依照教育部修正課程標準編輯

復興高級中學教科書

代數學

乙組用

上冊

榮方舟編著

商務印書館發行

依照教育部修正課程標準編輯

復興高級中學教科書

代數學

乙組用

上册

榮方舟編著

商務印書館發行

中華民國二十五　版
中華民國三十五　版

（5702A）
高級中學用
興
科書
代數學　乙組用　二冊
上冊定價國幣肆角伍分
印刷地點外另加運費

編著者　榮方舟
主編者　王雲五
發行人　朱經農　上海河南中路
印刷所　商務印書館印刷廠
發行所　商務印書館　各地

（本書校對者　王釐吾　胡逖聰）

編輯大意

本書依據教育部最近頒布修正算學課程標準編輯,供高級中學代數科乙組教本之用.

本書於初等代數之複習甚爲重視.凡代數學中主要名詞之定義,以及各種基本算法皆重行講述.務令學者將初中時所已知或略知而未透徹者熟諳之.蓋惟溫故方可以知新.若對於初等代數尚未透徹了解,而即欲進修較高之理論,勢必格格不入,徒勞而無功也.

本書對於較高之理論,講解務求淺顯易明.過於深邃不易明曉者略去之,使學者不生畏難之心致隳其進修之志.

本書各章習題皆經審愼選擇.淺顯易解者占多數.較費心思者占少數.十分晦澀者從略.

本書以簡潔文言文敍述.故篇幅較少而代數學之主要節目已備.適應教育部所定教材與時間之支配.

本書編著忽促,謬誤難免,容再版時訂正之.倘蒙高明指正,至爲感幸.

民國二十五年六月編者識.

目　錄

第三章 乘方 開方

第四章 因式分析法

第五章 最高公因式 最低公倍式

第六章 分式

第七章 無理數 虛數

第八章 函數及其圖線

第九章 一次方程式

第十章 二次方程式

第十一章 不等式

高級中學教科書

代數學

第一章 緒論

§1 **引言** 代數學以文字代數作種種運算,其妙用學者於初中已窺見一斑.惟數學之進程無窮,其巧妙亦無限.初中代數所示僅最初步之微末而已.本書所論,前半大部爲初中代數之複習及補充,後半則多爲初中代數所未及.惟學者於代數學不僅須求其知而尤貴求其熟.蓋唯熟方能運用自如而方見其妙.學者於初中時對於代數學或有未覺發生興趣者乎?是則未熟而未見其妙也.故學者對於本書前半部幸勿以爲已知而忽視之.

§2. **代數數** 代數學以文字代數.此所謂數較算術中所謂數其意義爲廣.代數學之數包括兩部分,算術中所謂數僅兩部分中之一曰代數數之絕對值.其又一部分爲正號(+)及負號(−)曰代數數之符號.

§3. 代數數之基本運算 數之基本運算,不外乎加減乘除.代數數亦然.代數數之運算法,學者在初中時當已習知之,茲再舉特例表之如下:

加法:

$$(+5)+(+7)=+12,$$
$$(+5)+(-7)=-2,$$
$$(-5)+(+7)=+2,$$
$$(-5)+(-7)=-12.$$

減法:

$$(+5)-(+7)=-2$$
$$(+5)-(-7)=+12.$$
$$(-5)-(+7)=-12$$
$$(-5)-(-7)=+2.$$

乘法:

$$(+5)\times(+7)=+35,$$
$$(+5)\times(-7)=-35,$$
$$(-5)\times(+7)=-35,$$
$$(-5)\times(-7)=+35,$$

除法:

$$(+5)\div(+7)=+\frac{5}{7}.$$
$$(+5)\div(-7)=-\frac{5}{7},$$
$$(-5)\div(+7)=-\frac{5}{7}$$
$$(-5)\div(-7)=+\frac{5}{7}.$$

以上諸法,學者試以言語普徧說明之.

代數數之符號爲正者常略去之.故數字之前無符號者意卽爲正數也.

§4. 倍數　係數　加法之被加數爲同數時,其和曰此數之倍數.表此倍數之數字曰係數.例如

$$(-7)+(-7)+(-7)+(-7)+(-7)=5\times(-7)=-35.$$

卽 -35 爲 -7 之倍數.此時 -35 爲 -7 之 5 倍,卽 5 爲其係數.

設以 a 代 -7,卽 $a=-7$,則上式可寫爲

$a+a+a+a+a=5a$.卽 $5a$ 爲 a 之倍數,$5a$ 爲 a 之 5 倍,而 5 爲其係數.

§5. 冪數　指數　乘法之被乘數爲同數時,其積曰此數之冪數,表此冪數之數字曰指數.例如

$$(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)=(-2)^4=16.$$

卽 16 爲 -2 之冪數.此時 16 爲 -2 之 4 次冪,卽 4 爲其指數.

設以 a 代 -2,卽 $a=-2$,則上式可寫爲 $a\cdot a\cdot a\cdot a=a^4$.卽 a^4 爲 a 之冪數.a^4 爲 a 之四次冪,而 4 爲其指數.

§6. 項　運算之慣例,先乘除而後加減.故在算術中 $5+3\times8-6\div2=5+24-3=26$.代數亦然.$a+b\times c-d\div e$ 意爲 $a+(b\times c)-(d\div e)$.爲使易計.$b\times c$ 寫

作 bc, 而 $d \div e$ 寫作 $\frac{d}{e}$ 故 $a+b\times c-d\div e=a+bc-\frac{d}{e}$. 意謂此式係 $+a$, $+bc$, 及 $-\frac{d}{e}$ 三者所集合而成也. 如是之各個曰項. 項分正負二種. 冠以"+"號者曰正項, "−"號者曰負項. 上式中 $+a$, $+bc$, 爲正項, $-\frac{d}{e}$ 爲負項. 式中第一項爲正項時,其"+"號常略去.

§7 **代數式** 以運算符號聯合若干數字,或代替數字之文字而成之式曰代數式, 或簡稱曰式.

僅有一項之式曰單項式. 有二項,三項,四項,……者各稱曰二項式, 三項式, 四項式, ……凡二項以上諸式總稱曰多項式.

代數式中所有文字皆代表一數値. 而代數式全式亦代表一數値. 例如代數式 $a^4+2b^2c-3bc^2+cd$ 中, 若 $a=2$, $b=-3$, $c=-1$, $d=0$, 則此代數式之值爲 7.

因

$$
\begin{aligned}
&a^4+2b^2c-3bc^2+cd\\
&=2^4+2\times(-3)^2\times(-1)-3\times(-3)(-1)^2+(-1)\times 0\\
&=16+(-18)-(-9)+0\\
&=16-18+9=7.
\end{aligned}
$$

習題一

若 $a=1$, $b=-2$, $c=3$, $d=0$, 求以下各式之値:

1. $a^3+b^3+c^3+d^3$.

2. $\frac{1}{2}bc^3-a^3-b^3-\frac{3}{4}ab^2c$.

3. $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc$.

4. $2a^2+2b^2+2c^2+2d^2-3bc-3cd-3da-3ab$.

5. $bc^2+2cd^2-3da^2-4ab^2$.

6. $\dfrac{(a+b+c+d)^2}{a^2+b^2+c^2+d^2}$.

7. $(a+b+c+d)^3-(a+b)^3-(c+d)^3$.

8. $(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-d^2)(d^2-a^2)$.

9. $a^2+\dfrac{b^2}{c^2-\dfrac{ad}{b+\dfrac{1}{c}}}$.

10. $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$.

§8. **冪根 根指數** a爲b之冪數,則b曰a之冪根.如 $a=b^3$ 卽a爲b之三次冪,則b爲a之三次冪根,寫作 $b=\sqrt[3]{a}$.此"$\sqrt{\ }$"曰根號,根號中"3"字曰根指數.當根指數爲2時,恆略去之.例如 $x^2=a$,則 $x=\sqrt{a}$.

§9. **有理整式** 代數式之無文字爲分母者曰整式,無文字在根號內者曰有理式.代數式之爲有理式而又爲整式者曰有理整式.

§10. **因式** 乘積之被乘數曰因數.因數之爲代數式者曰因式.

例如3,5爲15之因數.a,b爲ab之因式.

§11. **次** 一項中所有因式之個數曰此項之次數.多項式中,最高次項之次數,卽爲此式之次數.例如a^2b, $3abc$, $-2c^3$皆爲三次項.$3a^3b-2a^2b^3+a^4b^2$爲六次式,因其第三項爲六次項也.

項之次數及式之次數,有時指定某文字而言之.例如ax^2y爲四次項,若僅就x而言,則爲二次項,意謂其中ay視爲係數也.又若就x,y而言,則爲三次項,意謂其中a視爲係數也.ax^2+bx+c爲三次式,若就x而言,則爲二次式.

§12. **齊次式** 多項式之各項次數相等時曰齊次式.例如$3a^2+2ab-4b^2$爲二次齊次式.$x^3+y^3+z^3-3xyz$爲三次齊次式.$ax^2+bxy+cy^2$就x,y而言爲二次齊次式.

§13. **式之整列 降冪序 升冪序** 代數式各項依其中某文字之次數高低次序排列之曰整列.高次在前曰降冪序.低次在前曰升冪序.例如$3x^3-4x^2-x+2$爲降冪序.若改爲$2-x-4x^2+3x^3$則爲升冪序.

又如$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$則為a之降冪序,同時卻為b之升冪序.

習題二

1. $2x^3-3x^3y+xy^2-5xy^4$為幾項式?為幾次式?就x而言為幾次式?就y而言為幾次式?

2 試將上題之代數式依x整列為升冪序再依y整列為降冪序.

3. 若$x=-2, y=-\frac{1}{2}$,則第一題之代數式之值為何?

4. 以下諸式中,孰為齊次式?

(a) $a^3+a^2b-a^2c+bc^2-b^2c+3aba$.

(b) $a^3+2ab-4a^2-abc$.

(c) $ax^2+b^2x+c^3$.

(d) $x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc$

第二章　整式四則

§14. **加法之對易律**　各式行加法,其各項先後次序可任意對易,名曰對易律.

例如　$a+b=b+a$, $a+b+c=a+c+b=b+a+c=b+c+a$ $=c+a+b=c+b+a$

§15. **加法之結合律**　各式行加法,其各項可任意結合之,名曰結合律.

例如　$$(a+b)+(c+d)=a+(b+c)+d$$
$$=(a+b+c)+d=a+(b+c+d).$$

§16. **減法可視爲加法**　在代數學中,減法恆可改爲加法.例如 $a-b=a+(-b)$, $a-(-b)=a+b$, $a-(b+c-d)$ $=a+(-b-c+d)$.故若將減式中各項符號改變而行加法,則其結果適等於行減法所得之差.故實際代數學中減法卽可視爲加法.是以加法之對易律及結合律亦適合於減法.

例如　$a-b=-b+a$, $a-b-c=a-c-b=-b+a-c$ $=-b-c+a=-c+a-b=-c-b+a$.

又如　$(a-b)+(c-d)=a-(b-c)-d$

$$=a-(b-c+d)=(a-b+c)-d.$$

注意：　$a-b \neq b-a,\ (a-b)-c \neq a-(b-c).$

§17. **同類項**　兩項全相同或僅異其係數者曰同類項.例如 $3a^2b,-2a^2b$ 爲同類項.$3a^2b,3ab^2$ 則爲不同類項.

§18. **同類項之加減法**　同類項行加減所得之結果仍爲同類項.以各項係數加減之結果爲係數.

(例一)　$3a^2b+2a^2b=(3+2)a^2b=5a^2b.$

(例二)　$5x^2-4x^2=(5-4)x^2=x^2.$

(例三)　$7xy+3xy-2xy=(7+3-2)xy=8xy.$

§19. **不同類項之加減法**　不同類項行加減,不能使之合併爲一項,僅以符號"+"或"−"聯各項,即爲加減之結果.

(例一)　$a+b=a+b.$

(例二)　$2a+(-3b)=2a-3b.$

(例三)　$3x^2-(-2x)+1=3x^2+2x+1.$

注意一.　在算術中,加法之結果曰和,減法之結果曰差.在代數中減法恆可視爲加法.故加減法之結果統稱曰代數和.

注意二.　同類項之代數和合爲一項,即單項式.不

同類項之代數和,不能合爲一項,是卽所謂多項式也.

§ 20. 多項式之加減法　多項式行加減,依對易律及結合律,以諸式中各項之同類者合併之,不同類者聯以符號"+"或"−".

(例一)　$(3a-2b+c)+(2a+3b-4c+d)$

$$=3a+2a-2b+3b+c-4c+d$$

$$=5a+b-3c+d$$

(例二)　$(3x^3-2x^2+4x-5)-(x^3+5x^2-x-4)$

$$=3x^3-2x^2+4x-5-x^3-5x^2+x+4$$

$$=3x^3-x^3-2x^2-5x^2+4x+x-5+4$$

$$=2x^3-7x^2+5x-1.$$

(例三)　$(3x^3-2x^2y-y^3)+(x^3+4xy^2+2y^3)$

$$-(2x^3-x^2y+xy^2)$$

$$=3x^3-2x^2y-y^3+x^3+4xy^2+2y^3-2x^3+x^2y-xy^2$$

$$=3x^3+x^3-2x^3-2x^2y+x^2y+4xy^2-xy^2-y^3+2y^3$$

$$=2x^3-x^2y+3xy^2+y^3.$$

§ 21　乘法之對易律　各式行乘法,其各因式先後序可任意對易,名曰對易律.

例如　$ab=ba,\ abc=acb=bac=bca=cab=cba.$

§ 22. 乘法之結合律　各式行乘法,其各因式可任

意結合之,名曰結合律.

例如　$(ab)(cd)=a(bc)d=(abc)d=a(bcd)$.

§ 23. **乘法之分配律**　以一式乘諸式之和之積等於以此式分別乘各式之積之和,名曰分配律.

例如　$(a+b-c)\times m=am+bm-cm$.

§ 24. **倒數**　兩數相乘之積爲 1,則此二數曰互爲倒數.例如 a 之倒數爲 $\frac{1}{a}$, $\frac{m}{n}$之倒數爲$\frac{n}{m}$.

§ 25. **除法可視爲乘法**　在代數學中除法恆可改爲乘法.例如$a\div b=a\times\frac{1}{b}$, $a\div\frac{1}{b}=a\times b$, $\frac{p}{q}\div\frac{m}{n}=\frac{p}{q}\times\frac{n}{m}$.

故若將除數改爲其倒數而行乘法,則其結果適等於行除法所得之商.故實際代數學中除法亦可視爲乘法,是以乘法之各律亦適合於除法.

例如　$a\div b=1\div b\times a$.　$a\div b\times c=a\times c\div b=1\div b\times a\times c$
$=1\div b\times c\times a=c\times a\div b=c\div b\times a$.

又如　$(a\div b)\times(c\div d)=a\div(b\div c)\div d$
$=(a\div b\times c)\div d=a\div(b\div c\times d)$.

又如　$(a+b-c)\div m=(a\div m)+(b\div m)-(c\div m)$.

注意:　$a\div b\neq b\div a$,　$(a\div b)\div c\neq a\div(b\div c)$

§ 26. **指數律**　關於諸數之指數,有以下諸公式,名

(B) 指數律：——

公式一：$a^m \times a^n = a^{m+n}$. 式中 a 爲任何式，m, n 爲任意整數. 下同.

(例) $a^3 \times a^2 = a^{3+2} = a^5$.

[證] $a^3 = a \cdot a \cdot a,\ a^2 = a \cdot a$.

$\therefore\quad a^3 \times a^2 = (a \cdot a \cdot a) \times (a \cdot a) = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5$.

同樣 $a^m \times a^n = a^{m+n}$.

公式二：$(a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn}$.

(例) $(a^3)^2 = (a^2)^3 = a^{3\times 2} = a^6$.

[證] 因 $(a^3)^2 = a^3 \times a^3 = a^{3+3} = a^{2\times 3} = a^6$.

又 $(a^2)^3 = a^2 \times a^2 \times a^2 = a^{2+2+2} = a^{3\times 2} = a^6$.

同樣 $(a^m)^n = a^{mn},\ (a^n)^m = a^{mn}$.

公式三：$(abc\cdots\cdots)^n = a^n b^n c^n \cdots\cdots$.

(例) $(abc\cdots\cdots)^3 = a^3 b^3 c^3 \cdots\cdots$.

[證] 因 $(abc\cdots\cdots)^3 = abc\cdots\cdots \times abc\cdots\cdots \times abc\cdots\cdots$

$= aaa \times bbb \times ccc \times \cdots\cdots$

$= a^3 b^3 c^3 \cdots\cdots$.

同樣 $(abc\cdots\cdots)^n = a^n b^n c^n \cdots\cdots$.

§27. 羃數之符號. 正數之羃數恆爲正. 負數之偶數羃爲正，其奇數羃爲負. 例如 $(-2)^2 = +4,\ (-2)^3 = -8$,

$(-2)^4=+16$, $(-2)^{2n}=+2^{2n}$, $(-2)^{2n+1}=-2^{2n+1}$, $(-a)^{2n}=+a^{2n}$, $(-a)^{2n+1}=-a^{2n+1}$.

注意：特例 $(-1)^{2n}=+1$, $(-1)^{2n+1}=-1$. 故

$$(-2)\times(-3)\times(-4)=(-1)^3\times2\times3\times4=-24.$$

$$(-2)\times3\times(-4)=(-1)^2\times2\times3\times4=+24$$

§28. 代數式之乘法　各式為單項式時,依指數律求各文字之積而以各係數之積為係數.

(例一)　$5a\times3b=15ab.$

(例二)　$2a^3b\times(-3ab^3)=-6a^4b^4.$

(例三)　$(-3a^2bc)\times(-2ab^2c)\times(-5abcd)=-30a^4b^4c^3d.$

各式為多項式時,依配分律乘之.

(例四)　$(a+b-c)\times m=am+bm-cm.$

(例五)　$(3a^2b+2ab^2-3b^3)\times(-2a)$

$$=3a^2b\times(-2a)+2ab^2\times(-2a)-3b^3\times(-2a)$$

$$=-6a^3b-4a^2b^2+6ab^3.$$

(例六)　$(a+b-c)\times(m-n)$

$$=a(m-n)+b(m-n)-c(m-n)$$

$$=am-an+bm-bn-cm+cn.$$

(例七)　$(x^3-2x^2+3x-4)\times(x-5)$

$$=x^3(x-5)-2x^2(x-5)+3x(x-5)-4(x-5)$$

$$=x^4-5x^3-2x^3+10x^2+3x^2-15x-4x+20$$

$$=x^4-7x^3+13x^2-19x+20.$$

注意：僅含一文字之高次多項式相乘如上例,常另行排列一筆式乘算較便.如下例:

(例八)　求 $x^4-2x-3x^2+4x^3-2$, $2x+3x^2-5$ 之積.兩式各依降冪序排之而自左至右行乘算如下:

$$
\begin{array}{rrrrrrrl}
 & & x^4 & +4x^3 & -3x^2 & -2x & -2 & \\
 & & & & 3x^2 & +2x & -5 & (\times \\
\hline
3x^6 & +12x^5 & -9x^4 & -6x^3 & -6x^2 & & & \\
 & 2x^5 & +8x^4 & -6x^3 & -4x^2 & -4x & & \\
 & & -5x^4 & -20x^3 & +15x^2 & +10x & +10 & \\
\hline
3x^6 & +14x^5 & -6x^4 & -32x^3 & +5x^2 & +6x & +10 & (+
\end{array}
$$

注意：用此筆式之便利在使結果中各同類項皆於一縱行便於加減也.故含有二文字以上之多項高次式相乘亦可用如上之排列法乘之.

§29　**代數式之除法**　各式爲單項式時,依單項之乘法逆推之.

(例一)　以 $2a^2b$ 除 $10a^4b^3$.

[解]　設所得之商為 Q, 則必 $2a^2b(Q)=10a^4b^3$.

但　$2a^2b\times(5a^2b^2)=10a^4b^3$,　∴　$Q=5a^2b^2$.

即　$10a^4b^3\div 2a^2b=5a^2b^2$.

注意:　指數律公式一, $a^m\times a^n=a^{m+n}$ 逆推之可得除法之指數律 $a^{m+n}\div a^n=a^m$, 亦即 $a^m\div a^n=a^{m-n}$.

(例二)　$14a^5b^4c^3d\div(-7a^2bc^3)=-2a^3b^3d$.

以單項式除多項式可依配分律除之.

(例三)　$(15a^5b^5-10a^4b^6-25a^3b^7)\div(-5ab)$

$$=-3a^4b^4+2a^3b^5+5a^2b^6.$$

多項式除多項式,須依下列步驟演算之:

[第一步]　整列被除式及除式同為降冪序(或升冪序).

[第二步]　以除式首項除被除式首項得商之首項.

[第三步]　以所得商之首項乘除式而從被除式中減之.

[第四步]　以減得之差為新被除式,再依以上步驟繼續除之.

(例四)　以 $2x-5+3x^2$ 除 $14x^5-32x^3+5x^2+10+6x-6x^4+3x^6$. 依上述步驟演算如下:

$$\begin{array}{l|l}
3x^6+14x^5-6x^4-32x^3+5x^2+6x+10 & 3x^2+2x-5 \\ \cline{2-2}
3x^6+\ \ 2x^5-5x^4 & x^4+4x^3-3x^2-2x-2 \\ \cline{1-1}
\qquad 12x^5-\ \ x^4-32x^3+\cdots\cdots & \\
\qquad 12x^5+8x^4-20x^3 & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad -9x^4-12x^3+\ \ 5x^2+\cdots\cdots & \\
\qquad\quad -9x^4-\ \ 6x^3+15x^2 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad -6x^3-10x^2+6x+\cdots\cdots & \\
\qquad\qquad -6x^3-\ \ 4x^2+10x & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad -\ \ 6x^2-\ \ 4x+10 & \\
\qquad\qquad\qquad -\ \ 6x^2-\ \ 4x+10 & \\ \cline{1-1}
\end{array}$$

故得商為 $x^4+4x^3-3x^2-2x-2$.

(例 五) $(x^5+y^5)\div(x+y)$.

$$\begin{array}{l|l}
x^5+y^5 & x+y \\ \cline{2-2}
x^5+x^4y & x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4 \\ \cline{1-1}
\quad -x^4y+y^5 & \\
\quad -x^4y-x^3y^2 & \\ \cline{1-1}
\qquad x^3y^2+y^5 & \\
\qquad x^3y^2+x^2y^3 & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad -x^2y^3+y^5 & \\
\qquad\quad -x^2y^3-xy^4 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad xy^4+y^5 & \\
\qquad\qquad xy^4+y^5 & \\ \cline{1-1}
\end{array}$$

故　$(x^5+y^5)\div(x+y)=x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4.$

§ 30. 括號之去插法　由加減法之各律可知:

(1) 去括號而括號前爲正號時,則括號中各項之符號不變.

(2) 去括號而括號前爲負號時,則括號中各項之符號改變.

(3) 欲將諸項合爲一正項,則不變此各項之符號而加括弧,括弧前置正號.

(4) 欲將諸項合爲一負項,則改變此各項之符號而加括弧,括弧前置負號.

(例一)　$a+(b+c-d)=a+b+c-d.$

(例二)　$a+(-b-c+d)=a-b-c+d.$

(例三)　$a-(b+c-d)=a-b-c+d.$

(例四)　$a-(-b-c+d)=a+b+c-d.$

(例五)　$ax^2-bx+cx^3-dx+x^2-2x-x^3$ 中,依 x 之次數分項,而 (a) 令各項皆爲正項. (b) 令各項皆爲負項. (c) 令 x 之三次,二次項爲正,一次項爲負.

(a)　$ax^2-bx+cx^3-dx+x^2-2x-x^3$

$$=(cx^3-x^3)+(ax^2+x^2)+(-bx-dx-2x).$$

(b)　$ax^2-bx+cx^3-dx+x^2-2x-x^3$

$$= -(x^3 - cx^3) - (-ax^2 - x^2) - (bx + dx + 2x).$$

(c) $$ax^2 - bx + cx^3 - dx + x^2 - 2x - x^3$$

$$= (cx^3 - x^3) + (ax^2 + x^2) - (bx + dx + 2x).$$

(例六) 簡約 $2(x^2 + 3x - 2) + 3(2x - x^2 - 5) - 4(3 - x - 2x^2)$

原式 $= (2x^2 + 6x - 4) + (6x - 3x^2 - 15) - (12 - 4x - 8x^2)$

$$= 2x^2 + 6x - 4 + 6x - 3x^2 - 15 - 12 + 4x + 8x^2$$

$$= (8 + 2 - 3)x^2 + (6 + 6 + 4)x - (4 + 15 + 12).$$

注意: 括號前有係數時,依乘法配分律乘之.

習 題 三

簡約以下各式 (1—4):—

1. $x - (-x - 2y + z) + (-x + y)$.

2. $m + n - [(m - n) - (m + n)]$.

3. $3x - [3y + \{3z - 2(z - x) + y\} - 2x]$.

4. $m - 3 - 2[-2\{-(m - 2\overline{m - n})\}]$.

將以下各式之前三項合爲一正項,其餘各項合爲一負項 (5—6):—

5. $x^3 + 2x^2 - 3x - y^2 - 2y + 3$.

6. $-9x^2 - 3xy + y^2 + m - n + 1$.

求下列各組式之代數和 (7—9):—

7. $x+y+z,\ -x+y+z,\ x-y+z,\ x+y-z.$

8. $x^3-x^2+8x+9,\ 8+7x-x^2-7x^3,\ -5x^4+3x^2-7.$

9. $x^3+3x^2y-3xy^2-y^3,\ 8x^3-7x^2y,\ x^3+y^3-2xy(x-y).$

10. 以下四式內,從第一式減去餘三式之和:

$a^3+b^3+c^3-3abc,\ a^2b-3ab^2-3ac^2,\ 2ab^2-3abc-a^2c,$

$2a^3+b^3-2a^2b.$

演算以下各乘法 (11—16):—

11. $(x^2+4x+4)(x^2-4x+4).$

12. $(6x+9+x^2)(9+x^2-6x).$

13. $(x^3+y^3+x^2y+xy^2)(x-y).$

14. $(x^4+y^4+x^2y^2-x^3y-xy^3)(x+y).$

15. $(a^2+b^2+c^2-bc-ac-ab)(a+b+c).$

16. $(x+2y-3)(x^2+8y^2+27+6y+3x-2xy)$

演算以下各除法 (17—22):—

17. $(x^3+y^3)\div(x+y).$

18. $(x^4-y^4)\div(x-y).$

19. $(x^5+y^5)\div(x+y).$

20. $(x^4+9x^2+16)\div(x^2+3x+4).$

21. $(x^3+y^3-9xy+27)\div(x+y+3).$

22. $(x^3+y^3+z^3-3xyz)\div(x+y+z).$

§31 分離係數法 多項式行乘除,手續至繁,爲簡省手續計,凡一個文字之多項式乘除,或二個文字之齊次式乘除,皆可僅取各項之係數演算之,名曰分離係數法.

(例一) 求 $(x^2+2x+3)(x^2-x+3)$ 之積.

[解] 依普通演算法,應如下式:

$$
\begin{array}{rrrrr}
x^2 & +2x & +3 & & \\
x^2 & -x & +3 & & \\
\hline
x^4 & +2x^3 & +3x^2 & & \\
 & -x^3 & -2x^2 & -3x & \\
 & & +3x^2 & +6x & +9 \\
\hline
x^4 & +x^3 & +4x^2 & +3x & +9
\end{array}
$$

然若僅取各項之係數,照上式同樣演算如下式,其結果之係數無異:

$$
\begin{array}{rrrrr}
1 & +2 & +3 & & \\
1 & -1 & +3 & & \\
\hline
1 & +2 & +3 & & \\
 & -1 & -2 & -3 & \\
 & & +3 & +6 & +9 \\
\hline
1 & +1 & +4 & +3 & +9
\end{array}
$$

既得5項之各係數,自可知其積之爲

$$x^4+x^3+4x^2+3x+9.$$

注意一：　乘式被乘式須同依冪序排列.

注意二：　乘式被乘式中若有缺項當視其係數爲0而補足之.

(例二)　求 $(3a^3+2a^2b+5b^3)2a^2-3b^2)$ 之積.

[解]

$$\begin{array}{l}
3+2+0+5\\
2+0-3\\
\hline
6+4+0+10\\
\qquad -9-\ 6+0-15\\
\hline
6+4-9+\ 4+0-15
\end{array}$$

積爲　$6a^5+4a^4b-9a^3b^2+4a^2b^3-15b^5$.

(例三)　以 $xy+2x^2+3y^2$ 除 $5x^3y+6x^4+7xy^3+18x^2y^2+12y^4$.

[解]

$$\begin{array}{r|l}
6+5+18+7+12 & 2+1+3\\
\cline{2-2}
6+3+\ 9 & 3+1+4\\
\cline{1-1}
2+\ 9+7 & \\
2+\ 1+3 & \\
\cline{1-1}
8+4+12 & \\
8+4+12 & \\
\cline{1-1}
\end{array}$$

得商爲 $3x^2+xy+4y^2$.

習題四

用分離係數法演算以下各題:—

1. $(x^4+3x^3+9x^2+27x+81)(x^2-9)$

2. $(a^3+b^3+3a^2b+3ab^2)(a^2+b^2+2ab)$.

3. $(x^5+2x^3+3x+5)(x^2-2x+1)$.

4. $(x^3+125)\div(x+5)$.

5. $(10a^4b+8a^5-2a^2b^3-10a^3b^2+21ab^4$

$-18b^5)\div(2a^2+ab-3b^2)$.

§32. **綜合除法** 當被除式與除式爲僅含一個文字之多項式而除式之最高次項之係數爲 1 時,可用極簡括之式演算之,名曰綜合除法.

(例一) 以 $x-2$ 除 $3x^4-11x^3+8x^2+5x-2$.

〔解〕 先以被除式各項之係數依降冪序排於第一列,空去第二列,下畫一橫線在其右端

$$\begin{array}{lrrrrr|l} (\text{第一列}) & 3 & -11 & +8 & +5 & -2 & \\ (\text{第二列}) & & & & & & +2 \\ \hline (\text{第三列}) & 3 & & & & & \end{array}$$

畫一縱線.將除式內常數項"−2"反其符號爲"+2",寫於縱線之右第二列如上式.於是在橫線下第三列內第一行下,寫被除式之第一係數 3,以

$$\begin{array}{lrrrrr|l} (\text{第一列}) & 3 & -11 & +8 & +5 & -2 & \\ (\text{第二列}) & & +6 & & & & +2 \\ \hline (\text{第三列}) & 3 & -5 & & & & \end{array}$$

此數 3 與第二列右端之 +2 相乘得 +6,寫在第二列之

第二行再在第三列之第二行寫 -11, $+6$ 之和 -5. 以此數 -5 與第二列右端之 $+2$ 相乘得 -10 寫在第二列之第三行. 再在第三列之同行內,寫 $+8$, -10 之和 -2. 如是繼續寫下至末行 -2, $+2$, 之和爲 0. 即除盡得商之各項係數, 即得 $(3x^4-11x^3+8x^2+5x-2)\div(x-2)=3x^3-5x^2-2x+1$.

$$
\begin{array}{lrrrrr|l}
\text{(第一列)} & 3 & -11 & +8 & +5 & -2 & \\
\text{(第二列)} & & +6 & -10 & -4 & +2 & +2 \\
\cline{2-6}
\text{(第三列)} & 3 & -5 & -2 & +1 & +0 &
\end{array}
$$

(例二)　以 $x+3$ 除 $4x^4+13x^3-2x^2-5x+20$.

[解]

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
4 & +13 & -2 & -5 & +20 & \\
 & -12 & -3 & +15 & -30 & -3 \\
\hline
4 & +1 & -5 & +10 & -10 &
\end{array}
$$

故得 $(4x^4+13x^3-2x^2-5x+20)\div(x+3)=4x^3+x^2-5x+10-\dfrac{10}{x+3}$.

注意:　除法未必能除盡. 末數 -10 爲剩餘,故當如上寫在商中

(例三)　以 x^2+3x-2 除 $2x^6+5x^5-10x^4-3x^3+11x^2-20x+7$

[解]　因除式爲三項式故第一列下空去二列而以

除式中 x 之係數"+3"反其符爲"−3"，

$$
\begin{array}{lllllllll|l}
(\text{第一列}) & 2 & +5 & -10 & -3 & +11 & -20 & +7 & & \\
(\text{第二列}) & & -6 & & & & & & & -3 \\
(\text{第三列}) & & & +4 & & & & & & +2 \\
\cline{2-9}
(\text{第四列}) & 2 & & & & & & & &
\end{array}
$$

寫於縱線之右第二列，常數"−2"反其符號爲"+2"，寫於縱線之右第三列．於是在橫線下第四列之第一行下，寫被除式之第一係數 2．以此數 2 乘 −3 得 −6，寫於第二列之第二行，仍以此數 2 乘 +2 得 +4，寫於第三列之第三行如上式．於是在第四列之第二行內，寫 +5 −6 之和 −1．繼續與 −3 及 +2 相乘，挨次寫其積於第二列，第三列內，再求得第四列之第三數．如是繼續求之如右式．得商及剩餘之各項係數．

$$
\begin{array}{rrrrrrr|r}
2 & +5 & -10 & -3 & +11 & -20 & +7 & \\
 & -6 & +3 & +9 & -12 & +21 & & -3 \\
 & & +4 & -2 & -6 & +8 & -14 & +2 \\
\hline
2 & -1 & -3 & +4 & -7 & +9 & -7 &
\end{array}
$$

即商爲 $2x^4-x^3-3x^2+4x-7+\dfrac{9x-7}{x^2+3x-2}$．

(例四)　以 x^3+2x^2+x-3 除

$$3x^7+4x^6+2x^5-3x^4+2x^3-18x^2-2x+14.$$

［解］

$$\begin{array}{l|l}
3+4+2-3+\ 2-18-\ 2+14 & \\
\quad -6+4-6-\ 4+22 & -2 \\
\qquad\quad -3+2-\ 3-\ 2+11 & -1 \\
\qquad\qquad\quad +9-\ 6+\ 9+\ 6-33 & +3 \\
\hline
3-2+3+2-11+11+15-19 &
\end{array}$$

得商 $3x^4-2x^3+3x^2+2x-11+\dfrac{11x^2+15x-19}{x^3+2x^2+x-3}$.

(例五) 以 $2x-3$ 除 $6x^4-13x^3-2x^2+8x+7$

[解] 除式中最高次項之係數爲 2 不爲 1, 本不能用綜合除法. 然

$$(6x^4-13x^3-2x^2+8x+7)\div(2x-3)$$

$$=(6x^4-13x^3-2x^2+8x+7)\div 2\div\left(x-\frac{3}{2}\right)$$

或 $$=(6x^4-13x^3-2x^2+8x+7)\div\left(x-\frac{3}{2}\right)\div 2.$$

故可演算之如下:

$$\begin{array}{r|l|l}
2 & 6-13-2+\ 8+\ 7 & \\
\hline
 & 3-\frac{13}{2}-1+\ 4+\frac{7}{2} & \\
 & \quad +\frac{9}{2}-3-\ 6-\ 3 & \frac{3}{2} \\
\hline
 & 3-\ 2\ -4-\ 2+\frac{1}{2} &
\end{array}$$

或

$$\begin{array}{r|l|l}
 & 6-13-2+\ 8+\ 7 & \\
 & \quad +9-6-12-\ 6 & \frac{3}{2} \\
2 & 6-\ 4\ -8-\ 4+\ 1 & \\
\hline
 & 3-\ 2\ -4-\ 2+\frac{1}{2} &
\end{array}$$

故所得商同爲 $3x^3-2x^2-4x-2+\dfrac{1}{2(2x-3)}$.

習 題 五

用綜合除法演算下列各題:—

1. $(x^3+4x^2-3x+2)\div(x+2)$.

2. $(3x^6-15x^5+5x^4+25x^3+4x+25)\div(x-5)$

3. $(x^5-243)\div(x+3)$.

4. $(2x^6+9x^5+3x^4+36x^3-30x^2-45x+25)\div(x+5)$.

5. $(2x^6+9x^5+3x^4+36x^3-30x^2-45x+25)\div(x^2+5)$.

6. $(x^4+x^3+7x^2-6x+8)\div(x^2+2x+8)$.

7. $(192-x^4+128x+4x^2-8x^3)\div(16-x^2)$.

8. $(6x^5-x^4+4x^3-5x^2-x-15)\div(2x^2-x+3)$.

9. $(14x^4+45x^3y+78x^2y^2+45xy^3-14y^4)\div(2x^2+5xy+7y^2)$.

10. $\left(\dfrac{1}{8}a^3-\dfrac{9}{4}a^2x+\dfrac{27}{2}ax^2-27x^3\right)\div\left(\dfrac{1}{2}a-3x\right)$.

§33. 乘法之公式 當乘式,被乘式在幾種特別情形之下,須熟記其結果而不用草式演算之.是曰乘法之公式.以下各式中大字母均代表任何代數式.

公式一: $(A+B-C+\cdots\cdots)\times M=AM+BM-CM+\cdots\cdots$

(例一) $(3a^3-2a^2b-ab^2+4b^3)\times(5ab)$.

$$=15a^4b-10a^3b^2-5a^2b^3+20ab.$$

公式二：　$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2.$

(例二)　$(3a+2b)^2=(3a)^2+2(3a)(2b)+(2b)^2$

$$=9a^2+12ab+4b^2.$$

(例三)　$(3a-2b)^2=(3a)^2-2(3a)(-2b)+(-2b)^2$

$$=9a^2-12ab+4b^2.$$

(例四)　$(a+2b-3c)^2=[(a+2b)+(-3c)]^2$

$$=(a+2b)^2+2(a+2b)(-3c)+(-3c)^2$$

$$=a^2+4ab+4b^2-6ac-12bc+9c^2.$$

注意：　公式二可分爲二：

(a)　$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$

(b)　$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$

公式三：　$(A+B)(A-B)=A^2-B^2.$

(例五)　$(3a+2b)(3a-2b)=(3a)^2-(2b)^2=9a^2-4b^2.$

(例六)　$(a+2b-3c)(a-2b-3c).$

[解]　將兩因式中同號各項爲第一項，異號各項爲第二項得：

原式 $=[(a-3c)+2b][(a-3c)-2b]$

$$=(a-3c)^2-(2b)^2=a^2-6ac+9c^2-4b^2.$$

(例七)　$(2a-3b-c+4d)(2a+3b-c-4d)$

$$=[(2a-c)+(4d-3b)][(2a-c)-(4d-3b)]$$

$$=(2a-c)^2-(4d-3b)^2$$

$$=4a^2-4ac+c^2-(16d^2-24bd+9b^2)$$

$$=4a^2-4ac+c^2-16d^2+24bd-9b^2.$$

(例八) $(2a-3b-c+4d)(2a+3b+c-4d)$

$$=[2a+(4d-3b-c)][2a-(4d-3b-c)]$$

$$=(2a)^2-(4d-3b-c)^2$$

$$=4a^2-(16d^2+9b^2+c^2-24bd+8cd+6bc)$$

$$=4a^2-16d^2-9b^2-c^2+24bd+8cd-6bc.$$

公式四: $(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3.$

(例九) $(2a+3b)^3=(2a)^3+3(2a)^2(3b)+3(2a)(3b)^2+(3b)^3$

$$=8a^3+36a^2b+54ab^2+27b^3$$

(例十) $(2a-3b)^3=(2a)^3+3(2a)^2(-3b)+3(2a)(-3b)^2$

$$+(-3b)^3=8a^3-36a^2b+54ab^2-27b^3.$$

(例十一) $(5a^2b-1)^3=125a^6b^3-75a^4b^2+15a^2b-1.$

注意: 此公式亦可分爲二:

(a) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$

(b) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$

公式五: (a) $(A+B)(A^2-AB+B^2)=A^3+B^3.$

(b) $(A-B)(A^2+AB+B^2)=A^3-B^3.$

(例十二) $(3a+2b)(9a^2-6ab+4b^2)=27a^3+8b^3$

(例十三) $(2a-3b)(4a^2+6ab+9b^2)=8a^3-27b^3$.

公式六: $(A+B+C)(A^2+B^2+C^2-BC-AC-AB)$

$=A^3+B^3+C^3-3ABC$.

(例十四) $(2a+b+3c)(4a^2+b^2+9c^2-3bc-6ac-2ab)$

$=8a^3+b^3+27c^3-18abc$.

(例十五) $(3x-2y-1)(9x^2+4y^2+1-2y+3x+6xy)$

$=27x^3-8y^3-1-18xy$.

公式七: $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$.

(例十六) $(x+2)(x+3)=x^2+(2+3)x+2\times3$

$=x^2+5x+6$.

(例十七) $(x+7)(x-2)=x^2+(7-2)x+7\times(-2)$

$=x^2+5x-14$.

(例十八) $(x-4)(x-6)=x^2-10x+24$

公式八: $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$.

(例十九) $(2x+3)(4x+5)=2\times4x^2+(2\times5+3\times4)x$

$+3\times5=8x^2+22x+15$.

(例二十) $(3x-2)(4x-3)=12x^2-17x+6$.

§34. 應用乘法公式之除法 上節各公式熟記後不但便於乘法,且遇除法之被除式爲各公式之結果,

而除式爲其一因式時,亦可不用演算,而直接得其商.

(例一)　$(9a^2-4b^2)\div(3a+2b)=3a-2b.$

(例二)　$(27a^3-8b^3)\div(3a-2b)=9a^2+6ab+4b^2.$

(例三)　$(8a^6b^3+c^9)\div(2a^2b+c^3)=4a^4b^2-2a^2bc^3+c^6$

(例四)　$(8a^3+b^3+1-6ab)\div(2a+b+1)$

$=4a^2+b^2+1-2ab-2a-b.$

注意:　代數學之乘法公式,恰如算術之九九表,爲用至廣,學者務宜熟記之.

習題六

不用草式演算,直接由公式計算以下各題:—

1. $(2x+3y)^2$
2. $(7m+5n)^2.$
3. $(3x+1)^2.$
4. $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2.$
5. $(ax+by)^2.$
6. $(7p-10q)^2.$
7. $\left(\frac{1}{2}m-\frac{1}{3}n\right)^2$
8. $(x^3-2y^2)^2.$
9. $(x^2+x+1)^2$
10. $(3a^2-a-5)^2.$
11. $(5x^2+3)(5x^2-3).$
12. $(x^2+y^2)(x+y)(x-y).$
13. $(a+b)(-a-b).$
14. $(x-y)(y-x).$
15. $(a+b+c)(a+b-c).$
16. $(a-b+c)(a+b-c).$

17. $(x^2+2x-3)(x^2-2x-3)$.　18. $(5a+3b)^2(5a-3b)^2$.

19. $(a^2+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)$.

20. $(a^2-2b)(a^4+2a^2b+4b^2)$.

21. $(a+b)(a-b)(a^4+a^2b^2+b^4)$.

22. $(2x+1)^3$.　23. $(x-5)(x-7)$.

24. $(x-5)(x+7)$.　25. $(x+8)(x-10)$.

26. $(x-2y)(x+5y)$.　27. $(a+3b)(a+12b)$.

28. $(ax-5)(ax+7)$.　29. $(a+b+3c)(a+b-2c)$.

30. $(5m-2n-3p)(5m-2n+p)$

31. $(4ab-3c)^3$.　32. $(5a^2+4)^3$.

33. $(3a-2b-c)(9a^2+4b^2+c^2+6ab+3ac-2bc)$.

34. $(5x-3y+1)(25x^2+9y^2+1+15xy-5x+3y)$.

35. $(x^2+5x+6)\div(x+2)$.　36. $(x^2-5x+4)\div(x-1)$.

37. $(25a^2-9b^2)\div(5a-3b)$.

38. $(125a^3-27b^3)\div(5a-3b)$.

39. $(8a^3+b^3+c^3-6abc)\div(2a+b+c)$.

第三章　乘方　開方

§35. **乘方法**　以同式相乘曰乘方.乘方法亦曰冪法,卽乘法之一種,故實已包括於乘法之內.茲再將可用公式者分類論之.

第一類　單項式之任何次冪　單項式之乘方,依指數律之各公式解之:

(例一)　$(3a^2b^3)^4=3^4\times(a^2)^4\times(b^3)^4=81a^8b^{12}$.

(例二)　$(-2x^3y^2)^3=-8x^9y^6$.

(例三)　$(-ax^py^q)^n=(-1)^na^nx^{pn}y^{qn}$.

注意:　當 n 爲奇數時,$(-1)^n$ 爲"$-$"號;n 爲偶數時,$(-1)^n$ 爲"$+$"號.

第二類　二項式之各次冪　在乘法公式內有

$$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$$

及
$$(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3.$$

此卽二項式之平方與立方之公式,今再進而求其四次,五次等方之公式.

$$(A+B)^4=(A+B)^3(A+B)=(A^3+3A^2B+3AB^2+B^3)(A+B).$$

用分離係數法

$$\begin{array}{rl}
1+3+3+1 & (第一列)\\
1+1 & (第二列)\\
\hline
1+3+3+1 & (第三列)\\
1+3+3+1 & (第四列)\\
\hline
1+4+6+4+1 & (第五列)
\end{array}$$

即得 $(A+B)^4=A^4+4A^3B+6A^2B^2+4AB^3+B^4.$

上式為A, B二文字之齊次式而依A之降冪序排列,故關於文字及其指數無庸計算而求之,所需決者僅為其各項之係數而已.故

$(A+B)^7$必為一A, B之七次齊次式,其各項必為A^7, A^6B, A^5B^2........, AB^6, B^7共八項可知.欲決其各項之係數,試先察上式中,1, 4, 6, 4, 1五個係數之如何可從1, 3, 3, 1四個係數推算.則見第五列之首行1,即第三列之首項1亦即第一列之首項1.第五列之次項4為第四列之首項1及第三列之次項3之和,亦即第一列之首項及次項之和.同樣第五列之第三項6為第四列之次項3及第三列之第三項3之和,亦即第一列之次項及第三項之和.依此而觀,則此各係數1, 4, 6, 4, 1固可直接從1, 3, 3, 1求之.即為1, 1+3, 3+3, 3+1, 1是也,依此類推$(A+B)^5$之各項係數,亦可從1, 4, 6, 4, 1如上直接求得為1, 1+4, 4+6, 6+4, 4+1, 1即1, 5, 10, 10, 5, 1而得

$(A+B)^5=A^5+5A^4B+10A^3B^2+10A^2B^3+5AB^4+B^5$. 為便利計,可列表如下:

1 1	(第一列)
1 2 1	(第二列)
1 3 3 1	(第三列)
1 4 6 4 1	(第四列)
1 5 10 10 5 1	(第五列)
1 6 15 20 15 6 1	(第六列)
1 7 21 35 35 21 7 1	(第七列)
1 8 28 56 70 56 28 8 1	(第八列)

....

此表我國舊名廉法表,西名巴斯噶三角形 (Pascal's triangle). 各列第二項之數即為欲展開之二項式之冪次.設以r代表項數,則任一列r項之值,等於上一列之r項與(r−1)項之和.

欲解$(A+B)^7$可取第七列之各數為係數,得

$$(A+B)^7=A^7+7A^6B+21A^5B^2+35A^4B^3+35A^3B^4$$
$$+21A^2B^5+7AB^6+B^7.$$

(例四) $(3a-2b)^5=(3a)^5+5(3a)^4(-2b)+10(3a)^3(-2b)^2$
$$+10(3a)^2(-2b)^3+5(3a)(-2b)^4+(-2b)^5$$
$$=243a^5-810a^2b+1080a^3b^2-720a^2b^3$$
$$+240ab^4-32b^5.$$

註: 冪數為任何次時,在第二十章專論之.

$$(a+b+c)^2=[(a+b)+c]^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$$

$$=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$$

$$=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$$

再以此公式求四項式之平方如下:

$$(a+b+c+d)^2=[(a+b)+(c+d)]^2$$

$$=(a+b)^2+2(a+b)(c+d)+(c+d)^2$$

$$=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+2ad$$

$$+2bd+c^2+2cd+d^2$$

$$=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad$$

$$+2bc+2bd+2cd.$$

由此可知多項式之平方,等於其各項平方及每二項相乘積二倍之和.即

$$(A+B+C+D+\cdots\cdots)^2$$

$$=A^2+B^2+C^2+D^2+\cdots\cdots+2AB+2AC+2AD+\cdots\cdots$$

$$+2BC+2BD+\cdots\cdots$$

$$+2CD+\cdots\cdots$$

$$+\cdots\cdots.$$

(例五) $(3a-2b-c+4d)^2$

$$=(3a)^2+(-2b)^2+(-c)^2+(4d)^2+2(3a)(-2b)$$

$$+2(3a)(-c)+2(3a)(4d)+2(-2b)(-c)$$

$$+2(-2b)(4d)+2(-c)(4d)$$

$$=9a^2+4b^2+c^2+16d^2-12ab-6ac$$

$$+24ad+4bc-16bd-8cd.$$

(例六)　$(x^3-x^2+2x-3)^2=x^6+x^4+4x^2+9-2x^5$

$$+4x^4-6x^3-4x^3+6x^2-12x$$

$$=x^6-2x^5+5x^4-10x^3+10x^2-12x+9.$$

§36. **開方法**　A 爲 B 之冪,則 B 爲 A 之冪根.若 $A=B^n$,則 $B=\sqrt[n]{A}$.已知 B 求 A 曰乘方,已知 A 求 B 曰開方.開方法從乘方法反推之.玆分類舉例如下:

第一類　單項式之任何冪根　單項式之開方,即依指數律逆推之:

(例一)　$\sqrt[4]{81a^8b^{12}}=\sqrt[4]{81}\cdot\sqrt[4]{a^8}\cdot\sqrt[4]{b^{12}}=3a^2b^3.$

(例二)　$\sqrt[3]{-8x^9y^6}=-2x^3y^2.$

注意:　正數之奇次冪根爲正數,負數之奇次冪根爲負數.正數之偶次冪根可正可負,負數無偶次冪根.故例一之 $\sqrt[4]{81a^8b^{12}}$ 亦可爲 $-3a^2b^3$,因 $(-3a^2b^3)^4$ 亦爲 $81a^8b^{12}$ 故也.唯可正可負時,常以正數爲主.

第二類　多項式之二次冪根　求二次冪根,亦曰開平方法,依平方公式而逆推之.

平方公式　　　$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$

$$\therefore\quad \sqrt{a^2+2ab+b^2}=a+b.$$

細察上式,可得一式之平方根與原式之關係如下:

(1) 根之首項a,即爲原式首項a^2之平方根.

(2) 根之次項b,即爲原式次項$2ab$除以$2a$所得之商.

(3) 原式中減去根首項之平方a^2後,若再減去根次項與$2a+b$之積$(2a+b)b$而爲零,則$a+b$即爲原式之平方根.

以上關係,可以演算式表之如下:—

$$\begin{array}{r|l}
\multicolumn{1}{r|}{a^2+2ab+b^2} & \underline{a+b} \\
\multicolumn{1}{r|}{a^2} & \\
\hline
2a+b \;\big|\; 2ab+b^2 & \\
\underline{2ab+b^2} & \\
0 &
\end{array}$$

(例一) 求$4x^2-12xy+9y^2$之平方根.

[解]

$$\begin{array}{r|l}
4x^2-12xy+9y^2 & \underline{2x-3y} \\
4x^2 & \\
\hline
4x-3y \;\big|\; -12xy+9y^2 & \\
\underline{-12xy+9y^2} & \\
0 &
\end{array}$$

得原式之平方根爲$2x-3y$.

[演算之說明] (1) 以原式依降冪序整列,其首項$4x^2$之平方根$2x$,即爲所求根之首項,寫於原式之右端,畫一縱線以隔之.

(2) 自原中式減去所得根首項$2x$之平方$4x^2$,得餘式$-12xy+9y^2$,如第三列.

(3) 以所得根首項$2x$之2倍$4x$寫在餘式之左端除餘式之首項$-12xy$,得$-3y$,即爲所求根之次項,寫於所求根首項$2x$之後.

(4) 自餘式中減去$[2(2x)-3y](-3y)$,得餘式爲零.即得$2x-3y$爲原式之平方根.

(例二) 求$12x^3+5x^2+4x^4-6x+1$之平方根.

[解]

$$\begin{array}{r|r|l}
 & 4x^4+12x^3+5x^2-6x+1 & 2x^2+3x-1 \\
 & 4x^4 & \\ \hline
4x^2+3x & 12x^3+5x^2-6x+1 & \\
 & 12x^3+9x^2 & \\ \hline
2(2x^2+3x)-1 & -4x^2-6x+1 & \\
 & -4x^2-6x+1 & \\ \hline
 & 0 &
\end{array}$$

得原式之平方根$2x^2+3x-1$.

(例三) 求$9x^2+4y^2-12xy+24x-16y+16$之平方根.

[解] 依x之降冪序整列之.x之同次各項,再求y之降冪序整列之.

$$\begin{array}{r|r|l}
 & 9x^2-12xy+24x+4y^2-16y+16 & 3x-2y+4 \\
 & 9x^2 & \\ \hline
2(3x)-2y & -12xy+24x+4y^2-16y+16 & \\
 & -12xy+4y^2 & \\ \hline
2(3x-2y)+4 & 24x-16y+16 & \\
 & 24x-16y+16 & \\ \hline
 & 0 &
\end{array}$$

$\therefore\quad \sqrt{9x^2+4y^2-12xy+24x-16y+16}=3x-2y+4.$

第三類　多項式之三次冪根　求三次冪根亦曰開立方法,依立方公式而逆推之:

立方公式　$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$$\therefore\quad \sqrt[3]{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}=a+b.$$

細察上式,可得一式之立方根與原式之關係如下:

(1)　根之首項a即爲原式首項a^3之立方根.

(2)　根之次項b即爲原式次項$3a^2b$除以$3a^2$所得之商

(3)　原式中減去根首項之立方a^3後,若再減去根次項與$3a^2+3ab+b^2$之積$(3a^2+3ab+b^2)b$而爲空,則$a+b$即爲原式之立方根.

以上關係可以演算式表之如下:—

$$\begin{array}{r|l|l}
 & a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 & \underline{a+b} \\
 & \underline{a^3} & \\
3a^2 & 3a^2b+3ab^2+b^3 & \\
+3ab & & \\
\underline{+\quad b^2} & & \\
3a^2+3ab+b^2 & \underline{3a^2b+3ab^2+b^3} & \\
 & \qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

(例一)　求$8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3$之立方根.

[解]

$$\begin{array}{r|l|l}
 & 8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3 & \underline{2x+y} \\
 & \underline{8x^3} & \\
3(2x)^2=12x^2 & 12x^2y+6xy^2+y^3 & \\
3(2x)y=\quad 6xy & & \\
\underline{y^2} & & \\
12x^2+6xy+y^2 & \underline{12x^2y+6xy^2+y^3.} & \\
 & \qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

得原式之立方根爲$2x+y$.

[演算之說明] (1) 以原式依降冪序整列，其首項$8x^3$之立方根$2x$,即爲所求根之首項，寫於原式之右端，畫一縱線隔之.

(2) 自原式中減去根首項$2x$之立方$8x^3$,得餘式$12x^2y+6xy^2+y^3$如第三列.

(3) 以所得根首項$2x$平方之三倍$3(2x)^2=12x^2$,寫在餘式之左端除餘式之首項$12x^2y$,得y即爲所求根之次項，寫於所求根首項$2x$之後.

(4) 再以根首次二項積之三倍$3(2x)y$及次項平方y^2并入$12x^2$合爲$12x^2+6xy+y^2$與根之次項y相乘，從餘式中減之，結果爲零.

即得$2x+y$爲原式之立方根.

(例二) 求$x^6+6x^5+3x^4+54x-27-9x^2-28x^3$之立方根.

$$
\begin{array}{r|l|l}
 & x^6+6x^5+3x^4-28x^3-9x^2+54x-27 & \underline{x^2+2x-3} \\
 & x^6 & \\
\hline
3(x^2)^2=3x^4 & 6x^5+3x^4-28x^3-9x^2+54x-27 & \\
3(x^2)(2x)=6x^3 & & \\
(2x)^2=4x^2 & & \\
\hline
3x^4+6x^3+4x^2 & 6x^5+12x^4+8x^3 & \\
\hline
3(x^2+2x)^2=3x^4+12x^3+12x^2 & -9x^4-36x^3-9x^2+54x-27 & \\
3(x^2+2x)(-3)=-9x^2-18x & & \\
3^2=\quad 9 & & \\
\hline
3x^4+12x^3+3x-18x+9 & -9x^4-36x^3-9x^2+54x-27 & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}
$$

$\therefore\quad \sqrt[3]{x^6+6x^5+3x^4-28x^3-9x^2+54x-27}=x^2+2x-3.$

[演算之說明] 前四步如例一同,唯減法結果不爲零,而得第二餘式 $-9x^4-36x^3-9x^2+54x-27$.

(5) 以首次二項之和視爲首項,仍以其平方之三倍 $3(x^2+2x)^2$,寫於餘式之左端而除之,得 -3 即爲根之第三項.

(6) 以首次二項之和 (x^2+2x) 視爲首項,-3 視爲次項,如前第(4)步同樣繼續演之,減法結果爲零即得.

第四類 多項式之四次及六次冪根 設 A 之四次冪根爲 B,即 $\sqrt[4]{A}=B$, $\therefore\ A=B^4=(B^2)^2$. $\therefore\ B^2=\sqrt{A}$,而 $B=\sqrt{\sqrt{A}}$. 故欲求一式之四次冪根,可求其平方根之平方根即得.同理欲求一式之六次冪根,可求其平方根之立方根,或立方根之平方根即得.

習題七

求以下各式之平方:—

1. $a+b+2c$.
2. $a-b-3c$.
3. $2a-3b+4c$.
4. $xy+yz+zx$.
5. $2x^2+3x-1$.
6. $2x+3y+a-2b$.
7. $\frac{1}{2}a-2b+\frac{1}{4}c$
8. $\frac{2}{3}x^2-x+\frac{3}{2}$.

9. $a+b-c-d+e.$ 10. $x^4-2x^3+3x^2-2x+1.$

求以下各式之立方及四次羃:—

11. $2ab-3c.$ 12. $5a-bc.$

13. $4x^3-5y^2.$ 14. $\dfrac{a}{6}+2x.$

去以下各式之括弧而展開之:—

15. $(2x+3y)^5.$ 16. $(x-2y)^6.$

17. $\left(\dfrac{1}{2}x-3y\right)^7.$ 18. $\left(\dfrac{1}{2}a-1\right)^8.$

求以下各式之平方根:—

19. $a^4-2a^3+3a^2-2a+1.$

20. $x^4+27x^2+1-10x(x^2+1).$

21. $x^6-22x^4+34x^3+121x^2-374x+289.$

22. $6acx^5+4b^2x^4+a^2x^{10}+9c^2-12bcx^2-4abx^7.$

23. $x^4-2x+\dfrac{1}{9}+\dfrac{29}{3}x^2-6x^3.$

24. $\dfrac{a^4}{4}+\dfrac{a^3}{x}+\dfrac{a^2}{x^2}-ax-2+\dfrac{x^2}{a^2}.$

求以下各式之立方根:—

25. $x^6+3x^5+6x^4+7x^3+6x^2+3x+1.$

26. $216+342x^2+171x^4+27x^6-27x^5-109x^3-108x.$

27. $\dfrac{x^3}{27}-\dfrac{x^2}{3}+2x-7+\dfrac{18}{x}-\dfrac{27}{x^2}+\dfrac{27}{x^3}.$

28. $\dfrac{a^3}{b^3}+\dfrac{b^3}{a^3}-\dfrac{3a^2}{b^2}-\dfrac{3b^2}{a^2}+\dfrac{6a}{b}+\dfrac{6b}{a}-7.$

第四章　因式分析法

§37　析因式法與乘法　求各因式之積曰乘法.從積求得其各因式曰析因式法.故析因式法實爲乘法之反法.析因式與除法不同.除法已知積及其一因式,求其他一因式.析因式僅知各因式之積,而求其一切因式,故較除法爲難.析因式無定法,全恃乘法公式之熟記及如何應用之經驗.玆分類舉例如下:

§38.　單項因式　單項式與多項式乘法之公式爲 $m(a+b+c+\cdots\cdots)=ma+mb+mc+\cdots\cdots$ 積中各項皆有此單項式 m.故凡式中各項有同樣因式時,此因式必爲此式之單項因式.

(例一)　$2a^3b-4a^2b^2+6ab^3=2ab(a^2-2ab+3b^2)$.

(例二)　$16x^3y^2+24x^2y^3-4x^2y^2=4x^2y^2(4x+6y-1)$.

(例三)　$10(a+b)^2-5(a+b)^3=5(a+b)^2[2-(a+b)]$

$$=5(a+b)^2(2-a-b).$$

(例四)　$m(a-b)-n(b-a)=m(a-b)+n(a-b)$

$$=(a-b)(m+n).$$

(例五) $(a+b)(x+y-z)-(a-b)(z-y-x)$

$=(a+b)(x+y-z)+(a-b)(x+y-z)$

$=(x+y-z)[(a+b)+(a-b)]$

$=(x+y-z)(2a)=2a(x+y-z).$

§39. 二項式之平方式 依乘法公式 $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$, 可知若有二次三項式依降羃(或升羃)整列時,其首末二項皆爲正平方法,而中項爲首末二平方根乘積之二倍,則可析爲兩個相同因式.

(例一) $a^2-2axy+x^2y^2=(a-xy)^2.$

(例二) $4a^2+12ab+9b^2=(2a+3b)^2.$

(例三) $2xy-x^2-y^2=-(x^2-2xy+y^2)$

$=-(x-y)^2.$

(例四) $80a^5b^2-120a^6b^3+45a^7b^4$

$=5a^5b^2(16-24ab+9a^2b^2)$

$=5a^5b^2(4-3ab)^2.$

注意: 原式中有單項因式時,須先將單項因式析出之如上例.

(例五) $(m+5n)^2+2(m+5n)(3m-n)+(3m-n)^2$

$=[(m+5n)+(3m-n)]^2=(4m+4n)^2$

$=[4(m+n)]^2=16(m+n)^2.$

(例六)　$a^2+b^2+c^2+2bc+2ac+2ab$

$$=a^2+2a(b+c)+b^2+2bc+c^2$$

$$=a^2+2a(b+c)+(b+c)^2$$

$$=[a+(b+c)]^2=(a+b+c)^2.$$

注意：原式不止三項時，先就其中某一文字整列爲降冪序而後察之如上例.

§40. 二平方項差之因式　依乘法公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$，可知若二項式之各項皆爲平方式，而正負異號者，可得二因式.

(例一)　$4a^2-9b^2=(2a+3b)(2a-3b).$

(例二)　$-x^2+25y^2z^2=25y^2z^2-x^2=(5yz+x)(5yz-x).$

(例三)　$(a+b+c-d)^2-(a+b-c+d)^2$

$$=[(a+b+c-d)+(a+b-c+d)]$$
$$\times[(a+b+c-d)-(a+b-c+d)]$$

$$=(2a+2b)(2c-2d)=2(a+b)\cdot 2(c-d)$$

$$=4(a+b)(c-d).$$

(例四)　$a^2-2ab+b^2-9c^2=(a+b)^2-(3c)^2$

$$=(a+b+3c)(a+b-3c).$$

(例五)　$1-9x^2+6xy-y^2$

$$=1-(9x^2-6xy+y^2)$$

$$=1-(3x-y)^2$$

$$=[1+(3x-y)][1-(3x-y)]$$

$$=(1+3x-y)(1-3x+y).$$

(例六)　$2a^5-18a^3-12a^2b-2ab^2$

$$=2a(a^4-9a^2-6ab-b^2)$$

$$=2a[a^4-(9a^2+6ab+b^2)]$$

$$=2a[(a^2)^2-(3a+b)^2]$$

$$=2a[a^2+(3a+b)][a^2-(3a+b)]$$

$$=2a(a^2+3a+b)(a^2-3a-b).$$

§ 41.　二項式之立方式　依乘法公式 $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$，可知當三次四項式合於上式右節時,可析爲三個相同因式

(例一)　$x^3+6x^2y+12xy^2+8b^3$

$$=x^3+3x^2(2y)+3x(2y)^2+(2y)^3=(x+2y)^3.$$

(例二)　$8m^6-36m^4n+54m^2n^2-27n^3$

$$=(2m^2)^3-3(2m^2)^2(3n)+3(2m^2)(3n)^2-(3n)^3$$

$$=(2m^2-3n)^3.$$

或　$8m^6-36m^4n+54m^2n^2-27n^3$

$$=(2m^2)^3+3(2m^2)^2(-3n)+3(2m^2)(-3n)^2+(-3n)^3$$

$$=[2m^2+(-3n)]^3=(2m^2-3n)^3.$$

(例三) $(a+b)^3+6(a+b)^2+12(a+b)+8$

$$=(a+b)^3+3(a+b)^2\cdot 2+3(a+b)\cdot 2^2+2^3$$

$$=(a+b+2)^3.$$

§42. 二立方項和或差之因式 依乘法公式 $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$ 及 $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$，可知若二項式之各項皆爲立方式，則無論其號之異同皆可析爲二因式.

(例一) $27\,a^3+b^3=(3\,a)^3+b^3$

$$=(3\,a+b)[(3\,a)^2-(3\,a)b+b^2]$$

$$=(3\,a+b)(9a^2-3\,ab+b^2).$$

(例二) $2\,x^3-16\,y^3=2(x^3-8\,y^3)$

$$=2(x-2\,y)(x^2+2\,xy+4\,y^2).$$

(例三) $(a+b)^3-b^3=\{(a+b)-b\}\{(a+b)^2+(a+b)\,b+b^2\}$

$$=(a+b-b)(a^2+2\,ab+b^2+ab+b^2+b^2)$$

$$=a(a^2+3\,ab+3\,b^2).$$

注意： 依二項式方立公式 $(a+b)^3=a^3+3\,a^2b+3\,ab^2+b^3$，則 $(a+b)^3-b^3=a^3+3\,a^2b+3\,ab^2+b^3-b^3$

$$=a^3+3\,a^2b+3\,ab^2=a(a^2+3\,ab+3\,b^2),$$

其結果相同.

§43. 三次式 $a^3+b^3+c^3-3\,abc$ 之因式 依乘法公

式 $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ac-ab)=a^3+b^3+c^3-3abc$ 可知若當代數式合於 $a^3+b^3+c^3-3abc$ 時,可析爲二因式.

(例一)　$x^3-8y^3-27z^3-18xyz$

$$=x^3+(-2y)^3+(-3z)^3-3x(-2y)(-3z)$$

$$=[x+(-2y)+(-3z)][x^2+(-2y)^2+(-3z)^2-(-2y)(-3z)-x(-3z)-x(-2y)]$$

$$=(x-2y-3z)(x^2+4y^2+9z^2-6yz+3xz+2xy).$$

(例二)　$8m^6-27n^3-18m^2n-1$

$$=(2m^2)^3+(-3n)^3+(-1)^3-3(2m^2)(-3n)(-1)$$

$$=[(2m^2)+(-3n)+(-1)][(2m^2)^2+(-3n)^2+(-1)^2-(-3n)(-1)-(2m^2)(-1)-2m^2(-3n)]$$

$$=(2m^2-3n-1)(4m^4+9n^2+1-3n+2m^2+6m^2n).$$

習題八

析下列各式之因式:—

1. $ax^5+b^2x^4+c^3x^3-d^4x^2$.

2. $14a^2x^2-7axy+49abxz-56a^2xw$.

3. $8(x+y)(3x+a)-6(x+y)(4x-b)$.

4. $4a(x+y)^2-6a^2(x+y)(x-y)-2(x+y)$.

5. $2a^3-8ab^4$.

6. $2a^3-16b^3$.

7. $a^2-4ab+4b^2-c^2$.

8. $a^2-4b^2-9c^2+12bc$.

9. $x^2-9y^2+16z^2-8xz$.

10. $8x^2-4x^4-4$.

11. $(a+b)^2-2(a^2-b^2)+(a-b)^2$.

12. $(2a+b)^2-4(a-2b)^2$.

13. $a^3-4a^2b+4ab^2-9ac^2$.

14. $x^6-16a^2x^4+32a^3x^3-16a^4x^2$

15. $27a^5+64a^2b^3$.

16. $27a^6+1$.

17. $1-64x^6$.

18. $1+18a^2b+27b^3-8a^6$.

19. $16(a+2b)^3-54(2a-b)^3$.

20. $2x^4-16xy^3-54xz^3-36x^2yz$.

§44. 二次三項式之因式(一) 依乘法公式 $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$，可知若有二次三項式 x^2+px+q 其中 $p=a+b$，而 $q=ab$ 時，可析爲二因式.

(例一)　$x^2+7x+12=x^2+(4+3)x+4\times3=(x+4)(x+3)$.

注意：因12分成二因數可有下列三種 1×12, 2×6,

3×4，其中 $3+4$ 可等於 7，故得 $a=4,\ b=3$ 如上之結果.

(例二) $x^2-4x-12=x^2+[2+(-6)]x+2\times(-6)$

$$=(x+2)[x+(-6)]=(x+2)(x-6).$$

注意：q 爲 -12，故知 $a,\ b$ 二數必爲異號，故其和之絕對值，必爲此二數絕對值之差. 即 p 之絕對值必爲 $a,\ b$ 二數絕對值之差. 今 p 之絕對值爲 4，而 12 所分之各雙因數 $1\times12,\ 2\times6,\ 3\times4$ 中，$6-2$ 可等於 4，故知 $a,\ b$ 之絕對值爲 6 與 2. 又因 p 之符號爲負，故知 $a,\ b$ 二值中大者爲負，小者爲正，因得 $a=+2,\ b=-6$ 如上之結果.

§ 45. 二次三項式之因式(二) 設二個一次因數爲 $ax+b,\ cx+d$ 時，則依乘法公式，其乘積當爲 $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$. 亦爲一二次三項式 lx^2+mx+n 之形. 故若有一二次三項式 lx^2+mx+n，其中係數 $l,\ m,\ n$ 有 $l=ac,\ m=ad+bc,\ n=bd$ 之關係，即可析爲二因式.

欲從 $l,\ m,\ n$ 三數中，決出 $a,\ b,\ c,\ d$ 四數，令合於如上之關係，初非易事. 玆舉例如下：

(例一) $16x^2-24x-27$.

[解法] 今所欲決者爲 $a,\ b,\ c,\ d$ 四數，令 $ac=16\cdots\cdots(1)$，$ad+bc=-24\cdots\cdots(2)$，$bd=-27\cdots\cdots(3)$. 從 (1)，$16=1\times16=2\times8=4\times4$，故知 $a,\ c$ 可能之絕對值爲 $(1,16)$ 或 $(2,8)$ 或 $(4,4)$

三組而符號相同.從(3), $27=1\times27=3\times9$, 故知 b, d 可能之絕對值爲(1, 27)或(3, 9)兩組而符號相異.既知 a, c 同號而 b, d 異號,可知 ad, bc 必爲異號,故從(2),可知 ad bc 絕對值之差爲24.故以從(1)所得各組中之每組二數及從(2)所得各組中之每組二數交錯乘之,取其差爲24者即爲 a, b, c, d 之絕對值.茲一一列舉如下.

$$\left.\begin{matrix}1, 16\\1, 27\end{matrix}\right\}\cdots\cdots(a),\quad \left.\begin{matrix}1, 16\\3,\ \ 9\end{matrix}\right\}\cdots\cdots(b),\quad \left.\begin{matrix}2,\ \ 8\\1, 27\end{matrix}\right\}\cdots\cdots(c),$$

$$\left.\begin{matrix}2,\ \ 8\\3,\ \ 9\end{matrix}\right\}\cdots\cdots(d),\quad \left.\begin{matrix}4,\ \ 4\\1, 27\end{matrix}\right\}\cdots\cdots(e),\quad \left.\begin{matrix}4,\ \ 4\\3,\ \ 9\end{matrix}\right\}\cdots\cdots(f).$$

從(a), $16\times27-1\times1\neq24$, $1\times27-1\times16\neq24$;

從(b), $16\times9-3\times1\neq24$, $16\times3-9\times1\neq24$.

如是繼續嘗試至(f), $9\times4-4\times3=36-12=24$.於是知 a, c 二值皆爲4,而 b, d 二數之絕對值爲3與9,其符號相異.再從24之符號爲負,故知 9×4 爲負, 4×3 爲正.故知 b, d 之值爲 $+3, -9$.因析得因數爲 $16x^2-24x-27$ $=(4x-9)(4x+3)$.

(例二)　$16x^2-62x+27$.

[解法]　$16=1\times16=2\times8=4\times4$,　$27=1\times27=3\times9$,

故可分爲以下各組:

$$\left.\begin{array}{l}1,\ 16\\1,\ 27\end{array}\right\}\cdots(a),\quad \left.\begin{array}{l}1,\ 16\\3,\ \ 9\end{array}\right\}\cdots(b),\quad \left.\begin{array}{l}2,\ \ 8\\1,\ 27\end{array}\right\}\cdots(c),$$

$$\left.\begin{array}{l}2,\ \ 8\\3,\ \ 9\end{array}\right\}\cdots(d),\quad \left.\begin{array}{l}4,\ \ 4\\1,\ 27\end{array}\right\}\cdots(e),\quad \left.\begin{array}{l}4,\ \ 4\\3,\ \ 9\end{array}\right\}\cdots(f).$$

因 16, 27 皆為正數,故 a, c 為同號, b, d 亦為同號, 故 ad, bc 為同號. 故 ad, bc 絕對值之和為 62.

從 (a), $16\times27+1\times1\neq62$, $27\times1+16\times1\neq62$;

從 (b), $16\times9+3\times1\neq62$, $16\times3+9\times1\neq62$.

如是繼續嘗試至 (c), $27\times2+8\times1=54+8=62$. 於是知 a, c 二數之值為 8, 2, 而 b, d 二數之絕對值為 27 與 1. 因 62 之符號為負, 故 ad, bc 皆為負數, 故 a, c 同為正, 而 b, d 同為負. 因析得因數 $16x^2-62x+27=(8x-27)(2x-1)$.

(例三) $$-16x^2+43xy-27y^2$$
$$=-(16x^2-43xy+27y^2)$$
$$=-(16x-27y)(x-y).$$

[解法] $\left.\begin{array}{l}1,16\\1,27\end{array}\right\}$ 中, $27\times1+16\times1=43$.

注意: 本例為 x, y 之二次齊次式,故其二因數必各為 x, y 之一次齊次式. 故 $lx^2+mxy+ny^2$ 可依前二例同樣求 a, b, c, d 而析為 $(ax+by)(cx+dy)$.

(例四)　$16x^2-24x-27$

$=(4x)^2-2(4x)3-3(3)^2$

$=[(4x)-3(3)][(4x)+(3)]$

$=(4x-9)(4x+3).$

注意：　因16為4^2而24中有因數4，27中有因數3^2而24中又有因數3.故本例可如上之解法.視$4x$為X，視3為Y，原式即為$X^2-2XY-3Y^2$.各項係數減小，解之較便易多矣.

二次三項式之析因式法，最為重要.學者務宜熟諳之.

習題九

析以下各式之因式：—

1.　$x^2-4x-5.$　　2.　$x^2+4x-5.$

3.　$x^2-23x+132.$　　4.　$x^2+x-132.$

5.　$x^2-12x-13.$　　6.　$x^2+12x-253.$

7.　$x^2-9x-682.$　　8.　$x^2+9x-532.$

9.　$x^2-10x-144.$　　10.　$x^2-43x+82.$

11.　$6x^2+13x+6.$　　12.　$6x^2-5x-6.$

13.　$6x^2+37x+6.$　　14.　$6x^2-37x+6.$

15. $24x^2+2x-15$.　　16. $24x^2-2x-15$.

17. $12x^2-x-6$.　　18. $12x^2+x-6$.

19. $221x^2+42x-8$.　　20. $221x^2-120x-221$.

21. $16x^2-104xy-27y^2$.　　22. $27x^2y^2+431xyz-16z^2$.

23. $16(x-4)^2-78(x-4)(y-3)+27(y-3)^2$.

24. $(m-n)x^2-(2m+n)x-3m$.

25. $(a^2-b^2)x^2+4abxy+(b^2-a^2)y^2$.

26. $(a^2+ab+b^2)x^2-2abxy-(a^2-ab+b^2)y^2$.

27. $a(a-1)x^2+(2a^2-1)x+a(a+1)$.

28. $(a^2-3a+1)x^2+(2a^2-4a+1)x+a(a-1)$.

29. $(a^2-3a+2)x^2+(2a^2-4a+1)x+a(a-1)$.

30. $2a^2x^2-2(3b-4c)(b-c)y^2-abxy$.

§46. **分項分析法** 當一代數式不合於任何乘法公式之積時,不可謂爲無因式,當分項察之.分項之法,認定式中某文字,依其次數而整列爲降冪序.

(例一) $ac-bd+bc-ad$.

依 a 分項如下:

$$ac-bd+bc-ad=(ac-ad)+(bc-bd)$$

$$=a(c-d)+b(c-d)=(c-d)(a+b).$$

(例二) ax^3-x^2+ax-1.

原式爲x之三次四項式,不易析其因式.然若以a爲標準時,則爲a之一次二項式,然後察其二項中有無同樣因式.

$$ax^3-x^2+ax-1=(ax^3+ax)-(x^2+1)$$

$$=ax(x^2+1)-(x^2+1)$$

$$=(x^2+1)(ax-1).$$

(例三)　$a^3y-a^2x(1+y)+ax^2(1+xy)-x^4.$

原式依a分項,但a爲三次,x爲四次,y僅爲一次.故先去括弧依y整列之.

$$原式=a^3y-a^2x-a^2xy+ax^2+ax^3y-x^4$$

$$=(a^3-a^2x+ax^3)y-(a^2x-ax^2+x^4)$$

$$=a(a^2-ax+x^3)y-x(a^2-ax+x^3)$$

$$=(a^2-ax+x^3)(ay-x).$$

(例四)　$a^2+4b^3-c^2-4ab.$

依a整列之:

$$原式=a^2-4ba+(4b^2-c^2)$$

$$=a^2-4ba+(2b+c)(2b-c)$$

$$=[a-(2b+c)][a-(2b-c)]$$

$$=(a-2b-c)(a-2b+c).$$

依b整列之:

原式 $=4b^2-4ab+(a^2-c^2)$

$=(2b)^2-2a(2b)+(a+c)(a-c)$

$=[2b-(a+c)][2b-(a-c)]$

$=(2b-a-c)(2b-a+c)$

$=(a-2b+c)(a-2b-c).$

依 c 整列之:

原式 $=-[c^2-(a^2-4ab+4b^2)]$

$=-[c^2-(a-2b)^2]$

$=-[c+(a-2b)][c-(a-2b)]$

$=-(c+a-2b)(c-a+2b)$

$=(a-2b+c)(a-2b-c).$

注意: 例四中, a, b, c 皆為二次. 惟 c 無一次項, 故依 c 整列較易. 依 a 或 b 整列, 得二次三項式, 可依二次三項式析因式法析之如上.

(例五) $(m-n)x^2-(2m+n)x-3m.$

依二次三項式析因式法析之,得

原式 $=[(m-n)x-3m][x+1]$

$=(mx-nx-3m)(x+1).$

若去括弧依 m 整列,則

原式 $=mx^2-nx^2-2mx-nx-3m$

$$=(x^2-2x-3)m-(nx^2+nx)$$

$$=m(x-3)(x+1)-nx(x+1)$$

$$=(x+1)[m(x-3)-nx]$$

$$=(x+1)(mx-3m-nx).$$

(例六)　$x^5-x^4-2x^3+2x^2+5x-5.$

式中x外無其他文字,而x次數甚高,則就其係數察之,可分析如下:

原式 $=(x^5-x^4)-(2x^3-2x^2)+(5x-5)$

$$=x^4(x-1)-2x^2(x-1)+5(x-1)$$

$$=(x-1)(x^4-2x^2+5).$$

(例七)　$x^4+x^3+2x^2+x+1$

$$=(x^4+x^3+x^2)+(x^2+x+1)$$

$$=x^2(x^2+x+1)+(x^2+x+1)$$

$$=(x^2+x+1)(x^2+1).$$

註: 例六,例七之分項法較難,因其漫無標準也.此類高次式,當應用剩餘定理析之.法詳下文.

§47. 配方法　有兩個二次因式之四次式,須用配方法析之.

(例一)　$x^4+4=x^4+4x^2+4-4x^2$

$$=(x^2+2)^2-(2x)^2$$

$$=[(x^2+2)+(2x)][(x^2+2)-(2x)]$$

$$=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2).$$

(例二) $x^4-13x^2+36.$

[配法一] 原式 $=x^4+12x^2+36-25x^2$

$$=(x^2+6)^2-(5x)^2$$

$$=(x^2+5x+6)(x^2-5x+6)$$

$$=(x+2)(x+3)(x-2)(x-3).$$

[配法二] 原式 $=x^4-12x^2+36-x^2$

$$=(x^2-6)^2-x^2$$

$$=(x^2+x-6)(x^2-x-6)$$

$$=(x+3)(x-2)(x-3)(x+2).$$

注意: 本例可析為四個一次因式,故原式可直接用二次三項式析法析之如下:

原式 $=(x^2-9)(x^2-4)=(x+3)(x-3)(x+2)(x-2)$. 然若僅有二次因式如例一,則必須配方後方可析.

(例三) $x^4-11x^2+1.$

[配法一] 原式 $=x^4+2x^2+1-13x^2$

$$=(x^2+1)^2-13x^2.$$

因13非平方數,若因式中必須有理係數時,此配法無效.

[配法二] 原式 $=x^4-2x^2+1-9x^2$

$$=(x^2-1)^2-(3x)^2$$

$$=(x^2+3x-1)(x^2-3x-1).$$

(例四)　$a^4+a^2b^2+b^4=a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2$

$$=(a^2+b^2)^2-(ab)^2$$

$$=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2).$$

注意：本例常常遇見，可視爲公式.

(例五)　$a^6-b^6=(a^2)^3-(b^2)^3$

$$=(a^2-b^2)[(a^2)^2+a^2b^2+(b^2)^2]$$

$$=(a+b)(a-b)(a^4+a^2b^2+b^4)$$

$$=(a+b)(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2).$$

或　$a^6-b^6=(a^3)^2-(b^3)^2$

$$=(a^3+b^3)(a^3-b^3)$$

$$=(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2).$$

習題十

析以下各式之因式：—

1. $m^3x+m^3y-n^3x-n^3y.$　　2. $c^5d^3-c^2-a^2c^3d^3+a^2.$

3. $x^2-4y^2+x-2y.$　　4. $4(x-y)^3-(x-y).$

5. $8(x-y)^4-(x-y).$　　6. $a^3+b^3+a+b.$

7. $ax^3+x+a+1.$　　8. $a^2(b-c)+b^2(c-a).$

9. $1+(b-a^2)x^2-abx^3$. 10. $9x^4+3x^2y^2+4y^4$.

11. $4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2$.

12. $a^3-b^3-a(a^2-b^2)+b(a-b)^2$.

13. $(x+y)^3+z^3-3xy(x+y+z)$.

14. $(x-y)^3-z^3+3xy(x-y-z)$.

15. x^4+64y^4. 16. $x^8+x^4y^4+y^8$.

17. x^4+12x^2+64. 18. $x^4-10x^2y^2+9y^4$.

19. $x^4-(a^2+b^2)x^2+a^2b^2$.

20. $x^4-(4a^2+b^2)a^2x^2+4a^6b^2$.

21. $a^4-2(b^2+c^2)a^2+(b^2-c^2)^2$.

22. $(x-2y)x^3-(y-2x)y^3$.

23. $b(x^3+a^3)+ax(x^2-a^2)+a^3(x+a)$.

24. $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$.

25. $x^2+2x(y+z)+y(y+2z)$.

26. $ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$.

27. $x^5-x^4y+x^3y^2-x^2y^3+xy^4-y^5$.

28. x^6+x^3-2.

29. $x^4-(2a^2+b^2+c^2+2ab+2ac)x^2+(a^2+ab+ac+bc)^2$.

30. $(x+y+z)^2+yz(y+z)+xyz$.

§ 48. 剩餘定理法 凡高次式之僅含一個文字,或

二個文字之齊次式者,恆用剩餘定理析其因式.

定理一 含x之高次多項式,若以x之一次二項式$x-r$除之,則其所得剩餘,必等於被除式當 $x=r$ 時之值.

[證] 設被除式爲$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_n$ (式中$a_0, a_1, a_2,\cdots\cdots a_n$皆爲已知數),以$x-r$除之得商$Q$,剩餘$R$,則

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_n\equiv(x-r)Q+R.$$

當$x=r$,則不論Q爲何式$(x-r)Q=0$.

$$\therefore\quad R=a_0r^n+a_1r^{n-1}+a_2r^{n-2}+\cdots\cdots+a_n.$$

例如 $2x^3-5x^2+3x-1$ 以 $x-2$ 除之,其剩餘必爲$2\times2^3-5\times2^2+3\times2-1=16-20+6-1=1$.

定理二 含x之高次多項式,若當$x=r$時其值爲零,則$x-r$必爲原式之一因式;反之其值若不爲零,則$x-r$爲非原式之因式.

[證] $x=r$時,原式爲零,卽以$x-r$除原式,其剩餘爲零.卽原式能爲$x-r$所整除,故$x-r$必爲原式之一因式.

反之$x=r$時,原式不爲零,卽以$x-r$除原式,剩餘不爲零.卽原式不能爲$x-r$所整除.故$x-r$非原式之因式.

例如 $x^3+6x^2+11x+6$當$x=1$時,原式$=1+6+11+6\neq0$,故$x-1$非原式之因式.當 $x=-1$ 時,原式$=-1+6$

$-11+6=0$. 故 $x-(-1)$, 卽 $x+1$ 必爲原式之因式.

根據以上定理,凡含有一個文字之高次式,恆可察得其一次因式

(例一) $x^3+6x^2+11x+6$.

[解] 先察當 x 等於何數時原式爲零. 因原式各項皆爲正,故 x 爲正數時決不爲零. 因原式之常數項爲 6,故 x 非 6 之因數時原式決不爲零(因設 $x=5$, 則前三項之代數和必爲 5 之倍數,加 6 決非零也). 故可能者僅爲 $-1, -2, -3, -6$. 令 $x=-1$, $(-1)^3+6(-1)^2+11(-1)+6=0$, 故知 $x-(-1)$ 卽 $x+1$ 爲一因式.

次以 $x+1$ 除原式,卽得其他因式.

$$\therefore \quad x^3+6x^2+11x+6=(x+1)(x^2+5x+6).$$

而其他因式 x^2+5x+6 爲二次三項式,可用前法直接求之. 故原式 $=(x+1)(x+2)(x+3)$.

若所得其他因式仍高於二次時,繼續用剩餘定理法求之.

(例二) $x^4-5x^3y+5x^2y^2+xy^3-2y^4$.

[解] 原式爲 x, y 之齊次式,故若有一次因式時必爲 $x-ry$. 若視 y 爲 1 時,則原式與式 $x^4-5x^3+5x^2+x-2$ 無異. 欲令此式爲零, x 之值僅可爲 ±1 或 ±2. 試令

$x=1$ 時,則 $1-5+5+1-2=0$. 故 $x-1$ 爲一因式,即 $x-y$ 爲原式之一因式.由除法

$$x^4-5x^3y+5x^2y^2+xy^3-2y^4=(x-y)(x^3-4x^2y+xy^2+2y^3)$$

繼續用前法可得,原式 $=(x-y)(x-y)(x^2-3xy-2y^2)$

$$=(x-y)^2(x^2-3xy-2y^2).$$

§ 49. $a^m \pm b^m$ 之因式.

先察 a^m+b^m. 當 $a=b$ 時,則原式 $=2b^m \neq 0$, 故 $a-b$ 非因式.當 $a=-b$ 時,則原式 $=(-b)^m+b^m$. m 爲奇數時,$(-b)^m=-b^m$, 原式爲零,偶數則否.故當 m 爲奇數時,$a+b$ 爲 a^m+b^m 之因式.

再察 a^m-b^m. 當 $a=b$ 時,則原式 $b^m-b^m=0$, 故 $a-b$ 爲因式.當 $a=-b$ 時,則原式 $=(-b)^m-b^m$. m 爲偶數時,$(-b)^m=b^m$. 原式爲零,奇數則否.故必當 m 爲偶數時,$a+b$ 方爲 a^m-b^m 之因式.

由是可得如下之結論:

(1) a^m+b^m 中,m 爲偶數時 $a+b$, $a-b$ 皆非因式.

(2) a^m+b^m 中,m 爲奇數時,$a+b$ 爲因式.

(3) a^m-b^m 中,m 爲偶數時,$a+b$, $a-b$ 皆爲因式.

(4) a^m-b^m 中,m 爲奇數時 $a-b$ 爲因式.

注意一: $a^{2m}-b^{2m}=(a^m)^2-(b^m)^2=(a^m+b^m)(a^m-b^m)$, 再

察 m 之爲奇爲偶而析之.

注意二: a^2+b^2 無因式.

(例一) $a^4-b^4=(a^2+b^2)(a^2-b^2)=(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$.

(例二) $a^5-b^5=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$.

(例三) $a^{14}-b^{14}$

$$=(a^7+b^7)(a^7-b^7)$$

$$=(a+b)(a^6-a^5b+a^4b^2-a^3b^3+a^2b^4-ab^5+b^6)$$

$$\times(a-b)(a^6+a^5b+a^4b^2+a^3b^3+a^2b^4+ab^5+b^6).$$

§50. 利用原式法 原式之具有特別情形者,不可任意悉去括弧而簡約,往往可利用之.

(例一) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-48$.

[解] 若悉去括弧則爲 x 之四次式.茲利用其第一項四因式中常數項 1, 4 之和等於 2, 3 之和可如下析之:

$$原式=[(x+1)(x+4)][(x+2)(x+3)]-48.$$

$$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-48.$$

視 x^2+5x 爲一數,

$$原式=[(x^2+5x)+4][(x^2+5x)+6]-48$$

$$=(x^2+5x)^2+10(x^2+5x)+24-48$$

$$=(x^2+5x)^2+10(x^2+5x)-24$$

$$=[(x^2+5x)+12][(x^2+5x)-2]$$

$$=(x^2+5x+12)(x^2+5x-2).$$

亦可視 x^2+5x+4 爲一數,

$$原式=(x^2+5x+4)[(x^2+5x+4)+2]-48$$

$$=(x^2+5x+4)^2+2(x^2+5x+4)-48$$

$$=[(x^2+5x+4)+8][(x^2+5x+4)-6]$$

$$=(x^2+5x+12)(x^2+5x-2).$$

亦可視 x^2+5x+5 爲一數,

$$原式=[(x^2+5x+5)-1][(x^2+5x+5)+1]-48$$

$$=(x^2+5x+5)^2-1-48$$

$$=(x^2+5x+5)^2-49$$

$$=(x^2+5x+5+7)(x^2+5x+5-7)$$

$$=(x^2+5x+12)(x^2+5x-2).$$

注意: 本例無一次因式,故若悉去括弧成四次式時,用剩餘定理法亦無效.

註: 因式分析尙有應用對稱式者,詳見第十四章.

習題十二

析以下各式之因式:—

1. $x^3-4x^2+x+6.$　　2. $x^4-2x^3+x^2-x-2.$

3. $x^3 - ax^2 + 2a^2x - 8a^3$.

4. $2m^4 - 2m^3 + 3m^2 - 2m - 1$.

5. $x^8 - y^8$.

6. $m^{10} - 1$.

7. $a^8 - 16b^4$.

8. $2x^7 - 1458xy^6$.

9. $x^6 + x^3 - 2$.

10. $x^9 + x^6 + x^3 - 3$.

析以下各式之因式:—

11. $a^3 + b + a^2b + a$.

12. $x^4 - 9x^2 - x + 3$.

13. $a^5 - a^3 + a - 1$.

14. $3a^5 + 192ab$.

15. $1 + x^6 - x - x^7$.

16. $x^3 + 3x + 4$.

17. $x^3 + 4x^2 + 3x$.

18. $81x^4 - 9x^2 - 12$.

19. $2x^4 + 7x^3 + 10x^2 + 11x + 6$.

20. $x^7 + y^7$

21. $a^3 + b^3 + 3a^2 + 12b^2 + 3a + 48b + 65$.

22. $x^3 + 8y^3 + 27z^3 - 18xyz$.

23. $x^3 - 64y^3 - 8 - 24xy$.

24. $x^3(y - z) + y^3(z - x) + z^3(x - y)$.

25. $(x + 1)(x + 3)(x + 5)(x + 7) + 15$.

26. $(x + a)(x + 2a)(x + 3a)(x + 4a) + a^4$.

第五章　最高公因式最低公倍式

§51. **最高公因式**　能整除若干整式之式曰此諸整式之公因式.公因式之次數最高者曰最高公因式.最高公因式,簡記爲H.C.F.

例如　$a, b, 2a, 2b, ab, 2ab$ 皆爲 $2ab^2$ 及 $4a^2b$ 之公因式,其中 $2ab$ 爲H.C.F.

§52. **最低公倍式**　能爲若干整式整除之式曰此諸整式之公倍式.公倍式之次數最低者曰最低公倍式.最低公倍式簡記爲L.C.M.

例如　$4a^3b^3, 8a^2b^2c, 4a^2b^2, 12a^4b^3c^2$ 皆爲 $2ab^2$ 及 $4a^2b$ 之公倍式.其中 $4a^2b^2$ 爲L.C.M.

§53. **求單項式之最高公因式及最低公倍式法**　諸單項式之H.C.F.及L.C.M.可由視察得之.

(例一)　求　$8a^2b^2c, 4a^2bcd, 6a^3b^3cd$ 之H.C.F.

[解]　三式中共有者爲 a^2, b, c,係數之最大公約數爲2.故其H.C.F爲 $2a^2bc$.

(例二)　求　$8a^2b^2c, 4a^2bcd, 6a^3b^3cd$ 之L.C.M.

［解］ 三式各式所有者爲 a^3, b^3, c, d, 6; 數之最小公倍數爲24. 故其 L. C. M. 爲 $24a^3b^3cd$.

§54. 求多項式之最高公因式及最低公倍式法(一)

凡諸式之易析因式者,可先析各式之因式後,視爲單項式求之.

(例) 求 $2x^2-2$, $4x^2+4x-8$, $6x^2-12x+6$ 之H.C.F.及L.C.M.

［解］ 先將各式析因式:

$$2x^2-2=2(x^2-1)=2(x+1)(x-1);$$

$$4x^2+4x-8=4(x^2+x-2)=4(x+2)(x-1);$$

$$6x^2-12x+6=6(x^2-2x+1)=6(x-1)^2.$$

故由視察卽可知H.C.F.爲 $2(x-1)$; L.C.M.爲

$$12(x+1)(x+2)(x-1)^2.$$

§55. 求多項式之最高公因式法(二)　長除法

凡多項式之不易析因式者,恆用長除法.長除法根據以下諸定理.

定理一　若整式 A 爲 B 之因式, B 爲 C 之因式,則 A 必爲 C 之因式.

［證］ $\because$ A 爲 B 之因式, $\therefore$ $B=AA'$ (A' 爲其他一因式).

$\because$ B 爲 C 之因式, $\therefore$ $C=BB'$ (B' 爲其他一因式).

$\therefore\quad C=BB'=AA'B'=A(A'B').$

$\therefore$　A為C之因式.

定理二　若整式A為B,C二式之公因式,則A必為$B\pm C$之因式.

[證]　$\because$　A為B之因式,　　$\therefore$　$B=A\cdot A'$;

　　　A又為C之因式,　$\therefore$　$C=A\cdot A''$.

$\therefore$　$B\pm C=A\cdot A'\pm AA''=A(A'\pm A'')$.

$\therefore$　A為$B\pm C$之因式.

定理三　若整式A為B,C二式之公因式,又B為B'之因式,C為C'之因式,則A必為$B'\pm C'$之因式.

[證]　由定理一,A既為B,C二式之公因式,則A必為B',C'之公因式.由定理二,可知A必為$B'\pm C'$之因式.

根據以上定理,得長除法如下:

長除法　A,B為所設二整式,依其公有文字整列之為降冪序.以次數較低之式除他式.設A之次數較低,以A除B.若得剩餘R,則R之次數必較低於A,再以R除A.若又得剩餘R',則R'之次數必較低於R,再以R'除R.如是繼續行除法至於除盡.則最後之除數即為所設二整式A,B之H. C. F.

[證]　為明瞭計,先將除法佈算如下:

$$
\begin{array}{l}
A)B\ (P \\
\quad \underline{AP} \\
\quad\quad R)A\ (P' \\
\quad\quad\quad \underline{RP'} \\
\quad\quad\quad\quad R')R\ (P'' \\
\quad\quad\quad\quad\quad \underline{R'P''} \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad 0
\end{array}
$$

P, P', P'' 表各次除法所得之商.

因 $$R = B - AP \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

亦卽 $$B = R + AP \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

從 (1) 可知 A, B 之公因式,必爲 R 之因式(定理三);

卽 A, B 之公因式,亦爲 R, A 之公因式.

從 (2) 可知 R, A 之公因式必爲 B 之因式(定理三),

卽 R, A 之公因式亦爲 A, B 之公因式.

故 A, B 之公因式與 R, A 之公因式完全相同,而可知 A, B 之 H. C. F. 卽 R, A 之 H. C. F.

同理可知 R, A 之 H. C. F. 亦卽 R', R 之 H. C. F.

今 R' 能整除 R 則 R' 卽爲 $R' R$ 之 H. C. F. 故 R' 亦卽爲 R, A 之 H. C. F. 亦卽爲 A, B 之 H. C. F.

(例一) 求 $2x^2+x-3,\ 4x^3+8x^2-x-6$ 之 H. C. F.

用分離係數法最便,茲演算如下:

$$
\begin{array}{r|r|r|l}
1 & 2+1-3 & 4+8-1-6 & 2 \\
 & 2+3 & 4+2-6 & \\
\hline
-1 & -2-3 & 6+5-6 & 3 \\
 & -2-3 & 6+3-9 & \\
\hline
 & 0 & 2+3 & \\
 & & \# &
\end{array}
$$

故二式之H.C.F.為$2x+3$.

(例二) 求$2x^2+xy-3y^2$, $4x^3+8x^2y-xy^2-6y^3$之H.C.F.

兩式為x,y二文字之齊次式,可同樣用分離係數法求之.演算式同例一完全相同.得其H.C.F.為$2x+3y$

(例三) 求 $x^3-4a^2x+15a^3$, $x^4+a^2x^2+25a^4$之H.C.F.

$$
\begin{array}{r|r|r|l}
1 & 1+0-4+15 & 1+0+1+0+25 & 1 \\
 & 1-3+5 & 1+0-4+15 & \\
\hline
3 & 3-9+15 & 5 \mid 5-15+25 & \\
 & 3-9+15 & 1-\ 3+\ 5 & \\
\hline
 & 0 & \# &
\end{array}
$$

故二式之H.C.F.為$x^4-3ax+5a^2$.

注意: 第一次除得R為$5-15+25$可以5除之使簡.

(例四) 求$2x^2-5x+2$, $x^3+4x^2-4x-16$之H.C.F.

$$
\begin{array}{r|r|r|l}
2 & 2-5+2 & 1+\ 4-\ 4-16 & \\
 & 2-4 & 2 & \\
\hline
-1 & -1+2 & 2+\ 8-\ 8-32 & 1 \\
 & -1+2 & 2-\ 5+\ 2 & \\
\hline
 & 0 & 13-10-32 & \\
 & & 2 & \\
\hline
 & & 26-20-64 & 13 \\
 & & 26-65+26 & \\
\hline
 & & -45 \mid 45-90 & \\
 & & 1-\ 2 & \\
 & & \# &
\end{array}
$$

故二式之H.C.F.爲$x-2$.

注意: 當行係數除法而商將爲分數時,可以被除式乘一倍數如上.

(例五) 求 $48x^4-4x^3-120x^2-64x$, $36x^4-12x^3-78x^2-36x$ 之H.C.F.

$$48x^4-4x^3-120x^2-64x=4x(12x^3-x^2-30x-16);$$

$$36x^4-12x^3-78x^2-36x=6x(6x^3-2x^2-13x-6).$$

$$\begin{array}{r|r|r|l}
2 & 6-2-13-6 & 12-1-30-16 & 2 \\
 & 6-8-8 & 12-4-26-12 & \\
\hline
2 & 6-5-6 & 3-4-4 & 1 \\
 & 6-8-8 & 3+2\phantom{-4} & \\
\hline
 & 3+2 & -6-4 & -2 \\
 & & -6-4 & \\
\hline
 & & 0 &
\end{array}$$

故二式有單項公因式$2x$及多項公因式$3x+2$. 其H.C.F.爲$2x(3x+2)$

注意: 原式中有單項因式,必先析出後方可行長除法求之.單項因式中有公因式當併入多項公因式,其積方爲H.C.F.

(例六) 求 $3x^3+7x^2-4$, $3x^3+x^2-8x+4$, $x^3+6x^2+11x+6$ 三式之H.C.F.

先求其中二式之H.C.F.

1	3+7+0−4	3+1−8+4	1
	3+4−4	3+7+0−4	
1	3+4+4	−2 | −6−8+8	
	3+4−4	3+4−4	
	0	#	

得前二式之H. C. F. 爲$3x^2+4x-4$

再求此式與第三式之H. C. F. 卽爲三式之H. C. F.

3	3+4−4	1+ 6+ 11+ 6	
	3+6	3	
−2	−2−4	3+18+ 33+ 18	1
	−2−4	3+ 4− 4	
	0	14+ 35+ 18	
		3	
		42+111+ 54	14
		42+ 56− 56	
		55 | 55+110	
		1+ 2	
		#	

故三式之H. C. F. 爲$x+2$.

注意：　求三式以上諸式之H. C. F.，可先求其中二式之H. C. F. 名之曰H_1再求H_1與其中第三式之H. C. F. 名之曰H_2，再求H_2與其中第四式之H. C. F. 名之曰H_3，如是繼續求至與末一式之H. C. F. 卽爲諸式之H. C. F.

§56. **求多項式之最低公倍式法(二)**　凡多項式之不易析因式者，恆先求其H. C. F. 後再求其L. C. M. 其

法根據如下之定理:

定理　二式之 H. C. F. 與 L. C. M. 之積等於此二式之積

〔證〕 設二式為 A, B, 其 H. C. F. 為 H, 其 L. C. M. 為 L. 則因 H, 為 A, B 之 H. C. F. $\therefore$ $A=HA'$; $B=HB'$ 而 A', B' 更無公因式. $\therefore$ $L=HA'B'$.

$\therefore$ $HL=H(HA'B')=(HA')(HB')=AB$.

依此定理, 欲求 A, B 之 L. C. M. 可先求得其 H. C. F. 以其 H. C. F. 除 A, B 之積即得.

(例) 求 x^2+2x-3, x^3-1 之 L. C. M.

用長除法

1	$1+0+2-3$	$1+0+0-1$	1
	$1-1$	$1+0+2-3$	
1	$1+2-3$	-2 $\quad -2+2$	
	$1-1$	$1-1$	
3	$3-3$		
	$3-3$		
	0		

求得 H. C. F. 為 $x-1$.

$$\therefore\quad \text{L. C. M.}=\frac{(x^2+2x-3)(x^3-1)}{x-1}=(x^2+2x-3)(x^2+x+1)$$

$$=x^5+x^4+3x^3-x^2-x+3.$$

求三式以上諸式之 L. C. M., 可先求其中二式之 L

C. M. 名之曰 L_1，再求 L_1 與其中第三式之 L. C. M. 名之曰 L_2，再求 L_2 與第四式之 L. C. M. 名之曰 L_3，如是繼續求至與末一式之 L. C. M. 卽爲諸式之 L. C. M.

注意：求諸式之 L. C. M. 時，總以析因式爲佳，故非至無法析因式時，不用長除法.

習題十二

求以下各題中諸式之 H. C. F. 及 L. C. M.：——

1. $2a^3, 3a^4, 6a^5$.　　2. $4ab^2, 6a^2b, 8abc$.

3. $2x^2y^2, 3xy^3, 4x^3y^4z$.　　4. $60x^5y^3, 12x^2y^4, 8xy^5z$.

5. x^2-xy, y^2-xy, x^2-y^2,

6. $x^2+x, x^2-1, 5x^3+5$.

7. $a^5+8a^2b^3, a^4b+a^3b^2-2a^2b^3$.

8. $12x^2+x-1, 15x^2+8x+1$.

9. $x^3-xy^2, x^3+x^2y+xy^2+y^3$.

10. $4x^2-72x+180, 6x^2-54$.

求以下各題中諸式之 H. C. F.：——

11. $2x^3-3x^2+2x-1, 2x^2-x+1$.

12. $3x^3-13x^2+23x-21, 6x^3+x^2-44x+21$.

13. $2x^3+x^2-x-2, 3x^3-2x^2+x-2$.

14. $a^4-3ab^3+20b^4,\ 5a^4-3a^3b+64b^4.$

15. $x^3-4x+3,\ 2x^3+x^2-7x+4,\ x^3-2x^2+1.$

求以下各題中諸式之L. C. M.:——

16. $x^2+x-42,\ x^2-11x+30,\ x^2+2x-35.$

17. $x^3-7x-6,\ x^3+8x^2+17x+10.$

18. $x^4-1,\ x^4+x^3+2x^2+x+1.$

19. $2p^2+pq-3q^2,\ p^3-p^2q-pq^2+q^3,\ p^3-3p^2q+3pq^2-q^3.$

20. $x^3-x^2-4x+4,\ x^3-2x^2-x+2,\ x^3+2x^2-x-2.$

第六章　分式

§57　**分式**　整式A除以整式B，其商曰分式．A曰分子，B曰分母．

代數學之分式，即算術之分數．故分式定義亦可曰"分數之分母為代數式者曰分式"．

例如　$\dfrac{1}{a+b}$，$\dfrac{a-b}{a+b}$，$\dfrac{x-1}{x^2+x-1}$皆為分式．但$\dfrac{a+b}{3}$非分式，因$a+b$為整式而$\dfrac{1}{3}$僅為其分數係數也．

§58．**分數之符號變化**　分式亦表一數，故亦有絕對值及符號．其符號變化如下：

分子或分母之符號單獨改變，則分式值之符號亦隨之而變．分子及分母之符號共同改變，則分式值之符號不變．

例如　$\dfrac{-a}{b}=\dfrac{a}{-b}=-\dfrac{a}{b}$，　$-\dfrac{-a}{b}=-\dfrac{a}{-b}=\dfrac{a}{b}$，

又　$\dfrac{-a}{-b}=\dfrac{a}{b}$，　$-\dfrac{-a}{-b}=-\dfrac{a}{b}$．

又如 $\dfrac{x^2-3x-5}{1-2x-3x^3}=-\dfrac{x^2-3x-5}{3x^3+2x-1}=-\dfrac{5+3x-x^2}{1-2x-3x^3}$,

$$-\frac{x^2-3x-5}{1-2x-3x^3}=\frac{x^2-3x-5}{3x^3+2x-1}=\frac{5+3x-x^2}{1-2x-3x^3}.$$

§59. **分式之變形** 分式可變其形而不變其值,根據如下之定理:

定理 分式之分子及分母乘以同式或除以同式時,其值不變.

[證] 設分式 $\dfrac{A}{B}$ 之值為 n. 則 $A=nB$. 兩端各乘以同式 C, 得 $AC=nBC$.

$\therefore \dfrac{AC}{BC}=n$, 即分子 A, 分母 B 乘以同式 C, 其值仍為 n.

$$\therefore \frac{AC}{BC}=\frac{A}{B}.$$

同樣可證 $$\frac{A\div C}{B\div C}=\frac{A}{B}.$$

分式變形之應用有二,曰約分,曰通分.

不變分式之值而減低其分子,分母之次數曰約分.約分法以分子分母之H.C.F.除分子分母即得.若分子分母易析因式時,析因式後而去其公因式.

(例一) $\dfrac{6a^2bc^3}{9abc^5}=\dfrac{2a\cdot 3abc^3}{3c^2\cdot 3abc^3}=\dfrac{2a}{3c^2}$.

(例二) $\dfrac{x^2-x-20}{5x^2+5x-60}=\dfrac{(x-5)(x+4)}{5(x+4)(x-3)}=\dfrac{x-5}{5(x-3)}$.

不變諸分式之値而令其分母相同曰**通分**.通分法以諸分式分母之L.C.M代各式之原分母,其各分子乘以相當之式卽得.

(例三)　$\dfrac{x}{6\,a^2bc^3}$, $\dfrac{xy}{9\,abc^5}$ 求通分.

$$\frac{x}{6\,a^2bc^3}=\frac{x\cdot 3\,c^2}{18\,a^2bc^5}=\frac{3\,c^2x}{18\,a^2bc^5};$$

$$\frac{xy}{9\,abc^5}=\frac{xy\cdot 2\,a}{18\,a^2bc^5}=\frac{2\,axy}{18\,a^2bc^5}.$$

(例四)　$\dfrac{x-3}{x^2-3x+2}$, $\dfrac{x-2}{4x-x^2-3}$, $\dfrac{x-1}{6-5x+x^2}$ 求通分.

$$\frac{x-3}{x^2-3x+2}=\frac{x-3}{(x-1)(x-2)}=\frac{(x-3)^2}{(x-1)(x-2)(x-3)};$$

$$\frac{x-2}{4x-x^2-3}=-\frac{x-2}{x^2-4x+3}=-\frac{x-2}{(x-1)(x-3)}$$

$$=-\frac{(x-2)^2}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

$$\frac{x-1}{6-5x+x^2}=\frac{x-1}{x^2-5x+6}=\frac{x-1}{(x-2)(x-3)}$$

$$=\frac{(x-1)^2}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

§60. **分式加減法**　同分母之諸分式加減,卽以諸分式之分子相加減爲分子,而以原分母爲分母.異分母之諸分式相加減,先行通分而後加減之.

(例一) $\frac{x^2}{x^3+y^3}-\frac{xy}{x^3+y^3}+\frac{y^2}{x^3+y^3}=\frac{x^2-xy+y^2}{x^3+y^3}=\frac{1}{x+y}$

注意: 分式行加減後所得之結果,必行約分.

(例二) $\frac{x-y}{x^3+x^2y+xy^2+y^3}+\frac{x+y}{x^3-x^2y+xy^2-y^3}$

$=\frac{x-y}{(x+y)(x^2+y^2)}+\frac{x+y}{(x-y)(x^2+y^2)}$

$=\frac{(x-y)^2}{(x+y)(x-y)(x^2+y^2)}+\frac{(x+y)^2}{(x+y)(x-y)(x^2+y^2)}$

$=\frac{(x-y)^2+(x+y)^2}{(x+y)(x-y)(x^2+y^2)}=\frac{2(x^2+y^2)}{(x+y)(x-y)(x^2+y^2)}$

$=\frac{2}{(x+y)(x-y)}=\frac{2}{x^2-y^2}.$

(例三) $\frac{1}{(a-b)(a-c)}-\frac{1}{(b-a)(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}$

$=\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(a-b)(b-c)}+\frac{1}{(a-c)(b-c)}$

$=\frac{(b-c)+(a-c)+(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}=\frac{2(a-c)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$

$=\frac{2}{(a-b)(b-c)}.$

注意: 須注意第二第三兩項分母改序與變號之關係.

習題十三

簡約以下各式:—

1. $\dfrac{x^4-y^4}{(x-y)(x^2+y^2)}$.

2. $\dfrac{a^2-(b+c+d)^2}{(a-b)^2-(c+d)^2}$.

3. $\dfrac{a^2+ab-6b^2}{a^2+2ab-8b^2}$.

4. $\dfrac{3x^2+16x-35}{5x^2+33x-14}$.

5. $\dfrac{x^3-5x^2+7x-3}{x^3-3x+2}$.

6. $\dfrac{ab(x^2+y^2)+xy(a^2+b^2)}{ab(x^2-y^2)+xy(a^2-b^2)}$.

7. $\dfrac{x^5-x^4y-xy^4+y^5}{x^4-x^3y-x^2y^2+xy^3}$.

8. $\dfrac{1+2x^2+x^3+2x^4}{1+3x^2+x^3+3x^4}$.

9. $1+\dfrac{a-b}{a+b}$.

10. $a-b-\dfrac{a^2+b^2}{a-b}$.

11. $m^2-m+1-\dfrac{2}{m+1}$.

12. $x-\dfrac{x^2}{x+1}+\dfrac{x}{x-1}$.

13. $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{1}{3-x}$.

14. $\dfrac{2x-5}{4x^2-1}-\dfrac{5}{1-2x}-\dfrac{3}{x}$.

15. $\dfrac{1}{x^2-9x+20}-\dfrac{1}{x^2-11x+30}$.

16. $\dfrac{2}{x^2-2x-3}+\dfrac{3}{9-x^2}-\dfrac{1}{x^2+4x+3}$.

17. $\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{2}{1+x^2}-\dfrac{4}{1+x^4}$.

18. $\dfrac{5}{3x-3}+\dfrac{3x-1}{1-x^2}+\dfrac{1}{2x+2}$.

19. $\dfrac{a+b}{(c-a)(c-b)}+\dfrac{b+c}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{c+a}{(b-c)(b-a)}$.

20. $\dfrac{1}{a(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{b(b-c)(b-a)}+\dfrac{1}{c(c-a)(c-b)}$.

§61. 分式乘法 諸分式相乘,以諸分式之分子相乘爲分子,其分母相乘爲分母.

(例一) $\dfrac{ax}{by}\times\dfrac{cx^2}{dy}\times\dfrac{ay}{dx}=\dfrac{ax\cdot cx^2\cdot ay}{by\cdot dy\cdot dx}=\dfrac{a^2cx^3y}{bd^2xy^2}=\dfrac{a^2cx^2}{bd^2y}$.

注意: 分式相乘之積必行約分.

(例二) $\dfrac{4x^2+11x-3}{2x^2-7x+3}\times\dfrac{x^2-4x+3}{4x^3+3x^2-x}\times\dfrac{2x^2+x-1}{3x^2+6x-9}$.

$$=\frac{(4x-1)(x+3)}{(x-3)(2x-1)}\times\frac{(x-3)(x-1)}{x(4x-1)(x+1)}\times\frac{(2x-1)(x+1)}{3(x-1)(x+3)}$$

$$=\frac{(4x-1)(x+3)(x-3)(x-1)(2x-1)(x+1)}{(x-3)(2x-1)\cdot x(4x-1)(x+1)\cdot 3(x-1)(x+3)}$$

$$=\frac{1}{3x}.$$

注意: 爲便於約分計,故先將各分式之分子分母析因式.

§62. 分式除法 分式除法以除式之分母乘被除式之分子爲分子,以除式之分子乘被除式之分母爲分母.

(例一) $\dfrac{4ax^2}{15by^3}\div\dfrac{2bx}{3ay}=\dfrac{4ax^2\cdot 3ay}{15by^3\cdot 2bx}=\dfrac{2a^2x}{5b^2y^2}$.

注意: 分式行除法後所得之商必行約分.

(例二) $\dfrac{x^2-9y^2}{x^2-25y^2}\div\dfrac{x+3y}{x-5y}$

$$=\frac{(x+3y)(x-3y)(x-5y)}{(x+5y)(x-5y)(x+3y)}=\frac{x-3y}{x+5y}.$$

(例三) $\dfrac{a}{b}\div\dfrac{c}{d}\times\dfrac{e}{f}\div\dfrac{g}{h}$

$$=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}\times\frac{e}{f}\times\frac{h}{g}=\frac{adeh}{bcfg}.$$

注意: 諸分式行乘除時,可將所有除式之分子分母互易而悉行乘法.

習題十四

簡約以下各式:—

1. $\dfrac{x^3+1}{x^4+x^2+1}\times\dfrac{1-x^3}{1-x^2}.$

2. $\dfrac{(p+q)^2-r^2}{p^2-(q-r)^2}\div\dfrac{r^2-(p+q)^2}{r^2-(p-q)^2}.$

3. $\dfrac{64x^2y^2-z^4}{x^2-4}\times\dfrac{(x-2)^2}{8xy+z^2}\div\dfrac{x^2-4}{(x+2)^2}.$

4. $\dfrac{x^2+x-2}{x^2-x-20}\times\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-x}\div\left(\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-2x-15}\div\dfrac{x^2}{x+3}\right).$

5. $\dfrac{a^2+b^2-c^2+2ab}{a^2+ab-ac}\div\dfrac{a^2-b^2+c^2+2ac}{a}\times\dfrac{a^2+b^2-c^2-2ab}{b^2-ab+bc}.$

6. $\left(\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}\right)\div\left(a+b-\frac{2ab}{a+b}\right).$

7. $\left(\frac{y}{3x-y}+\frac{3x}{3x+y}\right)\times\frac{3x-y}{x^2+xy}\div\frac{9x^2+y^2}{3x^2+xy}.$

8. $\frac{1}{x^2-(a+b)x+ab}\div\frac{1}{x^2-(b+c)x+bc}\times\frac{x^2-b^2}{x^2-c^2}.$

9. $\left(1+\frac{x^3}{y^3}\right)\div\left(1+\frac{x}{y}+\frac{x^2}{y^2}\right)\div\left(1-\frac{x}{y}+\frac{x^2}{y^2}\right)\times\left(1-\frac{x^3}{y^3}\right).$

10. $(x^4+4x^2+16)\div\left(x^2+2x+4+\frac{16}{x-2}\right)\div\left(x^2-2x+4-\frac{16}{x+2}\right).$

§63. **疊分式**　分式中分子分母不盡爲整式者曰疊分式.疊分式常可應用分式變形定理簡約之.

(例一)　$$\frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{\frac{a}{b}-\frac{c}{d}}=\frac{bd\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)}{bd\left(\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\right)}=\frac{ad+bc}{ad-bc}.$$

注意:　bd 爲分子,分母中各分式分母之L. C. M.,故以乘分子分母,則皆成整式.

(例二)　$$\frac{x+5+\frac{6}{x}}{1+\frac{6}{x}+\frac{8}{x^2}}=\frac{x^2\left(x+5+\frac{6}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{6}{x}+\frac{8}{x^2}\right)}=\frac{x(x^2+5x+6)}{x^2+6x+8}$$

$$=\frac{x(x+2)(x+3)}{(x+2)(x+4)}=\frac{x(x+3)}{x+4}.$$

注意：分子分母中各分式分母之L.C.M.爲x^2. 然分子所需乘數僅爲x, 故留x之一次在括弧之外不必乘入

(例三)
$$\frac{\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}}{\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}}=\frac{(a^2-b^2)(a^2+b^2)\left[\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right]}{(a^2-b^2)(a^2+b^2)\left[\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}\right]}$$

$$=\frac{(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2}{(a^2+b^2)[(a+b)^2-(a-b)^2]}$$

$$=\frac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)4ab}=\frac{ab}{a^2+b^2}.$$

(例四)
$$\frac{\dfrac{x}{1+\dfrac{1}{x}}-\dfrac{1}{x+1}+1}{\dfrac{x}{1-\dfrac{1}{x}}-\dfrac{1}{x-1}-x}=\frac{\dfrac{x^2}{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}-\dfrac{1}{x+1}+1}{\dfrac{x^2}{x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}-\dfrac{1}{x-1}-x}$$

$$=\frac{\dfrac{x^2}{x+1}-\dfrac{1}{x+1}+1}{\dfrac{x^2}{x-1}-\dfrac{1}{x-1}-x}=\frac{(x+1)(x-1)\left[\dfrac{x^2}{x+1}-\dfrac{1}{x+1}+1\right]}{(x+1)(x-1)\left[\dfrac{x^2}{x-1}-\dfrac{1}{x-1}-x\right]}$$

$$=\frac{(x-1)[x^2-1+(x+1)]}{(x+1)[x^2-1-x(x-1)]}=\frac{(x-1)(x^2+x)}{(x+1)(x-1)}=x.$$

(例五)
$$\frac{1}{1-\dfrac{a}{a+\dfrac{1}{a-\dfrac{1}{a}}}}=\frac{1}{1-\dfrac{a}{a+\dfrac{a}{a\left(a-\dfrac{1}{a}\right)}}}$$

$$=\frac{1}{1-\dfrac{a}{a+\dfrac{a}{a^2-1}}}=\frac{1}{1-\dfrac{(a^2-1)a}{(a^2-1)\left[a+\dfrac{a}{a^2-1}\right]}}$$

$$=\frac{1}{1-\dfrac{a^3-a}{a^3-a+a}}=\frac{1}{1-\dfrac{a^2-1}{a^2}}$$

$$=\frac{a^2}{a^2\left[1-\dfrac{a^2-1}{a^2}\right]}=\frac{a^2}{a^2-(a^2-1)}$$

$$=\frac{a^2}{a^2-a^2+1}=a^2.$$

習題十五

1. $\dfrac{5x^2-\dfrac{1}{5}}{1+\dfrac{1}{5x}}$.

2. $\dfrac{\dfrac{x+y}{y}+\dfrac{y}{x-y}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}$.

3. $\dfrac{9x^2-64}{x-1-\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{4+x}}}$.

4. $\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{3}{x^3}}{\dfrac{9}{x}-x}$.

5. $\dfrac{\dfrac{m-n}{m+n}-\dfrac{m+n}{m-n}}{1-\dfrac{m^2+n^2}{(m+n)^2}}$.

6. $\dfrac{\dfrac{8xy}{x^2-y^2}}{\dfrac{x^3-y^3}{x+y}-\dfrac{x^3+y^3}{x-y}}$.

7. $\dfrac{a-2}{a-2-\dfrac{a}{a-\dfrac{a-1}{a-2}}}$.

8. $\dfrac{x}{x+\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x}}}}$.

9. $x+\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x}}}}}$.

10. $\dfrac{x+\dfrac{x-y}{1+xy}}{1-\dfrac{y(x-y)}{1+xy}}-\dfrac{x-\dfrac{x-y}{1-xy}}{1-\dfrac{x(x-y)}{1-xy}}$.

11. $\dfrac{\dfrac{m}{n}+\dfrac{n}{m}-1}{\dfrac{m^2}{n^2}+\dfrac{m}{n}+1}\times\dfrac{1+\dfrac{n}{m}}{m-n}\div\dfrac{1+\dfrac{n^3}{m^3}}{\dfrac{m^2}{n}-\dfrac{n^2}{m}}$.

12. $\left(\dfrac{a+x}{a^2-ax+x^2}-\dfrac{a-x}{a^2+ax+x^2}\right)\div\left(\dfrac{a^2+x^2}{a^3-x^3}-\dfrac{a^2-x^2}{a^3+x^3}\right)$.

13. $\left[\dfrac{\dfrac{1}{a}-\dfrac{a+x}{a^2+x^2}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{x+a}{x^2+a^2}}+\dfrac{\dfrac{1}{a}-\dfrac{a-x}{a^2+x^2}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{x-a}{x^2+a^2}}\right]\div\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{a}\right)$.

14. $\dfrac{x+\dfrac{1}{y}}{x+\dfrac{1}{y+\dfrac{1}{z}}}-\dfrac{1}{y(xyz+x+z)}$.

15. $$\frac{\left(\frac{3x+x^3}{1+3x^2}\right)^2-1}{\frac{3x^2-1}{x^3-3x}+1}\div\frac{\frac{9}{x^2}-\frac{33-x^2}{3x^2+1}}{\frac{3}{x^2}-\frac{2(x^2+3)}{(x^3-x)^2}}.$$

16. $$\frac{\frac{a-b}{1+ab}+\frac{b-c}{1+bc}}{1-\frac{a-b}{1+ab}\times\frac{b-c}{1+bc}}.$$

第七章　無理數　虛數

§64. 不盡根數　以一數求其方根,不能得其精確之數值,則此根數爲不盡根數.

例如　$x^2=2$, 則 x 爲不盡根數.

因　$1^2<2$,　$2^2>2$,　$\therefore$　$1<x<2$;

又　$1.4^2<2$,　$1.5^2>2$,　$\therefore$　$1.4<x<1.5$;

$1.41^2<2$,　$1.42^2>2$,　$\therefore$　$1.41<x<1.42$;

$1.414^2<2$, $1.415^2>2$,　$\therefore$　$1.414<x<1.415$;

....

如是繼續求之, x 之數値恆介乎無限相近兩小數之間而無精確數值. 故 x 爲不盡根數.

不盡根數,即以根號表之,如上例 $x=\sqrt{2}$. 故 $\sqrt{2}$ 者意爲一數,其平方等於2也.

依算術中開方法求得 $\sqrt{2}$ 之値爲1.4142, 但 $(1.4142)^2\fallingdotseq 2$, 故1.4142僅爲 $\sqrt{2}$ 之近似値而非眞値. 即若 $x^2=2$, 則 $x\fallingdotseq 1.4142$, 而只能云 $x=\sqrt{2}$ 也.

同樣若 $x^3=5$, 則 $x=\sqrt[3]{5}$.

普遍言之,若 $x^n=a$, 則 $x=\sqrt[n]{a}$.

故得 $(\sqrt[n]{a})^n=a$. 式中 a 爲任何數, n 爲任意正整數.

§ 65. **無理數** 一數無精確數值而僅有近似值者曰無理數. 整數,分數皆曰有理數.

不盡根數,即爲無理數之一種. 不盡根數之外雖尙有他種無理數但不盡根數實爲無理數之主要者.

§ 66. **根式** 不盡根數根號內含有文字者曰不盡根式. 不盡根數不盡根式統稱曰根式.

凡式皆所以表數,但不盡根式所表者未必爲不盡根數. 例如 $\sqrt{a}$ 爲不盡根式,然若 $a=4$ 時 $\sqrt{a}=\sqrt{4}=2$ 爲整數.

§ 67. **根式之變形** 根式可變其形而不變其值,根據以下諸公式:—

公式一: $(\sqrt[n]{a})^n=\sqrt[n]{a^n}$.

[證] 因 $(\sqrt[n]{a})^n=a$, $\sqrt[n]{a^n}=a$.

$\therefore$ $(\sqrt[n]{a})^n=\sqrt[n]{a^n}$.

公式二: $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}\cdots\cdots=\sqrt[n]{abc\cdots\cdots}$.

[證] 因 $(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}\cdots\cdots)^n=(\sqrt[n]{a})^n\cdot(\sqrt[n]{b})^n\cdot(\sqrt[n]{c})^n\cdots\cdots$

$=abc\cdots\cdots,$

$$(\sqrt[n]{abc\cdots\cdots})^n = abc\cdots\cdots.$$

$$\therefore\quad \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}\cdots\cdots = \sqrt[n]{abc\cdots\cdots}.$$

公式三： $$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

［證］ 因 $$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} = \frac{a}{b},$$

$$\left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right)^n = \frac{a}{b}.$$

$$\therefore\quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

公式四： $$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}.$$

［證］ 因 $$[(\sqrt[n]{a})^m]^n = [(\sqrt[n]{a})^n]^m = a^m,$$

$$(\sqrt[n]{a^m})^n = a^m.$$

$$\therefore\quad (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}.$$

公式五： $$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

［證］ 因 $$(\sqrt[np]{a^{mp}})^{np} = a^{mp},$$

$$(\sqrt[n]{a^m})^{np} = [(\sqrt[n]{a^m})^n]^p = (a^m)^p = a^{mp}.$$

$$\therefore\quad \sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

公式六： $$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}.$$

［證］ 因 $$[\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}]^{mn} = [(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}})^n]^m = [\sqrt[m]{a}]^m = a,$$

$$[\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}]^{mn}=[(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^m]^n=[\sqrt[n]{a}]^n=a,$$

$$(\sqrt[mn]{a})^{mn}=a.$$

$$\therefore\quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}.$$

§68. **根式之簡約** 根據上節諸公式,根式得簡約之如下:—

(例一) (a) $\sqrt[3]{72}=\sqrt[3]{2^3\times 3^2}=\sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{3^2}=2\sqrt[3]{9}.$

注意: (a) 中 $\sqrt[3]{9}$ 爲根式而 2 爲其係數.

(b) $\sqrt[3]{a^5b^4}=\sqrt[3]{a^3b^3\cdot a^2b}=\sqrt[3]{(ab)^3}\cdot\sqrt[3]{a^2b}=ab\sqrt[3]{a^2b}.$

(c) $\sqrt{(x+y)^3}=\sqrt{(x+y)^2(x+y)}=\sqrt{(x+y)^2}\cdot\sqrt{(x+y)}$

$$=(x+y)\sqrt{x+y}.$$

(例二) (a) $\sqrt[6]{8}=\sqrt[2\times3]{2^3}=\sqrt{2}.$

(b) $\sqrt[6]{a^3b^6c^9}=\sqrt[6]{b^6c^6\cdot a^3c^3}=\sqrt[6]{(bc)^6}\cdot\sqrt[6]{(ac)^3}=bc\sqrt{ac}.$

(c) $\sqrt[4]{x^2-2xy+y^2}=\sqrt[4]{(x-y)^2}=\sqrt{x-y}.$

(例三) (a) $\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\sqrt{\dfrac{2}{4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2}.$

注意: (a) 中 $\sqrt{2}$ 爲根式而 $\frac{1}{2}$ 爲其係數.

(b) $\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}=\sqrt[3]{\dfrac{2\times3^2}{3\times3^2}}=\dfrac{\sqrt[3]{18}}{\sqrt[3]{3^3}}=\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{18}.$

(c) $\sqrt{\dfrac{a}{c}}=\sqrt{\dfrac{ac}{c^2}}=\dfrac{\sqrt{ac}}{\sqrt{c^2}}=\dfrac{1}{c}\sqrt{ac}.$

由上諸例觀之,可見凡根式可依適當手續變形,使合於下列標準:—

(1) 根號內無大於根指數之冪數.

(2) 根號內各因式之冪指數與根指數無公約數.

(3) 分母無根式.

合於此標準之根式爲最簡根式.

習題十六

簡約下列各根式:—

1. $\sqrt{200}$.

2. $\sqrt{243}$.

3. $\sqrt[3]{432}$.

4. $\sqrt[3]{a^4+a^3b}$.

5. $\sqrt{a^4-a^3b}$.

6. $\sqrt[3]{a^6b^3x^4y^2}$.

7. $\sqrt{x^3+3x^2y+3xy^2+y^3}$.

8. $\sqrt{a^3-3a^2+3a-1}$.

9. $\sqrt[4]{49}$.

10. $\sqrt[6]{216a^6b^9c^3}$.

11. $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{27}}$.

12. $\sqrt[5]{\dfrac{8x^2}{(x+y)^8}}$.

13. $\dfrac{x}{y}\sqrt[m]{\dfrac{x^{m+1}}{x^{m-1}}}$.

14. $\left[\dfrac{a}{a+b}\sqrt{\dfrac{5(a+b)}{2ab}}\right]^3$.

已知$\sqrt{2}$之近似値爲1.414, $\sqrt{3}$之近似値爲1.732,求下列各根式之近似値:—

15. $\sqrt{50}$. 16. $\sqrt{54}$.

17. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. 18. $\sqrt[6]{216}$.

§69. **同類根式** 兩根式完全相同或僅異其係數者曰同類根式.

例如 $\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, a\sqrt{3}$ 爲同類根式. $\sqrt{2}$ 與 $\sqrt{3}$ 則爲不同類, $\sqrt{2}$ 與 $\sqrt[3]{2}$ 亦爲不同類.

$\sqrt{8}=2\sqrt{2}$, $\sqrt{18}=3\sqrt{2}$, 故 $\sqrt{8}$, $\sqrt{18}$ 亦爲同類根式. 故根式是否同類須化簡後察之.

§70. **根式之加減法** 同類根式行加減所得之結果卽爲其同類根式,以各根式係數之代數和爲其係數. 不同類根式行加減,不能使之合併爲一項. 僅以符號"+"或"−"聯各根式,卽爲加減之結果.

(例一) $5\sqrt{a}-2\sqrt{a}+3\sqrt{a}=6\sqrt{a}$.

(例二)
$$\begin{aligned}\sqrt{50}-\sqrt{32}-\sqrt{\frac{1}{2}}&=\sqrt{2\times 25}-\sqrt{2\times 16}-\sqrt{\frac{2}{4}}\\&=5\sqrt{2}-4\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}\\&=\left(5-4-\frac{1}{2}\right)\sqrt{2}=\frac{1}{2}\sqrt{2}.\end{aligned}$$

(例三). $\sqrt{18}+\sqrt{12}-\sqrt{75}-\sqrt{2}$

$=3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-5\sqrt{3}-\sqrt{2}$

$$=3\sqrt{2}-\sqrt{2}+2\sqrt{3}-5\sqrt{3}$$

$$=(3-1)\sqrt{2}+(2-5)\sqrt{3}=2\sqrt{2}-3\sqrt{3}.$$

(例四)　$8\sqrt[3]{40}+\sqrt[3]{-135}-2\sqrt[3]{625}$

$$=8\sqrt[3]{8\times5}+\sqrt[3]{5\times(-27)}-2\sqrt[3]{5\times125}$$

$$=8\times2\sqrt[3]{5}+(-3)\sqrt[3]{5}-2\times5\sqrt[3]{5}$$

$$=16\sqrt[3]{5}-3\sqrt[3]{5}-10\sqrt[3]{5}$$

$$=(16-3-10)\sqrt[3]{5}$$

$$=3\sqrt[3]{5}.$$

習題十七

簡約以下各式:—

1. $3\sqrt{45}-\sqrt{20}-7\sqrt{5}.$　　2. $4\sqrt{63}+5\sqrt{7}-8\sqrt{28}.$

3. $2\sqrt[3]{189}+3\sqrt[3]{875}-7\sqrt[3]{56}.$

4. $5\sqrt[3]{-54}-2\sqrt[3]{-16}+4\sqrt[3]{686}.$

5. $4\sqrt{128}+4\sqrt{75}-5\sqrt{162}.$

6. $\sqrt{8}+\sqrt[3]{16}-\sqrt[4]{4}.$

7. $8\sqrt{a}+5\sqrt{b}-7\sqrt[3]{a}+4\sqrt{b}+\sqrt[3]{a}-5\sqrt{a}.$

8. $7\sqrt{4x}+4\sqrt{9x}+3\sqrt{45x}-5\sqrt{36x}-2\sqrt{80x}.$

9. $3\sqrt{8}+4\sqrt{32}-5\sqrt{50}-7\sqrt{72}+6\sqrt{98}.$

10. $\sqrt{a-b}+\sqrt{16a-16b}+\sqrt{ax^2-bx^2}-\sqrt{(a-b)^3}$.

11. $\sqrt{a^3+a^2b}-\sqrt{ab^2+b^3}+\sqrt{(a^2-b^2)(a-b)}$.

12. $\sqrt[3]{m^4-m^3n}+\sqrt[3]{mn^6-n^7}-\sqrt[3]{(m^2-n^2)(m+n)^2}$.

13. $\sqrt{ab}+\sqrt{\frac{1}{ab}}-\sqrt{\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+2}+\sqrt{\frac{b}{a}+\frac{a}{b}-2}$.

14. $\sqrt[3]{a^2b^2}+\sqrt[3]{a^5b^5}+\sqrt[3]{\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}+3a+3b}$

$$+\sqrt[3]{\frac{a^2}{b}-\frac{b^2}{a}-3a+3b}.$$

15. $\sqrt[4]{144}+\sqrt{768}-\sqrt[6]{1728}+\frac{\sqrt{625}}{\sqrt{27}}$.

16. $(a-c)\sqrt[3]{ac}+\sqrt[3]{\frac{c}{a^2}}-\sqrt[3]{\frac{a}{c^2}}+\sqrt[3]{\frac{(a-c)^3}{a^2c^2}}$.

§ 71. 同次根式 根式之根指數相同者曰同次根式.凡不同次之根式常可化爲同次.例如 $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$ 次數不同,然依公式五, $\sqrt{2}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt[6]{8}$, 而 $\sqrt[3]{3}=\sqrt[6]{3^2}=\sqrt[6]{9}$, 即爲同次.普徧言之,若有不同次二根式 $\sqrt[m]{a}$ 及 $\sqrt[n]{b}$ 必可化之如下: $\sqrt[m]{a}=\sqrt[mn]{a^n}$, $\sqrt[n]{b}=\sqrt[mn]{b^m}$, 即爲同次.

注意: 化根式爲同次,其法與分式之通分適相類.以兩根式根指數之 L. C. M. 爲根指數而將根號內各因式與以適當指數即得.

§72. **根式之乘法**　諸同次根式相乘,即依公式二,將各根式內諸因式相乘而冠以同次根號.不同次根式相乘,先化爲同次而乘之.

(例一)　$\sqrt{3}\times\sqrt{6}\times\sqrt{8}=\sqrt{3\times6\times8}=\sqrt{3\times3\times2\times2^3}$

$$=\sqrt{3^2\times2^4}=3\times2^2=12.$$

(例二)　$\sqrt[3]{ab}\times\sqrt[3]{bc}\times\sqrt[3]{c^2a^2}=\sqrt[3]{ab\cdot bc\cdot c^2a^2}$

$$=\sqrt[3]{a^3b^2c^3}=ac\sqrt[3]{b^2}.$$

(例三)　$\sqrt[3]{5^2}\times\sqrt{5}=\sqrt[6]{5^4}\times\sqrt[6]{5^3}=\sqrt[6]{5^7}=5\sqrt[6]{5}.$

(例四)　$\sqrt[4]{ab^3}\times\sqrt[6]{bc}\times\sqrt[3]{ab^2c}\times\sqrt{bcd}$

$$=\sqrt[12]{(ab^3)^3}\times\sqrt[12]{(bc)^2}\times\sqrt[12]{(ab^2c)^4}\times\sqrt[12]{(bcd)^6}$$

$$=\sqrt[12]{a^3b^9\cdot b^2c^2\cdot a^4b^8c^4\cdot b^6c^6d^6}$$

$$=\sqrt[12]{a^7b^{25}c^{12}d^6}=b^2c\sqrt[12]{a^7bd^6}.$$

(例五)　$(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7})\times\sqrt{2}$

$$=\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}+\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}-\sqrt{7}\cdot\sqrt{2}$$

$$=\sqrt{6}+\sqrt{10}-\sqrt{14}.$$

(例六)　$(\sqrt{6}+\sqrt{3}-2\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

$$=(\sqrt{6}+\sqrt{3}-2\sqrt{2})\sqrt{3}-(\sqrt{6}+\sqrt{3}-2\sqrt{2})\sqrt{2}$$

$$=\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}-2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}-\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}$$

$$-\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}+2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$$

$$=3\sqrt{2}+3-2\sqrt{6}-2\sqrt{3}-\sqrt{6}+4$$

$$=(3+4)+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}-(2+1)\sqrt{6}$$

$$=7+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}-3\sqrt{6}.$$

(例七) $(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{2}-\sqrt{3})$

$$=\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{2}-\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}-\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt{3}$$

$$=\sqrt[6]{8}\cdot\sqrt[6]{4}+\sqrt[3]{6}-\sqrt{6}-\sqrt[6]{9}\,\sqrt[6]{27}$$

$$=\sqrt[6]{32}+\sqrt[3]{6}-\sqrt{6}-\sqrt[6]{243}.$$

習 題 十 八

求以下各式所示之積:—

1. $\sqrt{15}\cdot\sqrt{12}\cdot\sqrt{20}.$
2. $\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt{2}.$
3. $\sqrt[3]{a^2b}\cdot\sqrt[3]{b^2c}\cdot\sqrt[3]{c^2d}.$
4. $\sqrt[5]{a^4b^3c^2}\sqrt[5]{a^2b^4c^3}\sqrt[5]{abc}.$
5. $\sqrt{3}\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{5}\sqrt{6}.$
6. $\sqrt{2}\sqrt[3]{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[6]{2}.$
7. $\sqrt{30}(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}).$
8. $\sqrt{32}(\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[4]{2}).$
9. $\sqrt{70}(\sqrt{2}+\sqrt{7}+\sqrt{5}-\sqrt{28}-\sqrt{10}-\sqrt{14})$
10. $\sqrt{ab}\left(\sqrt{ab}+\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+2.}\right)$
11. $(\sqrt{a}+\sqrt[3]{a}+\sqrt[5]{a})\sqrt[6]{a^5b^5c^5}.$
12. $\sqrt{3\sqrt{3}}+\sqrt[3]{3\sqrt{3}}+\sqrt{3\sqrt[3]{3}})\sqrt{3}.$

13. $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{6})$.

14. $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{60}+\sqrt{24})$.

15. $(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2})(\sqrt{3}-\sqrt[3]{2})$.

16. $(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{3}+\sqrt{2})$.

17. $(\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[5]{c})(\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}-\sqrt[5]{c})$.

18. $(\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[5]{c})^2$.

19. $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})$.

20. $(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-\sqrt{2}+1)$.

21. $(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})$.

22. $(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})$.

23. $(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y})(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})$.

24. $(\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{y})(\sqrt[5]{x^4}+\sqrt[5]{x^3y}+\sqrt[5]{x^2y^2}+\sqrt[5]{xy^3}+\sqrt[5]{y^4})$.

25. $(\sqrt[5]{x}+\sqrt[5]{y})(\sqrt[5]{x^4}-\sqrt[5]{x^3y}+\sqrt[5]{x^2y^2}-\sqrt[5]{xy^3}+\sqrt[5]{y^4})$.

26. $(\sqrt[6]{x}+\sqrt[6]{y})(\sqrt[6]{x}-\sqrt[6]{y})(\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{xy}+\sqrt[3]{y})$

$$\times(\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{xy}+\sqrt[3]{y}).$$

§73. 有理化因式　凡根式常可乘以一其他適當根式使其積爲整式.如此之適當乘式曰原式之有理化因式.

有理化因式之求法,根據乘法公式如下:—

(1)　因 $A^{n-p}\cdot A^{p}=A^{n}$，　$\therefore\ \sqrt[n]{A^{n-p}}\cdot\sqrt[n]{A^{p}}=A$. 故得 $\sqrt[n]{A^{n-p}}$ 與 $\sqrt[n]{A^{p}}$ 互爲有理化因式.

(例一)　$\sqrt[5]{x^{3}}$ 之有理化因式爲 $\sqrt[5]{x^{5-3}}=\sqrt[5]{x^{2}}$.

(例二)　求 $\sqrt[3]{20}$ 之有理化因式.

[解]　$\sqrt[3]{20}=\sqrt[3]{2^{2}\times 5}$，故其有理化因式當爲 $\sqrt[3]{2\times 5^{2}}=\sqrt[3]{50}$.

(2)　因 $(A+B)(A-B)=A^{2}-B^{2}$.

$\therefore\ (\sqrt{A}+\sqrt{B})(\sqrt{A}-\sqrt{B})=(\sqrt{A})^{2}-(\sqrt{B})^{2}=A-B$.

故得 $\sqrt{A}+\sqrt{B}$ 與 $\sqrt{A}-\sqrt{B}$ 互爲有理化因式.

(例三)　$\sqrt{3}+\sqrt{2}$ 之有理化因式爲 $\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

(3)　因 $(A\pm B)(A^{2}\mp AB+B^{2})=A^{3}\pm B^{3}$.

$\therefore\ (\sqrt[3]{A}\pm\sqrt[3]{B})(\sqrt[3]{A^{2}}\mp\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^{2}})=A\pm B$.

故得 $\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}$ 與 $\sqrt[3]{A^{2}}-\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^{2}}$ 互爲有理化因式，又 $\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}$ 與 $\sqrt[3]{A^{2}}+\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^{2}}$ 互爲有理化因式.

(例四)　$\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}$ 之有理化因式爲

$\sqrt[3]{3^{2}}-\sqrt[3]{3\times 2}+\sqrt[3]{2^{2}}=\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}$. 其乘積爲

$(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{3^{2}}-\sqrt[3]{3\times 2}+\sqrt[3]{2^{2}})=(\sqrt[3]{3})^{3}+(\sqrt[3]{2})^{3}=3+2=5$.

(例五)　$\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$ 之有理化因式爲

$\sqrt[3]{3^{2}}+\sqrt[3]{3\times 2}+\sqrt[3]{2^{2}}=\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}$. 其乘積爲

$$(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3\times 2}+\sqrt[3]{2^2})=(\sqrt[3]{3})^3-(\sqrt[3]{2})^3=3-2=1.$$

（例六） 求 $\sqrt[3]{3}-\sqrt{2}$ 之有理化因式.

［解］ 因 $(\sqrt[3]{3}-\sqrt{2})(\sqrt[3]{3}+\sqrt{2})=(\sqrt[3]{3})^2-(\sqrt{2})^2$

$$=\sqrt[3]{9}-2=\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{8}.$$

又因 $(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{8})(\sqrt[3]{9^2}+\sqrt[3]{9\times 8}+\sqrt[3]{8^2})=(\sqrt[3]{9})^3-(\sqrt[3]{8})^3$

$$=9-8=1.$$

故 $(\sqrt[3]{3}-\sqrt{2})$ 之有理化因式爲

$$(\sqrt[3]{3}+\sqrt{2})(\sqrt[3]{9^2}+\sqrt[3]{9\times 8}+\sqrt[3]{8^2})$$

$$=(\sqrt[3]{3}+\sqrt{2})(3\sqrt[3]{3}+2\sqrt[3]{9}+4).$$

（例七） 求 $\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}$ 之有理化因式.

［解］ 因 $(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2})$

$$=(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$$

$$=5-(3-2\sqrt{3}\sqrt{2}+2)$$

$$=2\sqrt{6}.$$

又因 $2\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}=2\times 6=12.$

故 $\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}$ 之有理化因式爲 $\sqrt{6}(\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2}).$

(4) 關於高次項乘法有如下之二公式：

$$(A-B)(A^{n-1}+A^{n-2}B+A^{n-3}B^2+\cdots+B^{n-1})=A^n-B^n,$$

$$(A+B)[A^{n-1}-A^{n-2}B+A^{n-3}B^2-\cdots-(-1)^n B^{n-1}]$$

$$=A^n-(-1)^n B^n.$$

故 $(\sqrt[n]{A}-\sqrt[n]{B})(\sqrt[n]{A^{n-1}}+\sqrt[n]{A^{n-2}B}+\sqrt[n]{A^{n-3}B^2}+\cdots+\sqrt[n]{B^{n-1}})$

$$=A-B.$$

又 $(\sqrt[n]{A}+\sqrt[n]{B})[\sqrt[n]{A^{n-1}}-\sqrt[n]{A^{n-2}B}+\sqrt[n]{A^{n-3}B^2}-\cdots-(-1)^n\sqrt[n]{B^{n-1}}]$

$$=A-(-1)^n B$$

(例八) $\sqrt[5]{3}-\sqrt[5]{2}$ 之有理化因式爲

$\sqrt[5]{3^4}+\sqrt[5]{3^3\times 2}+\sqrt[5]{3^2\times 2^2}+\sqrt[5]{3\times 2^3}+\sqrt[5]{2^4}$

$=\sqrt[5]{81}+\sqrt[5]{54}+\sqrt[5]{36}+\sqrt[5]{24}+\sqrt[5]{16}.$

(例九) $\sqrt[5]{3}+\sqrt[5]{2}$ 之有理化因式爲

$\sqrt[5]{3^4}-\sqrt[5]{3^3\times 2}+\sqrt[5]{3^2\times 2^2}-\sqrt[5]{3\times 2^3}+\sqrt[5]{2^4}$

$=\sqrt[5]{81}-\sqrt[5]{54}+\sqrt[5]{36}-\sqrt[5]{24}+\sqrt[5]{16}.$

習 題 十 九

求下列各式之有理化因式:—

1. $\sqrt[3]{180}.$
2. $\sqrt{135}.$
3. $\sqrt[5]{ab^2c^3}.$
4. $\sqrt{5}+\sqrt{2}.$
5. $\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2}.$
6. $\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}.$
7. $\sqrt{5}-\sqrt{2}.$
8. $\sqrt{7}-\sqrt{3}-\sqrt{2}.$

9. $\sqrt[5]{3}-\sqrt[5]{2}$.　　10. $\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}$.

11. $\sqrt[6]{3}-\sqrt[6]{2}$.　　12. $\sqrt[4]{2}+1$.

13. $\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}$.　　14. $\sqrt[3]{5}-\sqrt{2}$.

15. $\sqrt{6}+\sqrt{5}-\sqrt{2}$.　　16. $\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9}$.

§74. **根式之除法** 根式除法,卽以除式之有理化因式乘被除式及除式而簡約之.

(例一) $$\frac{1}{\sqrt[3]{4}}=\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{2}}{2}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}.$$

(例二) $$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})}$$

$$=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{5-2}=\frac{1}{3}(\sqrt{5}-\sqrt{2}).$$

(例三) $$\frac{\sqrt{60}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}-\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{60}(\sqrt{6}+\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6}-\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{5}+\sqrt{2})}$$

$$=\frac{\sqrt{60}(\sqrt{6}+\sqrt{5}+\sqrt{2})}{\sqrt{6}^2-(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2}$$

$$=\frac{\sqrt{60}(\sqrt{6}+\sqrt{5}+\sqrt{2})}{6-5-2\sqrt{10}-2}$$

$$=\frac{\sqrt{60}(\sqrt{6}+\sqrt{5}+\sqrt{2})(2\sqrt{10}-1)}{-(2\sqrt{10}+1)(2\sqrt{10}-1)}$$

$$=\frac{(\sqrt{60}(4\sqrt{15}+10\sqrt{2}+4\sqrt{5}-\sqrt{6}-\sqrt{5}-\sqrt{2})}{-(40-1)}$$

$$=\frac{\sqrt{60}(4\sqrt{15}-\sqrt{6}+3\sqrt{5}+9\sqrt{2})}{-39}$$

$$=-\frac{1}{39}(120-6\sqrt{10}+30\sqrt{3}+18\sqrt{30}).$$

習題二十

簡約以下各式:—

1. $\sqrt{3}\div\sqrt{2}$.

2. $\sqrt[3]{2}\div\sqrt[3]{9}$.

3. $1\div\sqrt[4]{8}$.

4. $1\div\sqrt{27}$.

5. $1\div\sqrt[3]{2}$.

6. $\sqrt[3]{45}\div\sqrt[3]{80}$.

7. $1\div(\sqrt{6}+\sqrt{5})$.

8. $(\sqrt{5}-\sqrt{3})\div(\sqrt{5}+\sqrt{3})$

9. $9\div(3+\sqrt{5})$.

10. $(3+\sqrt{5})\div(5+\sqrt{3})$.

11. $\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}+\sqrt{2}}$.

12. $\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}+1}$.

13. $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}$.

14. $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}$.

15. $\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}+1}$.

16. $\dfrac{1}{\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{3}}$.

17. $\dfrac{1}{\sqrt[5]{3}-\sqrt[5]{2}}$.

18. $\dfrac{1}{\sqrt[6]{5}+\sqrt[6]{3}}$.

19. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}}$　　20. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{2}}$

21. $\dfrac{4}{2\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{3}}$　　22. $\dfrac{100}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{25}}$

23. $\dfrac{(\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{\sqrt[4]{8}-\sqrt[4]{12}+\sqrt[4]{18}-\sqrt[4]{27}}$

24. $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{(\sqrt[8]{5}-\sqrt[8]{2})(\sqrt[8]{5}+\sqrt[8]{2})(\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{2})}$

已知$\sqrt{2}$之近似值爲1.41421, $\sqrt{3}$之近似值爲1.73205, $\sqrt{5}$之近似值爲2.23607, 求以下各式之近似值,精確至小數第四位.

25. $(3+\sqrt{2})\div(3-\sqrt{2})$.　　26. $(3+\sqrt{5})\div(\sqrt{5}-2)$.

27. $\dfrac{7\sqrt{5}+15}{\sqrt{5}-1}\times\dfrac{\sqrt{5}-2}{3+\sqrt{5}}$.　　28. $\dfrac{(2-\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})}{3\sqrt{3}-5}$.

§75. 簡約$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$法　A, B 爲有理數, $\sqrt{B}$爲不盡根數. 求$A\pm\sqrt{B}$之平方根而使之簡約,根據以下定理:—

定理一　任何二次不盡根數不等於其他二次不盡根數與一有理數之和.

[證]　設若　$\sqrt{a}$可等於$\sqrt{b}+c$.

則　$$(\sqrt{a})^2=(\sqrt{b}+c)^2.$$

即　$$a=b+2c\sqrt{b}+c^2.$$

而　$\sqrt{b}=\dfrac{a-b-c^2}{2c}$ 爲有理數,與假設矛盾.

故　$$\sqrt{a}\neq\sqrt{b}+c.$$

定理二　一項爲有理數,一項爲二次不盡根數之二式相等,則有理數項及無理數項各自相等.

設　$x+\sqrt{y}=a+\sqrt{b}$, 則 $x=a$, $y=b$.

[證]　因　$$x+\sqrt{y}=a+\sqrt{b},$$

故　$$\sqrt{y}=a-x+\sqrt{b}.$$

在此等式中 $a-x$ 若不爲零,則將與定理一矛盾.

$$\therefore\ a-x=0,\qquad \therefore\ x=a,$$

$$\therefore\ \sqrt{y}=\sqrt{b},\qquad \therefore\ y=b.$$

(例一)　簡約 $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$.

[解]　設 $\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$,

則　$$5+2\sqrt{6}=(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2=x+y+2\sqrt{xy}.$$

依定理二,可得 $x+y=5$, $2\sqrt{xy}=2\sqrt{6}$, 即 $xy=6$. 故 x, y 二數有和爲5,而其積爲6. 從可知 x, y 之值一爲3,一爲2.

即　$$\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}.$$

注意:　由上例觀之,若 $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$ 可改爲 $\sqrt{A\pm2\sqrt{C}}$ 時,即可直接視察二數 x, y 合 $x+y=A$, $xy=C$ 即得

$$\sqrt{A}\pm\sqrt{B}=\sqrt{x}\pm\sqrt{y}.$$

(例二) 簡約$\sqrt{15-4\sqrt{14}}$.

[解] $\sqrt{15-4\sqrt{14}}=\sqrt{15-2\sqrt{4\times14}}$

$$=\sqrt{15-2\sqrt{56}}.$$

$56=1\times56=2\times28=4\times14=7\times8$, 此中$7+8=15$.

$$\therefore\quad \sqrt{15-4\sqrt{14}}=\sqrt{8}-\sqrt{7}=2\sqrt{2}-\sqrt{7}.$$

注意: 若用上法而不能得x, y之有理數值時,即不能簡約.例如$\sqrt{17-4\sqrt{14}}$即不能再簡約.

習題二十一

簡約以下各式:—

1. $\sqrt{18+4\sqrt{14}}$.
2. $\sqrt{11-\sqrt{96}}$.
3. $\sqrt{26-4\sqrt{42}}$.
4. $\sqrt{41-24\sqrt{2}}$.
5. $\sqrt{47-4\sqrt{33}}$.
6. $\sqrt{2\frac{1}{4}+\sqrt{5}}$.
7. $\sqrt{18\left(\frac{7}{3}+\sqrt{5}\right)}$.
8. $\sqrt{\sqrt{80}+2\sqrt{15}}$.
9. $\sqrt[4]{17+12\sqrt{2}}$.
10. $\sqrt[4]{56+24\sqrt{5}}$.
11. $\sqrt[4]{\frac{3}{2}\sqrt{5}+3\frac{1}{2}}$.
12. $\sqrt[4]{14+8\sqrt{3}}$.

13. $\dfrac{1}{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}$.   14. $\dfrac{1}{\sqrt{15\sqrt{2}+4\sqrt{30}}}$

15. $\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{21}-\sqrt{10}-\sqrt{35}}$.

16. $\dfrac{1}{\sqrt{11-2\sqrt{30}}}-\dfrac{1}{\sqrt{7-2\sqrt{10}}}-\dfrac{4}{\sqrt{8+4\sqrt{3}}}$.

§76. 虛數 負數之偶次冪根曰虛數.

凡數不論正,負,其偶次冪數常為正,例如$(+2)^2=+4$,$(-2)^2=+4$,故負數之偶數冪根,既非正數亦非負數,故若$x^2=-4$,則x非特無精確數值,且並近似值而無之.此時x卽記之為$\sqrt{-4}$名之曰虛數.有理數無理數皆曰實數.

§77. 虛數單位 依根式變形法$\sqrt{-4}=\sqrt{4\times(-1)}$ $=\sqrt{4}\times\sqrt{-1}=2\sqrt{-1}$.同樣$\sqrt{-a}=\sqrt{a(-1)}=\sqrt{a}\sqrt{-1}$.故一切虛數皆為$\sqrt{-1}$之有理數倍數.易言之,一切虛數皆可以$\sqrt{-1}$加上有理係數表之.此$\sqrt{-1}$名曰虛數單位,以小字母$i$表之.

例如 $\sqrt{-4}=\sqrt{4}\sqrt{-1}=2i$, $\sqrt{-5}=\sqrt{5}\sqrt{-1}=\sqrt{5}i$.

§78. i之冪數 因$(\sqrt{a})^2=a$, 故 $i^2=\sqrt{(-1)}^2=-1$, $i^3=i^2\cdot i=-i$, $i^4=i^3\cdot i=-i\cdot i=-i^2=-(-1)=1$, $i^5=i^4\cdot i=i$.

故 i 之一切羃數共分爲四,即

$$i^{4n+1}=i,$$

$$i^{4n+2}=-1,$$

$$i^{4n+3}=-i,$$

$$i^{4n}\quad=1.$$

以上四種結果,學者務須熟記之(式中 n 爲任意正整數).

§79. **虛數之計算法** 計算虛算,須先以虛數單位表各虛數而後依普通各法計算之.

(例一) $\sqrt{-9}+\sqrt{-16}=3i+4i=7i.$

(例二) $\sqrt{-9}-\sqrt{-16}=3i-4i=-i.$

(例三) $\sqrt{-9}\times\sqrt{-16}=3i\times 4i=12i^2=-12.$

(例四) $\sqrt{-9}\div\sqrt{-16}=3i\div 4i=\dfrac{3}{4}.$

(例五) $\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-3}\cdot\sqrt{-4}\cdot\sqrt{-5}\cdot\sqrt{-6}$

$=\sqrt{2}\,i\cdot\sqrt{3}\,i\cdot 2i\cdot\sqrt{5}\,i\cdot\sqrt{6}\,i$

$=2\sqrt{2\times 3\times 5\times 6}\,i^5=12\sqrt{5}\,i.$

注意: 公式 $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ 當 a,b 爲負數時,不可引用.例如 $\sqrt{-4}\cdot\sqrt{-9}$ 依此公式將爲 $\sqrt{(-4)(-9)}=\sqrt{36}=6.$ 其實 $\sqrt{-4}\cdot\sqrt{-9}$ 當爲 $2i\cdot 3i=6i^2=-6.$

習題二十二

簡約以下各式:—

1. $\sqrt{-36}-\sqrt{-1}+2\sqrt{-4}$.

2. $(\sqrt{-3}+2\sqrt{-2})(\sqrt{-3}-2\sqrt{-2})$.

3. $(5+\sqrt{-9})^2$.

4. $(\sqrt{-4})^5\times(\sqrt{-9})^6$.

5. $(2\sqrt{3}-6\sqrt{-5})(4\sqrt{3}-\sqrt{-5})$.

6. $\sqrt{-5}+\sqrt{-3}-\sqrt{-2}$.

7. $(a+b\,i)^2+(a-b\,i)^2$.

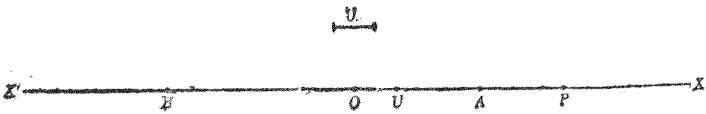
8. $1\div\sqrt{-1}$.

9. $\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^2+\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^2$

10. $\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^3-\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)^3$.

第八章　函數及其圖線

§80. 數之圖形表示法　凡數,無論其爲整數或分數或無理數或正或負,皆可以圖形表示之如下.—

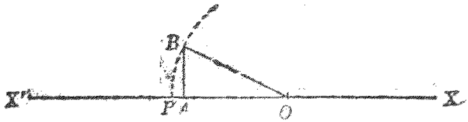


在一無限長直線 XX' 上取一定點 O. 另取一定長 u 爲單位. 則此 XX' 可表一數系,即一切正負數皆在此線中. XX' 中每一點卽表一數. O 點曰原點表零. O 之右半 OX 上一切點表正數,其左半 OX' 上一切點表負數. u 爲單位. 設 U 爲 OX 上一點而 $OU=u$. 則 U 點卽表數 1. A 爲 OX 上一點而 OA 爲 u 之 a 倍,則 A 點卽表數 a. B 爲 OX' 上一點而 OB 爲 u 之 b 倍,則 B 點卽表數 $(-b)$.

(例一)　求作一點令表數 5.

[解]　從 O 向右量 u 之五倍至 P (上圖). P 卽所求之點.

(例二)　求作一點令表數 $-\sqrt{5}$.



[解] 在 OX' 上取 A 令 $OA=2u$. 從 A 作 OX' 之垂線至 B 令 $AB=u$. 以 O 為中心 OB 為半徑作弧交 OX' 於 P 即所求.

[證] $OP=OB=\sqrt{\overline{AO}^2+\overline{AB}^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$.

又因 P 在 OX' 上,故 P 表數 $-\sqrt{5}$.

註: 在平面幾何中證明直角三角形斜邊之平方等於其他二邊平方之和. OAB 為直角三角形, A 為直角.

$$\therefore\ \overline{OB}^2=\overline{AO}^2+\overline{AB}^2. \qquad \therefore\ OB=\sqrt{\overline{AO}^2+\overline{AB}^2}.$$

§81. **變數及常數** 在某種情形之下,刻刻改變其值之數曰變數. 始終不變其值之數曰常數.

例如一人行路,其所行之路程與所行之時間,刻刻改變. 但此人行路之速度則始終如一. 則此人行路之時間及所行之路程均為變數而速度則為常數.

凡變數往往二數相依而變. 故若已知其二變數之一即可知其二.

例如一人行路之速度為每時 4 公里. 出發後 x 時,共行過 y 里. 則此二變數 x, y 相依而變,故若已知 x 之值,即可知 y 之值,若已知 y 之值,亦可知 x 之值也. 可以如

下二式表之:—

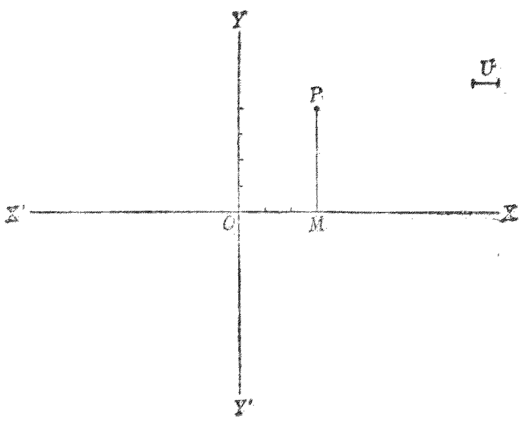
$$y=4x\cdots\cdots\cdots\cdots(1),\qquad x=\frac{1}{4}y\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

在(1)中 x 曰自變數, y 曰依變數.在(2)中 y 曰自變數, x 曰依變數.

§82. **函數**　當二數相依而變,其依變數曰自變數之函數.

例如若 $y=3x^2-2x+5$, 則 y 卽為 x 之函數.因 y 之值當依 x 而變也.故凡含有文字 x 之式皆為 x 之函數.$4x$, $3+\frac{2}{x}$, $\sqrt{x^2+1}$ 等皆為 x 之函數.

§83. **函數之圖形表示法**　數之圖形表示法,以一直線上之點表之.若欲表兩變數之關係,則須以一平面上之線表之如下.

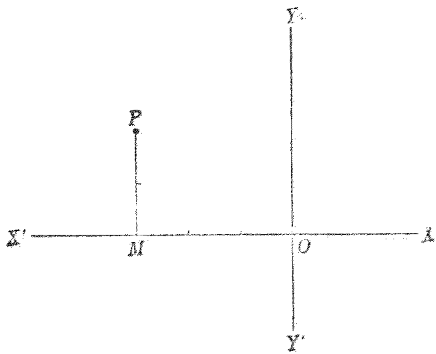


在一平面內作二直線 XX', YY' 直交於 O. 另取一標準定長 u. 以 XX' 上之點表自變數.如前 OX 上之點表正數, OX' 上之點表負數. 以 YY' 上之點表依變數,而以 OY 上者表正數, OY' 上者表負數.易言之,凡自變數在 O 之右者爲正, O 之左者爲負;依變數在 O 之上者爲正, O 之下者爲負. O 點曰原點表零. XX', YY' 二直線曰軸. XX' 曰 x 軸或曰橫軸. YY' 曰 y 軸,或曰縱軸.

設在此平面內有一點 P. 作 $PM \perp XX'$. 若 $OM=3u$, $PM=4u$, 卽 P 之左右關係爲 $+3$, 而其上下關係爲 $+4$. 則 P 點卽表示當 $x=3$ 時, $y=4$.

(例一) 若當 $x=-3$ 時, $y=2$, 求作一點以表之.

[解] 在 OX' 上取點 M 令 $OM=3u$. 從 M 向上作 XX' 之垂線 MP. 令 $MP=2u$. 則 P 卽所求之點.

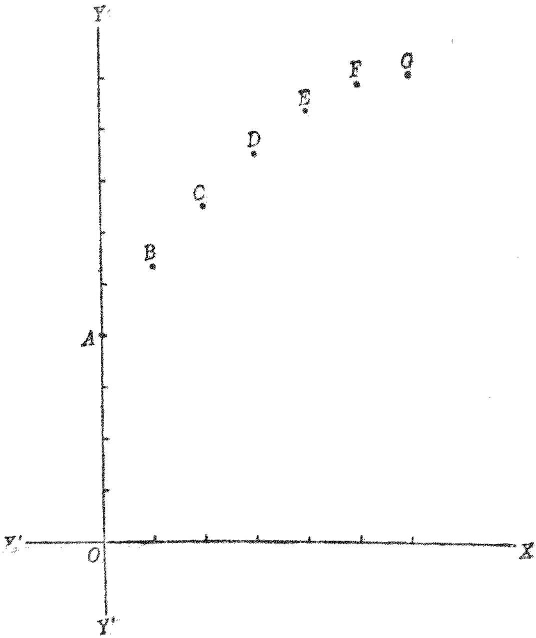


(例二) 煮水時以寒暑表置水中量之.初時爲12度.每隔一分鐘記錄其度數得下表:

時間:	0	1	2	3	4	5	6
度數:	12	16	19.5	22.5	25	26.5	27

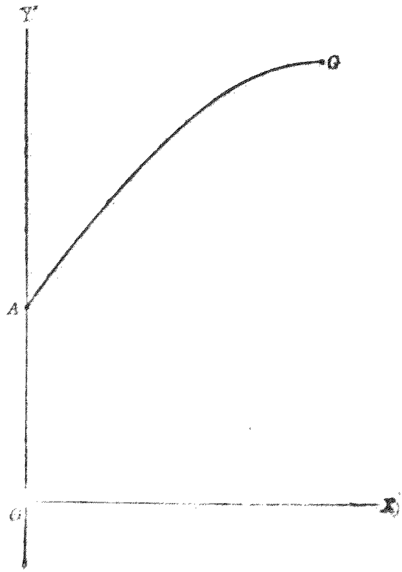
試依上表作圖表之.

［解］ 以時間爲自變數,溫度爲依變數.因各數皆爲正數,故圖中O之左及下皆可不用.在OX上以每單位



長表1分,在OY上以每單位長表3度.則圖中A點即表初時爲12度,B點表1分後16度,C, D, E, F, G各點即各表上表中之每一關係.

上例之溫度卽爲時間之函數.因溫度依時間之變而亦變也.在上表中共記溫度七次.故圖中得七點.然當$3\frac{1}{2}$分鐘時,表中雖未將溫度記下,實際亦有一相當溫度.故在圖中D, E兩點之間必有一點可表$3\frac{1}{2}$分時之溫度.此點雖未能從表中作之,然在圖中已可知其位置之大概.普徧言之,自初時至6分鐘後,無時無刻不有一相當之溫度,卽圖中應有無數點可表此溫度也.此無數溫度,當然不能列爲一表一一記下,而在圖中若從A起過B, C各點至G聯成一線如下圖,則此線卽表此無數溫度之無數點也.此線AG卽爲從始煮時至6分鐘後溫度之圖形.



凡表函數之線曰函數之圖線.

註: 以方格紙畫圖線最爲便利.

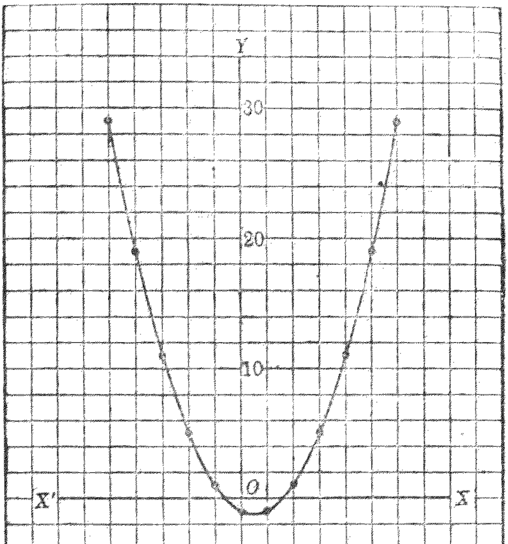
(例三) 作$y=x^2-x-1$之圖線.

[解] 先定x之各

值,繼求 y 之各對應值如下表:

x:	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
y:	29	19	11	5	1	-1	-1	1	5	11	19	29

表中 x 之值自 -5 至 $+6$ 相差11. y 之值最大爲29,最小爲 -1,相差30爲數甚大.故以 x 軸之每一 u 表1而以 y



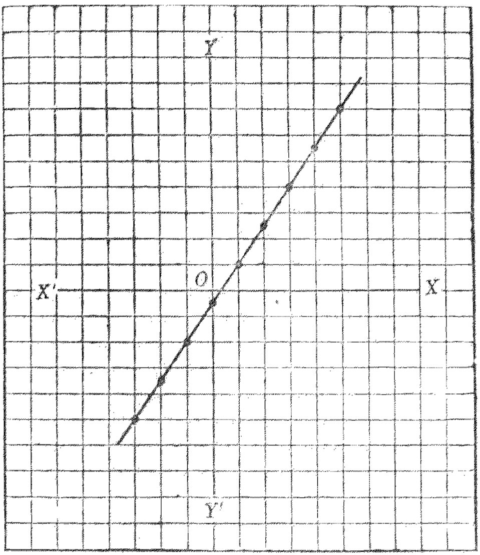
軸上之每一 u 表2.依表中每一對數值作點聯成線如上圖.即 $y=x^2-x-1$ 之圖線.

(例四)　作 $y=\frac{3}{2}x-1$ 之圖線

[解]　如上例先作下表:

x:	-6	-4	-2	0	2	4	6	8	10
y:	-10	-7	-4	-1	2	5	8	11	14

次作圖線如下圖.則見其圖線爲一直線.試察表中各

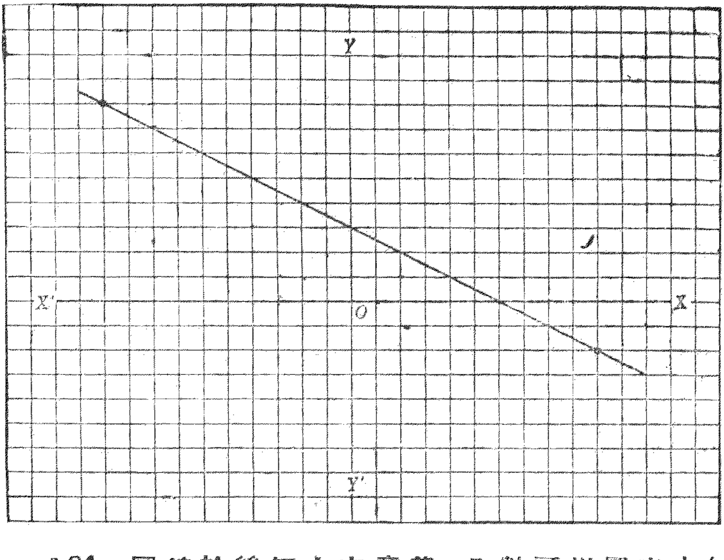


對數值,x 之值愈大,y 之值亦隨之而大.x 之值每加 2,y 之值隨之每加 3.卽圖中之點若向右 2,必同時向上 3,故此圖線爲一直線.凡函數之爲一次者,卽自變數爲一次冪而分母中無自變數者,則其圖線必爲一

直線.直線可由二點決之.故凡一次函數之圖線,不必求許多對數值列爲一表如上而後作之.僅取二對數值足矣.

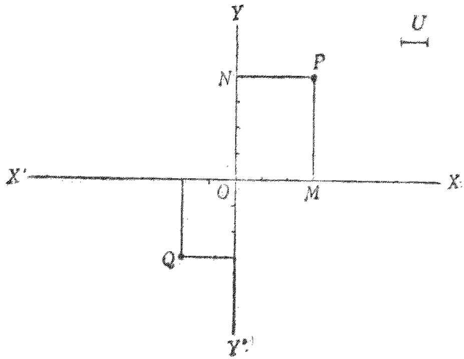
(例五)　作 $y=3-\frac{1}{2}x$ 之圖線.

[解]　當 $x=-10, y=8$; $x=10, y=-2$. 即可得圖線如下:



§84. 圖線於幾何上之意義　凡數可以圖表之,既如上述.反之,圖亦可以數表之.其法即由上法逆推之.在地理上常利用此法.設有探險家發見一山,則計算其經度緯度而記之.以後憑此記錄即可再至此山不

致迷誤.此所記之經緯度即為二數,是即以數表出之位置也.



幾何學點之位置,亦可以二數表之.先以互相垂直於 O 之二軸 XX', YY' 為位置之標準,以定長 u 為單位.

設平面內有一點 P,則先量 P 與 YY' 之距離 PN 之長曰此點之橫坐標,再量 P 與 XX' 之距離 PM 之長曰此點之縱坐標.如圖 $PN=3u$, $PM=4u$,則 P 之橫坐標為 3,縱坐標為 4.以 $(3, 4)$ 記之.凡點在 YY' 之右者橫坐標為正,在 YY' 之左者橫坐標為負.在 XX' 之上者縱坐標為正,在 XX' 之下者縱坐標為負.圖中 Q 可以 $(-2, -3)$ 記之.括弧中二數,前者常表橫坐標,後者常表縱坐標.

在幾何中,適合於某條件之點之軌跡為線.此線即為一點所移動而成.當點移動時,其坐標即改變,故此點之坐標為兩個變數,以 (x, y) 表之. x, y 兩變數之關

係視其所適合之條件而定,曰此軌跡之方程式而此軌跡即爲此方程式之圖線.關於軌跡與方程式,解析幾何詳論之.

習題二十三

作以下各式之圖線.從圖線中估計當 $x=3.5$ 時 y 之值,再從式中計算此值而比較之(1—10):—

1. $y=x$　　2. $y=x^2$.

3. $y=x^2+x$.　　4. $y=x+2$.

5 $y=2x+3$.　　6. $y=3x^2-4$.

7 $y=3-4x$.　　8. $y=\frac{x^3}{4}$.

9. $y=2x^2-5x+6$.　　10. $y=7x-9$.

11. 在同一圖中作以下諸點:—

$(4,5)$, $(-3,6)$, $(6,-4)$, $(0,7)$, $(-5,0)$, $(-6,-$

12, 作 $y=\pm\sqrt{25-x^2}$ 之圖線.試察其是否爲一圓?若爲圓時,其中心何在?半徑爲何?

§85. 函數之符號 x 之函數常以 $f(x)$ 表之.例如 $3x^2-5x+5$ 之值依 x 而變,故爲 x 之函數.若此式在一問題之中須重複提及,則爲簡短計,可先命 $f(x)=3x^2-5x+5$, 以下再提及時, $f(x)$ 即可代表 $3x^2-5x+5$. 故

當 f 一字母在括弧之外而括弧內並非多項式,則此 f 並非括弧之係數,實係指括弧內一變數之函數也.若 $f(x)\equiv 3x^2-5x+5$, 則

$$f(a)=3a^2-5a+5.\ \text{故}\ f(2)=3\times 2^2-5\times 2+5=7.$$

(例)　若 $f(x)\equiv 4x^2-3x+2$, 求 $f(3), f(2), f(1), f(0), f(-1)$.

[解]　因 $f(a)=4a^2-3a+2$, 以各數代入,得

$$f(3)=4\times 3^2-3\times 3+2=29,$$

$$f(2)=4\times 2^2-3\times 2+2=12,$$

$$f(1)=4\times 1^2-3\times 1+2=3,$$

$$f(0)=4\times 0^2-3\times 0+2=2,$$

$$f(-1)=4\times(-1)^2-3\times(-1)+2=9.$$

由上例可見 $f(x)$ 用法之便利.蓋上例若無此符號,則當爲"設 $y=4x^2-3x+2$, 若 x 之值爲 $3, 2, 1, 0, -1$ 時,求 y 之各對應值".解法中亦須逐數分寫,如

$$\left.\begin{matrix} x=\ 3 \\ y=29 \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} x=\ 2 \\ y=12 \end{matrix}\right\}, \cdots\cdots\text{或作一表,繁累多矣.}$$

在同一問題中,不同之兩函數,須以不同之符號表之如 $f(x)$, $F(x)$, $\phi(x)$, 或 $f'(x)$ 等.

例如若　　$f(x)\equiv x^3-2x^2+5x-1,$

$$f'(x)\equiv 3x^2-4x+5.$$

則 $$f(3)=3^3-2\times3^2+5\times3-1=23,$$

而 $$f'(3)=3\times3^2-4\times3+5=20.$$

習題二十四

在以下各題中,求 $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$, $f(5)$, $f(-5)$ 之值(1—5):—

1. $f(x)=3x^2-4x-5$.　　2. $(x)f=2x^3-9x+2$.

3. $f(x)=x(x-1)(x-2)$.

4. $f(x)=3(x+1)(x-3)(x+5)$.

5 $f(x)=2-3x+4x^2-x^3$.

6. 若 $f(x)=x^2+x+1$, 求 $f(a-x)+f(a+x)$ 之值.

7. 若 $\phi(x)=a^2+ax+x^2$, 求 $\phi(a+x)-\phi(a-x)$ 之值.

8. 若 $\phi(x)=ax^2+2bx+c$, 求

$$\phi(x+1)+\phi(x-1)-2\phi(x)$$ 之值.

9. 若 $F(x)=x+5$, 求

$$F(x+2)\times F(x-2)-\{F(x)\}^2$$ 之值.

10. 一人午刻出發步行.其速度常為每時4公里.每行4公里休息5分鐘.作一圖線表其從出發時起至下午4時止,其間任何時此人與出發點之距離;在2時15分時此人離出發點若干公里?

第九章　一次方程式

§86. **等式** 用等號連兩代數式表此兩式相等者曰等式.此兩式曰等式之節.等式分二種,一曰恆等式,一曰方程式.

§87. **恆等式** 等式左右兩節中各文字爲任何數值時,此等式恆成立者曰恆等式.

§88. **方程式** 等式左右兩節中各文字必爲特別數值時,此等式方能成立者曰方程式.此特別數值曰方程式之根.

例如 $2x-1=5-x$ 中當 $x=1$ 時,左節爲1,右節爲4,兩節不相等.$x=2$ 時,左節爲3,右節亦爲3.此等式方成立.故此等式非恆等式而爲方程式.2 卽此方程式之根.

§89. **元** 方程式中各文字,有假定其爲已知者曰已知數,待求其適合之值者曰未知數.表未知數之文字曰元.

慣例,表已知數之文字常用開首幾個字母 a, b, c, 等,表未知數之文字常用末後幾個字母 x, y, z 等.

§90. **方程式之分類** (1)依元之次數分類.凡方程式中所含元最高次數即爲方程式之次數.例如 $x^3-x=c$ 爲三次方程式, $ax^2+bx=c$ 爲二次方程式. (2) 依元之個數分類.凡方程式中含有幾個元者即曰幾元方程式.例如 $x^3-x=7$, $ax^2+bx=c$ 皆爲一元方程式. $3x+2y=5$ 則爲二元方程式.

凡方程式常以其次數元數兼而言之.例如 $x^3-x=7$ 曰一元三次方程式. $3x+2y=5$ 曰二元一次方程式.餘類推.

§91. **解方程式** 求方程式之根曰解方程式.各類方程式之解法不同,大抵次數愈高則解法愈不易.其主要根據爲下列諸公理:

公理一　相等二式各加同式,其和相等.

公理二　相等二式各減同式,其差相等.

公理三　相等二式各以同式乘之,其積相等.

公理四　相等二式各以不爲零之同式除之,其商相等.

§92. **一元一次方程式之解法** 一元一次方程式,爲方程式之最簡單而易解者.學者殆已習知其解法.茲再舉例如下:

（例一） 解 $8x-17=5x+1$.

依公理二,左右兩節各減 $5x$, 得

$$3x-17=1.$$

依公理一,左右兩節各加17,得

$$3x=18.$$

依公理四,左右兩節各除以3,得

$$x=6.$$

即得方程式之根為6.

注意：凡方程式一節中之正項依公理二可移至他節中為負項.一節中之負項依公理一可移至他節中為正項.名曰移項.

（例二） 解 $5x-6(x-5)=2(x+5)+5(x-4)$.

先左右兩節去括弧,得

$$5x-6x+30=2x+10+5x-20.$$

將含有未知數之各項悉移至左節,其餘各項悉至右節,得 $$5x-6x-2x-5x=10-20-30.$$

兩節皆為同類項,即 $-8x=-40$.

各以 -8 除之,得 $x=5$.

注意：凡一次方程式移項後,常可得如 $ax=b$ 之式,而得其根為 $\frac{b}{a}$.

(例三)　解 $\frac{x-3}{2}-\frac{2x-1}{3}=\frac{5x}{12}$.

左右兩節各乘12,得 $6(x-3)-4(2x-1)=5x$.

於是繼續解之,　$6x-18-8x+4=5x$.

$$6x-8x-5x=18-4.$$

$$-7x=14.$$

$$x=-2.$$

注意: 方程式之有分數者,先以各分數之 L. C. M. 乘之.

(例四)　解 $\frac{8x+23}{20}-\frac{5x+2}{3x+4}=\frac{2x+3}{5}-1$.

先乘以20,得 $8x+23-\frac{20(5x+2)}{3x+4}=8x+12-20$.

移項簡約,得　$-\frac{20(5x+2)}{2x+4}=-31$.

再乘 $-(3x+4)$,得　$20(5x+2)=31(3x+4)$.

$$100x+40=93x+124.$$

$$7x=84.$$

$$x=12.$$

注意: 各項分母有數字,又有多項式時,先乘數字之公倍數,簡約後再乘多項式較爲簡便.

（例五）解 $\frac{x-8}{x-10}+\frac{x-4}{x-6}=\frac{x-5}{x-7}+\frac{x-7}{x-9}$

本題亦可先以各分母之L.C.M.乘之.惟行此乘法甚繁,故可如下解之:

先移項爲 $\frac{x-8}{x-10}-\frac{x-5}{x-7}=\frac{x-7}{x-9}-\frac{x-4}{x-6}$.

左右兩節各簡約之,可得

$$\frac{(x-8)(x-7)-(x-5)(x-10)}{(x-10)(x-7)}=\frac{(x-7)(x-6)-(x-4)(x-9)}{(x-9)(x-6)}.$$

$$\frac{x^2-15x+56-(x^2-15x+50)}{(x-10)(x-7)}=\frac{x^2-13x+42-(x^2-13x+36)}{(x-9)(x-6)}.$$

$$\frac{6}{(x-10)(x-7)}=\frac{6}{(x-9)(x-6)}.$$

於是除以6而乘以$(x-10)(x-7)(x-9)(x-6)$,得

$$(x-9)(x-6)=(x-10)(x-7).$$

$$x^2-15x+54=x^2-17x+70.$$

$$2x=16.$$

$$x=8.$$

本題各項,先行除法再解之,更爲便易.因 $\frac{x-8}{x-10}=1+\frac{2}{x-10}$.此結果不必實行除法方得,可如下式求之.

$$\frac{x-8}{x-10}+\frac{x-4}{x-6}=\frac{x-5}{x-7}+\frac{x-7}{x-9},$$

即 $$\frac{x-10+2}{x-10}+\frac{x-6+2}{x-6}=\frac{x-7+2}{x-7}+\frac{x-9+2}{x-9},$$

即 $$1+\frac{2}{x-10}+1+\frac{2}{x-6}=1+\frac{2}{x-7}+1+\frac{2}{x-9}.$$

因得 $$\frac{2}{x-10}+\frac{2}{x-6}=\frac{2}{x-7}+\frac{2}{x-9}.$$

移項而除以 2, 得

$$\frac{1}{x-10}-\frac{1}{x-7}=\frac{1}{x-9}-\frac{1}{x-6}.$$

於是各節簡約如前,即可得 $x=8$

習題二十五

解以下各方程式:—

1. $3x+15=x+25.$　　2. $2x+3=16(2x-3).$

3. $4-\frac{x-9}{8}=\frac{x}{22}-\frac{1}{2}.$　　4. $\frac{x-8}{7}-\frac{3-x}{3}+\frac{5}{21}=0.$

5. $\frac{x+4}{3x-8}=\frac{x+5}{3x-7}.$　　6. $\frac{x}{x+2}+\frac{4}{x+6}=1.$

7. $25x-19-\{3-(4x-5)\}=3x-(6x-5).$

8. $x(x+1)+(x+1)(x+2)=(x+2)(x+3)+x(x+4)-9.$

9. $(x+1)^2+2(x+3)^2=3x(x+2)+35.$

10 $(x+1)(x+2)(x+6)=x^3+9x^2+4(7x-1).$

11. $\frac{3}{16}(x-1)-\frac{5}{12}(x-4)=\frac{2}{5}(x-6)+\frac{5}{48}$.

12. $\frac{3x}{4}-\frac{6}{17}(x+10)-(x-3)=\frac{x-7}{51}-4\frac{3}{4}$.

13. $3+\frac{x}{4}=\frac{1}{2}\left(4-\frac{x}{3}\right)-\frac{5}{6}+\frac{1}{3}\left(11-\frac{x}{2}\right)$.

14. $.6\,x-.7\,x+.75\,x-.875\,x+15=0$.

15. $\frac{.25(x-3)+.\dot{3}(x-4)}{.125}=5\,x-19$.

16. $\frac{6\,x+13}{15}-\frac{3\,x+5}{5\,x-25}=\frac{2\,x}{5}$.

17. $\frac{6\,x+7}{9\,x+6}=\frac{1}{12}+\frac{5\,x-5}{12\,x+8}$.

18. $\frac{4(x+3)}{9}=\frac{8\,x+37}{18}-\frac{7\,x-29}{5\,x-12}$.

19. $\frac{3}{4-2\,x}+\frac{30}{8(1-x)}=\frac{3}{2-x}+\frac{5}{2-2\,x}$.

20. $\frac{30+6\,x}{x+1}+\frac{60+8\,x}{x+3}=14+\frac{48}{x+1}$.

21. $\frac{x+5}{x+4}-\frac{x-6}{x-7}=\frac{x-4}{x-5}-\frac{x-15}{x-16}$.

22. $\frac{4\,x-17}{x-4}+\frac{10\,x-13}{2\,x-3}=\frac{8\,x-30}{2\,x-7}+\frac{5\,x-4}{x-1}$.

23. $\frac{5\,x-8}{x-2}+\frac{6\,x-44}{x-7}-\frac{10\,x-8}{x-1}=\frac{x-8}{x-6}$.

24. $\dfrac{2x-3}{.3x-.4}=\dfrac{.4x-.6}{.06x-.07}$.

25. $.08\dot{3}(x-.625)=.\dot{0}\dot{9}(x-.59375)$.

26. $(2x+1.5)(3x-2.25)=(2x-1.125)(3x+1.25)$.

27. $\dfrac{1-1.4x}{.2+x}=\dfrac{.7(x-1)}{.1-.5x}$.

28. $\dfrac{(.3x-2)(.3x-1)}{.2x-1}-\dfrac{1}{6}(.3x-2)=.4x-2$.

§ 93　**一次聯立方程式解法**　一方程式中有兩個未知數,則此方程式可有無數組根.例如在

$$2x+3y=21$$

中, $\left.\begin{matrix}x=0\\y=7\end{matrix}\right\}$, $\left.\begin{matrix}x=1\\y=6\frac{1}{3}\end{matrix}\right\}$, $\left.\begin{matrix}x=2\\y=5\frac{2}{3}\end{matrix}\right\}$, $\left.\begin{matrix}x=3\\y=5\end{matrix}\right\}$,........$\left.\begin{matrix}x=a\\y=7-\frac{2}{3}a\end{matrix}\right\}$.

以上各組數皆適合於方程式,即皆爲此方程式之根.故任意令x爲何數時,可得y之適當數值而得一組根.但若有兩個方程式須同時適合則僅有一組數值.例如在

$$2x+3y=21, \tag{1}$$

$$3x-\ \ y=4 \tag{2}$$

中,(1)有無數組根已如上述.然(1)之各組根未必皆能適合於(2).同樣(2)亦可有無數組根,其各組根亦未

必適合於(1). 求同時適合於(1),(2)兩方程式之根,曰解聯立方程式.

聯立方程式,亦曰方程組. 其解法有三種,惟目標相同,皆從已設兩方程式中消去一元,得另一個一元方程式而解之. 舉例如下:

(例一) 解方程組 $2x+3y=21,$ (1)

$3x-\ \ y=4.$ (2)

[解法一] 先消去 y 以求 x.

(2)乘以3, $9x-3y=12.$ (3)

(1)加(3), $11x=33.$

$\therefore\quad x=3.$

既得 x 之值,代入(1),(2)中任何式,即可得 y.

以 $x=3$ 代入(2), $3\times3-y=4.$

$\therefore\quad y=5.$

故得此方程組之根爲 $\left.\begin{matrix}x=3\\y=5\end{matrix}\right\}.$

註: 此法名曰加減消元法.

[解法二] 先消去 y 以求 x.

從(2)解 y,得 $y=3x-4.$ (3)

以(3)代入(1), $2x+3(3x-4)=21.$

解之,得 $x=3.$

代入(3),得 $y=5.$ 即爲其根.

註: 此法名曰代入消元法.

[解法三] 同前消去 y 以求 x.

從(1)解得 $y=\frac{1}{3}(21-2x),$

從(2)解得 $y=3x-4.$

$$\therefore\quad \frac{1}{3}(21-2x)=3x-4.$$

解之得 $x=3$,再代入以上任何式可得 $y=5.$

註: 此法名曰比較消元法.

(例二) 解方程組 $a_1x+b_1y=c_1,$ (1)

$$a_2x+b_2y=c_2. \qquad (2)$$

[解] 用加減消元法解之:

(1)×b_2,得 $a_1b_2x+b_1b_2y=c_1b_2$ (3)

(2)×b_1,得 $a_2b_1x+b_1b_2y=c_2b_1$ (4)

(3)−(4),得 $(a_1b_2-a_2b_1)x=c_1b_2-c_2b_1.$

$$\therefore\quad x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

同樣(2)×a_1−(1)×a_2,可得

$$y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

注意：本例爲一次二元聯立方程式之通例.其解答可視爲根之公式.蓋凡二元一次方程式,必可簡爲$ax+by=c$之形式也.故如在例一

$$2x+3y=21,$$

$$3x-y=4.$$

中,即$a_1=2$, $b_1=3$, $c_1=21$, $a_2=3$, $b_2=-1$, $c_2=4$.

$$\therefore\quad x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}=\frac{21\times(-1)-4\times3}{2\times(-1)-3\times3}=\frac{-33}{-11}=3,$$

$$y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}=\frac{2\times4-3\times21}{2\times(-1)-3\times3}=\frac{-55}{-11}=5.$$

§94. 不定方程組及矛盾方程組 在兩個二元一次方程式

$$a_1x+b_1y=c_1, \tag{1}$$

$$a_2x+b_2y=c_2 \tag{2}$$

中,若$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$,則(1),(2)兩方程式爲不定方程組.因若$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}$,則$a_1b_2=a_2b_1$, $\therefore\ a_1b_2-a_2b_1=0$,同理,$c_1b_2-c_2b_1=0$, $a_1c_2-a_2c_1=0$.故由上節可得

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}=\frac{0}{0},$$

$$y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}=\frac{0}{0}.$$

即有無數組根可適合於(1),(2)兩式.

例如　$$2x+3y=5,$$

$$4x+6y=10$$

中, $\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{5}{10}$, 此兩方程式爲不定方程組.

第一方程式之兩端各乘以 2 卽得第二方程式.故此兩方程式實僅係一個方程式也.

若 (1), (2) 兩方程式中 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\fallingdotseq\frac{c_1}{c_2}$, 則爲矛盾方程組.因此時 $a_1b_2-a_2b_1=0$, 而 $c_1b_2-c_2b_1\fallingdotseq 0$, $a_1c_2-a_2c_1\fallingdotseq 0$. 故

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}=\frac{A}{0},$$

$$y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}=\frac{B}{0}.$$

$A\fallingdotseq 0$, $B\fallingdotseq 0$, 卽 x, y 無值.

例如　$$2x+3y=5,$$

$$4x+6y=6$$

中 $\frac{2}{4}=\frac{3}{6}\fallingdotseq\frac{5}{6}$, 此兩方程式爲矛盾方程組.

第一方程式乘以 2, 卽得 $4x+6y=10$, 與第二方程式顯然矛盾也.

不定方程組及矛盾方程組皆不能聯立以求其根.故 (1), (2) 兩方程式中, 必 $\frac{a_1}{a_2}\fallingdotseq\frac{b_1}{b_2}$. 此兩方程式方爲聯立方程式.

(1), (2) 兩方程式中 $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ 者,曰獨立方程式.

習題二十六

解以下各方程組:—

1. $2x+5y=1,$
   $6x+7y=3.$

2. $4x-6y=8,$
   $\frac{2}{3}x-y=\frac{4}{3}.$

3. $6x+8y=18,$
   $x+\frac{4}{3}y=3.$

4. $7x-3y=27,$
   $5x-6y=0.$

5. $x+my=a,$
   $x-ny=b$

6. $x+y=\frac{1}{2}(5a+b),$
   $x-y=\frac{1}{2}(a+5b).$

7. $\frac{3}{x}+\frac{8}{y}=3,$
   $\frac{15}{x}-\frac{4}{y}=4.$

8. $\frac{3x+1}{4-2y}=\frac{4}{3},$
   $x+y=1.$

9. $\frac{x+2y+1}{2x-y+1}=2,$
   $\frac{3x-y+1}{x-y+3}=5.$

10. $\frac{x+1}{y+1}=\frac{a+b+c}{a-b+c},$
    $\frac{x-1}{y-1}=\frac{a+b-c}{a-b-c}.$

11. $\dfrac{5}{x+2y}=\dfrac{7}{2x+y}$,　　12. $(x+1)(y-1)=(x+5)(y-5)$,

$\dfrac{7}{3x-2}=\dfrac{5}{6-y}$.　　$\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{y+1}{y-1}=$ [illegible]

13. $9y=\dfrac{x+3}{2}-\dfrac{4-x}{3}$,

$\dfrac{2x-5}{3}+\dfrac{3x+5}{2}+18y=0$.

14. $\dfrac{3}{2x+y}+\dfrac{4}{x-2y}=2$,

$\dfrac{10}{4x+2y}-\dfrac{3}{x-2y}=\dfrac{11}{12}$.

15. $(m+n)x+(m-n)y=m+n$,

$(m+n)^2x+(m^2-n^2)y=m^2+mn$.

§95. 根之圖形表示　設方程組

$$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1, & (1)\\ a_2x+b_2y=c_2. & (2)\end{cases}$$

從(1),得
$$y=\frac{c_1-a_1x}{b_1}. \qquad (A)$$

從(2),得
$$y=\frac{c_2-a_2x}{b_2}. \qquad (B)$$

(A), (B) 兩式中 y 皆爲 x 之函數.故可依式各作圖線.此兩圖線之交點即表此方程組之根.因此交點在 (A) 之圖線上,故必適合於(1),同時亦在 (B) 之圖線上,故必

適合於(2).故爲此方程組之根。

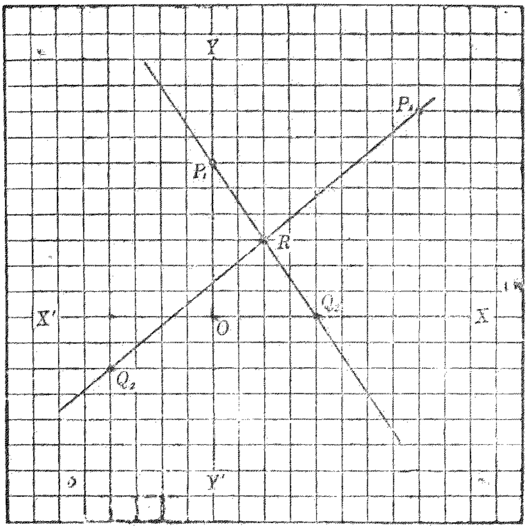
(例一) 用圖形表示下列方程組之根:

$$\begin{cases}3x+2y=12. & (1)\\ 5x-6y=-8. & (2)\end{cases}$$

[解] 從(1),得 $y=6-\frac{3}{2}x.$ (A)

從(2),得 $y=\frac{4}{3}+\frac{5}{6}x.$ (B)

在(A)內,$x=0$, $y=6$, $x=4$, $y=0$.故可作 $P_1(0,6)$及$Q_1(4,0)$,



聯直線 P_1Q_1 即表(A)。

在(B)內,$x=8$, $y=8$; $x=-4$, $y=-2$.故可作 $P_2(8,8)$,

及 $Q_2(-4, -2)$，聯直線 P_2Q_2 即表 (B).

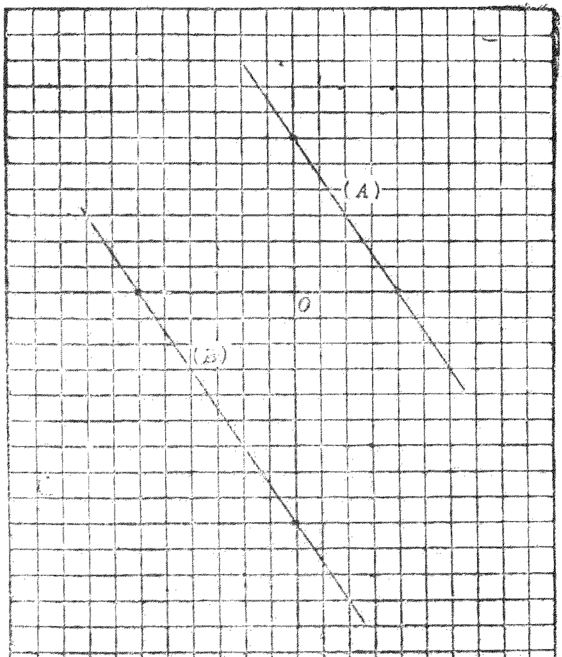
P_1Q_1, P_2Q_2 交於一點 $R(3, 2)$ 即表所求之根爲 $x=2$, $y=3$.

（例二）用圖形表示下列方程組之根：

$$\begin{cases} 3x+2y=12, & (1) \\ 6x+36=-4y. & (2) \end{cases}$$

［解］如上例先從(1), (2)兩式求得 y 之函數各爲

$$y=6-\frac{3x}{2}\ (A)\ 及\ y=-9-\frac{3}{2}x\ (B).$$



作 (A), (B) 兩圖線如圖. (A), (B) 兩線爲平行線無交點, 故此方程組無根.

注意: 此方程組爲矛盾方程組,故無根.

習題二十七

用圖形表示以下各方程組之根:—

1. $\begin{cases} 3x+2y=8, \\ 2x-3y=9. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 5x+6y=6x-7y, \\ 8x-9y=10+3x-2y. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=\dfrac{5}{6}, \\ \dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{2}=-\dfrac{1}{6}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{3}{5}, \\ x+2y=7x-y-27. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x=2y+5, \\ 9x-6y=15. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 15x+10y=25, \\ 6x+4y=20. \end{cases}$

§96. 三元以上之一次方程式解法 一次方程式之有三個未知數者,須有三個方程式方可聯立以求其根.否則不定.

(例) 求解
$$\begin{cases} 11x+8y-9z=10, & (1) \\ 12x+6y-16z=2, & (2) \\ 21x+10y-25z=6. & (3) \end{cases}$$

[解] 由 (1), (2) 兩方程式消去 y 如下:

(1)×3, 得　　$33x+24y-27z=30.$

(2)×4, 得　　$48x+24y-64z=8$

相減即得　　$15x\qquad -37z=-22.$　　(4)

再由(2),(3)兩方程式消去y如下:

(2)×5, 得　　$60x+30y-80z=10.$

(3)×3, 得　　$63x+30y-75z=18.$

相減即得　　$3x\qquad +5z=8.$　　(5)

(4),(5)中皆無y即爲兩個二元方程式,可依上節諸法解得$x=1$, $z=1$. 代入(1),(2),(3)中任何式可得$y=1$.

故所求之根爲

$$\begin{cases} x=1, \\ y=1, \\ z=1. \end{cases}$$

一次方程式之有四個未知數者,須有四個方程式方可聯立以求其根.法先從每二式中消去未知數之一,得三個三元方程式,於是再繼續如上求之.依此類推,凡一次方程式之有n個未知數者,若有n個方程式,則可逐步將未知數消去以求得其根.

習題二十八

解以下各方程組:—

1. $x+y+z=9,$
$x+2y+4z=15,$
$x+3y+9z=23.$

2. $x+y=37,$
$x+z=25,$
$y+z=22.$

3. $x+2y=5,$
$y+2z=8,$
$z+2u=11,$
$u+2x=6.$

4. $\dfrac{xy}{x+y}=\dfrac{1}{5},$
$\dfrac{xz}{x+z}=\dfrac{1}{6},$
$\dfrac{yz}{y+z}=\dfrac{1}{7}.$

5. $x+2y+3z=15,$
$3x+5y+7z=37,$
$5x+8y+11z=59.$

6. $7x+6y+7z=100,$
$x-2y+z=0,$
$3x+y-2z=0.$

7. $\dfrac{x+y}{2}+\dfrac{z}{3}=10,$
$\dfrac{x+y}{6}+\dfrac{z}{7}=4,$
$2x+y+z=28.$

8. $0.3x+0.5y=0.8,$
$0.4x+0.7z=1.8,$
$0.1x+0.1y+0.1z=0.4$

9. $\dfrac{x+2y}{7}=\dfrac{5x+6z}{9}=\dfrac{3y+4z}{8},$
$x+y-z=126.$

10. $\dfrac{2x-y}{3}=\dfrac{3y+2z}{4}=\dfrac{x-y-z}{5}=4.$

11. $(a-b)x+(b-c)y+(c-a)z=0,$

$$(a+b)x+(b+c)y+(c+a)z=2(a+b+c),$$

$$x+y-z=1.$$

12. $a_1x+b_1y+c_1z=d_1,$

$$a_2x+b_2y+c_2z=d_2,$$

$$a_3x+b_3y+c_3z=d_3$$

§97. **應用問題**　應用問題以代數方程式解之最為便利.其解法之要義在將問題中之條件一一以代數式表之.

(例一)　以一丈四尺之長分爲兩部分,令其一部分之三倍等於又一部分之四倍.求此兩部分之長.

[解]　設其一部分長 x 尺.則因全長14尺,故其又一部分必爲$(14-x)$尺.

一部分之3倍爲 $3x$ 尺.

又一部分之4倍爲 $4(14-x)$ 尺.

此兩尺數相等,故得方程式

$$3x=4(14-x).$$

去括弧移項,得　$7x=4\times14.$　$\therefore\ x=8,$

$$14-x=6.$$

即一部分長8尺,又一部分長6尺.

(例二) 某鐵道上貨車一列在正午時從甲站開行往乙站,一時後客車一列亦從甲站開行往乙站.貨車開至全路$\frac{2}{3}$之處因機件損壞,遂減至原速$\frac{3}{4}$以行.行至距乙10里處爲客車追及.時爲下午2點40分.已知客車速度等於貨車減速後速度之2倍.求甲乙兩站距離及各車速度.

[解] 設貨車原速每時$4x$里,則減速後之速度爲每時$3x$里.而客車之速度爲每時$6x$里.又設甲乙兩站距離爲y里.

貨車開至全路$\frac{2}{3}$之處,即以原速行路$\frac{2}{3}y$里,故所費時間爲$\frac{\frac{2}{3}y}{4x}$時$=\frac{y}{6x}$時.此後再行至距乙10里處,是以減速後之速度行路$\left(\frac{1}{3}y-10\right)$里,故所費時間爲$\frac{\frac{1}{3}y-10}{3x}$時$=\frac{y-30}{9x}$時.合計共費時$\frac{y}{6x}+\frac{y-30}{9x}$時.此時爲下午2點40分.則從正午出發至此時共費時間爲$2\frac{40}{60}$時$=\frac{8}{3}$時.

$$\therefore\quad \frac{y}{6x}+\frac{y-30}{9x}=\frac{8}{3}. \qquad (1)$$

客車以每時$6x$里之速度行此路$(y-10)$里,所費時間爲$\frac{y-10}{6x}$時但客車乃一時後開行,故所費時實爲

$\left(2\frac{40}{60}-1\right)$時$=\frac{5}{3}$時

$$\therefore\quad \frac{y-10}{6x}=\frac{5}{3}. \tag{2}$$

解(1), (2)得　　　$x=5,\quad y=60.$

故得甲乙兩站距離爲60里.

貨車原速每時4×5里$=20$里.

客車速度每時6×5里$=30$里.

習題二十九

1. 某數之$\frac{1}{3}$與$\frac{1}{5}$之和爲88.求此數.

2. 某校學生分四級,甲級學生數爲總數$\frac{1}{5}$,乙級爲總數$\frac{1}{4}$,丙級爲總數$\frac{2}{7}$,丁級有37人.求學生總數.

3. 有5圓鈔票及1圓鈔票兩種共計24張,值銀76圓.求各種鈔票張數.

4. 有二位數其數字之和爲5.調換兩位上數字所成之數較原數之三倍少1.求原數.

5. 自A地至B地,甲行20分鐘可到,乙行30分鐘可到.(a)設甲從A,乙從B,同時出發相向而行,須經幾時相會?(b)設二人同時從A出發行向B地,甲先至B即

時折回,共經幾時相會?

6. 兵士900人排成五層空心方陣.問最外一層應有幾人?

7. 距今5年前父年爲子年之3倍,自今5年後,父年將爲子年之2倍.問父子現年各幾何?

8. 上酒內,酒與水之比爲8:3;下酒內,酒與水之比爲9:13,今欲將此二種酒混合成中酒100斤令其酒與水之比爲3:2.問上下酒各需幾斤?

9. 直角三角形之周圍爲12,一邊爲3,求其他二邊.

10. 一室男女雜坐,男子目中所見,男3倍於女,女子目中所見,男5倍於女.求男女人數.

11. 一人上山後立即下山共費5時.已知其上山時速度每時爲$2\frac{1}{3}$里,下山時速度每時爲$3\frac{1}{2}$里,求來回路程.

12. 一事,甲乙合作之,12日可成;甲丙合作之,15日可成;乙丙合作之,20日可成.問甲乙丙獨作之,各需幾日而成?又三人合作之,幾日可成?

13. 以梨若干個分給童子若干人.若每人給5個則不足2個;若每人給4個,則尚餘3個.求梨數及童子數.

14, 兵一隊,列成正方陣.餘31人.若各行各列各增一人,則不足24人.求兵之總數,

15. 絹每尺之價爲布每尺價之五倍.絹二丈三尺之價與棉布五丈之價共爲13元2角.問絹與布每尺之價各幾何?

16. 甲乙二兵有鎗彈,若甲取乙10枚,則甲所有將2倍於乙;若甲給乙10枚,則甲所有將爲乙之$\frac{1}{3}$.問甲乙各有鎗彈幾枚?

17. 一舟在某河中順流而行每時速12里,逆流而行每時速6里.求此河流速.

18. 搬運貨物385斤.用5馬14人運之.或用8馬7人運之,皆適可運盡.求每馬每人所運之重量.

19. 有三位整數,其百位數字爲一位數字之2倍,其十位數字爲一位數字之3倍,若交換百位,一位兩數字,則所得數較原數小198.求原數.

20. 有矩形若廣增2尺,長減3尺,則其形成正方形,而其面積較原形小5平方尺.求原面積.

21. 一人有5角輔幣,2角輔幣,1角輔幣,共31張,其金額共7.5圓.若以5角輔幣兌換2角輔幣,而以2角輔幣兌換1角輔幣,則其張數共爲55.求三種輔幣之張數.

22. 一茶商有茶二種,甲種每斤1角8分,乙種每斤1角4分.今取甲乙二種茶混合成30斤而以每斤2角之價賣之,共獲之利益等於乙種茶10斤之原價.問混合時甲乙各取幾斤?

第十章　二次方程式

§98. 一元二次方程式解法一　凡一元二次方程式之無一次項者,常可寫爲如下之式:

$$ax^2 = b. \tag{1}$$

(1)之左右兩節各以a除之,得

$$x^2 = \frac{b}{a}.$$

因正數之平方爲正數,負數之平方亦爲正數,

$$\therefore \quad x = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}.$$

即 $\sqrt{\frac{b}{a}}$ 及 $-\sqrt{\frac{b}{a}}$ 皆爲(1)之根.

(例)　解　　$5x^2 - 7 = 2x^2 + 29.$

[解]　原式移項,得

$$5x^2 - 2x^2 = 29 + 7.$$

即

$$3x^2 = 36.$$

$$x^2 = 12.$$

$$\therefore \quad x = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}.$$

§ 99. 一元二次方程式解法二 一元二次方程式之兼有一次項者,解法較難.舉例如下:

(例一) 解 $x^2-6x=7$.

[解法一] 析因數法:以各項悉移至左節而析因數.得

$$x^2-6x-7=0.$$

$$(x-7)(x+1)=0.$$

此二因式中,每一因式等於0,則其積必等於0,故 $x-7=0$ 或 $x+1=0$ 時皆適合於原方程式.

從 $x-7=0$, 可得 $x=7$.

從 $x+1=0$, 可得 $x=-1$.

故得二根 7 及 -1.

[解法二] 配方法:以兩個未知項上加配一常數項令其爲完全平方式而解之.

原式左右兩節各加 9, 得

$$x^2-6x+9=7+9.$$

即 $$(x-3)^2=16.$$

式中括弧外無未知數,故已爲無一次項之二次方程式,依上節法,可得

$$x-3=\pm 4.$$

從 $x-3=4$, 可得 $x=4+3=7$.

從 $x-3=-4$, 可得 $x=-4+3=-1$. 得二根爲 7 及 -1.

注意: 解二次方程式析因式法最爲簡便,然若方程式之根爲無理數,卽不能析因式,故配方法尤爲重要.

(例二) 解　$ax^2+bx+c=0$.

[解] 以常數項 c 移至右節再以 a 除之,得

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}.$$

左右兩節各加一次項係數之半之平方 $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$,

得
$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}.$$

卽
$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

$$\therefore \quad x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}.$$

$$\therefore \quad x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \qquad (A)$$

卽得二根爲 $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 及 $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

本例爲一元二次方程式之通解,故 (A) 式爲一元二次方程式根之公式.因凡一元二次方程式必可簡化爲 $ax^2+bx+c=0$ 之形也.故如在例一中 $x^2-6x-7=0$, 即 $a=1$, $b=-6$, $c=-7$ 代入 (A), 卽可得

$$\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\times1\times(-7)}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{64}}{2}=\frac{6\pm8}{2}.$$

故得二根 7 及 -1.

(例三) 解 $2x^2-mx=mn-2nx$.

[解] 各項悉移至左節,且依 x 分項,得

$$2x^2-(m-2n)x-mn=0.$$

此時 $a=2$, $b=-(m-2n)$, $c=-mn$.

代入 (A), 得

$$x=\frac{m-2n\pm\sqrt{(m-2n)^2+4\times2mn}}{4}$$

$$=\frac{m-2n\pm\sqrt{m^2-4mn+4n^2+8mn}}{4}$$

$$=\frac{m-2n\pm(m+2n)}{4}.$$

$$\therefore\quad x=\frac{m}{2},\ \text{或}\quad x=-n.$$

§ 100. 根之判別式 方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之根爲 $\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2}$. 此二根之爲何種數,可由 b^2-4ac 而決

之.若 b^2-4ac 為負數,即 $b^2<4ac$ 時,則 $\sqrt{b^2-4ac}$ 為虛數,故得二虛根.若 $b^2-4ac=0$,即 $b^2=4ac$ 時,則 $\sqrt{b^2-4ac}=0$,故得二相等有理實根.若 b^2-4ac 為正數,即 $b^2>4ac$ 時,則 $\sqrt{b^2-4ac}$ 為實數,故得二實根,此二實根之為有理或無理,視 b^2-4ac 之為平方數或非平方數而定.故方程式 $ax^2+bx+c=0$ 中根之性質不待解得,僅察 b^2-4ac 之值即可決之.b^2-4ac 曰根之判別式.

習題三十

解以下各方程式(1—10):—

1. $x^2-3x=10$.　　2. $3x^2-4x=55$.

3. $6x^2+6=13x$.　　4. $3x^2-17x=0$.

5. $110x^2-21x+1=0$.　　6. $x^2-x-1=0$.

7. $x^2-3=\dfrac{1}{6}(x-3)$.　　8. $x^2+3\sqrt{3}x=30$.

9. $(2x-5)^2-(x-6)^2=80$.　　10. $7x^2+6x-1=0$.

判別以下各方程式根之性質(11—16):—

11. $6x^2+7x+4=0$.　　12. $5x^2-9x+2=0$.

13. $(x-1)(x+2)=x(x+3)$.　　14. $x^2+x(x-1)=x-3$.

15. $x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{2}$.　　16. $x(x+1)=3$.

17. 在方程式 $x^2+kx=2x+k-2$ 中，k 爲何值時，方有相等實根？

18. 在方程式 $(k+1)x^2=(k-2)x-\frac{k}{4}$ 中，k 之值如何方有實根，如何則爲虛根？

§101. **複二次方程式** 方程式之高於二次者不易求得其根．但若可寫爲二次之形，即可依上節解法解之．

(例一) 解 $x^4-2x^2=8.$

[解] 原式雖爲 4 次，然以 x^2 爲未知數時，即爲 2 次．故令 $x^2=y$，則原式爲 $y^2-2y-8=0$．故 $y=4$ 或 -2，即 $x^2=4$ 或 -2.

再從 $x^2=4$，可得 $x=\pm 2.$

從 $x^2=-2$，可得 $x=\pm\sqrt{2}i.$

故共得四個根 $\pm 2,\ \pm\sqrt{2}i.$

(例二) 解 $(x^2-x)^2-8(x^2-x)+12=0.$

[解] 若去括弧則爲 4 次方程式．照原式兩括弧內之式相同，括弧外皆爲已知數，若令 $y=x^2-x$，則原式即爲 $y^2-8y+12=0$，可解得 $y=2$，或 6．即 $x^2-x=2$ (a)，或 $x^2-x=6$ (b)

從 (a)，$x^2-x-2=0$，$x=2$，或 $-1.$

從 (b), $x^2-x-6=0$, $x=3$, 或 -2.

故共得四個根　　$\pm2, 3, -1$.

§ 102. **分數方程式** 方程式之未知數有在分母內者曰分數方程式. 普通解法,恆簡約爲整方程式而解之.

(例一) 解 $$\frac{x^2-3x}{x^2-1}+2=\frac{1}{1-x}.$$

[解] 左右兩節,各乘以原方程式分母之 $L.\ C.\ M.$ x^2-1, 得

$$x^2-3x+2(x^2-1)=-(x+1).$$

簡約之,可得 $$3x^2-2x-1=0.$$

解之,得 $$x=1, \text{ 或 } -\frac{1}{3}.$$

然二根中,僅 $-\frac{1}{3}$ 適合於原方程式. 若以 1 代入原式,將爲 $\frac{-2}{0}+2=\frac{1}{0}$, 不能成立.

故此方程式之根爲 $-\frac{1}{3}$.

注意: 解分數方程式,所得之根,若代入原式之各分母而有爲零者,則非眞根,須去之. 然有時解得兩個相等之根,則代入原式之分母雖爲零,或仍有一爲眞根. 如下例是.

(例二) 解 $$\frac{x^2-11x}{x^2-1}+\frac{5}{x-1}+2=0.$$

[解] 乘以各分母之 L. C. M. x^2-1, 卽得

$$x^2-11x+5(x+1)+2(x^2-1)=0.$$

卽 $$3x^2-6x+3=0.$$

$$x^2-2x+1=0.$$

$$\therefore\quad x=\frac{2\pm\sqrt{4-4}}{2}=\frac{2\pm0}{2}=1.$$

此時所得二根爲相等實根,皆爲 1.

以 1 代入原式之分母爲 0, 故 1 當非眞根.然實際一個 1 固非眞根,而又一個 1 則爲眞根.因分數方程式之所以有僞根者,卽因去分母時乘上一式所增出.今所乘之式 x^2-1 若爲 0, 則 $x=\pm1$. 故結果若有根爲 1 或 -1 時皆爲僞根.今結果中有兩個根皆爲 1. 故尙有一個眞根爲 1.

§ 103. **無理方程式** 方程式之未知數,有在根號內者曰無理方程式.普通解法,恆左右兩節各自乘化之爲有理式而解之.

(例一) 解 $$x+\sqrt{x+3}=3.$$

[解] 移有理各項於一節,爲 $\sqrt{x+3}=3-x$.

兩節自乘,得 $$x+3=(3-x)^2.$$

$$x+3=9-6x+x^2.$$

$$x^2-7x+6=0$$

解之得 $x=1$, 或 $x=6$.

以 1 代入原式 $1+\sqrt{1+3}=3$, 卽 $3=3$, 合.

以 6 代入原式 $6+\sqrt{6+3}=3$, 卽 $9=3$, 不合.

故原方程式之根爲 1.

注意: 解無理方程式得根後,必須代入原式以驗其合否.因兩節自乘時,每導入僞根也.

(例二) 解 $x^2-2x+6\sqrt{x^2-2x+6}=21$.

[解] 若將有理各項移至右節而兩節自乘,則將爲 x 之四次式,不易解之.故用解複二次方程式法令

$$\sqrt{x^2-2x+6}=y,\quad 則\quad x^2-2x+6=y^2,$$

而 $$x^2-2x=y^2-6.$$

代入原式,得 $$y^2-6+6y=21.$$

卽 $$y^2+6y-27=0.$$

解之,得 $$y=3 \quad 或 \quad y=-9.$$

卽 $$\sqrt{x^2-2x+6}=3, \tag{a}$$

或 $$\sqrt{x^2-2x+6}=-9. \tag{b}$$

從 (a), $$x^2-2x+6=9.\ x^2-2x-3=0.$$

$$\therefore\ x=-1,\ 或\ x=3.$$

從 (b), $$x^2-2x+6=81.\ x^2-2x-75=0.$$

$$\therefore\ x=1+2\sqrt{19},\ \text{或}\ x=1-2\sqrt{19}.$$

將所得四個值一一代入原式,即可決得原方程式之根爲 3 及 -1.

習題三十一

解以下各方程式:—

1. $\dfrac{1}{3x-1}=\dfrac{2x}{1-x}$.

2. $\dfrac{x+2}{x+4}=\dfrac{8}{2x-4}$.

3. $\dfrac{7}{x+1}+\dfrac{8}{x+2}=\dfrac{18}{x+3}$.

4. $1+\dfrac{x^2}{4-x^2}=2+\dfrac{1}{x+2}$.

5. $\dfrac{x-1}{x-2}-\dfrac{x-2}{x-1}+\dfrac{3}{2}=0$.

6. $\dfrac{x+5}{x-1}+\dfrac{x+1}{x-3}=\dfrac{2(x+9)}{x+1}$.

7. $\dfrac{2x+3}{2(2x-1)}-\dfrac{7-x}{2(x+1)}=\dfrac{7-3x}{4-3x}$.

8. $\dfrac{x^2+1}{x-1}+\dfrac{x^2-2}{x-2}=2x$.

9. $\dfrac{ax+b}{bx+a}=\dfrac{cx+d}{dx+c}$.

10. $\dfrac{n}{x-m}+\dfrac{m}{x-n}=\dfrac{2(m+n)}{x}$.

11. $x-5\sqrt{x}+6=0$.

12. $\sqrt{x+9}=2\sqrt{x}-3$.

13. $x^4+36=13x^2$.

14. $x^4=2x^2+8$.

15. $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{17}{4}$.

16. $(x^2-2)^2=14(x^2-2)+32$.

17. $(x^2-5x)^2+10(x^2-5x)+24=0$.

18. $(x^2+7x+6)(x^2+7x+12)=280.$

［提示］ 令 $y=x^2+7x$, 或 $y=x^2+7x+6$,

或 $y=x^2+7x+12$, 或 $y=x^2+7x+9$, 均可先解得 y.

19. $(x^2-6x)^2+6(x^2-6x+6)=63.$

20. $\dfrac{x^2+4x}{x-1}+\dfrac{72(x-1)}{x^2+4x}=18.$

［提示］ 令 $y=\dfrac{x^2+4x}{x-1}$, 則 $\dfrac{72(x-1)}{x^2+4x}=\dfrac{72}{y}$. 即可先解得 y.

21. $\dfrac{x^2}{x+1}+\dfrac{x+1}{x^2}=2.$　　22. $\sqrt{x^2+1}+\dfrac{3}{\sqrt{x^2+1}}=4.$

23. $\sqrt{x+8}+\sqrt{x+3}=5\sqrt{x}.$

24. $\sqrt{x+8}-\sqrt{x+3}=5\sqrt{x}.$

25. $\sqrt{(x-1)(x-2)}+\sqrt{(x-3)(x-4)}=\sqrt{2}.$

26. $9\sqrt{x^2-9x+28}=x^2-9x+36.$

27. $\sqrt{x}+\sqrt{x+\sqrt{1-x}}=1.$

28. $3+\sqrt{x^2+x-1}=2x.$

29. $\sqrt{mx+b^2}+\sqrt{mx}=a.$

30. $\sqrt{(x-a)^2+2ab+b^2}=x-a+b.$

§104. 二次聯立方程式解法 二次方程式有二元時,其通例爲 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$, 亦有無數組根. 故亦須聯立二方程式解之.

惟方程組 $\begin{cases}a_1x^2+b_1xy+c_1y^2+d_1x+e_1y+f_1=0,\\a_2x^2+b_2xy+c_2y^2+d_2x+e_2y+f_2=0\end{cases}$

之一般解法頗不易.須用四次方程式解法解之.本節所論僅爲幾種特例:(一) 一式僅爲一次者,如

$$\begin{cases}a_1x^2+b_1xy+c_1y^2+d_1x+e_1y+f_1=0,\\ \qquad\qquad\qquad\qquad d_2x+e_2y+f_2=0.\end{cases}$$

(二) 二式均無一次項者,如

$$\begin{cases}a_1x^2+b_1xy+c_1y^2+f_1=0,\\a_2x^2+b_2xy+c_2y^2+f_2=0.\end{cases}$$

(三) 式中有特別情形者.

(例一) 解 $\begin{cases}x^2+2xy-3y^2+2x-5y-5=0, & (1)\\ \qquad\qquad\qquad 2x-y-4=0. & (2)\end{cases}$

[解] 從 (2),可得 $y=2x-4.$ (3)

代入 (1),得

$$x^2+2x(2x-4)-3(2x-4)^2+2x-5(2x-4)-5=0.$$

簡約之,可得 $7x^2-32x+33=0.$

$$(7x-11)(x-3)=0.$$

故得 $x=\frac{11}{7}$ 或 3. 代入 (3),得 $y=-\frac{6}{7}$, 或 2.

故得兩組根 $x=\frac{11}{7}$, $y=-\frac{6}{7}$; 及 $x=3$, $y=2$.

(例二) 解 $\begin{cases} x^2+\ xy+y^2=39, & (1) \\ 2x^2+3xy+y^2=63 & (2) \end{cases}$

[解] 將常數項移入右節而除之,得

$$\frac{x^2+xy+y^2}{2x^2+3xy+y^2}=\frac{39}{63}=\frac{13}{21}.$$

再乘公分母,得

$$21x^2+21xy+21y^2=26x^2+39xy+13y^2.$$

簡約之,得 $$5x^2+18xy-8y^2=0.$$

$$(5x-2y)(x+4y)=0$$

$$\therefore\quad x=\frac{2}{5}y\ (A),\ \text{或}\ x=-4y\ (B)$$

從 (A), 代入 (1)

[亦可代入 (2)],得

$$\left(\frac{2}{5}y\right)^2+\left(\frac{2}{5}y\right)y+y^2=39.$$

$$\frac{4}{25}y^2+\frac{2}{5}y^2+y^2=39$$

$$39y^2=39\times25.$$

$$y^2=25.$$

$$y=\pm5.$$

代入 (A) [不可代入 (B)],

$$x=\pm2.$$

從 (B), 代入 (1)

[亦可代入 (2)],得

$$(-4y)^2+(-4y)y+y^2=39.$$

$$16y^2-4y^2+y^2=39.$$

$$13y^2=39.$$

$$y^2=3.$$

$$y=\pm\sqrt{3}.$$

代入 (B) [不可代入 (A)],

$$x=\mp4\sqrt{3}.$$

故共得四組根

$$\left.\begin{matrix}x=2\\y=5\end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix}-2\\-5\end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix}4\sqrt{3}\\-\sqrt{3}\end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix}-4\sqrt{3}\\\sqrt{3}\end{matrix}\right\}.$$

(例三) 解 $\begin{cases}x^2+6xy-2y^2+4x-10y-5=0, & (1)\\ 3x^2+5xy-2y^2-2x+3y-1=0. & (2)\end{cases}$

[解] 先視 y 爲已知數,試從 (1) 或 (2) 解 x, 若其根爲有理式時即可得解.

從 (1), $\quad x^2+(6y+4)x-(2y^2+10y+5)=0.$

其判別式爲 $(6y+4)^2+4(2y^2+10y+5)$

$$=44y^2+88y+36=4(11y^2+22y+9),$$

非完全平方式,故 x 爲無理式.

從 (2), $\quad 3x^2+(5y-2)x-(2y^2-3y+1)=0.$

其判別式爲 $(5y-2)^2+12(2y^2-3y+1)$

$$=49y^2-56y+16=(7y-4)^2,$$

爲完全平方式.

$$\therefore\quad x=\frac{-(5y-2)\pm(7y-4)}{6}$$

故從 (2), 可得 $x=\frac{1}{3}(y-1)$ 或 $y=3x+1$ $\quad (A)$

或 $\quad x=1-2y$ $\quad (B)$

以 (A) 代入 (1), 得

$$x^2+6x(3x+1)-2(3x+1)^2+4x-10(3x+1)-5=0.$$

簡約之,得 $x^2-32x-17=0.$

解之,得 $x=16\pm\sqrt{273}.$

代入 (A), 得 $y=49\pm3\sqrt{273}.$

以 (B) 代入 (1), 得

$$(1-2y)^2+6(1-2y)y-2y^2+4(1-2y)-10y-5=0.$$

簡約之,得 $5y^2+8y=0.$

解之,得 $y=0$, 或 $y=-\frac{8}{5}.$

代入 (B),得 $x=1$, 或 $x=\frac{21}{5}.$

故共得四組根

$$\left.\begin{matrix}x=1\\y=0\end{matrix}\right\},\quad\left.\begin{matrix}\frac{21}{5}\\-\frac{8}{5}\end{matrix}\right\},\quad\left.\begin{matrix}16+\sqrt{273}\\49+3\sqrt{273}\end{matrix}\right\},\quad\left.\begin{matrix}16-\sqrt{273}\\49-3\sqrt{273}\end{matrix}\right\}.$$

(例四) 解 $\begin{cases}3x^2+5x-8y=36, & (1)\\ 2x^2-3x-4y=3. & (2)\end{cases}$

[解] 兩式內 y 皆僅一次,故可消去 y 而解之(解法略).

習題三十二

解以下各方程組:—

1. $\begin{cases} x+2y=5, \\ x^2+2y^2=9 \end{cases}$

2. $\begin{cases} xy=15, \\ 2x+y=13. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x-5y=3, \\ x^2+xy=20. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x-y=2, \\ 3x^2-2xy=5. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x^2-xy+y^2=22, \\ 3x+4y=5. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 4x+y^2-2y=11, \\ x+4y=14. \end{cases}$

7. $\begin{cases} xy+x=15, \\ xy-y=8. \end{cases}$

8. $\begin{cases} xy+2x=5, \\ 2xy-y=3. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x^2=3xy, \\ 2x^2=3y^2+2. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x^2+3y^2=112, \\ y(x+4y)=132. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x^2-xy+y^2=21, \\ x^2-2xy+15=0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x^2+xy+2y^2=74, \\ 2x^2+2xy+y^2=73. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{5}{2}, \\ x^2+y^2=90. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}=\dfrac{25}{7}, \\ xy=48. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x^2-xy+y^2=2y, \\ 2x^2+4xy=5y. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x+\dfrac{1}{y}=1, \\ y+\dfrac{1}{x}=4. \end{cases}$

17. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6}, \\ x+y=5. \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{7}{12}, \\ xy=12. \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{6}, \\ \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{1}{12}. \end{cases}$　［提示］ 命 $\dfrac{1}{x}=x'$, $\dfrac{1}{y}=y'$，先解 x', y'.

20. $\begin{cases} x^3+8y^3=65, \\ x\ +2y\ =5. \end{cases}$　［提示］ 先以兩式相除.

21. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{4}, \\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{5}{1}. \end{cases}$

22. $\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1, \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1. \end{cases}$

23. $\begin{cases} ax+by=2, \\ abxy\quad =1. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x^2+pxy+y^2=p+2, \\ qx^2+xy+qy^2=2q+1. \end{cases}$

25. $\begin{cases} \dfrac{34}{x^2+y^2}=\dfrac{15}{xy}, \\ x+y=8. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x^3-y^3=37, \\ x\ -y\ =1. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x^3-y^3=56, \\ x^2+xy+y^2=28. \end{cases}$

28. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1\dfrac{1}{5}, \\ \dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{y^3}=1\dfrac{1}{125}. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x^2y+xy^2=12, \\ x^3+\ y^3=28. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x^3-\ y^3=26, \\ x^2y-xy^2=6. \end{cases}$

31. $\begin{cases} x^4+x^2y^2+y^4=2128, \\ x^2+xy\ +y^2=76. \end{cases}$　［提示］ 先兩式相除

32. $\begin{cases} x+y+\sqrt{xy}=28, \\ x^2+y^2+xy=336. \end{cases}$ [提示] 同上例.

33. $\begin{cases} 4xy=96-x^2y^2, \\ x+y=6. \end{cases}$ [提示] 先從第一式解 xy.

34. $\begin{cases} x^2+xy=8x+3, \\ y^2+xy=8y+6. \end{cases}$ [提示] 先二式相加,解 $x+y$.

35. $\begin{cases} 2(x+y)^2=5(x+y)-2, \\ 18x^2y^2=10xy-1. \end{cases}$ [提示] 從第一式解 $x+y$, 從第二式解 xy.

36. $\begin{cases} x-y=m, \\ \dfrac{(a-x)^2+y^2}{(a-x)y}=\dfrac{13}{6}. \end{cases}$

§105. 根之圖形表示 設二次方程式

$$ax^2+bx+c=0.\ 作\ y=ax^2+bx+c$$

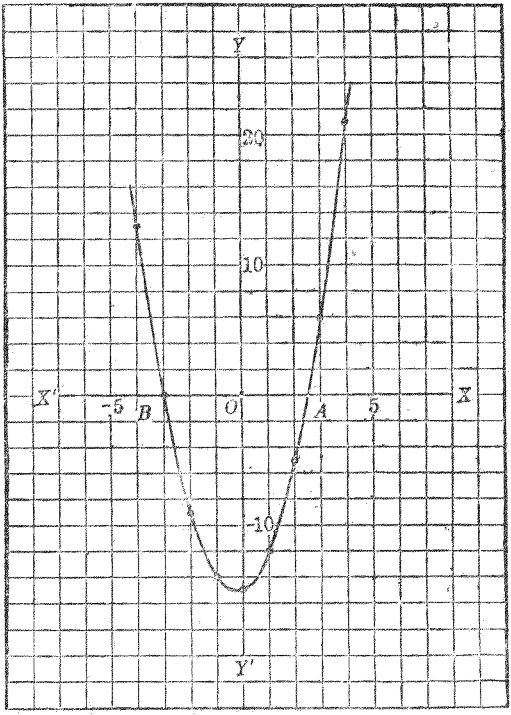
之圖線. 此線與橫軸之交點,即 $ax^2+bx+c=0$ 之根. 因橫軸 XX' 即所以表 $y=0$ 也.

(例一) 用圖形表示 $2x^2+x-15=0$ 之根.

[解法一] 令 $y=2x^2+x-15$.

求 x, y 之各對應值如下表:

x:	-1	-2	-3	-4	0	1	2	3	4
y:	-14	-9	0	13	-15	-12	-5	6	21



依表作圖線如上圖(圖中橫軸上每格表 1, 縱軸上每格表 2). 此圖線與 XX' 交於 A, B 二點,此二點所表之橫坐標,即原方程式之二根. 圖作 B 之橫坐標爲 -3, A 之橫坐標在 2 與 3 之間. 試介 $x=2.5$, 代入 $y=2x^2+x-15$, 得 $y=12.5+2.5-15=0$. 故其二根爲 2.5, 及 -3.

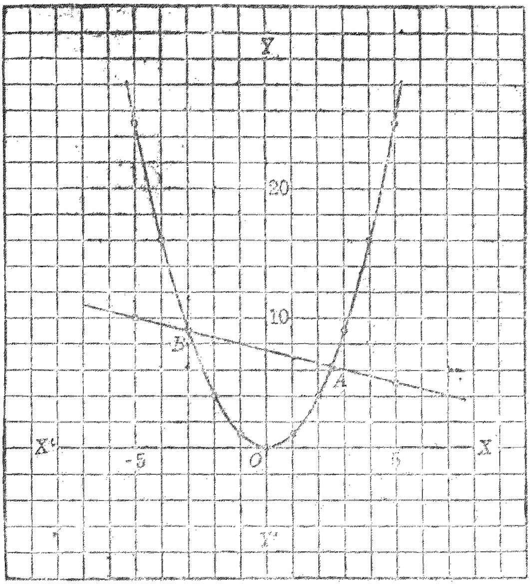
若 $y=ax^2+bx+c$ 與 XX' 軸無交點,則方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之根爲虛數.

[解法二] 原式以2除之,得 $x^2+\frac{1}{2}x-\frac{15}{2}=0$. 移項,爲

$x^2=\frac{15}{2}-\frac{1}{2}x$.

$$作\quad\begin{cases}y=x^2,\\ y=\frac{15}{2}-\frac{x}{1}\end{cases}$$

之二圖線,其交點 A, B 之橫坐標,即所設方程式之根.



此第二解法,有特佳之點.因若有幾個二次方程式待解時,如 $a_1x^2+b_1x+c_1=0$, $a_2x^2+b_2x+c_2=0$, ……等,僅須

作一個公共圖線 $y=x^2$，再每題作一圖線 $y=-\frac{b_1}{a_1}x-\frac{c_1}{a_1}$，$y=\frac{b_2}{a_2}x-\frac{c_2}{a_2}$，……卽得．而此不公共之第二圖線爲一直線作之甚易也．

且此公共圖線 $y=x^2$ 雖爲曲線作之亦甚易．因其各雙對應値之表爲

x:	0	±1	±2	±3	±4	±5	……
y:	0	1	4	9	16	25	……

不待計算，立可寫出也．

（例二）用圖形表示下列方程組之根：

$$\begin{cases} x^2+y^2=25, & (1) \\ xy=12. & (2) \end{cases}$$

［解］從 (1)，　$y=\pm\sqrt{25-x^2}$，

得

x:	0	±1	±2	±3	±4	±5	±6
y:	±5	$\pm 2\sqrt{6}$	$\pm\sqrt{21}$	±4	±3	0	虛數

因 (1) 關於 x，y 爲對稱，故上表中 x，y 之各對應値可互易．

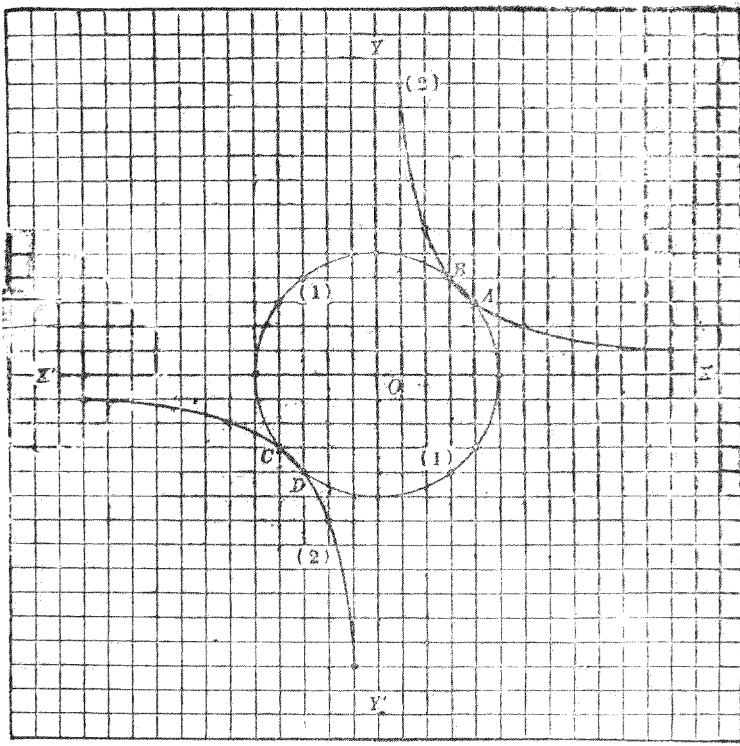
從 (2)，　$y=\frac{12}{x}$，

得

x:	0	±1	±2	±3	±4	±6	±12
y:	∞	±12	±6	±4	±3	±2	±1

表中 x, y 之值同時為正,或同時為負.

從上表可各作得圖線如下:



(1) 之圖線為一圓;(2) 之圖線為兩個不相接之曲線分居於第一,第三兩象限內,此圖線名曰雙曲線.兩圖線共交於 A, B, C, D 四點.此四點之坐標即表此方程組之四組實根.

$A(4, 3)$, $B(3, 4)$, $C(-4, -3)$, $D(-3, -4)$ 即其根為

$$\left.\begin{matrix}x=4\\y=3\end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix}3\\4\end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix}-4\\-3\end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix}-3\\-4\end{matrix}\right\}.$$

習題三十三

用圖形表示以下各方程式之根:—

1. $x^2+5x+6=0.$

2. $x^2-5x=x-10.$

3. $3x^2=6x+12.$

4. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{5}{6}.$

5. $\begin{cases}3x+2y=5,\\ x^2+5x=6y.\end{cases}$

6. $\begin{cases}x^2+y=7,\\ x+y^2=11.\end{cases}$

7. $\begin{cases}x^2-y^2=9,\\ x^2+4y^2=89.\end{cases}$

8. $\begin{cases}xy=8,\\ 4x^2-y^2=60.\end{cases}$

9. $\begin{cases}xy+2x-3y=12,\\ 2xy+x-y=14.\end{cases}$

10. $\begin{cases}\dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{x-y}{x+y},\\ x^2+y^2=16.\end{cases}$

§106. **應用問題**　二次方程式常有二根,故應用問題所立之方程式若為二次時,常有兩個答數.但此兩個答數之是否適合,須視原題之性質而定.因有時所得之根,雖適合於式,而不適合於題也.

(例一)　父子二人歲數之和為100.二人歲數相乘

積之$\frac{1}{10}$,比父之歲數多180.求父子之歲數.

[解] 設父年x歲,子年y歲.則立可得二方程式:

$$\begin{cases} x+y=100, \\ \frac{1}{10}xy=x+180. \end{cases}$$

解之,可得 $\left.\begin{matrix} x=60 \\ y=40 \end{matrix}\right\}$, 或 $\left.\begin{matrix} x=30 \\ y=70 \end{matrix}\right\}$.

然父年必大於子,故x必大於y.故$x=30$, $y=70$,雖合於所立方程組,不合原題之意.故答數應爲"父年60歲,子年40歲".

注意: 若題中父子二人易爲甲乙二人,則兩組根均可爲答數.

(例二) 一人以銀一元二角買得雞蛋若干個.若蛋價每打減低七分二釐,則將可多買得10個.求雞蛋每打之原價.

[解] 設蛋價每打x分,則銀一元二角爲120分可買蛋$\frac{120}{x}$打.若每打減價七分二釐,即減價7.2分,則每打爲$(x-7.2)$分,故120分可買$\frac{120}{x-7.2}$打.今云可多買10個即$\frac{10}{12}$打$=\frac{5}{6}$打.

$$\therefore\quad \frac{120}{x-7.2}-\frac{120}{x}=\frac{5}{6}.$$

解之,得 $x=36$ 或 -28.8. 但 x 所以表蛋每打之分數,故不能爲負數. 故答數爲原價每打36分即原價每打三角六分.

注意: 凡遇題中有複名數必化爲單名數後方可立式. 如上例中元,角,分,識皆化爲分,而蛋之個數化爲打數. 因所設之 x 爲每打之分數也.

習題三十四

1. 有一兩位數,其兩位上數字之積爲54, 若將此兩數字易位,則所成新數比原數小27. 求原數.

2. 分50爲兩部分,令其一部分平方2倍比他部分之3倍多20.

3. 有連續三整數其平方之和爲245. 求此三數.

4. 一矩形地面積爲3174平方步. 已知其長與闊之比爲3:2. 求長與闊.

5. 以金144元等分與若干人. 若人數少2人,則各人所得將多1元. 求人數.

6. 一船在靜水中每時能行8里. 今此船上下一長8里之河共費2時40分. 求此河流之速.

7 一矩形之公園長 80 步,闊 40 步.周圍有一馬路,共占面積 1344 平方步.求此馬路之闊,假定此馬路各處之闊皆相等.

8. 一水桶有甲乙二管可注水入內.欲注滿此桶,若但開乙管則比但開甲管須多費 6 時.若二管齊開,則 4 時即可注滿.求但開甲管所費之時數.

9. 兵士一隊,初排一方陣,尚餘 100 人,後重排一方陣,其每邊人數比前之半數多 13 人,則結果不足 29 人.求此隊兵士總數.

10. 一直角三角形斜邊長 13 寸,三邊共長 30 寸.求其餘二邊之長.

11. 一商人以銀 150 元買布若干疋,每疋以一元五角之價賣去.其從利益等於此布 24 疋之原價.求疋數.

12. 甲乙二車各行 36 里之路程,已知甲車速度比乙車每時多 15 里,又知甲車行此路程比乙車少行 12 分鐘.求二車速度.

13. 有矩形其對角線與長邊之和等於短邊之 5 倍.長短二邊之差為 35 尺.求各邊之長.

14. 直角三角形之斜邊為 2 尺,面積為 96 平方寸.求二邊之長.

15, 甲乙兩車站相距240里.快車自甲開往乙,慢車自乙開往甲,同時出發,途中相會後,快車再經4時抵乙站,慢車再經9時抵甲站.求快車及慢車之速度.

16. 面積48平方寸之矩形內接於半徑5寸之圓內,則此矩形二邊之長各爲幾寸?

17. 買布甲乙二種.甲種價比乙種每尺貴4分.今乙種比甲種多買10丈.而甲種共價36元,乙種共價32元.求二種布所買之尺數.

18. 直角三角形斜邊長a尺,餘二邊之和共長b尺.求各邊之長.

第十一章　不等式

§107. 不等式　以不等號($>$或$<$)連兩式,表示此兩式之大小者曰不等式.

如 $A>B$ 意卽 A 大於 B, $C<D$ 意卽 C 小於 D, 皆為不等式.

若 A, B 二式不等,而 $A>B$, 則 $A-B$ 為正,可以不等式 $A-B>0$ 表之.同樣若 C, D 二式不等而 $C<D$, 則 $C-D$ 為負,可以不等式 $C-D<0$ 表之.

因兩正數之和必為正數,故若 $A>0$, $B>0$, 則 $A+B>0$. 又兩負數之和必為負數,故若 $A<0$, $B<0$, 則 $A+B<0$.

§108 關於不等式之定理

(1)　若 $A>B$, 則

$$A+C>B+C.$$

[證]　因　　$A>B$, $A-B>0$.

然　$(A+C)-(B+C)=A+C-B-C=A-B$.

$\therefore$　$(A+C)-(B+C)>0$.　　$\therefore$　$A+C>B+C$

(2)　若 $A>B$, 則

$$A-C>B-C.$$

[證法同上]

(3)　若 $A>B, C>D$, 則

$$A+C>B+D.$$

[證]　因　$A>B$,　$\therefore$　$A-B>0$.

又　$\because$　$C>D$,　$\therefore$　$C-D>0$.

$$\therefore\quad (A-B)+(C-D)>0.$$

即

$$(A+C)-(B+D)>0.$$

$$\therefore\quad A+C>B+D.$$

(4)　若 $A>B, n>0$, 則

$$nA>nB.$$

[證]　因 $A>B$, $\therefore$ $A-B>0$. 又 $\because$ $n>0$,

$\therefore$　$n(A-B)>0$ (兩正數相乘, 其積爲正).

即　$nA-nB>0$.　$\therefore$　$nA>nB$.

(5)　若 $A>B, n<0$, 則

$$nA<nB.$$

[證]　因 $A>B$, 故 $A-B>0$. 又因 $n<0$,

$\therefore$　$n(A-B)<0$ (負數乘正數, 其積爲負數).

即　$nA-nB<0$.　$\therefore$　$nA<nB$.

(6) 若 $A>B$, $B>C$, 則 $A>C$.

[證] $\because$ $A>B$, $B>C$, $\therefore$ $A-B>0$, $B-C>0$.

$\therefore$ $(A-B)+(B-C)=A-C>0$. $\therefore$ $A>C$.

§109. **解不等式** 解不等式與解方程式相類,即求式中未知數之值令適合於不等式也.唯適合於方程式之未知數,常有定值曰此方程式之根.適合於不等式之未知數無定值,僅能表示其值之界限.舉例如下:

(例一) 解 $5x-8<3x+2$.

[解] 兩節各加 8, 各減 $3x$, 得

$$5x-3x<2+8.$$

即 $$2x<10.$$

兩節乘以 $\frac{1}{2}$, $$x<5.$$

注意: 解不等式時,亦可移項與解方程式同.

(例二) 解 $x^2+5<6x$.

[解] 移項,得 $x^2-6x+5<0$.

即 $$(x-1)(x-5)<0.$$

故此二因式必爲一正一負.

故必 $$x-1>0, x-5<0.$$

$$\therefore \quad 5>x>1.$$

(例三) 解 $ax^2+bx+c>0$.

[解]

$$ax^2+bx+c=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

$$=a\left\{x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}\left\{x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}.$$

$$\therefore\quad a\left\{x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}\left\{x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}>0.$$

若 $a>0$, 則

$$x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

同爲正,或同爲負.故

$$x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}>0,\ \text{或}\ x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}<0.$$

即 $$x>-\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\ \text{或}\ x<-\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

若 $a<0$, 則

$$x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

一正一負.故

$$x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}>0,\quad x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}<0.$$

$$\therefore \quad \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} > x > \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

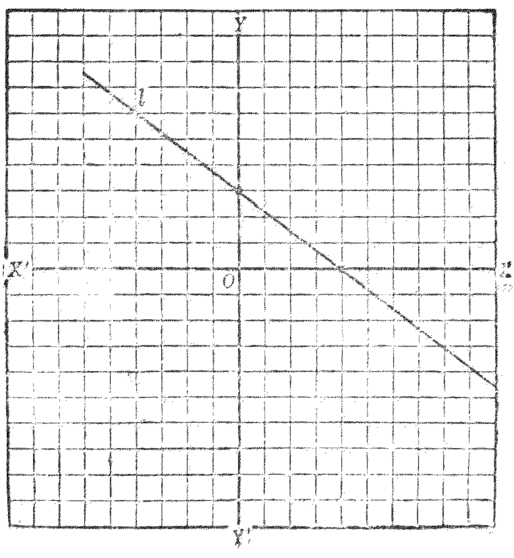
§ 110. **不等式之圖形表示** 設 $y>f(x)$, 或 $y<f(x)$, 可作 $y=f(x)$ 之圖線. 此線分平面為兩部分, 其上側之一部分卽 $y>f(x)$ 之解答, 其下側之一部分卽 $y<f(x)$ 之解答.

(例一) 用圖形表示

$$3x+4y>12.$$

[解] 原式移項, 得

$$4y>12-3x.$$



$$\therefore \quad y>3-\frac{3}{4}x.$$

作 $$y=3-\frac{3}{4}x$$

之圖線如上圖直線 l. 則 l 上側半平面即爲解答.

(例二) 求 x, y 之整數值令同時適合於不等式

$$\begin{cases} 3x+5y> 15, & (1) \\ x-2y>-4, & (2) \\ 2x-y< 4. & (3) \end{cases}$$

[解] 從 (1), $$y>3-\frac{3}{5}x;$$

從 (2), $$y<\frac{x}{2}+2;$$

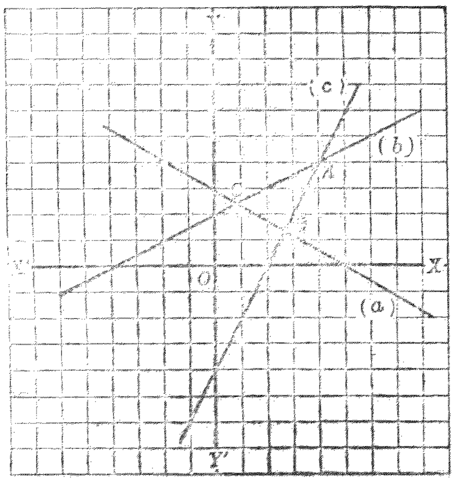
從 (3), $$y>2x-4.$$

作圖線

$$y=3-\frac{3}{5}x \quad (a),$$

$$y=\frac{x}{2}+2 \quad (b),$$

$$y=2x-4 \quad (c).$$



則合於 (1) 之數值當在 (a) 之上, 合於 ( ) 之數值當在 (b) 之下, 合於 (3) 之數

値當在 (c) 之上.故同時適合於 (1), (2), (3) 之數値當在 $\triangle ABC$ 內.其中表整數値僅有二點 (2, 2), (3, 3).

故 $$\left.\begin{array}{l}x=2\\y=2\end{array}\right\},\quad\left.\begin{array}{l}x=3\\y=3\end{array}\right\}$$

爲所求解答.

(例三) 解 $$\begin{cases}x^2+y^2<25, & (1)\\ x^2-y^2>9, & (2)\\ x-10y<2. & (3)\end{cases}$$

[解] 從 (1), $$y^2<25-x^2.$$

$$\therefore\quad \sqrt{25-x^2}>y>-\sqrt{25-x^2}.$$

從 (2), $$y^2<x^2-9.$$

$$\therefore\quad \sqrt{x^2-9}>y>-\sqrt{x^2-9}.$$

從 (3), $$y>\frac{x}{10}-\frac{1}{5}.$$

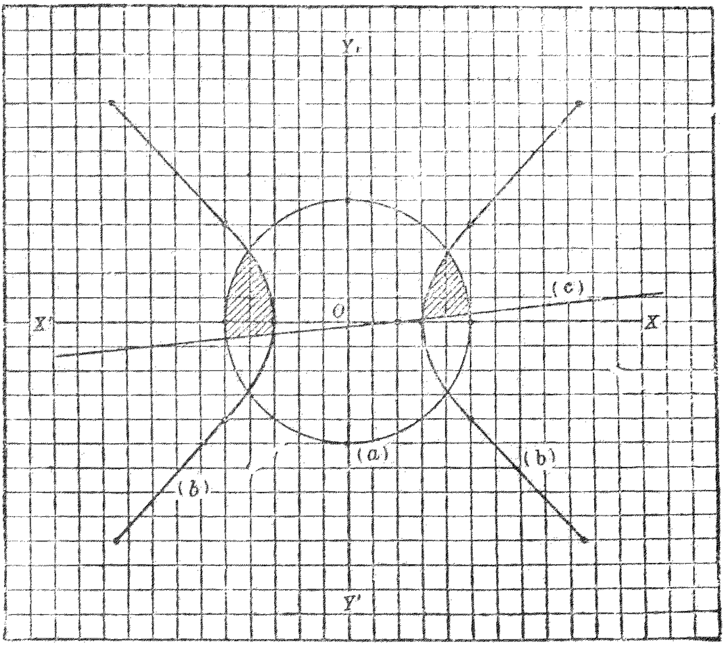
作圖線 $$y=\pm\sqrt{25-x^2} \qquad (a),$$

$$y=\pm\sqrt{x^2-9} \qquad (b),$$

$$y=\frac{x}{10}-\frac{1}{5} \qquad (c).$$

(a) 爲圓,合於 (1) 之數値當在 XX' 軸上半圓之下,而在 XX' 軸下半圓之上,即在圓內.

(b) 爲雙曲線,合於 (2) 之數値亦當在 XX' 軸上曲線



之下而在XX'軸下曲線之上,卽在雙曲線之兩側.

(c)爲直線,合於(3)之數值,當在直線之上.

故圖內黑影部分爲所求解答.

習題三十五

解以下各不等式(1—8):——

1. $5x-8<3x+2$.　　2. $-x>-7$.

3. $x-\frac{5}{7}>\frac{2}{9}x+2$.　　4. $\frac{3x}{8}-\frac{2x-1}{12}>\frac{3x+1}{6}-\frac{5}{4}$.

5. $(x+1)(x+5)>(x+2)(x+3)$.

6. $(x+2)(x+3)<(x+2)(x-1)$.

7. $3x^2+2x-1>0$. 8. $x^2+5>5x$.

9. 若 $\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1}{3}<\frac{1}{4}(x+2)+\frac{1}{3}x<\frac{1}{2}(x-4)+3$,

求 x 之整數值.

10. $\begin{cases} 3x+5>5x+3, \\ 9x-6<6x-9. \end{cases}$ 11. $\begin{cases} 3x+5>7x-9, \\ x^2-9<8x. \end{cases}$

用圖形表示以下各聯立不等式之解答(12—15):

12. $\begin{cases} 3x+5y>5, \\ 5x-3y>4, \\ x+y<2. \end{cases}$ 13. $\begin{cases} 3x+y>10, \\ 3x-7y<10, \\ x^2+y^2<16, \end{cases}$

14. $\begin{cases} y>x^2+5x+6. \\ x>y^2-4y. \end{cases}$ 15. $\begin{cases} x^2-y^2>1. \\ 4x^2+9y^2<36. \end{cases}$

16. 若 $a \neq b \neq c$, 證 $a^2+b^2+c^2>bc+ac+ab$.

17. 若 $a>b>0$, 證 $a^3+b^3>a^2b+ab^2$.

18. 若 $a>b>c>0$, 證

(1) $a^3+b^3+c^3>a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)$.

(2) $a^3+b^3+c^3>3abc$.