\cos 100^\circ+\cos 140^\circ$ 之值。

$$\cos 20^\circ+\cos 100^\circ+\cos 140^\circ=\cos 20^\circ+(\cos 100^\circ+\cos 140^\circ)$$

$$=\cos 20^\circ+2\cos\tfrac{1}{2}(140^\circ+100^\circ)\cos\tfrac{1}{2}(140^\circ-100^\circ)$$

$$=\cos 20^\circ+2\cos 120^\circ\cos 20^\circ=\cos 20^\circ+2(-\tfrac{1}{2})\cos 20^\circ=0。$$

例題(3)　試將下式化作三正弦之積：

$$\sin(\beta+\gamma-\alpha)+\sin(\gamma+\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta-\gamma)-\sin(\alpha+\beta+\gamma)。$$

此式 $=2\sin\gamma\cos(\beta-\alpha)+2\cos(\alpha+\beta)\sin(-\gamma)$

$=2\sin\gamma\{\cos(\beta-\alpha)-\cos(\alpha+\beta)\}$

$=2\sin\gamma\{2\sin\beta\sin\alpha\}=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$。

例題(4)　試將 $4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ 化作四餘弦之和。

$$4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=2\cos\alpha\{\cos(\beta+\gamma)+\cos(\beta-\gamma)\}$$

$$=2\cos\alpha\cos(\beta+\gamma)+2\cos\alpha\cos(\beta-\gamma)$$

$$=\cos(\alpha+\beta+\gamma)+\cos(\alpha-\beta-\gamma)+\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\alpha-\beta+\gamma)$$

$$=\cos(\alpha+\beta+\gamma)+\cos(\beta+\gamma-\alpha)+\cos(\gamma+\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta-\gamma)。$$

習　題　XI

1. 試證 $\sin 75^\circ=\frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3}+1)$，　$\sin 135^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. 設 $\sin A=\frac{4}{5}$, $\sin B=\frac{3}{5}$, 求 $\sin(A+B)$ 及 $\cos(A-B)$ 之值.

3. 設 $\sin A=\cdot 6$, $\sin B=\frac{5}{13}$, 求 $\sin(A-B)$ 及 $\cos(A+B)$ 之值.

4. 試用本章公式[VI]－[XXI]證第四章第四節諸公式.

試證下諸等式：

5. $\dfrac{\sin(A+B)+\sin(A-B)}{\cos(A+B)+\cos(A-B)}=\tan A.$

6. $\tan\alpha+\tan\beta=\dfrac{\sin(\alpha+B)}{\cos\alpha\cos\beta}.$

7. $\cot\alpha+\tan\beta=\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\cos\beta}.$

8. $\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan\alpha-\tan\beta}=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$.

9. $\dfrac{\tan\alpha\tan\beta+1}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$.

10. $\tan^2\alpha-\tan^2\beta=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}$.

11. $\sin^2A-\sin^2B=\sin(A+B)\sin(A-B)$.

12. $\cos^2A-\sin^2B=\cos(A+B)\cos(A-B)$.

13. $2\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)\cos\left(\beta-\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)$.

14. $2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\beta\right)=\cos(\alpha-\beta)-\sin(\alpha+\beta)$.

15. $\tan\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)+\cot\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=0$.

16. $\cot\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)+\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=0$.

17. 若 $\tan\alpha=m$, $\tan\beta=n$, 試證

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{1-mn}{\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}}.$$

18. 若 $\alpha+\beta+\gamma=90°$, 試證 $\tan\gamma=\dfrac{1-\tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}$

試證下諸等式：

19. $\sin 60°+\sin 30°=2\sin 45°\cos 15°$.

20. $\sin 60^\circ + \sin 20^\circ = 2\sin 40^\circ \cos 20^\circ$.

21. $\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{2} = 2\cos\frac{5\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$.

22. $\sin 3A + \sin 5A = 2\sin 4A \cos A$.

23. $\sin 7A - \sin 5A = 2\cos 6A \sin A$.

24. $\cos 5A + \cos 9A = 2\cos 7A \cos 2A$.

25. $\cos A - \cos 2A = 2\sin\frac{3}{2}A \sin\frac{1}{2}A$.

26. $\dfrac{\sin 2A - \sin A}{\cos A - \cos 2A} = \cot\frac{3}{2}A$.

27. $\dfrac{\sin 3A + \sin 2A}{\cos 2A - \cos 3A} = \cot\frac{1}{2}A$.

28. $\dfrac{\sin A - \sin B}{\cos B - \cos A} = \cot\frac{1}{2}(A+B)$.

29. $\tan 18^\circ = \dfrac{\sin 33^\circ + \sin 3^\circ}{\cos 33^\circ + \cos 3^\circ}$.

30. $\sin\frac{11}{4}A \sin\frac{1}{4}A + \sin\frac{7}{4}A \sin\frac{3}{4}A = \sin 2A \sin A$.

31. $\tan\frac{1}{2}(A+B) - \tan\frac{1}{2}(A-B) = \dfrac{2\sin B}{\cos A + \cos B}$.

32. $\dfrac{\sin(\beta-\gamma)}{\cos\beta\cos\gamma} + \dfrac{\sin(\gamma-\alpha)}{\cos\gamma\cos\alpha} + \dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} = 0$.

33. $\sin(\alpha+\beta+\gamma) = \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma +$

$+ \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$.

34*. $\tan(\alpha+\beta+\gamma)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma-\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma}{1-\tan\alpha\tan\beta-\tan\beta\tan\gamma-\tan\gamma\tan\alpha}$.

35. $\sin(\alpha+\beta+\gamma)+\sin(\alpha-\beta-\gamma)+\sin(\alpha+\beta-\gamma)+\sin(\alpha-\beta+\gamma)$

$$=4\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

36. $\cos(\beta+\gamma-\alpha)-\cos(\gamma+\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta-\gamma)-\cos(\alpha+\beta+\gamma)$

$$=4\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma.$$

37*. $\sin\alpha\cos(\beta+\gamma)-\sin\beta\cos(\alpha+\gamma)-\cos\gamma\sin(\alpha-\beta)=0.$

38*. $\cos\alpha\cos(\beta+\gamma)-\cos\beta\cos(\alpha+\gamma)-\sin\gamma\sin(\alpha-\beta)=0.$

39*. $\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)+\cos(\beta+\gamma)\sin(\beta-\gamma)+$

$$+\cos(\gamma+\delta)\sin(\gamma-\delta)+\cos(\delta+\alpha)\sin(\delta-\alpha)=0.$$

40*. $\tan(\beta-\gamma)+\tan(\gamma-\alpha)+\tan(\alpha-\beta)$

$$=\tan(\beta-\gamma)\tan(\gamma-\alpha)\tan(\alpha-\beta).$$

41*. $\cot(A+15^\circ)-\tan(A-15^\circ)=\dfrac{4\cos 2A}{2\sin 2A+1}$.

42*. $\cot(15^\circ-A)+\tan(15^\circ+A)=\dfrac{4\cos 2A}{1-2\sin 2A}$.

43*. $\cot(15^\circ+A)+\tan(15^\circ+A)=\dfrac{4}{\cos 2A+\sqrt{3}\sin 2A}$.

第四節　倍角之函數

89. 2A 之函數　設 A 爲任何角, 在公式[VI], [VII], [VIII], [IX], 令 B=A, 則得

$$\sin 2A = 2\sin A\cos A \cdots\cdots\cdots\cdots [\mathrm{XXII}]$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A \cdots\cdots\cdots\cdots [\mathrm{XXIII}]$$

$$\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

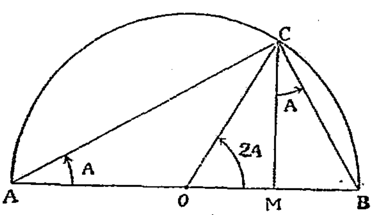
$$= 2\cos^2 A - 1 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A} \cdots\cdots\cdots\cdots [\mathrm{XXIV}]$$

$$\cot 2A = \frac{\cot^2 A - 1}{2\cot A} \cdots\cdots\cdots\cdots [\mathrm{XXV}]$$

90*. 關於 2A 之函數之公式,可用幾何法得之,如下

以 O 爲心作半圓。



令 $\angle BAC = A$, 則 $\angle BOC = 2A$。

自 C 至 AB 作垂線 CM。

$\angle MCB = \angle BAC = A$。

(1) $\sin 2A = \dfrac{MC}{OC} = \dfrac{2MC}{AB}$

$$= \frac{2MC}{CB}\cdot\frac{CB}{AB} = 2\cos\angle MCB\,\sin\angle BAC$$

$$= 2\sin A\ \cos A。$$

(2) $\cos 2A = \dfrac{OM}{OC} = \dfrac{2OM}{AB} = \dfrac{AM - MB}{AB} = \dfrac{AM}{AB} - \dfrac{MB}{AB}$

$$= \frac{AM}{AC}\cdot\frac{AC}{AB} - \frac{MB}{CB}\cdot\frac{CB}{AB} = \cos^2 A - \sin^2 A。$$

(3) $\tan 2A=\frac{MC}{OM}=\frac{2MC}{AM-MB}=\frac{2MC}{AM}\Big/\left(\frac{AM}{AM}-\frac{MB}{MC}\cdot\frac{MC}{AM}\right)$

$=\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$。

(4) $\cot 2A=\frac{OM}{MC}=\frac{AM-MB}{2MC}=\left(\frac{AM}{MC}\cdot\frac{MC}{MB}-\frac{MB}{MB}\right)\Big/2\frac{MC}{MB}$

$=\frac{\cot^2 A-1}{2\cot A}$。

91. 3A 之函數 設 A 爲任何角, 依公式[VI], 及[XXII]等, 得

$$\sin 3A=\sin(2A+A)=\sin 2A\cos A+\cos 2A\sin A$$
$$=(2\sin A\cos A)\cos A+(\cos^2 A-\sin^2 A)\sin A$$
$$=2\sin A\cos^2 A+\sin A\cos^2 A-\sin^3 A$$
$$=3\sin A(1-\sin^2 A)-\sin^3 A_{\circ}$$

即 $\sin 3A=3\sin A-4\sin^3 A$。 (1)

依同法, 得 $\cos 3A=4\cos^3 A-3\cos A$。 (2)

又, $\tan 3A=\tan(2A+A)=\frac{\tan 2A+\tan A}{1-\tan 2A\tan A}$

$$=\left(\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}+\tan A\right)\Big/\left(1-\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}\tan A\right)$$

$$=\frac{2\tan A+\tan A-\tan^3 A}{1-\tan^2 A-2\tan^2 A}$$

即　$$\tan 3A=\frac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}。\quad (3)$$

依同法，得 $$\cot 3A=\frac{\cot^3 A-3\cot A}{3\cot^2 A-1}。\quad (4)$$

依此法，4A，5A，6A 等之函數均可逐次求得。

第五節　分角之函數

92. $\frac{1}{2}$A 之函數 設 A 爲任何角。令 $B=\frac{1}{2}A$，依第 89 款公式(1)，(2)，得

$$\cos 2B=1-2\sin^2 B,\quad 2\sin^2 B=1-\cos 2B, \quad (1)$$

$$\cos 2B=2\cos^2 B-1,\quad 2\cos^2 B=1+\cos 2B。\quad (2)$$

故 $$\sin\frac{1}{2}A=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}} \cdots\cdots [\text{XXVI}]$$

$$\cos\frac{1}{2}A=\pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}} \cdots\cdots [\text{XXVII}]$$

$$\tan\frac{1}{2}A=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} \cdots\cdots [\text{XXVIII}]$$

$$\cot\frac{1}{2}A=\pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{1-\cos A}} \cdots\cdots [\text{XXIX}]$$

式內正負號，視 $\frac{1}{2}$A 所在之象限而定。

例如，若 A=320°，則 $\frac{1}{2}$A=160°。$\sin\frac{1}{2}$A 當爲正，餘均爲負。

93*. 若僅有 $\cos A$ 之值而不言 A 之值,則式內正負號均可用。$\frac{1}{2}A$ 之諸函數可有兩值。證之如下:

設僅知 $\cos A=a$。令 B 爲最小之正角其餘弦等於 a 者。則依第78款, $A=(2p\times180^\circ\pm B)$。

故 $\frac{1}{2}A=(p\times180^\circ\pm\frac{1}{2}B)$。

故(1) $\sin\frac{1}{2}A=\sin(p\times180^\circ\pm\frac{1}{2}B)$

$$=\sin(p\times180^\circ)\cos\frac{1}{2}B\pm\cos(p\times180^\circ)\sin\frac{1}{2}B$$

$=\pm\sin\frac{1}{2}B$。因 $\sin(p\times180^\circ)=0$,

$\cos(p\times180^\circ)=\pm1$。故 $\sin\frac{1}{2}A$ 可有正負兩值。

(2) $\cos\frac{1}{2}A=\cos(p\times180^\circ\pm\frac{1}{2}B)$

$$=\cos(p\times180^\circ)\cos\frac{1}{2}B\mp\sin(p\times180^\circ)\sin\frac{1}{2}B。$$

今 $\cos(p\times180^\circ)=\pm1$, 其爲正爲負視 p 之偶奇而定,

故 $\cos\frac{1}{2}A=\pm\cos\frac{1}{2}B$。

(3) $\tan\frac{1}{2}A=\tan(p\times180^\circ\pm\frac{1}{2}B)=\pm\tan\frac{1}{2}B$。

(4) $\cot\frac{1}{2}A=\cot(p\times180^\circ\pm\frac{1}{2}B)=\pm\cot\frac{1}{2}B$。

94*. 以 $\sin A$ 表 $\frac{1}{2}A$ 之函數 設 A 爲任何角。$B=\frac{1}{2}A$。依公式 [I] 及 [XXII]。

$$\sin^2 B+\cos^2 B=1,$$

$$2\sin B\cos B=\sin 2B。$$

相加，得 $$(\sin B+\cos B)=\pm\sqrt{1+\sin 2B},\qquad(1)$$

相減，得 $$(\sin B-\cos B)=\pm\sqrt{1-\sin 2B}。\qquad(2)$$

故 $$2\sin B=(\pm\sqrt{1+\sin 2B}\pm\sqrt{1-\sin 2B}),\qquad(3)$$

$$2\cos B=(\pm\sqrt{1+\sin 2B}\mp\sqrt{1-\sin 2B})。\qquad(4)$$

故 $$\sin\tfrac{1}{2}A=\tfrac{1}{2}(\pm\sqrt{1+\sin A}\pm\sqrt{1-\sin A}),\qquad(5)$$

$$\cos\tfrac{1}{2}A=\tfrac{1}{2}(\pm\sqrt{1+\sin A}\mp\sqrt{1-\sin A}).\qquad(6)$$

式內正負號視 $\frac{1}{2}A$ 所在之象限而定。

欲明正負號之用法。參觀後98節例題(4)與(5)。

95.* 若僅知 $\sin A$ 之值而不言 A 之值．則式內正負號均可用。故 $\sin\frac{1}{2}A$ 與 $\cos\frac{1}{2}A$ 均可有四值。證之如下：

設僅知 $\sin A=a$。令 B 為最小之角其正弦等於 a 者。則依第77款，$A=[p\times 180^\circ+(-1)^p B]$。

故 $$\tfrac{1}{2}A=[\tfrac{p}{2}\times 180^\circ+(-1)^p\tfrac{1}{2}B]。$$

若(1) p 為偶數，$p=2q$，則 $\frac{1}{2}A=[q\times 180^\circ+\frac{1}{2}B]$。

故 $$\sin\tfrac{1}{2}A=\sin(q\times 180^\circ+\tfrac{1}{2}B)$$

$$=\sin(q\times 180^\circ)\cos\tfrac{1}{2}B+\cos(q\times 180^\circ)\sin\tfrac{1}{2}B$$

$$=\pm\sin\tfrac{1}{2}B。$$

若(2) p 爲奇數, $p=2q+1$, 則 $\frac{1}{2}A=[q\times180^\circ+(\frac{180^\circ}{2}-\frac{1}{2}B)]$。

故 $$\sin\frac{1}{2}A=\sin(q\times180^\circ)\cos(\frac{180^\circ}{2}-\frac{1}{2}B)+$$

$$+\cos(q\times180^\circ)\sin(\frac{180^\circ}{2}-\frac{1}{2}B)=\pm\sin(\frac{180^\circ}{2}-\frac{1}{2}B)=\pm\cos\frac{1}{2}B。$$

故 $\sin\frac{1}{2}A$ 之四值爲 $\pm\sin\frac{1}{2}B$ 及 $\pm\cos\frac{1}{2}B$。

依同法, 得 $\cos\frac{1}{2}A$ 之四值爲 $\pm\cos\frac{1}{2}B$ 及 $\pm\sin\frac{1}{2}B$。

96. 以 $\tan A$ 表 $\tan\frac{1}{2}A$ 設 A 爲任何角, 令 $B=\frac{1}{2}A$。依公式 [XXIV],

得 $$\tan 2B=\frac{2\tan B}{1-\tan^2 B}。$$

故 $$\tan A=\frac{2\tan\frac{1}{2}A}{1-\tan^2\frac{1}{2}A}。\tag{1}$$

故 $$\tan\frac{1}{2}A=\frac{-1\pm\sqrt{1+\tan^2 A}}{\tan A}。\tag{2}$$

式內正負號視 $\frac{1}{2}A$ 所在之象限而定。

例如, 若 $A=170^\circ$, 則 $\frac{1}{2}A=85^\circ$。故 $\tan\frac{1}{2}A=\tan 85^\circ$ 必爲正數,

故 $\frac{-1\pm\sqrt{1+\tan^2 A}}{\tan A}$ 必爲正數。但 $\tan A=\tan 170^\circ$ 爲負數,

故 $-1\pm\sqrt{1+\tan^2 A}$ 必爲負數, 今 $\sqrt{1+\tan^2 A}$ 大於 1, 故必用負號。

97.* 若僅知 $\tan A$ 之值，而不言 A 之值，則正負號均可用。故 $\tan\frac{1}{2}A$ 可有兩值，證之如下：

設僅知 $\tan A=a$，令 B 爲最小之角其正切等於 a 者。則依 79 款，$A=(p\times 180^\circ+B)$。故 $\frac{1}{2}A=(\frac{p}{2}\times 180^\circ+\frac{1}{2}B)$。

若(1)　p 爲偶數而等於 $2q$，則 $\frac{1}{2}A=(q\times 180^\circ+\frac{1}{2}B)$。

故　$\tan\frac{1}{2}A=\tan(q\times 180^\circ+\frac{1}{2}B)=\tan\frac{1}{2}B$。

若(2)　p 爲奇數而等於 $2q+1$，則

$$\frac{1}{2}A=\left[q\times 180^\circ+\left(\frac{180^\circ}{2}+\frac{1}{2}B\right)\right]。$$

故　$\tan\frac{1}{2}A=\tan\left[q\times 180^\circ+\left(\frac{180^\circ}{2}+\frac{1}{2}B\right)\right]=-\cot\frac{1}{2}B$。

故 $\tan\frac{1}{2}A$ 之兩值爲 $\tan\frac{1}{2}B$ 及 $-\cot\frac{1}{2}B$。

98. 例題(1)　試證 $\dfrac{\sin 2A}{1+\cos 2A}=\tan A$。

依公式 [XXII]，$\sin 2A=2\sin A\cos A$，

公式 [XXIII]，$1+\cos 2A=2\cos^2 A$。

故　$$\frac{\sin 2A}{1+\cos 2A}=\frac{2\sin A\cos A}{2\cos^2 A}=\tan A。$$

例題(2)　求 18° 之值。

令 $A=18^\circ$，則 $5A=90^\circ$，$2A=90^\circ-3A$，故 $\sin 2A=\cos 3A$。

故 $2\sin A\cos A=4\cos^3 A-3\cos A$。

故 $2\sin A=4\cos^2 A-3=4(1-\sin^2 A)-3$。

故 $4\sin^2 A+2\sin A=1$,

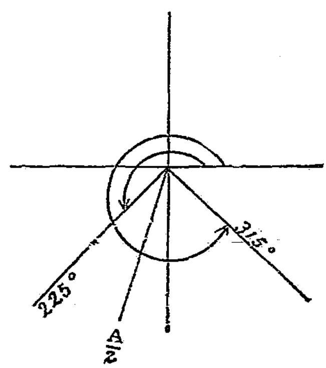
解之, 得 $\sin 18^\circ=\sin A=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$。

例題(3) 若 $A+B+C=180^\circ$, 試證

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}。$$

$$\begin{aligned}(\cos A+\cos B)+\cos C&=2\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}(A-B)+\cos C\\&=\left(2\sin\tfrac{1}{2}C\right)\cos\tfrac{1}{2}(A-B)+\left(1-2\sin^2\tfrac{1}{2}C\right)\\&=1+2\sin\tfrac{1}{2}C\,\{\cos\tfrac{1}{2}(A-B)-\sin\tfrac{1}{2}C\}\\&=1+2\sin\tfrac{1}{2}C\,\{\cos\tfrac{1}{2}(A-B)-\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\}\\&=1+2\sin\tfrac{1}{2}C\,\{2\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\}\\&=1+4\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C。\end{aligned}$$

例題(4)* 設 $\sin A=a$, 但知 A 在 450° 與 630° 之間, 求 $\sin\frac{1}{2}A$ 及 $\cos\frac{1}{2}A$ 之值。



$\frac{1}{2}A$ 必在 225° 與 315° 之間, 故 $\sin\frac{1}{2}A$ 爲負, 而 $\sin\frac{1}{2}A$ 之絕對值必大於 $\cos\frac{1}{2}A$ 之絕對值。

故 $\sin\frac{1}{2}A+\cos\frac{1}{2}A=-\sqrt{1+\sin A}$,

$\sin\frac{1}{2}A-\cos\frac{1}{2}A=-\sqrt{1-\sin A}$。

故 $\sin\frac{1}{2}A=\frac{1}{2}[-\sqrt{1+\sin A}-\sqrt{1-\sin A}]$,

$=\frac{1}{2}[-\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}]$。

$\cos\frac{1}{2}A=\frac{1}{2}[-\sqrt{1+\sin A}+\sqrt{1-\sin A}]$,

$=\frac{1}{2}[-\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}]$。

例題(5)*　若 $\cos\frac{1}{2}A=\frac{1}{2}[-\sqrt{1+\sin A}-\sqrt{1-\sin A}]$, 問 A 在何兩角之間。

今 $\cos\frac{1}{2}A=\frac{1}{2}[-\sqrt{1+\sin A}-\sqrt{1-\sin A}]$,

故 $\sin\frac{1}{2}A+\cos\frac{1}{2}A=-\sqrt{1+\sin A}$,　(1)

$\sin\frac{1}{2}A-\cos\frac{1}{2}A=+\sqrt{1-\sin A}$。　(2)

自(1) 知 $\sin\frac{1}{2}A$ 及 $\cos\frac{1}{2}A$ 兩比內必有一爲負，而負比之絕對值較他一比之絕對值爲大。自(2)可知 $\cos\frac{1}{2}A$ 必爲負。蓋若 $\cos\frac{1}{2}A$ 爲正，則 $\sin\frac{1}{2}A$ 必爲負而其絕對值較 $\cos\frac{1}{2}A$ 之絕對值爲大，於是 $\sin\frac{1}{2}A-\cos\frac{1}{2}A$ 將爲負。

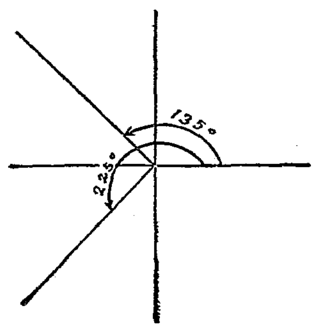
故 $\cos\frac{1}{2}A$ 爲負而其絕對值則大於 $\sin\frac{1}{2}A$ 之絕對值。

故 $\frac{1}{2}$A 必在$(n\times 360^\circ+135^\circ)$

與 $(n\times 360^\circ+225^\circ)$之間。

即 A 必在$(2n\times 360^\circ+270^\circ)$

與 $[(2n+1)\times 360^\circ+90^\circ]$之間。



習 題 XII

1. 知 $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$, 求 $\sin 60^\circ$, $\cos 60^\circ$, $\tan 60^\circ$, $\cot 60^\circ$ 之值.

2. 知 $\tan 45^\circ=1$, 求 $\tan 90^\circ$ 之值.

3. 知 $\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$。求 $\sin 240^\circ$ 之值.

4. 知 $\cos A=\frac{1}{3}$, 求 $\cos 2A$ 之值.

5. 知 $\sin A=\frac{2}{5}$, 求 $\cos 2A$ 之值.

6. 知 $\tan A=\frac{1}{5}$, 求 $\tan 3A$ 之值.

7. 知 $\cos A=\frac{1}{8}$, A 為小於 180° 之角, 求 $\sin\frac{1}{2}A$ 及 $\cos\frac{1}{2}A$ 之值.

8. 知 $\tan 45^\circ=1$, 求 $22^\circ 30^\circ$ 之各比之值.

9. 知 $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$, 求 15° 之各比之值.

試證下列諸等式：

10. $\dfrac{\sin 2\mathrm{A}}{1-\cos 2\mathrm{A}}=\cot \mathrm{A}.$

11. $\dfrac{1-\cos \mathrm{A}}{\sin \mathrm{A}}=\tan \dfrac{\mathrm{A}}{2}.$

12. $\dfrac{1+\cos \mathrm{A}}{\sin \mathrm{A}}=\cot \dfrac{\mathrm{A}}{2}.$

13. $\tan \mathrm{A}+\cot \mathrm{A}=2 \csc 2\mathrm{A}.$

14. $\cot \mathrm{A}-\tan \mathrm{A}=2 \cot 2\mathrm{A}.$

15. $\sin 2\mathrm{A}=\dfrac{2 \tan \mathrm{A}}{1+\tan^2 \mathrm{A}}.$

16. $\cos 2\mathrm{A}=\dfrac{1-\tan^2 \mathrm{A}}{1+\tan^2 \mathrm{A}}.$

17. $\dfrac{1-\tan^2(45^\circ-\mathrm{A})}{1+\tan^2(45^\circ-\mathrm{A})}=\sin 2\mathrm{A}.$

18. $(\sin \frac{1}{2}\mathrm{A}+\cos \frac{1}{2}\mathrm{A})^2=1+\sin \mathrm{A}.$

19. $(\sin \frac{1}{2}\mathrm{A}-\cos \frac{1}{2}\mathrm{A})^2=1-\sin \mathrm{A}.$

20. $\tan(45^\circ+\mathrm{A})-\tan(45^\circ-\mathrm{A})=2 \tan 2\mathrm{A}.$

21. $\dfrac{\sin 3\mathrm{A}}{\sin \mathrm{A}}-\dfrac{\cos 3\mathrm{A}}{\cos \mathrm{A}}=2.$

22*. 若 $\cos \theta=\dfrac{\cos u-e}{1-e \cos u}$，則

$$\tan\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\tan\frac{u}{2}$$，試證之.

23. 試證 $\sin 18^\circ+\sin 30^\circ=\sin 54^\circ$.

24. 試證 $\cos^2 36^\circ+\sin^2 18^\circ=\frac{3}{4}$.

25. 試證 $4\sin 18^\circ \cos 36^\circ=1$.

試證下列諸等式:

26. $\sec A-\tan A=\tan(45^\circ-\frac{1}{2}A)$.

27. $\sec A+\tan A=\cot(45^\circ-\frac{1}{2}A)$.

28. $\dfrac{1+\sin A}{1-\sin A}=\tan^2(45^\circ+\frac{1}{2}A)$.

29. $4\sin^3\alpha\cos 3\alpha+4\cos^3\alpha\sin 3\alpha=3\sin 4\alpha$.

[令 $4\sin^3\alpha=3\sin\alpha-\sin 3\alpha$, $4\cos^3\alpha=3\cos\alpha+\cos 3\alpha$]

30. $\cos^3\alpha\cos 3\alpha+\sin^3\alpha\sin 3\alpha=\cos^3 2\alpha$.

31. $4(\cos^3 10^\circ+\sin^3 20^\circ)=3(\cos 10^\circ+\sin 20^\circ)$.

32. $\cos^2\alpha+\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{3}{2}$.

[令 $2\cos^2\alpha=1+\cos 2\alpha$]

33. $\sin^2\alpha+\sin^2\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)+\sin^2\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{3}{2}$.

令 $A+B+C=180^\circ$, 試證

34. $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C$.

35. $\tan\frac{1}{2}B\tan\frac{1}{2}C+\tan\frac{1}{2}C\tan\frac{1}{2}A+\tan\frac{1}{2}A\tan\frac{1}{2}B=1$.

36. $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C=1$.

37. $\sin^2\frac{1}{2}A+\sin^2\frac{1}{2}B+\sin^2\frac{1}{2}C=1-2\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C.$

38. $\dfrac{\tan A+\tan B+\tan C}{(\sin A+\sin B+\sin C)^2}=\dfrac{\tan\frac{1}{2}A\tan\frac{1}{2}B\tan\frac{1}{2}C}{2\cos A\cos B\cos C}.$

39. $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C.$

40.* 知 $\cos A=\frac{119}{169}$, A 在 270° 與 360° 之間, 求 $\sin\frac{1}{2}A$ 及 $\cos\frac{1}{2}A$ 之值.

41.* 知 $\sin A=\frac{24}{25}$, A 在 90° 與 180° 之間, 求 $\sin\frac{1}{2}A$ 及 $\cos\frac{1}{2}A$ 之值.

42.* A 在 −270° 與 −360° 之間, 試證

$$\sin\tfrac{1}{2}A=-\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}.$$

43.* 若 $\sin A=\frac{1}{2}[+\sqrt{1+\sin 2A}-\sqrt{1-\sin 2A}]$, 問 A 在何兩角之間.

44.* 若 $\cos A=\frac{1}{2}[-\sqrt{1+\sin 2A}+\sqrt{1-\sin 2A}]$, 問 A 在何兩角之間.

45. 試證(1)　$\tan 7°30'=\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2,$

(2)　$\cot 142°30'=\sqrt{2}+\sqrt{3}-2-\sqrt{6}.$

46. 試證(1)　$\sin 11°15'=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}.$

(2)　$\tan 11°15'=\sqrt{4+2\sqrt{2}}-(\sqrt{2}+1).$

47*. 若 $\sin\theta=\sin\alpha$, 試證 $\sin\frac{\theta}{3}$ 有三值, 卽

(1) $\sin\frac{1}{3}\alpha$, (2) $\sin\frac{1}{3}(\pi-\alpha)$, (3) $-\sin\frac{1}{3}(\pi+\alpha)$.

48*. 若 $\tan\theta=\tan\alpha$, 試證 $\tan\frac{1}{3}\theta$ 有三值, 卽

(1) $\tan\frac{1}{3}\alpha$, (2) $\tan\frac{1}{3}(\pi+\alpha)$, (3) $-\tan\frac{1}{3}(\pi-\alpha)$.

49*. 若 $\cos 3\theta=\cos 3\alpha$, 試證 $\sin\theta$ 之值爲

$$\pm\sin\alpha,\quad -\sin(\tfrac{1}{3}\pi\pm\alpha),\quad \sin(\tfrac{2}{3}\pi\pm\alpha).$$

50*. 若 $\sin 3\theta=\sin 3\alpha$, 試證 $\cos\theta$ 之值爲

$$\pm\cos\alpha,\quad \cos(\tfrac{1}{3}\pi\pm\alpha),\quad \cos(\tfrac{2}{3}\pi\pm\alpha).$$

第六章

斜角三角形

第一節　三角形諸邊及諸角間之關係

99. 三角形之三角，以 A, B, C, 表之。其相對之三邊，則以 a, b, c 表之。

100. 三角間之關係　自幾何，知 $A+B+C=180°$。是以若 A 爲三角形上之角，則 A 必在 $0°$ 與 $180°$ 之間。

故　(1) $\sin A$ 必爲正，而小於 1，

(2) $\cos A$ 則正負均可，而其絕對值必小於 1，

(3) $\tan A$ 則正負均可，而其絕對值則無限制。

101. 因 $180°$ 之內有等正弦之角二，故自 $\sin A$ 之值求 A，A **可有兩值**。$180°$ 之內無等餘弦或等正切之角，故自 $\cos A$ 或 $\tan A$ 之值求 A，則 A 僅可有一值。

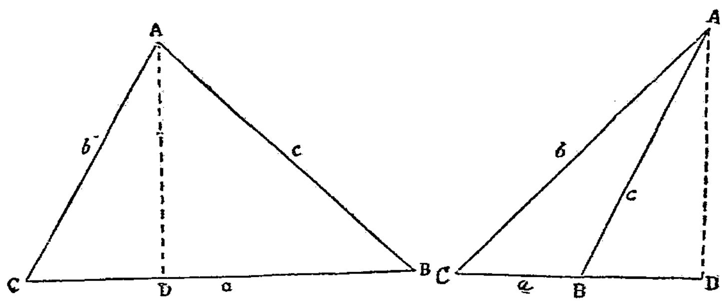
例如　知 $\sin A=\frac{1}{2}$，則 $A=30°$ 或 $120°$ 均可。若知 $\cos A=\frac{1}{2}$，則 $A=60°$，A 不能等於 $300°$，蓋 A 爲三角形之角必小於 $180°$ 也。知 $\tan A=-1$，則 $A=135°$。

102. 因 A 必小於 180°, 故 $\frac{1}{2}$A 必小於 90°。故 $\frac{1}{2}$A 之諸函數均爲正。

103. 一邊與他二邊及兩鄰角之關係

其式爲 $$a=b\cos C+c\cos B。$$

令 ABC 爲三角形。自 A 至 CB 作垂線 AD。



於是 $\frac{CD}{AC}=\cos C$, $CD=b\cos C$,

$\frac{DB}{AB}=\cos B$, $DB=c\cos B$。

$a=CD+DB$。

若 $B>90°$, 則 $\frac{BD}{AB}=\cos(180°-B)$, $BD=-c\cos B$。

$a=CD-BD$。

故不論 B 大於或小於 90°, 必得

依同法，得

$$\left.\begin{aligned} a&=b\cos C+c\cos B \cdots\cdots\cdots\cdots (1)\\ b&=c\cos A+a\cos C \cdots\cdots\cdots\cdots (2)\\ c&=a\cos B+b\cos A \cdots\cdots\cdots\cdots (3)\end{aligned}\right\}\text{[XXX]}$$

104. 正弦定則 Law of sines

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}。$$

自上款圖，知若 $B<90°$，則

$$\frac{AD}{AC}=sin\,C,\qquad \frac{AD}{AB}=sin\,B。$$

若　$B>90°$，則

$$\frac{AD}{AC}=sin\,C,\qquad \frac{AD}{AB}=sin(180°-B)=sin\,B。$$

故　$AD=b\,sin\,C,\quad AD=c\,sin\,B$。

故　$b\,sin\,C=c\,sin\,B$，即 $\dfrac{b}{sin\,B}=\dfrac{c}{sin\,C}$。

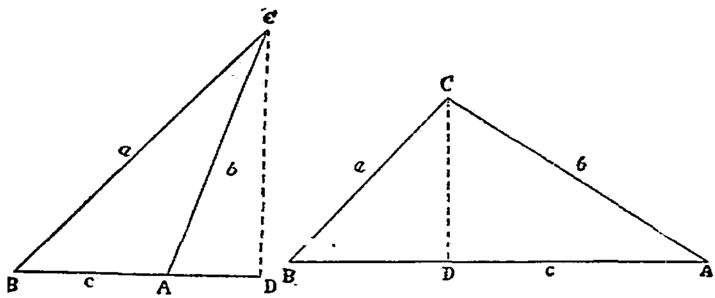
依同法，得 $\dfrac{a}{sin\,A}=\dfrac{b}{sin\,B}$，

故

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{[XXXI]}$$

105. 餘弦定則 Law of cosines

$$a^2=b^2+c^2-2\,bc\cos A。$$



令 ABC 爲任何三角形。不論 A 爲銳角或鈍角，B 或 C 必爲銳角。設 B 爲銳角，自 C 至 AB 作垂線 CD。

自幾何，知若 $A<90^\circ$，則

$$BC^2=CA^2+AB^2-2\,AB\cdot DA,$$

即 $$a^2=b^2+c^2-2\,c\cdot DA。$$

若 $A>90^\circ$，則

$$BC^2=CA^2+AB^2+2\,AB\cdot AD,$$

即 $$a^2=b^2+c^2+2\,c\cdot AD。$$

但若 $A<90^\circ$，則

$$DA=CA\ \cos\angle CAD=b\cos A。$$

若 $A>90^\circ$，則

$$AD=CA\ \cos\angle CAD=b\cos(180^\circ-A)$$
$$=-b\cos A,$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{故} & \mathbf{a^2=b^2+c^2-2\,b\,c\cos A}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\ \text{依同法,得} & \mathbf{b^2=c^2+a^2-2\,c\,a\cos B}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\\ & \mathbf{c^2=a^2+b^2-2\,a\,b\cos C}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)\end{array}\right\}[\mathrm{XXXII}]$$

106. 自上款公式,得

$$\mathbf{\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}},\qquad (1)$$

$$\mathbf{\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}},\qquad (2)$$

$$\mathbf{\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}。\qquad (3)$$

107.　一角與三邊之關係　設任何三角形之三邊爲 a, b, c。令 $2s=(a+b+c)$,

則 $(b+c-a)=(b+c+a-2\,a)=2(s-a)$,

$(c+a-b)=(c+a+b-2\,b)=2(s-b)$,

$(a+b-c)=(a+b+c-2\,c)=2(s-c)$。

依第 106 款, $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$,

依[XXVI], $2\sin^2\frac{1}{2}A=1-\cos A$。

故 $2\sin^2\frac{1}{2}A=1-\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{2\,bc-(b^2+c^2-a^2)}{2bc}$

$$=\frac{a^2-(b^2-2\,bc+c^2)}{2bc}=\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}。$$

故 $$\sin^2\tfrac{1}{2}A=\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc}=\frac{(s-b)(s-c)}{bc}.$$

故 $$\sin\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\ \cdots\cdots\ (1)$$

依同法，得 $$\sin\tfrac{1}{2}B=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}\ \cdots\cdots\ (2)\quad [\mathrm{XXXIII}]$$

$$\sin\tfrac{1}{2}C=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}\ \cdots\cdots\ (3)$$

依[XXVII]， $2\cos^2\tfrac{1}{2}A=1+\cos A$。

故 $$2\cos^2\tfrac{1}{2}A=1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

故 $$\cos^2\tfrac{1}{2}A=\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}=\frac{(b+c-a)(b+c+a)}{4bc}。$$

故 $$\cos\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}\ \cdots\cdots\ (1)$$

依同法，得 $$\cos\tfrac{1}{2}B=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}\ \cdots\cdots\ (2)\quad [\mathrm{XXXIV}]$$

$$\cos\tfrac{1}{2}C=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}\ \cdots\cdots\ (3)$$

自[XXXIII]與[XXXIV]，得

$$\tan\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}\ \cdots\cdots\ (1)$$

$$\tan\tfrac{1}{2}B=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}\ \cdots\cdots\ (2)\quad [\mathrm{XXXV}]$$

$$\tan\tfrac{1}{2}C=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}\ \cdots\cdots\ (3)$$

108. 因　$\sin A=2\sin\frac{1}{2}A\ \cos\frac{1}{2}A$,

故　$$\sin A=2\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\cdot\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}.$$

故　$$\sin A=\frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},\qquad(1)$$

依同法，得 $$\sin B=\frac{2}{ca}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},\qquad(2)$$

$$\sin C=\frac{2}{ab}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}。\qquad(3)$$

令 $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$,

則　$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}=\frac{2S}{abc}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots[XXXVI]$$

109. 正切定則 Law of tangents

令　$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=p$，則　$a=p\sin A,\ b=p\sin B$。

故　$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{p\sin A-p\sin B}{p\sin A+p\sin B}=\frac{\sin A-\sin B}{\sin A+\sin B}$$
$$=\frac{2\sin\frac{1}{2}(A-B)\cos\frac{1}{2}(A+B)}{2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)}=\frac{\tan\frac{1}{2}(A-B)}{\tan\frac{1}{2}(A+B)}。$$

故　$$\left.\begin{aligned}\frac{a-b}{a+b}&=\frac{\tan\frac{1}{2}(A-B)}{\tan\frac{1}{2}(A+B)}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\ \frac{b-c}{b+c}&=\frac{\tan\frac{1}{2}(B-C)}{\tan\frac{1}{2}(B+C)}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\\ \frac{c-a}{c+a}&=\frac{\tan\frac{1}{2}(C-A)}{\tan\frac{1}{2}(C+A)}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)\end{aligned}\right\}[XXXVII]$$

110. 因　$(A+B)=(180°-C)$,

故　$\tan\frac{1}{2}(A+B)=\tan(90°-\frac{1}{2}C)=\cot\frac{1}{2}C$。

故公式[XXXVII]可變爲

$$\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}=\tan\tfrac{1}{2}(A-B), \qquad (1)$$

$$\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}=\tan\tfrac{1}{2}(B-C), \qquad (2)$$

$$\frac{c-a}{c+a}\cot\frac{B}{2}=\tan\tfrac{1}{2}(C-A)。 \qquad (3)$$

111. 例題(*1*)　試用公式[XXX]證公式[XXXII]。

公式[XXX],　$a=b\cos C+c\cos B, \qquad (1)$

$b=c\cos A+a\cos C, \qquad (2)$

$c=a\cos B+b\cos A。 \qquad (3)$

以 a 乘(1)加 b 乘(2), 再減去 c 乘(3), 得

$$a^2+b^2-c^2=(ab\cos C+ac\cos B)+(bc\cos A+ba\cos C)-$$
$$-(ca\cos B+cb\cos A)。$$
$$=\ 2ab\cos C。$$

例題(*2*)　試證 $a\cos A+b\cos B+c\cos C=2a\sin B\sin C$。

習題 XII, 39, $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$。

即　$2\sin A\cos A+2\sin B\cos B+2\sin C\cos C=4\sin A\sin B\sin C$。

令 $$p=\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}。$$

以 p 乘上方程之兩端，得

$$2a\cos A+2b\cos B+2c\cos C=4a\sin B\sin C。$$

習　題　XIII

1. 若 $A=90°$，則本節諸公式變成何式.

2. 「若三角形之兩邊相等，則其對角相等」可否用公式[XXXI]證明之.

3. 「若三角形之兩角相等，則其對邊相等」可否用公式[XXXI]證明之.

4. 公式[XXXIV]內平方根之前正負號均可用否.

5. 公式[XXXVI]內平方根之前正負號均可用否.

6. 試用公式[XXXII]證公式[XXX].

若 A, B, C 爲三角形之角，$C=90°$，試證

7. $\cos 2A=\frac{b^2-a^2}{c^2}$.

8. $\sin^2\frac{1}{2}B=\frac{c-a}{2c}$.

9. $\cos^2\frac{1}{2}A=\frac{c+b}{2c}$.

10. $\frac{a-b}{a+b}=\tan\frac{1}{2}(A-B.)$.

11. $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}+\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}=\frac{2\sin A}{\sqrt{\cos 2B}}$.

若 a, b, c 及 A, B, C 爲任何三角形之邊及角，試證

12. $\frac{\sin A+2\sin B}{a+2b}=\frac{\sin C}{c}$.

13. $\frac{\sin^2 A-m\sin^2 B}{a^2-m b^2}=\frac{\sin^2 C}{c^2}$.

14. $(a+b)\sin\frac{1}{2}C=c\cos\frac{1}{2}(A-B)$.

15. $(b-c)\cos\frac{1}{2}A=a\sin\frac{1}{2}(B-C)$.

16. $\frac{\cos A}{\sin B\sin C}+\frac{\cos B}{\sin C\sin A}+\frac{\cos C}{\sin A\sin B}=2$.

17. $\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C=-4\cos\frac{3}{2}A\cos\frac{3}{2}B\cos\frac{3}{2}C$.

18. $\frac{b+c}{a}=\frac{\cos B+\cos C}{1-\cos A}$.

19. $a+b+c=(b+c)\cos A+(c+a)\cos B+(a+b)\cos C$.

20. $\tan A=\frac{a\sin C}{b-a\cos C}$.

21. $a(b^2+c^2)\cos A+b(c^2+a^2)\cos B+c(a^2+b^2)\cos C=3abc$.

22. $\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$.

23. $b\cos^2\frac{1}{2}C+c\cos^2\frac{1}{2}B=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

24. $\tan\frac{1}{2}B\tan\frac{1}{2}C=\frac{b+c-a}{b+c+a}$.

25. $c^2=(a+b)^2\sin^2\frac{1}{2}C+(a-b)^2\cos^2\frac{1}{2}C$.

26. 若 $2\cos B\sin C=\sin A$, 則 $B=C$. 試證之.

27. 若 $A=3B$, 則 $\sin B=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3b-a}{b}}$. 試證之.

28. 若 $\sqrt{bc\sin B\sin C}=\frac{b^2\sin B+c^2\sin C}{b+c}$ 則 $B=C$. 試證之.

29. 若 $\sin^2B+\sin^2C=\sin^2A$, 則 $A=90°$. 試證之.

30*. 若 $A:B:C=1:2:5$, 則 $\cos A\cos B\cos C=-\frac{1}{4}$, 而 a^2, b^2, c^2 成算術級數. 試證之.

31. 若 $a=2b$, $A=3B$, 則 $C=60°$. 試證之.

32*. 若 p, q, r 爲自 A, B, C 至其對邊之垂綫. 試證 $a\sin A+b\sin B+c\sin C=2(p\cos A+q\cos B+r\cos C)$,

33*. 若 $a\cos^2\frac{1}{2}C+c\cos^2\frac{1}{2}A=\frac{3}{2}b$, 則三角形之之邊成算術級數. 試證之.

34. 若 A, B, C, D 爲四邊形之四角, 試證

$$\frac{\tan A+\tan B+\tan C+\tan D}{\cot A+\cot B+\cot C+\cot D}=\tan A\tan B\tan C\tan D.$$

$[\tan(A+B)=\tan(360°-C-D)]$.

a, b, c 及 A, B, C 爲三角形之三邊及三角.

35. 試證 $(b^2-c^2)\cot A+(c^2-a^2)\cot B+(a^2-b^2)\cot C=0$.

36. 試證 $\dfrac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)}=\dfrac{a^2-b^2}{c^2}$.

37. 試證 $\dfrac{c\sin(A-B)}{b\sin(C-A)}=\dfrac{a^2-b^2}{c^2-a^2}$.

*38**. 若 a, b, c 成算術級數, 試證

$\cot\frac{1}{2}A$, $\cot\frac{1}{2}B$, $\cot\frac{1}{2}C$ 成算術級數.

*39**. 若 $\tan\theta=2k+1$, $\tan\phi=2k-1$, 則

$\cot(\theta-\phi)=2k^2$, 試證之.

第二節　斜角三角形之解法

112. 三角形之三邊及三角謂之三角形之**六部份**。六部份間知其三(內必有一份爲邊), 則他之部份可用前節公式求得之。是謂**斜角三角形** Oblique triangle 之解法。其四類爲:

I. 知三邊而求三角,

II. 知一邊及兩角, 而求其他之邊及角,

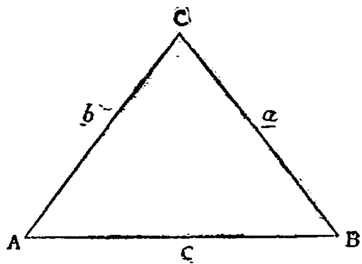
III. 知二邊及其間之角, 而求其他之邊及角,

IV. 知二邊及其一邊之對角, 而求其他之邊及角。

類　I

113. 知三邊 a, b, c, 求三角 A, B, C。

自第 106 款公式, 得



(1) $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$,

(2) $\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$,

於是得 A 及 B 之值。

(3) $C=180^\circ-A-B$。

若三邊之值爲數過繁,須用對數解法,則宜用第 107 款公式, 如[XXXV]:

(1) $\tan\frac{1}{2}A=\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$。

(2) $\tan\frac{1}{2}B=\sqrt{\dfrac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}$, 於是得 A 及 B 之值。

(3) $C=180^\circ-A-B$。

公式[XXXIII]及[XXXIV]亦可用。但若 $\frac{1}{2}A$ 近於 90°, 則正弦公式不甚便利, 因 90° 鄰近之角其正弦所差甚微故。若 $\frac{1}{2}A$ 近於 0°, 則餘弦公式不甚便利, 因 0° 鄰近之角其餘弦所差甚微故。

若 A, B, C 三角之值均須求出，則以用公式[XXXV]爲最便。蓋用此式，僅須求四對數，卽 $log(s-a)$, $log(s-b)$, $log(s-c)$ 及 $log\ s$。若用他二式，則須求六對數，卽 $log(s-a)$, $log(s-b)$, $log(s-c)$, $log\ a$, $log\ b$, $log\ c$。

114. 例題(*1*) 知 a=275·35, b=189·28, c=301·47, 求 A, B 及 C。

依公式 [XXXV],

(1) $log\ tan\ \frac{1}{2}A=\frac{1}{2}[log(s-b)+log(s-c)-log(s-a)-log s]$,

(2) $log\ tan\ \frac{1}{2}B=\frac{1}{2}[log(s-c)+log(s-a)-log(s-b)-log s]$。

$a=275·35$	$log(s-a)=2·03222$	$log(s-b)=2·28729$
$b=189·28$	$log\ s\ =2·58326$	$log\ s\ =2·58326$
$c=301·47$	$4·61548$	$4·87055$
$2s=766·10$	$log(s-b)=2·28729$	$log(s-a)=2·03222$
$s=383·05$	$log(s-c)=1·91158$	$log(s-c)=1·91158$
$(s-a)=107·70$	$4·19887$	$3·94380$
$(s-b)=193·77$	$-4·61548$	$-4·87055$
$(s-c)=\ 81·58$	$2\|9·58339$	$2\|9·07325$
$A=\ 63°30'56''$	$log\ tan\frac{1}{2}A=9·79170$	$log\ tan\frac{1}{2}B=9·53663$
$B=\ 37°58'20''$	$\frac{1}{2}A=31°45'28''$	$\frac{1}{2}B=18°59'10''$
$(A+B)=101°29'16''$	$A=63°30'56''$	$B=37°58'20''$
$C=\ 78°30'44''$		

例題(2)　知 $a=3\cdot41$, $b=2\cdot60$, $c=1\cdot58$, 求 A, B, 及 C。

令　$r=\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$,

則自公式[XXXV] 得

$$\tan\tfrac{1}{2}A=\frac{r}{(s-a)}, \qquad (1)$$

$$\tan\tfrac{1}{2}B=\frac{r}{(s-b)}, \qquad (2)$$

$$\tan\tfrac{1}{2}C=\frac{r}{(s-c)}。 \qquad (3)$$

$$\log r=\tfrac{1}{2}[\log(s-a)+\log(s-b)+\log(s-c)-\log s]。$$

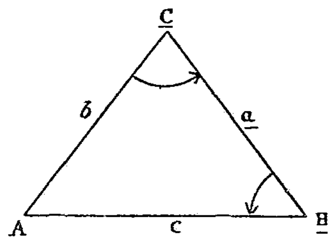
$a=3\cdot41$	$\log(s-a)=9\cdot58546$	$\log\tan\frac{1}{2}A=10\cdot12903$
$b=2\cdot60$	$\log(s-b)=0\cdot07737$	$\log\tan\frac{1}{2}B=9\cdot63712$
$c=1\cdot58$	$\log(s-c)=0\cdot34537$	$\log tna\frac{1}{2}C=9\cdot36912$
$2s=7\cdot59$	$10\cdot00820$	$\frac{1}{2}A=53°23'20''$
$s=3\cdot795$	$\log s=0\cdot57921$	$\frac{1}{2}B=23°26'37''$
$(s-a)=0\cdot385$	$2\lfloor 9\cdot42899$	$\frac{1}{2}C=13°10'3''$
$(s-b)=1\cdot195$	$\log r=9\cdot71449$	$A=106°46'40''$
$(s-c)=2\cdot215$		$B=46°53'14''$
		$C=26°20'6''$
		$A+B+C=180°0'0''$

類 II

115. 知一邊及兩角, 如 a, B, C, 求其餘之邊及角.

依第 100 款, 得

(1) $A=180°-B-C$。



既得 A, 依正弦定則:

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}。$$

得 (2) $b=\dfrac{a\sin B}{\sin A}$,

(3) $c=\dfrac{a\sin C}{\sin A}$。

116. **例題** 知 $c=1764{\cdot}3$, $A=94°54'$, $B=66°39'$, 求 a, b, 及 C。

(1) $C=180°-A-B$。

(2) $\log a=(\log c-\log\sin C)+\log\sin A$。

(3) $\log b=(\log c-\log\sin C)+\log\sin B$。

$c=1764{\cdot}3$	$\log c \quad =3{\cdot}24657$	
$A=94°54'$	$\log\sin C=9{\cdot}50034$	
$B=66°39'$	$3{\cdot}74623$	$3{\cdot}74623$
$A+B=161°33'$	$\log\sin A=9{\cdot}99841$	$\log\sin B=9{\cdot}96289$
$C=\ 18°27'$	$\log a \quad =3{\cdot}74464$	$\log b \quad =3{\cdot}70912$
	$a=5554{\cdot}4$	$b=5118{\cdot}2$

類 III

117. 知兩邊及兩邊間之角，如 b, c, A，求其餘之邊及角。

自 (1) $\frac{1}{2}(B+C)=90^\circ-\frac{1}{2}A$，求得 $\frac{1}{2}(B+C)$ 之值。

依公式 [XXXVII]，

(2) $\tan\frac{1}{2}(B-C)=\frac{b-c}{b+c}\tan\frac{1}{2}(B+C)$ 求得 $\frac{1}{2}(B-C)$ 之值。$\frac{1}{2}(B+C)$ 與 $\frac{1}{2}(B-C)$ 相加得 B，相減得 C。

既知 B 與 C，依正弦定則 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，得

(3) $a=\frac{c\sin A}{\sin C}$。

118. 若僅須求 a 之值，或所知各數均屬簡單，則 a 之值可自 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ 得之。

119. 例題(*1*) 知 $b=681$, $c=243$, $A=50^\circ 42'$，求其餘之邊及角。

(1) $(B+C)=180^\circ-A$。

(2) $\log\tan\frac{1}{2}(B-C)=\log(b-c)-\log(b+c)+\log\tan\frac{1}{2}(B+C)$。

(3) $\log a=\log c+\log\sin A-\log\sin C$。

$b=681$	$\log(b-c)=2\cdot64147$	$\log c=2\cdot38561$
$c=243$	$\log(b+c)=2\cdot96567$	$\log\sin A=9\cdot88865$
$b+c=924$	$9\cdot67580$	$2\cdot27426$
$b-c=438$	$\log\tan\frac{1}{2}(B+C)=0\cdot32444$	$\log\sin C=9\cdot52636$
$B+C=129°18'$	$\log\tan\frac{1}{2}(B-C)=0\cdot00024$	$\log a=2\cdot74790$
$\frac{1}{2}(B+C)=64°39'$	$\frac{1}{2}(B-C)=45°0'57''$	$a=559\cdot63$
$\frac{1}{2}(B-C)=45°0'57''$		
$B=109°39'57''$		
$C=19°38'3''$		

例題(2) 知 b=35, c=21, A=60°, 求 a。

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A。$$

$$a^2=35^2+21^2-2\times35\times21\times\tfrac{1}{2}。$$

故 $\dfrac{a^2}{7^2}=5^2+3^2-2\times5\times3\times\tfrac{1}{2}=25+9-15=19$。

故 $a=7\sqrt{19}$。

類 VI

120. 知二邊及一邊之對角，如 a, b, A, 求其餘之邊及角。

自正弦定則

(1) $\sin B=\frac{b}{a}\sin A$, 得 B 之值。

自 sin B 之值求B, B可有兩值, 一大於90°, 一小於90°。

1. 若 A 不小於90°, 則大於90°之值不適用, 蓋 (A+B) 必小於 180° 也。故 B 必小於 A, 而 b 必小於 a。(若 b 不小於 a, 則不可解)。

2. 若 A 小於 90°, 則 B 之兩值適用與否, 須依下列條件而定:

(I) 若 $a<b\sin A$, 則 $\frac{b\sin A}{a}>1$。故 $\sin B>1$, 是爲不可解者, 蓋正弦不能大於 1 也。

(II) 若 $a=b\sin A$, 則 $\frac{b\sin A}{a}=1$。故 $\sin B=1$, 而 $B=90°$。於是得一直角三角形。

(III) 若 $a>b\sin A$, 則 $\frac{b\sin A}{a}<1$。故 $\sin B<1$, 於是 B 可有兩值。但

(i) 若 $a>b$, 則 $A>B$, 故 B 不能爲鈍角。故大於 90° 之值不適用。

(ii) 若 $a=b$, 則 $A=B$, 故 B 僅有一值。

(iii) 若 $a<b$, 則 $A<B$, 而 B 爲鈍爲銳均可。於是 B 可有兩值。

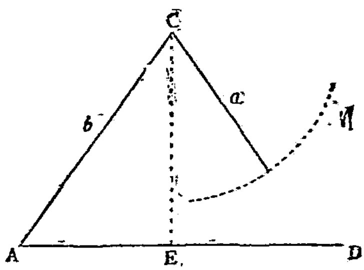
故若 a 大於 $b\sin A$ 而小於 b ($b\sin A<a<b$)，則自 $\sin B$ 之值求 B，B 可有兩值。既得 B，自

(2)　$C=180^\circ-A-B$，得 C 之值。自

(3)　$\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}$，得 $c=\frac{a\sin C}{\sin A}$。

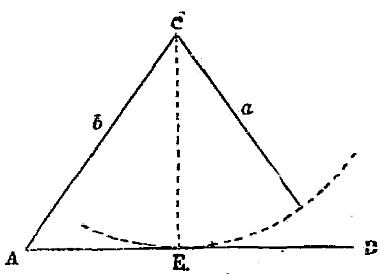
121.　B 之兩值均適用與否亦可用幾何法決定之如下：

任取 AD 線。在 A 點作 $\angle CAD$ 等於 A。在 AC 線取 AC 等於 b。自 C 點至 AD 作垂線 CE。則 $CE=b\sin A$。



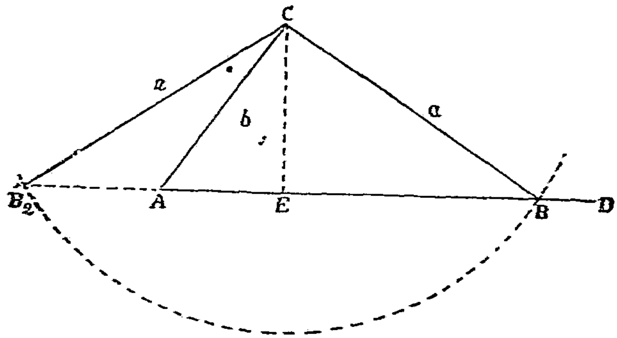
以 C 爲心，a 爲半徑作圓。若 $A<90^\circ$，而

(I)　$a<b\sin A$，則圓不與 AD 相交。故三角形不成立。

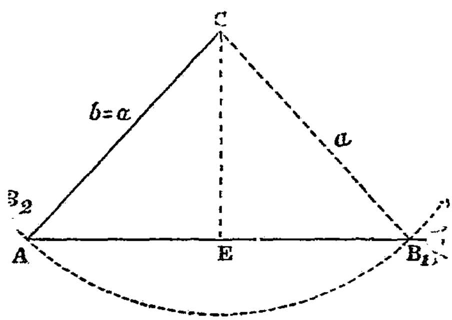


(II)　$a=b\sin A$，則圓切於 AD。E 卽爲切點。故所成之三角形爲一直角三角形 ACE。

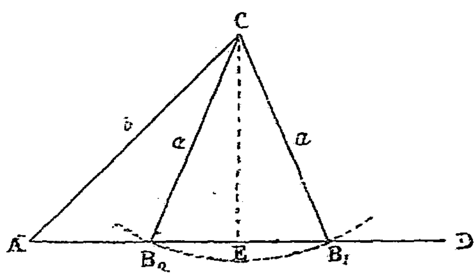
(III)　$a>b\sin A$，則圓與 AD 交於兩點 B_1, B_2，但若



(i) $a>b$，則 B_1 與 B_2 在 A 之兩邊。所成之三角形有二，即 $\triangle AB_1C$ 及 $\triangle AB_2C$。然 $\triangle AB_2C$ 之 $\angle CAB_2$ 不等於 A (等於 $180°-A$)。故不合用。合用者僅有一三角形，即 $\triangle AB_1C$。



(ii) $a=b$，則 B_2 即在 A 處。所成之三角形為兩等邊三角形 AB_1C。



(iii) $a<b$, 則 B_1 與 B_2 同在 A 之一邊。所成之兩三角形 AB_1C 與 AB_2C 均合用。

122* 若欲先求 c 之值, 或所知各數均極簡單, 無須用對數, 則 c 之值可用下式得之:

公式 [XXXII], $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,

$$c^2-2(b\cos A)c=a^2-b^2,$$

解之得 $$c=b\cos A\pm\sqrt{b^2\cos^2 A+a^2-b^2},$$

即 $$c=b\cos A\pm\sqrt{a^2-b^2\sin^2 A}.$$

自二次方程得 c, c 可有兩值。但依問題性質, c 之負值不適用。

1. 若 A 不小於 $90°$, 則 $b\cos A$ 不能爲正數。故 c 不能有兩正值。故 c 之兩值不能均爲合用之值。

2. 若 A 小於 $90°$, 則有時 c 可有兩正值。但若

(I) $a<b\sin A$, 則根號之下爲負數。c 之值於是不爲眞數(三角形不成立)。

(II) $a=b\sin A$, 則根號之下爲零。c 之兩值相同。(僅有一三角形)。

(III) $a>b\sin A$, 則根號下之數爲正。c 於是可有兩眞值。但若

(i) a>b, 則 $(a^2-b^2sin^2A)>(b^2-b^2sin^2A)$,

即 $\sqrt{a^2-b^2sin^2A}>b\cos A$。故 c 之兩值，一正一負。

(ii) a=b, 則 $(a^2-b^2sin^2A)=(b^2-b^2sin^2A)$,

即 $\sqrt{a^2-b^2sin^2A}=b\cos A$。故 c 之一值為零。此值不適用。

(iii) a<b, 則 $(a^2-b\,sin^2A)<(b^2-b^2sin^2A)$,

即 $\sqrt{a^2-b^2sin^2A}<b\cos A$。故 c 之兩值皆為正，均可適用。

故若 a 大於 b sin A 而小於 b $(b\sin A<a<b)$, 則 c 之兩值均適用。

123. 例題(1) 知 a=19·65, b=32·45, A=123°20′ 求其餘之邊及角。

今 b 大於 a, 故 B 必大於 A。但 A>90°, (A+B) 將大於 180°。故三角形不成立。

例題(2) 知 $a=36$, $b=80$, A=30°, 求其餘之邊及角。

今 $b\sin A=80\times\frac{1}{2}=40$。故 $a<b\sin A$, 故 $\sin B>1$。故三角形不成立。

例題(3) 知 a=13·2, b=15·7, A=57°13′15″, 求其餘之邊及角。

$$\log\sin B=\log b+\log\sin A-\log a。$$

$a=13\cdot2$	$\log b=1\cdot19590$	$c=b\cos A$
$b=15\cdot7$	$\log\sin A=9\cdot92467$	$\log b=1\cdot19590$
$A=57°13'15''$	$1\cdot12057$	$\log\cos A=9\cdot73352$
$B=90°$	$\log a=1\cdot12057$	$\log c=0\cdot92942$
$C=32°46'45''$	$\log\sin B=0\cdot00000$	故 $c=8\cdot5$
	故 $B=90°$	

例題(4) 知 $a=767$, $b=242$, $A=36°53'2''$, 求 B 及 C。

$$\log\sin B=\log b+\log\sin A-\log a。$$

$a=767$	$\log b=2\cdot38382$
$b=242$	$\log\sin A=9\cdot77830$
$A=36°53'2''$	$2\cdot16212$
今 $b<a$,	$\log a=2\cdot88480$
故 $B<90°$。	$\log\sin B=9\cdot27732$
$B=10°54'58''$	故 $B=10°54'58''$
$C=132°12'0''$	

例題(5) 知 $a=177\cdot01$, $b=216\cdot45$, $A=35°36'20''$, 求 B 及 C。

$a=177\cdot01$	$\log b=2\cdot33536$	$B_1=45°23'28''$
$b=216\cdot45$	$\log\sin A=9\cdot76507$	$B_2=134°36'32''$
$A=35°36'20''$	$2\cdot10043$	$C_1=99°0'12''$
今 $b>a$,	$\log a=2\cdot24800$	$C_2=9°47'8''$
故 B 可有兩值。	$\log\sin B=9\cdot85243$	

習題　XIV

1. 知 $a=283,\ b=317,\ c=428$,

　求 $A=41°23'14''$, $B=47°46'50''$, $C=90°49'56''$.

2. 知 $a=43, b=50,\ c=57$,

　求 $A=46°49'35''$, $B=57°59'44''$, $C=75°10'41''$.

3. 知 $a=\sqrt{5},\ b=\sqrt{6},\ c=\sqrt{7}$,

　求 $A=51°53'12''$, $B=59°31'48''$, $C=68°35'$.

4. 知 $a=2,\ b=\sqrt{6},\ c=(1+\sqrt{3})$, 求三角之值.

5. 知 $a=2,\ b=\sqrt{2},\ c=(\sqrt{3}-1)$, 求三角之值.

6. 知 $a=795$, $A=79°59'$, $B=44°41'$,

　求 $C=55°20'$ $b=567\cdot49$, $c=663\cdot99$.

7. 知 $c=1005$, $A=78°19'$, $B=54°27'$,

　求 $C=47°14'$, $a=1340\cdot6$ $b=1113\cdot8$.

8. 知 $a=1652$, $B=26°30'$, $C=47°15'$,

　求 $b=767\cdot79$, $c=1263\cdot6$.

9. 知 $b=1006\cdot6$, $A=44°$, $C=70°$,

　求 $a=765\cdot43$, $c=1035\cdot4$.

10. 某三角形之三角相比如 $5:10:21$, 其最小之邊為 3. 求他二邊.

11. 知 $a=748$, $b=375$, $C=63°35'30''$,

求 $A=86°23'9''$, $B=30°1'21''$, $c=671\cdot27$.

12. 知 $a=4527$, $b=3465$, $C=66°6'27''$,

求 $A=68°29'15''$, $B=45°24'18''$, $c=4449$.

13. 知 $a=47\cdot99$, $b=33\cdot14$, $C=175°19'10''$,

求 $A=2°46'8''$, $B=1°54'42''$, $c=81\cdot066$.

14. 某三角形之二邊相比如 5:3, 其間之角爲 60°30'. 求他二角.

15. 知 $b=\sqrt{5}$, $c=\sqrt{3}$, $A=35°53'$,

求 $B=93°28'36''$, $c=50°38'24''$, $a=1\cdot3131$.

16. 知 $b=4\sqrt{7}$, $c=6\sqrt{7}$, $A=60°$, 求 a.

17. 知 $c=\sqrt{19}$, $a=2$, $C=120°$, 求 b.

18. 知 $a=840$, $b=485$, $A=21°31'$,

求 $B=12°13'34''$, $C=146°15'26''$, $c=1272\cdot1$.

19. 知 $a=309$, $b=360$, $A=21°14'25''$,

求 $B_1=24°57'54''$, $C_1=133°47'41''$, $c_1=615\cdot67$,

$B_2=155°2'6''$, $C_2=3°43'29''$, $c_2=55\cdot41$.

20. 知 $a=8\cdot716$, $b=9\cdot781$, $A=38°14'12''$,

求 $B_1=44°1'28''$, $C_1=97°44'20''$, $c_1=13\cdot954$,

$B_2=135°58'32''$, $C_2=5°47'16''$, $c_2=1\cdot4202$.

21.　知 $b=63$, $c=36$, $C=29°23'15''$, 問 B 可有何值.

22.　知 $a=15$, $b=45$, $B=120°$ 試用 122 款法求 c.

23.　知 $a=15$, $b=45$, $B=60°$ 試用 122 款法求 c.

24.　知二邊及一對角而求三角形. 問二邊及一對角有何關係時 (1) 則三角形不成立, (2) 則得兩三角形, (3) 則得一三角形. 試各舉一例以明之.

25.　某三角之三邊之比如 4∶7∶5, 求最大之角.

26.　某三角之三邊爲 $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2}$, 試求諸角.

27.　若 $a=2x+3$, $b=x^2+3x+3$, $c=x^2+2x$, 則最大之角 120°.試證之.

28.　某三角之兩邊爲 $\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$ 及 $\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$, 其間之角爲 60°, 求第三邊及他兩角.

29.　知 $A=18°$, $a=4$, $b=4+\sqrt{80}$, 求第三邊及他兩角.

30.　知 $a=2b$, $A=3B$, 求三邊之比及三角之值.

31.　某三角形之兩邊爲 9 與 3, 其兩對角之較爲 90°, 求對角之值.

32.　某三角形之兩角之較爲 17°48′, 其相對之邊爲 105·25 與 76·75. 求兩邊間之角.

33. 知三角形之兩角及其兩對邊之和,或兩對邊之較,而求三邊之值.問用何法. $\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\frac{1}{2}(A-B)}{\tan\frac{1}{2}(A+B)}$

34. 知兩角爲 38°52′,及 78°48′ 其兩對邊之和爲 6824.求兩邊之值.

35. 知兩角爲 73°45′ 及 52°35′,其對邊之較爲 56·72.求兩邊之值.

36. 某三角形之三角之比爲 $1:2:7$. 試證其最大之邊與最小之邊之比爲 $(\sqrt{5}+1):(\sqrt{5}-1)$.

37. 某三角形之兩底角爲 22°30′ 與 112°30′. 試證此三角之高,等於其底邊之長之半.

習 題 XV*

1. 某三角形之三邊之比爲 $1:2:\sqrt{7}$, 求最大之角.

2. 某三角形三邊之比爲 $a:b:\sqrt{a^2+ab+b^2}$. 求最大之角.

3. 知 $A=45°$, $b=3\sqrt{6}$, $c=3(\sqrt{3}+1)$, 求 a 之值.

4. 知 $A=45°$, $B=60°$, $a=2$, 求 c 之值.

5. 知 $A=9°$, $B=45°$, $b=\sqrt{6}$, 求 c 之值.

6. 知 $C=15°$, $c=4$, $a=4+\sqrt{48}$, 求其他之邊及角

7. 知 $C=18^\circ$, $a=\sqrt{5}+1$, $c=\sqrt{5}-1$, 求其他兩角。

8 知 a, b, A 而求其餘之邊及角。若 c_1, c_2 爲第三邊之兩值,試證

$$c_1^2-2c_1c_2\cos 2A+c_2^2=4a^2\cos^2 A。$$

9. 知 a, b, A 而求其餘之邊及角。若 B_1, C_1 及 B_2, C_2 爲他二角之兩值, 試證

$$\frac{\sin C_1}{\sin B_1}+\frac{\sin C_2}{\sin B_2}=2\cos A。$$

10. 若 $A=45^\circ$, 而 c_1 及 c_2 爲第三邊之兩值, 試證

$$\cos\angle B_1CB_2=\frac{2c_1c_2}{c_1^2+c_2^2}。$$

11. 若 c_1 及 c_2 爲第三邊之兩值, 試證

$$(c_1-c_2)^2+(c_1+c_2)^2\tan^2 A=4a^2。$$

12. 知三角形之底邊及高, 及兩底角(均爲銳角)之較, 而求三角及兩邊, 其法若何。

13. 知三角形之三垂線(自三角尖至其對邊)而求三角及三邊, 其法若何。

14. 有公式 $c^2=a^2+b^2$, 知 a 及 b 之值而求 c。若令 $\tan\theta=\frac{b}{a}$, 則 $c=a\sec\theta$, 試證之。

[證法] $c^2=a^2+b^2=a^2\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)$.

令 $\frac{b}{a}=tan\ \theta$, 則 $\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)=tan^2\theta+1=sec^2\theta$.

故 $$c=a\ sec\ \theta.$$

故自公式 $c^2=b^2+a^2$ 求 c, 亦可用對數解法. 先求補助角 θ. $\log\tan\theta=\log b-\log a$. 再求 c,

$$\log c=\log a-\log\cos\theta.$$

15. 試將下公式化爲用對數可解之式：

$$c^2=a^2+b^2-2\,ab\cos C.$$

[化法] $cos\ C=cos^2\frac{1}{2}C-sin^2\frac{1}{2}C,\ 1=cos^2\frac{1}{2}C+sin^2\frac{1}{2}C$.

故 $$\begin{aligned} c^2&=(a^2+b^2)(cos^2\tfrac{1}{2}C+sin^2\tfrac{1}{2}C)-2\,ab(cos^2\tfrac{1}{2}C-sin^2\tfrac{1}{2}C)\\ &=(a^2+b^2-2\,ab)cos^2\tfrac{1}{2}C+(a^2+b^2+2\,ab)sin^2\tfrac{1}{2}C\\ &=(a-b)^2cos^2\tfrac{1}{2}C+(a+b)^2sin^2\tfrac{1}{2}C\\ &=(a-b)^2cos^2\tfrac{1}{2}C\ \left\{1+\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}tan^2\tfrac{1}{2}C\right\}. \end{aligned}$$

令 $$\tan\theta=\frac{(a+b)}{(a-b)}\tan\tfrac{1}{2}C, \qquad (1)$$

則 $$c^2=(a-b)^2cos^2\tfrac{1}{2}C(1+tan^2\theta)$$

故 $$c=(a-b)\cos\tfrac{1}{2}C\sec\theta. \qquad (2)$$

先用對數求 θ, 再自 (2) 求 c 之值.

16. 直角三角形之勾與股爲 3·248 與 4·567, 試用對數法求弦, 問補助角 θ 等於若干.

17. 有三角形 $b=3$, $a=1$, $C=53°7'48''$, 試用第 15 題之法求 c. 問補助角 θ 等於若干.

18. 有公式 $c^2=a^2+b^2-2\,ab\cos C$.

令 $\quad \cos\theta=\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\cos\frac{1}{2}C$, 則 $c=(a+b)\sin\theta$, 試證之.

若 a, b, c 及 A, B, C 爲三角形之邊及角,

19. 令 $\tan\theta=\frac{2\sqrt{ab}}{a-b}\sin\frac{1}{2}C$, 則 $c=(a-b)\sec\theta$, 試證之.

20. 令 $\tan\theta=\frac{a+b}{a-b}\tan\frac{1}{2}C$, 則 $c=(a-b)\cos\frac{1}{2}C\sec\theta$, 試證之.

若 $a=27·3$, $b=16·8$, $C=45°12'$, 求 θ 及 c.

21. 令 $\cos\theta=\frac{a-b}{c}$, 則

$\cos\frac{1}{2}(A-B)=\frac{(a+b)\sin\theta}{2\sqrt{ab}}$, $\cos\frac{1}{2}(A+B)=\frac{c\sin\theta}{2\sqrt{ab}}$, 證試之.

習　題　XVI

1. 有 A 及 B 兩船相距二英里. 在 A 船測 B 船與砲台, 知其向差(見 50 款)爲 $35°14'10''$. 在 B 船測 A 船

與砲台, 知其向差爲 $42^\circ 11' 53''$. 問兩船距砲台各若干尺.

2. 有氣球適與 A 及 B 兩點同在一竪立平面之上. 自 A 與 B 望氣球, 其仰角爲 53° 與 $79^\circ 12'$. 若 A 與 B 相距 500 尺, 問氣球之高爲幾尺.

3. 今欲測某江之闊. 沿江立 A 與 B 兩標相距 700 尺. 自 A 標測 B 標與對岸一樹, 得向差 $44^\circ 56'$. 自 B 標測 A 標與樹, 得向差 $36^\circ 4'$. 問江闊幾尺.

4. 一塔與其所在之斜平面成 $113^\circ 12'$ 之角. 在斜面下行, 至距塔底 89 尺處, 測得塔之對角(第 49 款)爲 $23^\circ 27'$. 問塔高幾尺.

5. 沿江之邊有山, 其斜度爲 $38^\circ 1'$. 自江邊上山 82 尺, 見對岸之物之俯角爲 $12^\circ 49'$. 問江闊幾尺.

6. 有兵艦測得敵艦在其正東北, 而與之距離 10 英里並知敵艦以每句鐘 9 英里之速率向「南 80° 東」(見 51 款)駛行. 今欲以一句半鐘之時追及之, 問駛行之速率及方向爲何.

7. 有 A, B 兩點隔湖相望. 今欲測 A 與 B 之距離, 自 C 點測得 $\angle ACB=72°15'$, $AC=77\cdot99$ 尺, $BC=83\cdot39$ 尺. 問 A 與 B 相距若干尺.

8. 有兩汽車同時自車站出發. 其速率爲每句鐘 40 及每句鐘 30 里. 兩車之軌均爲直綫, 其交角爲 30°. 問二句鐘後兩車相距幾里.

9. 有兩汽車同時自車站出發. 車軌均爲直綫, 其交角爲 20°16′. 三句鐘後兩車相距 30 里. 若一車之速率爲每句鐘 20 里, 問他車之速率爲何.

10. 江之對岸有塔. 欲知其高, 在江邊測得塔之仰角爲 63°26′. 退行 500 尺, 測得塔之仰角爲 32°14′. 問塔高幾尺.

11. 有船向正北駛行. 見相距八里之兩燈塔適均在其正西. 一句鐘後, 見一塔在其正西南, 他塔之方向爲「南 22°30′ 西」問船之速率爲何.

12. 在樹下望塔, 其仰角爲 40°, 在樹頂望之, 仰角爲 37°30′. 若樹高 18 尺, 問塔高幾尺.

13. 自燈塔南望,見兩船之俯角為$(45°+A)$與$(45°-A)$. 若燈之高為h, 則兩船之距為$2h\tan 2A$. 試證之.

14. 自山頂下行40尺, 見山頂之塔之對角為41°19′. 再下行60尺, 則見塔之對角為23°45′. 問塔高幾尺.

15. 山頂有塔. 在山半某處望之, 見塔之對角為42°17′. 自其處下行325尺, 則見塔之對角為21°47′. 知山之斜度為8°53′, 問塔高幾尺.

16. 有人在山麓, 見山頂之仰角為47°. 上山行1000尺, 則見頂之仰角為77°. 若山之斜度為32°, 問山高幾尺.

17. 有人在平地見山頂之仰角為60°. 其人向山進行800尺, 即至山麓. 上山再行800尺, 則見山頂之仰角為75°. 若在上山處山之斜度為30°, 問山高幾尺.

18. 江岸有塔. 塔頂植竿. 竿長24尺, 塔身高186尺, 塔座高6尺. 在對岸某點, 竿之對角適與塔座之對角相等. 問江闊幾尺.

19. 有人在船見兩燈塔均在其「北15°東」及船向西北行五里, 則見一塔在其正東, 他塔在其正東北. 問兩塔相距幾里.

20. 今欲測隔江 A 與 B 兩物之距離. 沿江立 C 與 D 兩標, 相距 600 尺. 在 C, 測得 $\angle ACB$ 等於 $58°20'$, $\angle ACD$ 等於 $95°20'$. 在 D, 測得 $\angle BDA$ 等於 $53°30'$ $\angle BDC$ 等於 $98°45'$. 問 A 與 B 相距幾尺.

21. 今欲測某山之高. 於平地立甲乙兩標相距 1500 尺. 在甲標處測得山頂與乙標之向差爲 $75°25'$, 山頂之仰角爲 $18°$. 在乙標處測得山頂與甲標之向差爲 $64°30'$. 問山高幾尺.

22. 有 C 點及 A, B 兩點, 隔江相望. 欲測 C 與 A 及 B 之距離而無量角之器. 立 a 標與 A 及 C 同在一直綫, 立 b 標與 B 及 C 同在一直綫. 量 AB, aA, aB, bB 及 Ab 諸距離, 得 $AB=500$ 尺, $aA=100$ 尺, $aB=560$ 尺, $bB=100$ 尺, $Ab=550$ 尺. 問 C 與 A 及 B 相距各幾尺.

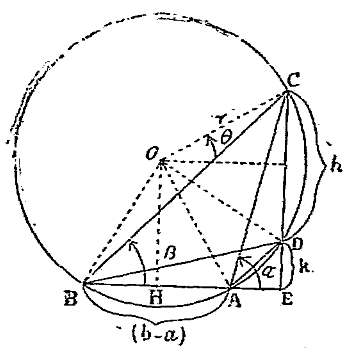
23. 欲測 A 與 B 兩點之距離. 除在 D 點外, A 與 B 不能同時望見. 擇 C 點與 E 點, 在 C 點可望見 A 與 D. 在 E 點可望見 B 與 D. 今量得 $CD=200$ 尺, $DE=200$ 尺, $\angle ADC=89°$, $\angle ACD=50°30'$, $\angle BDE=54°30'$, $\angle BED=88°30'$, $\angle ADB=72°30'$ 問 A 與 B 相距若干尺.

24. 塔頂植竿. 塔之高爲 b 尺, 竿之高爲 a 尺, 有高 h 尺之人, 在離塔 d 尺處望之, 見竿之對角與塔之對角相等. 試證 $(a-b)d^2=(a+b)b^2-2b^2h-(a-b)h^2$.

25. 塔頂植竿. 在平地 A, B 兩點, 竿之對角相等, 而竿頂之仰角爲 α 與 β. 若 A 與塔之距離爲 a, B 與塔之距離爲 b, 竿之長爲 h, 則

$$h=(b-a)\frac{\sin(\alpha+\beta-90^\circ)}{\sin(\alpha-\beta)}.$$ 試證之.

[解法] 命 r 爲半徑, 則



$h=2r\sin\theta$.

因 $EA\times EB=ED\times EC$,

故 $a\times b=k(h+k)$,

卽 $\frac{k}{a}=\frac{b}{h+k}$,

故 $\tan(\alpha-\theta)=\cot\beta$,

$$\theta=\alpha+\beta-90^\circ.$$

故 $HA=\frac{1}{2}(b-a)=r\sin\angle HOA=r\sin\angle BCA=r\sin(\alpha-\beta)$.

26. 塔頂植竿. 在平地 B 點, 竿之仰角爲 β. 在 B 點與塔之間之某點 A, 竿之對角最大而等於 α. 若 $AB=a$, 竿之高爲 h, 則

$$h=\frac{2\,a\sin\alpha\sin\beta}{\cos\beta+\sin(\alpha-\beta)}$$，試證之。

27. 有塔直立平面之上，在其正南 A 點望之，仰角為 45°，在 A 點之正西 B 點望之，仰角為 15°。若 $AB=2a$，塔高為 h，則 $h=a(3^{\frac{1}{4}}-3^{-\frac{1}{4}})$，試證之。

28. 在 A, B 兩處望山，仰角均為 α，在 A 與 B 點之適中處望之，仰角為 β。若 $AB=2a$，山高為 h，則

$$h=a\sin\alpha\sin\beta\sqrt{\csc(\beta+\alpha)\csc(\beta-\alpha)}$$，試證之。

29*. 有人在直路行走。至 A 點時見遠處二物之向差為最大而等於 α. 至 B 點，則見二物與路之向差同為 β. 若 A 與 B 之距離為 c，二物之距離為 a，則

$$a=\frac{2\,c\sin\alpha\ \sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}$$，試證之。

30*. 有物適當 ABC 直線之上。在 A, B 與 C 三點望之，物之仰角為 α, 2α 與 3α. 若 A 與 B 之距離為 a，B 與 C 之距離為 b，物之高為 h，則

$$h=\frac{a}{2b}\{(a+b)\ (3b-a)\}^{\frac{1}{2}}$$，試證之。

31*. 有人自山麓向山頂直上。山之斜度其始為 α，

後忽變為 β;及至山頂,望登山之處,見俯角為 γ。若山之高為 h,則此人登山時所行過之路之長為

$$h\left\{\frac{\cos\left[\frac{1}{2}(\alpha+\beta)-\gamma\right]}{\cos\frac{1}{2}(\beta-\alpha)\ \sin\gamma}\right\},$$ 試證之。

32. 隔江有塔,在沿江 A, B 兩點望之,塔之仰角為 α 與 β;在 A, B 兩點間之 C 點望之,仰角為 γ。若 $\mathrm{AC}=a$, $\mathrm{BC}=b$,則塔之高為

$$\frac{\sin\alpha\ \sin\beta\ \sin\gamma\sqrt{ab(a+b)}}{\{a\sin^2\alpha(\sin^2\gamma-\sin^2\beta)+b\sin^2\beta\ (\sin^2\gamma-\sin^2\alpha)\}^{\frac{1}{2}}}$$

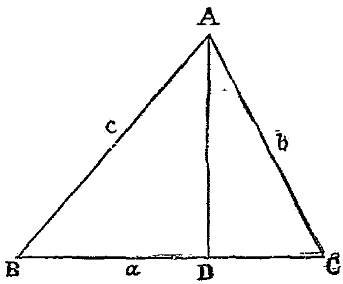
試證之。

第七章

三角形之性質及多邊形

第一節　三角形之性質

124. 三角形之面積　令 F 爲三角形 ABC 之面積。



自 A 至 BC 作垂線 AD, 則

$F=\frac{1}{2}$(垂線)(底線)$=\frac{1}{2}AD\times BC$。

(1)　$F=\frac{1}{2}AD\times BC$

$=\frac{1}{2}(AB\ \sin B)BC$。

故　$F=\frac{1}{2}ca\sin B$。　(1)

依同法得

$F=\frac{1}{2}ab\sin C$,　(2)

$F=\frac{1}{2}bc\sin A$。　(3)

此爲知二邊一角求面積之公式。

(2)　$F=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}bc\,2\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A$

$=bc\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$。

故 $$F=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}。\quad(4)$$

此爲知三邊求面積之公式。

(3) $F=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\sin A\frac{a\sin B}{\sin A}\cdot\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}$.

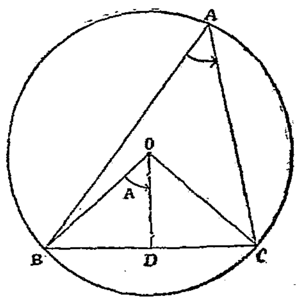
故 $$F=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin(B+C)}。\quad(5)$$

依同法得 $$F=\frac{b^2\sin C\sin A}{2\sin(C+A)},\quad(6)$$

$$F=\frac{c^2\sin A\sin B}{2\sin(A+B)}。\quad(7)$$

此爲知二角一邊求面積之公式。

125. 三角形外接圓之半徑 令O爲$\triangle ABC$之外接圓 Circumscribed circle 之心，R爲其半徑。自O至BC作垂線OD。則



$\angle BOD=\angle COD$, $BD=DC$。

但 $\angle BOC=2A$, 故 $\angle BOD=A$。

故 $\frac{a}{2}=BD=BO\sin\angle BOD$

$=R\sin A$,

故 $R=\frac{a}{2\sin A}$。

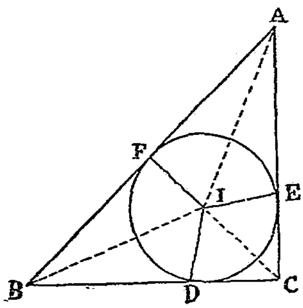
故 $$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R。\quad(1)$$

故三角形外接圓之直徑,即等於一邊與其對角之正弦之比.

今面積 $F=\frac{1}{2}bc\sin A$, $R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{abc}{2bc\sin A}$,

故 $$R=\frac{abc}{4F}。\quad (2)$$

126. 三角形內切圓之半徑 令I為 $\triangle ABC$ 內切圓 Inscribed circle 之心, r 為其半徑, D, E 及 F 為邊與圓之切點。則 ID, IE, IF 均等於 r 而為自心至邊之垂線。



$\triangle ABC$ 之面積F等於三角形 IBC, ICA, 及 IAB 之面積之和。

故 $F=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr=\frac{1}{2}(a+b+c)r=sr$。

故 $$r=\frac{F}{s}。\quad (1)$$

故三角形內切圓之半徑等於其面積與其三邊之和之半之比.

127. 今 IA, IB, IC 三線等分三角形之諸角,

故 $\angle IBD=\frac{1}{2}B$, $\angle ICD=\frac{1}{2}C$。

故 $BD = r\cot\frac{1}{2}B$, $CD = r\cot\frac{1}{2}C$。

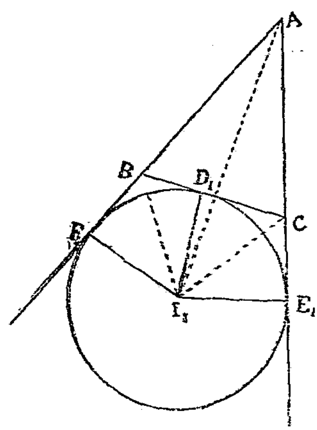
故 $$r\left(\cot\tfrac{1}{2}B + \cot\tfrac{1}{2}C\right) = a,$$

即 $$r\sin\tfrac{1}{2}(B+C) = a\sin\tfrac{1}{2}B\ \sin\tfrac{1}{2}C。$$

故 $$r = \frac{a\sin\frac{1}{2}B\ \sin\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}A}。\qquad (1)$$

此爲三角形內切圜之半徑與其三角一邊之關係。

128.* 三角形傍切圜之半徑 令I爲$\triangle ABC$之傍切圜 Escribed circle (外切BC)之心，r_1爲其半徑，E_1, F_1, D_1爲邊與圜之切點。則 I_1E_1, I_1F_1 及 I_1D_1 均等於 r_1 而爲自心至邊之垂線。



$\triangle ABC$ 之面積 F 等於三角形 I_1AB 加三角形 I_1CA 之面積減三角形 I_1BC 之面積。

即 $$\begin{aligned} F &= \triangle I_1AB + \triangle I_1CA - \triangle I_1BC \\ &= \tfrac{1}{2}cr_1 + \tfrac{1}{2}br_1 - \tfrac{1}{2}ar_1 \\ &= \tfrac{1}{2}(c+b-a)r_1 \\ &= (s-a)r_1。\end{aligned}$$

故 $$r_1=\frac{F}{(s-a)}。\qquad(1)$$

若 r_2, r_3 爲他二傍切圓之半徑，則得

$$r_2=\frac{F}{(s-b)},\qquad(2)$$

$$r_3=\frac{F}{(s-c)}。\qquad(3)$$

此爲三角形傍切圓之半徑與其面積及邊之關係。

129*　今 I_1A 等分 A 角，I_1B 及 I_1C 等分 B 及 C 之外角 故 $\angle I_1BD_1=90°-\frac{1}{2}B$, $\angle I_1CD_1=90°-\frac{1}{2}C$。

故 $BD_1=r_1\ cot(90°-\frac{1}{2}B)=r_1\ tan\frac{1}{2}B$,

$CD_1=r_1\ cot(90°-\frac{1}{2}C)=r_1\ tan\frac{1}{2}C$。

故 $$r_1(tan\tfrac{1}{2}B+tan\tfrac{1}{2}C)=a,$$

卽 $$r_1\ sin\tfrac{1}{2}(B+C)=a\ cos\tfrac{1}{2}B\ cos\tfrac{1}{2}C。$$

故 $$r_1=\frac{a\cos\frac{1}{2}B\ \cos\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}A},\qquad(1)$$

$$r_2=\frac{b\cos\frac{1}{2}C\ \cos\frac{1}{2}A}{\cos\frac{1}{2}B},\qquad(2)$$

$$r_3=\frac{c\cos\frac{1}{2}A\ \cos\frac{1}{2}B}{\cos\frac{1}{2}C}.\qquad(3)$$

此爲三角形之傍切圓之半徑與其三角一邊之關係。

130.* 因 $2R=\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，故若以 a, b, c 之值代入第 127 及第 129 款公式，則得

$$r=4R\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C, \qquad (1)$$

$$r_1=4R\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C, \qquad (2)$$

$$r_2=4R\cos\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C, \qquad (3)$$

$$r_3=4R\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C。 \qquad (4)$$

131. 例題(*1*) 三角形之三邊爲 17, 25, 28。求自諸角至其對邊之垂線之長。

今面積 $F=\frac{1}{2}$(垂線)(底邊)，

故以邊除面積之兩倍卽得該邊上之垂線。

$$F=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$=\sqrt{35\times18\times10\times7}\quad=5\times7\times6=210。$$

故垂線爲 $\frac{420}{17}$, $\frac{420}{25}$, $\frac{420}{28}$, 卽 $\frac{420}{17}$, $\frac{84}{5}$, 15。

例題(*2*) 某三角形之 $A=22°30'$, $B=45°$, $b=220$, 試求其面積。

$$C=180°-A-B=112°30'。$$

$$F=\frac{b^2\sin A\sin C}{2\sin B},$$

故 $F=\dfrac{220\times220\times\sin 22^\circ 30'\ \sin 112^\circ 30'}{2\sin 45^\circ}$

$$=\frac{220\times220\times\sin 22^\circ 30'\cos 22^\circ 30'}{2\times2\sin 22^\circ 30'\cos 22^\circ 30'}=12100。$$

例題(3) 試證 $F=2R^2\sin A\ \sin B\ \sin C$。

$$2R^2\sin A\ \sin B\ \sin C=\tfrac{1}{2}(2R\sin A)(2R\sin B)\sin C$$

$$=\tfrac{1}{2}ab\sin C=F。$$

例題(4*) 試證 $\dfrac{r_1-r}{a}+\dfrac{r_2-r}{b}=\dfrac{c}{r_3}$。

$$\left(\frac{r_1-r}{a}+\frac{r_2-r}{b}\right)=\frac{1}{a}\left(\frac{F}{s-a}-\frac{F}{s}\right)+\frac{1}{b}\left(\frac{F}{s-b}-\frac{F}{s}\right)$$

$$=\frac{F}{s(s-a)}+\frac{F}{s(s-b)}=\frac{(2s-a-b)F}{s(s-a)(s-b)}$$

$$=\frac{cF}{s(s-a)(s-b)}=\frac{c(s-c)F}{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$=\frac{c(s-c)F}{F^2}=\frac{c(s-c)}{F}=\frac{c}{r_3}。$$

第二節 正式多邊形

132. 圓之內容正式多邊形 命 O 爲圓心，AB 爲內容正式多邊形之一邊。自 O 至 AB 作垂線 OD，則三角形 AOD 及三角形 BOD 爲兩等直角三角形。

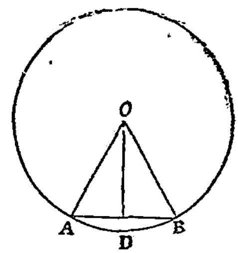
令 n 爲多邊形之邊數,

a 爲多邊形之一邊,

r 爲圓之半徑,

p 爲多邊形之周,

P 爲多邊形之面積,



則 $\angle AOB=\frac{1}{n}$(四直角)$=\frac{360^\circ}{n}$, $\angle AOD=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{180^\circ}{n}$。

於是 (1) $a=2\,AD=2\,OA\,sin\angle AOD$

$$=2\,r\sin\frac{180^\circ}{n}, \tag{1}$$

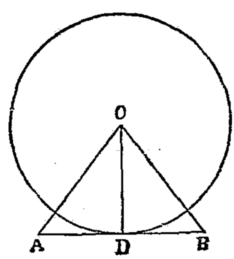
(2) $$p=na=2\,nr\sin\frac{180^\circ}{n}, \tag{2}$$

(3) $P=n(\triangle AOB)$

$$=n\left(\frac{1}{2}\,r^2\,\sin\frac{360^\circ}{n}\right)=\frac{1}{2}\,nr^2\,\sin\frac{360^\circ}{n}。 \tag{3}$$

133. 圓之外切正式多邊形 令 O 爲圓心, AB 爲外切正式多邊形之一邊。

令切點爲 D, 則 $\triangle AOD$ 及 $\triangle BOD$ 爲兩等直角三角形。



故 $\angle AOB=\frac{1}{n}$(四直角)$=\frac{360^\circ}{n}$,

$\angle AOD=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{180^\circ}{n}$。

於是　(1)　$a=2\,AD=2\,OD\ tan\ \angle AOD$

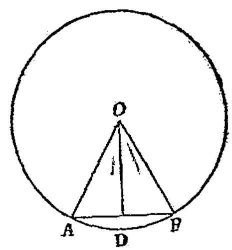
$$=2\,r\ \tan\frac{180^\circ}{n},\qquad(1)$$

(2)　$$p=na=2\,nr\ \tan\frac{180^\circ}{n},\qquad(2)$$

(3)　$$P=n(\triangle AOB)=nOD\times AD$$

$$=nr^2\tan\frac{180^\circ}{n}。\qquad(3)$$

134　例題(*1*)　有圓內容正式十二邊形。其一邊之長為 2。求圓之半徑。



$$\angle AOB=\frac{360^\circ}{12},\quad \angle AOD=\frac{180^\circ}{12}=15^\circ。$$

邊 $a=AB=2\,AD=2r\ sin\ \angle AOD$。

故　$$r=\frac{a}{2\,sin\,15^\circ}=\frac{2}{2\,sin\,15^\circ}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{6}+\sqrt{2}。$$

例題(*2*)　有正式五邊形及正式十邊形，其周相等。試求其面積之比。

令正式 n 邊形之一邊為 a,

則其面積 $=n\ AD\times OD\ =\ n\ AD\cdot AD\ cot\frac{180^\circ}{n}$

$$=\frac{na^2}{4}\,cot\frac{180^\circ}{n}。$$

若五邊形之一邊爲 $2c$, 則十邊形之一邊必爲 c。

$$五邊形之面積=\frac{5(2c)^2}{4}\cot\frac{180^\circ}{5}=5c^2\cot 36^\circ。$$

$$十邊形之面積=\frac{10c^2}{4}\cot\frac{180^\circ}{10}=\frac{5}{2}c^2\cot 18^\circ。$$

$$故\frac{五邊形之面積}{十邊形之面積}=\frac{2\cot 36^\circ}{\cot 18^\circ}=\frac{2\cos 36^\circ\ \sin 18^\circ}{\sin 36^\circ\ \cos 18^\circ}=\frac{\cos 36^\circ}{\cos^2 18^\circ}$$

$$=\frac{2\cos 36^\circ}{1+\cos 36^\circ}=\frac{2(\sqrt{5}+1)}{4}\Big/\left(1+\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)$$

$$=\frac{2(\sqrt{5}+1)}{5+\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}。$$

習　題　XVII

1. 某三角形之兩邊爲 300 與 120, 此兩邊間之角爲 150°, 求三角形之面積.

2. 某三角形之三邊爲 171, 204, 195, 求三角形之面積.

3. 有三角形其一邊爲 30, 此邊之兩鄰角爲 22° 30′ 與 112° 30′. 求三角形之面積.

4. 有三角形其兩邊爲 4474·5 與 2164·5, 此兩邊間之角爲 116° 30′ 20″. 求三角形之面積.

5. 有三角形其兩邊爲 215·9 與 307·7, 前一邊之對角爲 25° 9′ 31″. 求三角形之面積.

6. 有三角形其兩角爲 $39^\circ 18' 28''$ 與 $70^\circ 42' 30''$, 前一角之對邊爲 149. 求三角形之面積.

7. 三角形之三邊爲 13, 14, 15, 求外接圓之半徑 R, 及內切圓之半徑 r.

*8.** 三角形之三邊爲 17, 10, 21. 求三傍切圓之半徑 r_1, r_2, r_3.

*9.** 三角形之面積爲 96, 其三傍切圓之半徑爲 8, 12, 24. 求三角形之各邊.

10. 若四邊形之兩對角線爲 d_1, d_2, 其間之角爲 A, 則其面積等於 $\frac{1}{2} d_1 d_2 \sin A$. 試證之.

11. 有正式多邊形, 其邊數 $n=7$, 其內切圓之半徑 $r=3$. 求一邊 a, 角 A, 外接圓之半徑 R 及面積 P.

12. 有正式十邊形, 其諸邊之和爲 10. 求內切圓之半徑及十邊形之面積.

13. 設有圓其內容正式 n 邊形之一邊爲 a, 問其內容正式 $2n$ 邊形之一邊 b 爲何.

14. 設有圓其內容正式五邊形之面積爲 165·9. 求其內容正式廿一邊形之面積.

15. 有正式十二邊形，其內容圓之周為 5，求一邊之長.

16. 圓之內接正式六邊形及其外切正式六邊形之面積相比如 3 與 4. 試證之.

17. 若正式五邊形及正式十邊形之面積相等，則其周之比如 $\sqrt[4]{5}$ 與 $\sqrt{2}$. 試證之.

18. 有正式 n 邊形及正式 $2n$ 邊形. 若其周相等，則其面積之比如 $2\cos\frac{180^\circ}{n}$ 與 $\left(1+\cos\frac{180^\circ}{n}\right)$. 試證之.

19. 若 $2a$ 為正式 n 邊形之一邊. R 及 r 為其外接及內切圓之半徑，則 $R+r=a\cot\frac{90^\circ}{n}$. 試證之.

20. 若圓內接正式五邊形之邊為 P，六邊形之邊為 H，十邊形之邊為 D，則 $P^2=H^2+D^2$. 試證之.

21. 若 A_1, B_1 為圓之內接及外切正式 n 邊形之面積，A_2, B_2 為同圓之內接及外切正式 $2n$ 邊形之面積. 則 (1) $A_2=\sqrt{A_1B_1}$, (2) $B_2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{A_1}+\frac{1}{B_1}\right)$. 試證之.

試證下諸等式

*22.** $\sqrt{rr_1r_2r_3}=F$.

23. $s(s-a)\tan\frac{1}{2}A=F.$

24*. $rr_1\cot\frac{1}{2}A=F.$

25. $Rr(\sin A+\sin B+\sin C)=F.$

26. $\cos\frac{1}{2}A\sqrt{bc(s-b)(s-c)}=F.$

27. $b^2\sin 2C+c^2\sin 2B=4F.$

28*. $r_1r_2r_3=rs^2.$

29*. $r\cot\frac{1}{2}B\cot\frac{1}{2}C=r_1.$

30*. $r_1+r_2=c\cot\frac{1}{2}C.$

31*. $(r_1-r)(r_2+r_3)=a^2.$

32*. $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}=\frac{1}{r}.$

33*. $r_2r_3+r_3r_1+r_1r_2=s^2$

34*. $r_1+r_2+r_3-r=4R.$

35. $\frac{a^2-b^2}{2}\frac{\sin A\sin B}{\sin(A-B)}=F.$

36. $a\cos A+b\cos B+c\cos C=4R\sin A\sin B\sin C.$

37. $a\cot A+b\cot B+c\cot C=2(R+r).$

38. $r(\sin A+\sin B+\sin C)=2R\sin A\sin B\sin C.$

39*. $\frac{b-c}{r_1}+\frac{c-a}{r_3}+\frac{a-b}{r_3}=0.$

*40**. 若 p_1, p_2, p_3 為自 A, B, C 至其對邊之垂線. 則

(1) $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}=\frac{1}{r}$, (2) $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_3}=\frac{1}{r_3}$, 試證之.

*41**. 若 p, q, r 為 A, B, C 三角之等分線之長, 則

(1) $\frac{1}{p}\cos\frac{1}{2}A+\frac{1}{q}\cos\frac{1}{2}B+\frac{1}{r}\cos\frac{1}{2}C=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

(2) $\frac{pqr}{4F}=\frac{abc\,(a+b+c)}{(b+c)\,(c+a)\,(a+b)}$, 試證之.

*42**. 試用幾何法證

(1) $r_1=s\tan\frac{1}{2}A$, (2) $r_2=s\tan\frac{1}{2}B$, (3) $r_3=s\tan\frac{1}{2}C$.

*43**. 連三傍切圓之心而得之三角形, 其邊為 a', b', c'. 試證

(1) $a=a'\sin\frac{1}{2}A$,

(2) $b=b'\sin\frac{1}{2}B$,

(3) $c=c'\sin\frac{1}{2}C$.

第八章

反函數　圖形　消去法　三角方程

第一節　反三角函數

135. 若 $sin\,\theta=a$, 則 θ 角謂之 a 之反正弦 Anti-sine or inverse sine 而以 $arcsin\,a$ 表之, 如　$\theta=arcsin\,a$。

a 之反正弦有時用 $sin^{-1}a$ 表之, 如 $\theta=sin^{-1}a$。

定義　一數之反正弦者,角之其正弦等於此數者也。

例如, $sin\,30°=\frac{1}{2}$, 則 $arcsin\,\frac{1}{2}=30°$, 但 $sin\,150°$ 及 $sin[p\times180°+(-1)^p\,30°]$ 均等於 $\frac{1}{2}$;

故　　$\mathrm{arcsin}\,\frac{1}{2}=[p\times180°+(-1)^p\,30°]$。

136. 反三角函數 與其餘諸三角函數相應者,有反餘弦 Anti-cosine, 反正切 Anti-tangent, 反餘切 Anti-cotangent, 反正割 Anti-secant, 及反餘割 Anti-cosecant 等。凡此種種統名之爲反三角函數　Anti-trigonometrical functions。 a 之諸反三角函數爲

$arcsin\,a$, $arctan\,a$, $arcsec\,a$, $arccos\,a$, $arccot\,a$　$arccsc\,a$。

[注意]　角之三角函數爲數,數之反三角函數爲角。

137. 主值 有三角函數之值而求相當之角，則依第四章第六節，其角可有多數之值。故一數之反三角函數可有多數之值。絕對值最小之角之值，謂之該反三角函數之主值 Principal value。

例如，$\arccos\frac{1}{2}$，$\arcsin(-\frac{1}{2})$，$\arccos(-\frac{1}{\sqrt{2}})$ 之主值

為 $60°$，$-30°$，$135°$。

故若 a 為正數，則 $\arcsin a$，$\arccos a$，$\arctan a$ 之主值均在 $0°$ 與 $90°$ 之間。

若 a 為負數，則 $\arcsin a$，$\arctan a$ 之主值均在 $0°$ 與 $-90°$ 之間，而 $\arccos a$ 之主值必在 $90°$ 與 $180°$ 之間。

凡論反三角之函數，均係就其主值而言。

若 $\sin\theta=x$，則 $\cos\theta=\sqrt{1-x^2}$。

故(1) $\theta=\arcsin x$，(2) $\theta=\arccos\sqrt{1-x^2}$。但在(1)與(2)，$\theta$ 各有無限數之值，而其值不盡同。故若非就其主值而言，則方程 $\arcsin x=\arccos\sqrt{1-x^2}$ 不成立。

138. 加式 自關於三角函數之公式倒推之，得反三角函數之公式。自正弦與正切之加式 Addition formula

$$(1)\quad \sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y,$$

$$(2)\quad \tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y},$$

推得反正弦與反正切之加式如下：

$$\arcsin x+\arcsin y=\arcsin[x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}], \qquad (1)$$

$$\arctan x+\arctan y=\arctan\frac{x+y}{1-xy}。 \qquad (2)$$

1. 命 $\theta=\arcsin x,\quad \phi=\arcsin y,$

則 $x=\sin\theta,\quad y=\sin\phi,$

$\sqrt{1-x^2}=\cos\theta,\quad \sqrt{1-y^2}=\cos\phi.$

故 $\sin(\theta+\phi)=\sin\theta\ \cos\phi+\cos\theta\ \sin\phi,$

$=x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}。$

故 $(\theta+\phi)=\arcsin[x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}]。$

故 $\arcsin x+\arcsin y=\arcsin[x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}]。$

2. 命 $\theta=\arctan x,\quad \phi=\arctan y,$

則 $x=\tan\theta,\quad y=\tan\phi,$

故 $\tan(\theta+\phi)=\dfrac{\tan\theta+\tan\phi}{1-\tan\theta\tan\phi}=\dfrac{x+y}{1-xy}。$

故 $\arctan x+\arctan y=\arctan\dfrac{x+y}{1-xy}。$

習 題 XVIII

1. 試證 $\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$.

2. 試證 $\arcsin(-x)=-\arcsin x$.

3. 求下列反函數之值. [參觀習題 X(38, 39, 40)].

(1) $\arcsin\frac{1}{2}$, (2) $\arccos(\pm\frac{1}{\sqrt{2}})$, (3) $\arctan(\pm\tan A)$.

試證下諸等式

4. $\arcsin\frac{12}{13}=\operatorname{arccot}\frac{5}{12}$.

5. $2\arctan\frac{1}{3}=\arctan\frac{3}{4}$.

6. $\sec(\arctan x)=\sqrt{1+x^2}$.

7. $2\arctan\frac{1}{5}+\arctan\frac{1}{4}=\arctan\frac{32}{43}$.

8. $\arctan\frac{1}{7}+\arctan\frac{1}{8}+\arctan\frac{1}{18}=\operatorname{arccot}3$.

9. $\arccos x=2\arcsin\sqrt{\frac{1-x}{2}}$.

10. $2\arctan\sqrt{\frac{x}{a}}=\arccos\frac{a-x}{a+x}$.

11. $\sin(2\arcsin x)=2x\sqrt{1-x^2}$.

12. $2\arctan\frac{1}{8}+\arctan\frac{1}{7}+2\arctan\frac{1}{5}=\frac{\pi}{4}$.

13. $3\arctan x=\arctan\frac{3x-x^3}{1-3x^2}$.

14*. $\arctan(2+\sqrt{3})-\arctan(2-\sqrt{3})=\operatorname{arcsec}2$.

15*. $\arctan x+\arctan y=\arccos\frac{1-xy}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}$.

16*. $\tan(2\arctan x)=2\tan(\arctan x+\arctan x^3)$.

17*. 若 $\arctan x+\arctan y+\arctan z=\pi$,

試證 $x+y+z=xyz$.

18*. 若 $u=\operatorname{arccot}\sqrt{\cos x}-\arctan\sqrt{\cos x}$,

試證 $\sin u=\tan^2\frac{1}{2}x$.

試解下列諸方程：

19. $\arcsin x+\arcsin(1-x)=\arccos x$.

[解法] 令 $\arccos x=\theta$, $\arcsin x=\phi$,

則 $x=\cos\theta$, $x=\sin\phi$,

自上式得 $\arcsin(1-x)=\theta-\phi$.

故 $(1-x)=\sin(\theta-\phi)=\sin\theta\cos\phi-\cos\theta\sin\phi$.

故 $(1-x)=\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x^2}-xx=1-x^2-x^2=1-2x^2$.

故 $2x^2-x=0$,

故 $x=0$ 或 $\frac{1}{2}$.

20. $\arcsin x=\arccos x$.

21. $\arctan(x+1)-\arctan(x-1)=\operatorname{arccot}2$.

22*. $\arcsin x-\arccos x=\arcsin(3x-2)$.

23*. $\arccos x-\arcsin x=\arccos(x\sqrt{3})$.

24* $\arccos\frac{1-a^2}{1+a^2}-\arccos\frac{1-b^2}{1+b^2}=2\arctan x.$

25* $\arcsin\frac{2a}{1+a^2}+\arctan\frac{2x}{1-x^2}=\arccos\frac{1-b^2}{1+b^2}.$

26* $\operatorname{arccot}\frac{x^2-1}{2x}+\arctan\frac{2x}{x^2-1}+\frac{4\pi}{3}=0.$

27* $\sin[2\arccos\{\cot(2\arctan x)\}]=0$

試證 $x=\pm1$, 或 $\pm(1\pm\sqrt{2})$.

28* 若 $2\arctan(\cos x)=\arctan(2\csc x)$,

試證 $x=n\pi+\frac{\pi}{4}$.

第二節 圖形

139. 設 y 爲 x 之某三角函數。則知 x 之値，即可知 y 之値。若 x 之値漸變，則相當之 y 之値隨之亦變。若以 x 與 y 相當之値爲橫縱坐標而作點，則此點之軌迹 Locus，謂之此三角函數之圖形 Graph。

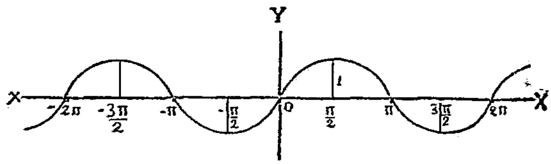
140. 正弦之圖形 $y=\sin x$。

以半徑度爲單位。與 x 以不同之値而求 y 之相當之値。如，令

$x=\frac{-5\pi}{2}, -2\pi, \frac{-3\pi}{2}, -\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \frac{5\pi}{2}$, 則

$y=-1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1$。

以 x 與 y 相當之值爲橫縱坐標作點。則點之軌迹即爲正弦之圖形。依第四章第二節，知



若 x 自 0 增至 $\frac{\pi}{2}$，則 y 自 0 增至 1，

若 x 自 $\frac{\pi}{2}$ 增至 π，則 y 自 +1 減至 0，

若 x 自 π 增至 $\frac{3}{2}\pi$，則 y 自 0 減至 -1，

若 x 自 $\frac{3}{2}\pi$ 增至 2π，則 y 自 -1 增至 0。

因 $\sin(2n\pi+x)=\sin x$，故

若 x 自 2π 增至 4π，自 4π 增至 6π 等等，則 y 所經過之值，一如 x 自 0 增至 2π 時。

因 $\sin(-x)=-\sin x$，故

若 x 自 0 漸減，則 y 所經過之值適與 x 漸增時所經過之值同數而異號。

故正弦之圖形爲浪形曲線，如上圖。

141. 正切之圖形 y=tan x。

以半徑度爲單位，與 x 以不同之值，而求 y 之相當之值。如令

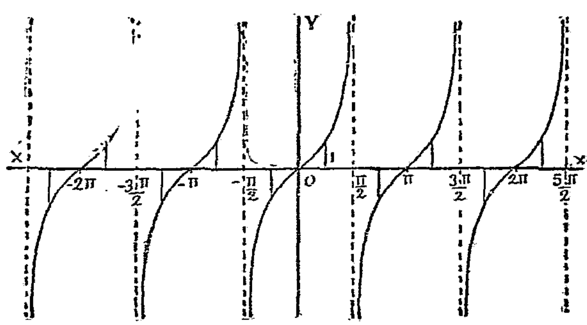
$x=-2\pi,\ -\frac{7}{4}\pi,\ -\dfrac{3\pi}{2},\ -\frac{5}{4}\pi,\ -\pi,\ -\frac{3}{4}\pi,\ -\frac{1}{2}\pi,\ -\frac{1}{4}\pi,\ 0,$ 則

$y=0\ ,\ 1\ ,\ \pm\infty\ ,\ -1\ ,\ 0\ ,\ 1\ ,\ \pm\infty\ ,\ -1\ ,0,$

$x=\frac{1}{4}\pi,\ \dfrac{\pi}{2},\ \frac{3}{4}\pi,\ \pi,\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{7}{4}\pi,\ 2\pi,\ \frac{9}{4}\pi,\ \frac{5}{2}\pi,$ 則

$y=1\ ,\pm\infty,\ -1,\ 0,\ 1\ ,\pm\infty,\ -1,\ 0\ ,\ 1\ ,\ \pm\infty$。

以 x 與 y 相當之值爲橫縱坐標而作點，則此點之軌迹卽爲 $y=tan\,x$ 之圖形。依第四章第二節，知



若 x 自 0 增至 $\frac{1}{2}\pi$，則 y 自 0 漸增經過 1 而至 ∞

若 x 經過 $\frac{\pi}{2}$ 則 y 自 $+\infty$ 驟變爲 $-\infty$。x 自 $\frac{\pi}{2}$ 增至 π, 則 y 自 $-\infty$ 漸增經過 -1 而至 0。

若 x 自 π 增至 $\frac{3}{2}\pi$, 則 y 自 0 漸增, 經過 1 而至 ∞。

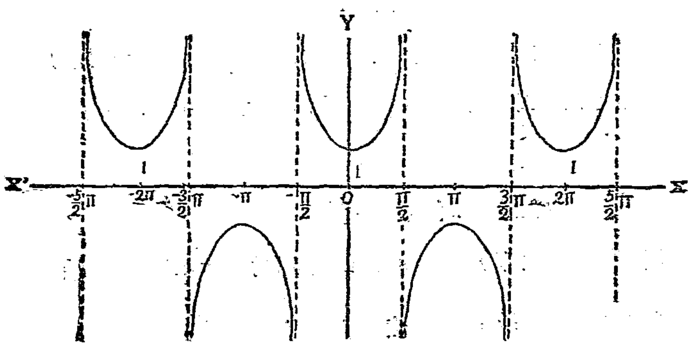
依此法推演, 則知正切之圖形爲多數之曲線, 如上圖。

142. 正割之圖形 y=sec x。

若 $x=-\frac{5}{2}\pi, -2\pi, -\frac{3}{2}\pi, -\pi, -\frac{1}{2}\pi, 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$,

則 $y=\mp\infty, 1, \pm\infty, -1, \mp\infty, 1, \pm\infty, -1, \mp\infty, 1$。

依前款之法推演, 知正割之圖形爲多數之曲線, 如下。



習 題 XIX*

1. 試作 $y=\cos x$ 之圖形.

2. 試作 $y=\cot x$ 之圖形.

3. 試作 $y=\csc x$ 之圖形.

4. 試作 $y=x$ 之圖形.

5. 試作 $y=3x$ 之圖形.

6. 試作 $y=x^2$ 之圖形.

7. 試作 $y=\sin x+\cos x$ 之圖形.

第三節 消去法

143. 從含 $n-1$ 量之 n 聯列方程, 求一新方程之不含此 $(n-1)$ 量者, 是謂**消去法** Elimination。

三角方程之消去法, 無一定之規則, 隨題而異。是在代數之法術與三角之公式運用得宜。今舉例以明之如下:

144. 從二方程消去一量。

例題(*1*) 從 (1) $x\cos\theta=a$ 與 (2) $y\cot\theta=b$, 消去 θ。

自 (1) 得 $\sec\theta=\frac{x}{a}$, 自 (2) 得 $\tan\theta=\frac{y}{b}$.

但　　$\sec^2\theta=\tan^2\theta+1$,

故得　　$\dfrac{x^2}{a^2}=\dfrac{y^2}{b^2}+1$,　即　$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$。

例題(2)　從下二方程消去 θ：

(1)　$l\cos\theta+m\sin\theta+n=0$,

(2)　$p\cos\theta+q\sin\theta+r=0$。

以 p 乘(1)，以 l 乘(2)。相減得 $\sin\theta=\dfrac{np-lr}{lq-mp}$。

以 q 乘(1)，以 m 乘(2)。相減得 $\cos\theta=\dfrac{mr-nq}{lq-mp}$。

但　　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$,

故得　$(mr-nq)^2+(np-lr)^2=(lq-mp)^2$。

例題(3)　從下二方程消去 θ：

(1)　$x=\cot\theta+\tan\theta$,

(2)　$y=\sec\theta-\cos\theta$。

自(1)得　$x=\dfrac{1}{\tan\theta}+\tan\theta=\dfrac{1+\tan^2\theta}{\tan\theta}=\dfrac{\sec^2\theta}{\tan\theta}$。

自(2)得　$y=\sec\theta-\dfrac{1}{\sec\theta}=\dfrac{\sec^2\theta-1}{\sec\theta}=\dfrac{\tan^2\theta}{\sec\theta}$。

故　$x^2y=\sec^3\theta$,　$xy^2=\tan^3\theta$。

故　$(x^2y)^{\frac{2}{3}}=\sec^2\theta$,　$(xy^2)^{\frac{2}{3}}=\tan^2\theta$。

但 $\qquad sec^2\theta - tan^2\theta = 1,$

故得 $\quad (x^2y)^{\frac{2}{3}} - (xy^2)^{\frac{2}{3}} = 1$。

例題(4) 從下二方程消去 θ：

$$(1)\quad \frac{x}{a} = \cos\theta + \cos 2\theta,$$

$$(2)\quad \frac{y}{b} = \sin\theta + \sin 2\theta。$$

自 (1) 得 $\quad \frac{x}{a} = 2\cos\frac{3}{2}\theta\ \cos\frac{1}{2}\theta,$

自 (2) 得 $\quad \frac{y}{b} = 2\sin\frac{3}{2}\theta\ \cos\frac{1}{2}\theta$。

平方之，相加，得 $\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 4\cos^2\frac{1}{2}\theta$。

今 $\quad \cos\frac{3}{2}\theta = 4\cos^3\frac{1}{2}\theta - 3\cos\frac{1}{2}\theta,$

故 $\quad \frac{x}{a} = 2\cos\frac{1}{2}\theta\left(4\cos^3\frac{1}{2}\theta - 3\cos\frac{1}{2}\theta\right) = 2\cos^2\frac{1}{2}\theta\left(4\cos^2\frac{1}{2}\theta - 3\right)$。

於是得 $\quad \frac{x}{a} = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 3\right)$。

145.* 從三方程消去二量。

例題(1) 從 $(1)\quad a\sin^2\theta + b\cos^2\theta = m,$

$$(2)\quad b\sin^2\phi + a\cos^2\phi = n,$$

$$(3)\quad a\tan\theta = b\tan\phi,$$ 消去 θ 與 ϕ。

自 (1) 得　$a\sin^2\theta+b\cos^2\theta=m(\sin^2\theta+\cos^2\theta)$,

即　$$(a-m)\sin^2\theta=(m-b)\cos^2\theta,$$

故　$$\tan^2\theta=\frac{m-b}{a-m}。$$

自 (2) 得　$\tan^2\phi=\dfrac{n-a}{b-n}$。

代入 (3) 得　$$a^2\left(\frac{m-b}{a-m}\right)=b^2\left(\frac{n-a}{b-n}\right),$$

故　$$a^2(m-b)(b-n)=b^2(n-a)(a-m),$$

於是得　$$\frac{1}{n}+\frac{1}{m}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}。$$

例題(2)　從下三方程消去 θ 與 ϕ：

(1)　$x\cos\theta+y\sin\theta=2a$,

(2)　$x\cos\phi+y\sin\phi=2a$,

(3)　$2\sin\frac{1}{2}\theta\ \sin\frac{1}{2}\phi=1$。

自 (1) 與 (2) 知 θ 與 ϕ 爲方程 $x\cos u+y\sin u=2a$ 之根。此方程可化爲

$$(x\cos u-2a)^2=y^2\sin^2u=y^2(1-\cos^2u),$$

即　$$(x^2+y^2)\cos^2u-4ax\cos u+4a^2-y^2=0。$$

其二根即是 $\cos\theta$ 與 $\cos\phi$。

但自 (3) 得　$\cos\theta\cos\phi=\cos\theta+\cos\phi$。

故得 $$\frac{4ax}{x^2+y^2}=\frac{4a^2-y^2}{x^2+y^2},$$

即 $$y^2=4a(a-x)。$$

習題 XX

試從下列方程消去 θ：

1. $\frac{x}{a}\cos\theta+\frac{y}{b}\sin\theta=1,\qquad \frac{x}{a}\sin\theta-\frac{y}{b}\cos\theta=1.$

2. $a\sec\theta-x\tan\theta=y,\qquad b\sec\theta+y\tan\theta=1.$

3. $\cos\theta+\sin\theta=a,\qquad \cos 2\theta=b.$

4. $x=\sin\theta+\cos\theta,\qquad y=\tan\theta+\cot\theta.$

5. $a=\cot\theta+\cos\theta,\qquad b=\cot\theta-\cos\theta.$

6. $4x=3a\cos\theta+a\cos 3\theta,\quad 4y=3a\sin\theta-a\sin 3\theta.$

7. $x=a\cos\theta(2\cos 2\theta-1),\quad y=b\sin\theta(4\cos^2\theta-1).$

8. 若 $\sin(\alpha+\theta)=m,\qquad \sin(\alpha-\theta)=n,$

試證 $$\frac{(m+n)^2}{4\sin^2\alpha}+\frac{(m-n)^2}{4\cos^2\alpha}=1.$$

9. 若 $\cos(\alpha-\theta)=a,\quad \sin(\theta-\beta)=b,$

試證 $$a^2-2ab\sin(\alpha-\beta)+b^2=\cos^2(\alpha-\beta).$$

10. 若 $\sin\theta+\cos\theta=a,\quad \sin 2\theta+\cos 2\theta=b,$

試證 $$(a^2-b-1)^2=a^2(2-a^2).$$

11. 若 $\cos\theta-\sin\theta=b$, $\cos 3\theta=\sin 3\theta=a$,

試證 $a=3b-2b^3$.

12. 若 $x=a\cos\theta+b\cos 2\theta$, $y=a\sin\theta+b\sin 2\theta$,

試證 $a^2\{(x+b)^2+y^2\}=(x^2+y^2-b^2)^2$.

13*. 若 (1) $y\cos\theta-x\sin\theta=a\cos 2\theta$,

(2) $y\sin\theta+x\cos\theta=2a\sin 2\theta$,

試證 $(x+y)^{\frac{2}{3}}+(x-y)^{\frac{2}{3}}=2a^{\frac{2}{3}}$.

14*. 若 $\cos(\alpha-3\theta)=m\cos^3\theta$, $\sin(\alpha-3\theta)=m\sin^3\theta$,

試證 $m^2+m\cos\alpha=2$.

15*. 若 $\tan\theta+\tan\phi=x$, $\cot\theta+\cot\phi=y$, $\theta+\phi=\alpha$,

試證 $xy=(y-x)\tan\alpha$.

16*. 若 $a\sin^2\theta+b\cos^2\theta=a\cos^2\phi+b\sin^2\phi=1$,

$a\tan\theta=b\tan\phi$,

試證 $a+b=2ab$.

17*. 若 $\frac{x}{a}\cos\theta+\frac{y}{b}\sin\theta=\frac{x}{a}\cos\phi+\frac{y}{b}\sin\phi=1$, $\theta-\phi=\alpha$,

試證 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\sec^2\frac{1}{2}\alpha$.

18*. 若 $\tan\theta+\tan\phi=a$, $\cot\theta+\cot\phi=b$, $\theta-\phi=\alpha$,

試證 $ab(ab-4)=(a+b)^2\tan^2\alpha$.

19.* 若 $c\sin\theta=a\sin(\theta+\phi)$, $a\sin\phi=b\sin\theta$,
$\cos\theta-\cos\phi=2m$, 試證

$$(a-b)\{c^2-(a+b)^2\}=4abcm.$$

第四節 三角方程解法

146. 三角方程之解法,今舉例以明之如下:

例題(1) 試解 $\sin x+\cos 2x=4\sin^2 x$。

因 $\cos 2x=1-2\sin^2 x$,

故 $\sin x+(1-2\sin^2 x)=4\sin^2 x$,

$\sin x+1=6\sin^2 x$, 卽 $6\sin^2 x-\sin x-1=0$,

於是 $(2\sin x-1)(3\sin x+1)=0$。

故 $\sin x=\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{1}{3}$。

故 x 之值必在下列諸值內: $30°$, $150°$, $199°28'$, $340°32'$。

以此諸值逐一代入原方程,知此諸值均爲合宜之值。

故 $x=30°$, $150°$, $199°28'$ 或 $340°32'$。

例題(2) 試解 $\sin x+\cos x=1$。 (1)

平方其兩端, 得 $\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x=1$, (2)

故 $2\sin x\cos x=0$。

故 $\sin x=0$ 或 $\cos x=0$。

故 x 之值必在下列諸值內: $0°$, $180°$, $90°$, $270°$。

以此諸值代入原方程，知 0° 與 90° 爲合宜之值，而 180° 與 270° 則否。

故 $x=0°$ 或 $90°$。

在方程　$\sin x+\cos x=-1$　(3)，180° 與 270° 爲合宜之值。蓋方程(2)實包含(1)與(3)。故在方程(2)爲合宜之值者，在方程(1)不必定爲合宜之值也。

例題(3)　試解 $\sin\frac{1}{2}\theta(\cos2\theta-2-\cos2\theta\tan^2\theta+2\tan^2\theta)=0$。

$$\sin\tfrac{1}{2}\theta(\cos2\theta-2)(1-\tan^2\theta)=0。$$

故　$\sin\frac{1}{2}\theta=0$，或 $\tan^2\theta=1$。

因　$\cos2\theta$ 不能大於 1，故 $(\cos2\theta-2)\neq0$。

故　$\frac{1}{2}\theta=0$　或 π，　或$\theta=\frac{1}{4}\pi$，$\frac{3}{4}\pi$，$\frac{5}{4}\pi$，　或 $\frac{7}{4}\pi$。

以此諸值逐次代入原方程，知其均爲合宜之值。

故　$\theta=0$，$\frac{1}{4}\pi$，$\frac{3}{4}\pi$，$\frac{5}{4}\pi$　或 $\frac{7}{4}\pi$。

例題(4)　試解 $\sin2x=3\sin^2x-\cos^2x$。

$$2\sin x\cos x=3\sin^2x-\cos^2x。$$

$$2\sin x\cos x+\cos^2x+\sin^2x=4\sin^2x。$$

故　$\sin x+\cos x=\pm2\sin x$。

故　$\sin x=\cos x$，　或 $\cos x=-3\sin x$。

今　$\cos x \neq 0$，故若以 $\cos x$ 除兩端，則得

$$\tan x = 1,\ \text{或}\ \tan x = -\tfrac{1}{3}。$$

故　$x = 45°, 225°, 161°34'$ 或 $341°34'$。以之代入原式，知均爲合宜之值。

例題(5)* 試解下兩聯列方程：

$$\sin x + \sin y = a, \qquad (1)$$

$$\cos x + \cos y = b。 \qquad (2)$$

化之，得 $2\sin\tfrac{1}{2}(x+y)\cos\tfrac{1}{2}(x-y) = a, \quad (3)$

$$2\cos\tfrac{1}{2}(x+y)\cos\tfrac{1}{2}(x-y) = b。 \qquad (4)$$

以(4)除(3)得 $\tan\tfrac{1}{2}(x+y) = \dfrac{a}{b}。 \qquad (5)$

故 $$\sin\tfrac{1}{2}(x+y) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad (6)$$

代入(3)，得 $\cos\tfrac{1}{2}(x-y) = \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}。 \qquad (7)$

故 $$\tfrac{1}{2}(x+y) = \tan^{-1}\frac{a}{b},$$

$$\tfrac{1}{2}(x-y) = \cos^{-1}\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}。$$

故 $$x = \tan^{-1}\frac{a}{b} + \cos^{-1}\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2},$$

$$y = \tan^{-1}\frac{a}{b} - \cos^{-1}\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}。$$

習　題　XXI

試解下列諸方程：

1. $\sin 2x = 2\cos x.$

2. $4\cos 2x + 3\cos x = 1.$

3. $\cot x = \frac{1}{3}\tan x.$

4. $2\sin^2 x + 5\sin x = 3.$

5. $\sin 2\theta \cot\theta - \sin^2\theta = \frac{1}{2}.$

6. $\cot x - \tan x = \sin x + \cos x.$

7. $\tan x + \cot x = \tan 2x.$

8. $\tan^2\theta = \sin 2\theta.$

9. $\dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta} = \cos 2\theta.$

10. $\sqrt{1+\sin\theta} - \sqrt{1-\sin\theta} = 2\cos\theta.$

11. $(1-\tan x)\cos 2x = a(1+\tan x)$。

12. $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{12}\sin^2 2x.$

13. $\csc x = \cot x + \sqrt{3}.$

14. $\sin 4x - \cos 3x = \sin 2x.$

15. $2\cos x \cos 3x + 1 = 0.$

16. $\cos 3x - 2\cos 2x + \cos x = 0$

17. $\tan 2x \tan x = 1.$

18. $\sin(x+120°) + \sin(x+60°) = \frac{3}{2}.$

19. $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{5}{8}$.

20. $\sec x=2\tan x+\frac{1}{4}$.

21*. $\sin 11x-\sin 4x+\sin 5x\ \sin 2x=0$.

22*. $\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\cos 7x=0$.

23*. $\cos 2x\ \sec x+\sec x+1=0$.

24*. $\sin x\ \cos 2x\ \tan x\ \cot 2x\ \sec x\ \csc 2x=1$.

25*. $\sin\theta+\sin 2\theta+\sin 3\theta=0$.

26*. $[1-\sqrt{1-\tan^2\theta}]\cos 2\theta\ \text{vers}\, 3\theta=0$.

27*. $\sin(x-30°)=\frac{1}{2}\sqrt{3}\sin x$.

28*. $\tan(x+45°)\tan x=2$.

29*. $\sin 2x=\cos 3x$.

30*. $(3-4\cos^2 x)\sin 2x=0$

31*. $\begin{cases} r\sin\theta=a & (1), \\ r\cos\theta=b & (2). \end{cases}$ 求 r 及 θ 之值.

32*. $\begin{cases} r\sin(\theta+\alpha)=a & (1), \\ r\cos(\theta+\beta)=b & (2). \end{cases}$ 求 r 及 θ 之值.

33*. $\begin{cases} r\cos\phi\ \sin\theta=a & (1), \\ r\cos\phi\ \cos\theta=b & (2), \\ r\sin\phi=c & (3). \end{cases}$ 求 r, ϕ 及 θ 之值.

sector AOB = $\frac{1}{2}$ arc AB × radius

公 式 集 要

三 角 函 數

tan A

sin A　1　sec A

cos A　cot A　csc A

$$\sin^2 A+\cos^2 A=1.$$

$$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}.$$

$$\sin A \csc A=1.$$

$$\cos A \sec A=1.$$

$$\tan A \cot A=1.$$

$$1+\tan^2 A=\sec^2 A.$$

$$1+\cot^2 A=\csc^2 A.$$

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B.$$

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B.$$

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}.$$

$$\cot(A+B)=\frac{\cot A\cot B-1}{\cot B+\cot A}.$$

$$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B.$$

$$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B.$$

$$\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}.$$

$$\cot(A-B)=\frac{\cot A\cot B+1}{\cot B-\cot A}.$$

$$\sin A \cos B = \tfrac{1}{2}\left[\sin(A+B) + \sin(A-B)\right].$$
$$\cos A \sin B = \tfrac{1}{2}\left[\sin(A+B) - \sin(A-B)\right].$$
$$\cos A \cos B = \tfrac{1}{2}\left[\cos(A+B) + \cos(A-B)\right].$$
$$\sin A \sin B = -\tfrac{1}{2}\left[\cos(A+B) - \cos(A-B)\right].$$

$$\sin S + \sin T = 2 \sin \tfrac{1}{2}(S+T) \cos \tfrac{1}{2}(S-T).$$
$$\sin S - \sin T = 2 \cos \tfrac{1}{2}(S+T) \sin \tfrac{1}{2}(S-T).$$
$$\cos S + \cos T = 2 \cos \tfrac{1}{2}(S+T) \cos \tfrac{1}{2}(S-T).$$
$$\cos S - \cos T = -2 \sin \tfrac{1}{2}(S+T) \sin \tfrac{1}{2}(S-T).$$

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A.$$

$$\cos 2A = \begin{cases} \cos^2 A - \sin^2 A. \\ 1 - 2\sin^2 A. \\ 2\cos^2 A - 1. \end{cases}$$

$$\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}.$$

$$\cot 2A = \frac{\cot^2 A - 1}{2 \cot A}.$$

$$\sin \tfrac{1}{2} A = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}.$$

$$\cos \tfrac{1}{2} A = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}.$$

$$\tan \tfrac{1}{2} A = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}}.$$

$$\cot \tfrac{1}{2} A = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos A}{1 - \cos A}}.$$

三角形之面積

$$F=\frac{1}{2}bc\sin A.$$

$$F=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$ $s=\frac{a+b+c}{2}$

三角形之邊及角

$$a=b\cos C+c\cos B.$$

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$$ law of cos.

$$\sin\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}.$$

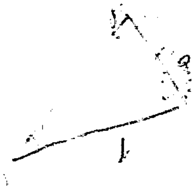
$$\cos\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}.$$

$$\tan\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}.$$

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$ law of sin.

$$\frac{b-c}{b+c}=\frac{\tan\frac{1}{2}(B-C)}{\tan\frac{1}{2}(B+C)}.$$

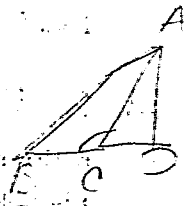
area = [illegible]



$= \frac{1}{2} a$ [illegible] $\sin B$ [illegible]

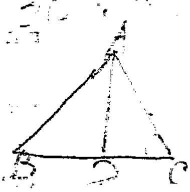
$\sin A$ [illegible]

If the $\angle$ is obtuse:



$AB^2 = BC^2 + CA^2 + 2BC \cdot CD$ [illegible]

If the $\angle$ is acute,



$AB^2 = BC^2 + CA^2 - 2BC \cdot CD$

中西名詞索引

民國新教科書

三角學

中華民國二年十二月初版
中華民國十六年十二月十版

每册定價大洋壹元
外埠酌加運費匯費

編纂者 嘉定秦汾

發行兼印刷者 上海寶山路 商務印書館

發行所 上海及各埠 商務印書館

New Democratic Textbook Series
TRIGONOMETRY
By
TSIN FEN

1st ed., Dec., 1913　　10th ed., Dec., 1927

Price: $1.00, postage extra

THE COMMERCIAL PRESS, LTD.
Shanghai, China

五六四九自