Philosoph. Transact. N°. 352.

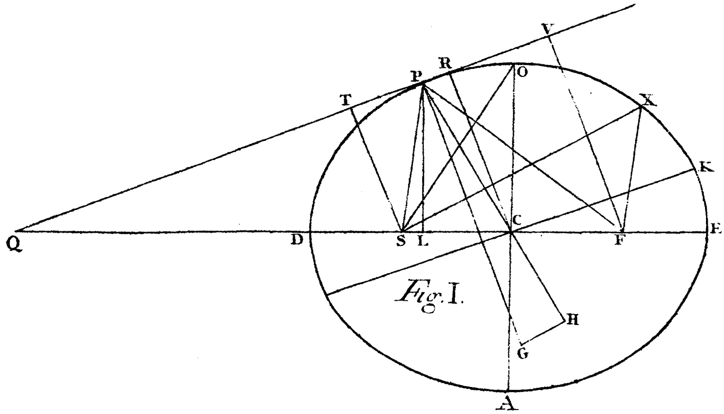


Fig. I.

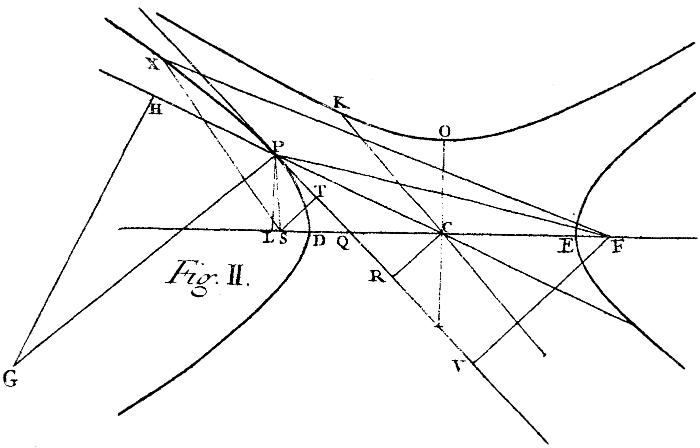
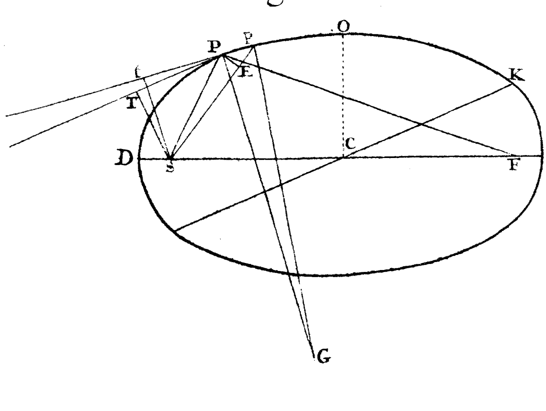


Fig. II.

Fig. III



I have computed this Table so far, that the Reader may see in what manner this Method Approximates; this whole Work, as it appears, costing a little more than three Hours time.

V. *Proprietates quædam simplices* Sectionum Conicarum *ex natura* Focorum *deductæ; cum Theoremate generali de Viribus Centripetis; quorum ope Lex Virium Centripetarum ad Focos Sectionum tendentium, Velocitates Corporum in illis revolventium, & Descriptio Orbium facillime determinantur. Per* Abr. *de* Moivre, R. S. Soc.

SIt DE Axis Transversus Ellipseos, AO Axis alter, & C centrum Sectionis. Sit P punctum quodvis in circumferentia ejus; PQ Tangens curvæ ad P, occurrens Axi Transverso ad Q; puncta S, F Foci; CP, CK semidiametri Conjugatæ; PH Semilatus rectum ad diametrum PC; PG normalis ad Tangentem, cui occurrat HG, perpendicularis ipsi PCH, in puncto G, ut fiat PG radius Curvaturæ Ellipseos in puncto P: sint etiam ST, CR, FV perpendiculares in Tangentem PQ demissæ: Jungatur SO, & demittatur in Axem normalis PL. His positis, Dico quod,

1. *Rectangulum sub distantiis ab utroque Ellipseos Foco, sive* $SP \times PF$ *æquale est quadrato Semidiametri* CK.

Demonstratio.

$PSq = PCq + CSq - 2CS \times CL$ per 13. II. Elem.
$PFq = PCq + CSq + 2CS \times CL$ per 12. II. Elem.
Unde $PSq + PFq = 2PCq + 2CSq$.
Jam $PS + PF = DE = 2CD$; ac propterea
$PSq + PFq + 2PS \times PF = 4CDq$. Quare

Quare transponendo, $2\,PS \times PF = 4\,CDq - 2\,PCq - 2\,CSq$.

Ac Dimidiando $PS \times PF = 2\,CDq - PCq - CSq$.

Est autem CS *quad.* $= CD$ *quad.* $- CO$ *quad*, atque adeo $PS \times PF = CDq + COq - PCq$.

Sed $CDq + COq = PCq + CKq$. *per* 12. VII. *Conic. Apollonii.*

Quare $PS \times PF = CKq$. *Q. E. D.*

II. *Distantia à Foco SP est ad perpendicularem in Tangentem demissam, ut Semidiameter Conjugata CK ad Semiaxem minorem CO.*

Demonstratio.

Ob similia Triangula SPT, FPV, erit $PS : PF :: ST : FV$; ac componendo $PS + PF$ erit ad $ST + FV$, & earundem dimidia CD ad CR, ut PS ad ST. Unde $CD \times CK$ erit ad $CR \times CK$ ut PS ad ST. Sed $CR \times CK$ æquale est rectangulo sub Semiaxibus CD in CO, per 31. VII. *Conic.* Proinde PS est ad ST ut CD in CK ad $CD \times CO$, sive ut CK ad CO. Ac pari argumento demonstrabitur PF esse ad FV in eadem ratione. *Q. E. D.*

III. *In eadem etiam est ratione Semiaxis Transversus CD ad normalem è centro C ad Tangentem demissam, sive ad CR.*

Etenim cum rectangulum $CR \times CK$ æquale sit rectangulo $CD \times CO$, uti jam dictum est, erit ἀνάλογον CD ad CR ut CK ad CO. *Q. E. D.*

IV. *Semidiameter quævis PC est ad distantiam puncti P à foco S, sive ad SP, ut distantia ab altero Foco FP ad dimidium lateris recti ad Verticem P pertinentis, sive ad PH.*

Hoc autem manifestum est ob *Propr.* I. cum nempe quadratum ex CK æquale sit rectangulo sub $SP \times PF$.

V. *Rectangulum Semiaxium CD × CO est ad quadratum semidiametri conjugatæ CK, ut CK ad Radium Curvaturæ in puncto P, sive ad PG.*

Sunt

Sunt enim Triangula PCR, PGH inter se similia, unde CR est ad PC, ut semilatus rectum PH ad PG: hoc est, per præmissam Proprietatem III, $\frac{CD \times CO}{CK} =$ CR est ad PC ut $\frac{CK^2}{PC} = PH$ ad $\frac{CK^3}{CD \times CO} = PG$. proinde ἀνάλογον $CD \times CO : CK^2 :: CK : PG$. *Q.E.D.*

THEOREMA GENERALE I.

Vis centripeta ad idem punctum S tendens, in Curvis omnibus, est semper proportionalis Quantitati $\frac{SP}{PG \times ST^3}$

Hoc Theorema ante plures annos à me investigatum & cum amicis communicatum, propriis demonstrationibus firmavere Geometræ Clarissimi D. *J. Bernoullius* in *Act. Lipsiæ*; D. *J. Keillius* in harum *Transact.* N. 317. & D. *Jac. Hermannus* in *Phoronomiâ* suâ pag. 70. quos vide.

Scribendo autem CK^3 pro PG, per *Propr.* V; & $\frac{SP}{CK}$ juxta *Propr.* II, pro ST; (ob datas scilicet CD, CO) erit Vis centripeta tendens ad focum Ellipseos S, semper ut $\frac{SP \times CK^3}{CK^3 \times SP^3}$, hoc est ut $\frac{SP}{SP^3}$ vel $\frac{1}{SP^2}$, nempe reciprocè ut quadratum ex SP. Unde patet quod si Sectio fuerit Ellipsis motu corporis descripta, erit Vis Centripeta ut quadratum distantiæ à centro Virium reciprocè. Ex his Proprietatibus consequuntur Corollaria nonnulla notatu non indigna.

Coroll 1. *Velocitas Corporis in Ellipsi revolventis, ad punctum quodlibet P, est ad Velocitatem revolventis in circulo ad eandem distantiam SP à centro Virium, in subdupla ratione distantiæ ab altero foco PF, ad Semiaxem transversum Sectionis, sive ut media proportionalis inter PF & CD ad CD.*

Est enim velocitas revolventis in Ellipsi ad distantiam SP, ad Velocitatem revolventis in Circulo vel Ellipsi ad dist-

distantiam Semiaxis CD vel SO, ut CO ad ST; hoc est per *Propr.* II. ut $\sqrt{PF}$ ad $\sqrt{SP}$. Velocitas autem revolventis in Circulo ad distantiam CD est ad velocitatem revolventis in Circulo ad distantiam SP, ut $\sqrt{SP}$ ad $\sqrt{CD}$. Ex æquo igitur, Velocitas revolventis in Ellipsi ad distantiam SP, est ad Velocitatem revolventis in Circulo ad eandem distantiam ut $\sqrt{PF}$ ad $\sqrt{CD}$.

Coroll. 2. *Ex datis Velocitate in Ellipsi, positione Tangentis, & centro Virium seu Foco, facile est determinare Focum alterum.*

Sit enim Velocitas Data R; ea autem Velocitas quâ describeretur Circulus ad datam à centro distantiam SP sit Q; ac per *Coroll.* præcedens, R est ad Q ut $\sqrt{PF}$ ad $\sqrt{CD}$, adeoque QQ est ad RR ut CD ad PF, & $2QQ - RR$ erit ad RR ut SP ad PF: Datur autem SP; data est igitur PF magnitudine. Datur etiam positione, ob angulum VPF angulo SPT æqualem. Datur igitur punctum F alter Focorum: Quo invento pronum est Sectionem describere.

Si vero $\frac{1}{2}RR$ majus fuerit quadrato ex Q, $2QQ - RR$ fit quantitas Negativa, & loco Ellipseos Trajectoria describenda in Hyperbolam transit. Eritque $RR - 2QQ$ ad RR ut SP ad PF distantiam alterius Foci, ad alterum Tangentis latus ponendam, ut habeatur Focus F. Proprietates autem omnes quas in Ellipsi demonstravimus; mutatis mutandis etiam Hyperbolæ competunt. *Fig.* II.

Quod si acciderit QQ æquale esse dimidio quadrati ex R; evanescente quantitate $2QQ - RR = 0$, quarta proportionalis PF fit infinita: proinde Trajectoria describenda Parabolica est, Foco scilicet altero in infinitum abeunte. Axis autem Trajectoriæ positione datur; est enim ipsi PF parallelus, existente scilicet angulo FPV angulo dato SPT æquali.

Coroll. 3. *Velocitas revolventis in data Sectione Conica ad distantiam* SP *est ad Velocitatem ejusdem ad distantiam aliam* SX, *ut media proportionalis inter* FP *&* SX *ad mediam proportionalem inter* SP *&* FX.

Velo-

Velocitas enim in P eſt ut $\sqrt{\frac{FP}{SP}}$ (per *propr.* II.) & per eandem, Velocitas in X eſt ut $\sqrt{\frac{FX}{SX}}$. Unde manifeſta eſt propoſitio.

Coroll. 4. *Ratio etiam Velocitatum duorum Corporum in eodem Syſtemate, ſed in datis Coniſectionibus diverſis, revolventium, datis utriuſque à communi Orbium Foco diſtantiis, ope Corollarii* 1^{mi}. *ſtatim obtinebitur.*

Cum enim Velocitas corporis in P ſit ad Velocitatem in Circulo ad eandem diſtantiam SP, ut $\sqrt{PF}$ ad $\sqrt{CD}$; & in alia ſuppoſita Coniſectione, cujus Semiaxis cd & Foci S, f, ad diſtantiam Sp Velocitates illæ ſint ut $\sqrt{pf}$ ad $\sqrt{cd}$: Velocitas autem revolventis in circulo ad diſtantiam SP ſit ad Velocitatem in Circulo ad diſtantiam Sp ut $\sqrt{Sp}$ ad $\sqrt{SP}$; Compoſitis rationibus, erit Velocitas in P ad Velocitatem in p, ut $\sqrt{PF \times cd \times Sp}$ ad $\sqrt{pf \times CD \times SP}$. Quod ſi Sectio illa altera fuerit Parabola, erunt cd, pf infinitæ, ſed in ratione 1 ad 2; proinde ratio Velocitatum erit ut $\sqrt{PF \times Sp}$ ad $\sqrt{2CD \times SP}$.

Coroll. 5. *Quod ſi in Hyperbola punctum P abeat in infinitum, ex præcedentibus manifeſtum eſt, Velocitatem ultimam ac minimam, qua cum corpus in æternum aſcenderet, æqualem eſſe ei qua, ad diſtantiam CD Semiaxi tranſverſo æqualem, Circulum deſcriberet.*

Coroll. 6. *Ex data diſtantia à Foco, datur quoque Poſitio Tangentis, ſive angulus SPT, ſub diſtantia SP & Tangente PT contentus.*

Eſt enim (per *propr.* II.) PS ad ST ut CK ad CO ſive ut $\sqrt{SP \times PF}$ ad CO, atque ita Radius ad Sinum anguli SPT. At in Ellipſibus Circulis affinibus præſtaret angulum PST, ejuſdem complementum ad quadrantem, inquirere: Hujus autem Sinus eſt ad Radium ut $\sqrt{SP \times PF - COq}$ ad $\sqrt{SP \times PF}$.

Coroll.

Coroll. 7. *Atque hinc consequuntur Velocitates quibuscum distantiæ* SP *crescunt vel decrescunt.*

Nam cum, ex Corollario præcedente, $\sqrt{SP \times PF}$ sit ad $\sqrt{SP \times PF - COq}$ ut Radius ad sinum anguli PST, ac in eadem sit ratione Velocitas Corporis in P ad Velocitatem momenti ipsius SP; Velocitas autem illa in P sit (per *propr.* II.) ut $\sqrt{\frac{PF}{SP}}$; elisis superfluis, erit $\sqrt{\frac{SP \times PF - COq}{SP}}$ Velocitati, qua crescit vel decrescit distantia SP, semper proportionalis.

THEOREMA GENERALE II.

In omni Trajectoria Curvilinea Velocitates angulares circa centrum Virium sunt reciprocè proportionales quadratis distantiarum à centro.

Nam ob Sectorum minimorum Areas æquales, arcus angulis minimis subtensi sive Bases, sunt reciprocè ut Radii: Anguli autem minimi quibus Bases æquales subtenduntur sunt etiam reciproce ut Radii. Proinde anguli Sectorum minimorum Areâ æqualium, sunt inter se reciprocè in dupla ratione Radiorum, sive ut quadrata distantiarum.

Coroll. 8: *Hinc Velocitates angulares revolventium in diversis Ellipsibus datis comparantur inter se.*

Velocitates enim angulares quibuscum ad distantias Semiaxibus Transversis æquales circuli describerentur, sunt reciproce in ratione sesquialtera Axium, sive ut $\frac{1}{CD\sqrt{CD}}$. Velocitates autem angulares has medias habent Corpora revolventia, cum quadrata distantiarum æquantur rectangulis sub semiaxibus Ellipseôn. Ideo (per *Theor.* II.) erit SPq ad $CD \times CO$ ut $\frac{1}{CD\sqrt{CD}}$ ad $\frac{CO}{SPq \times \sqrt{CD}}$: quæ quidem Quantitas est ut Velocitas anguli ad centrum S, motu rectæ SP, tempore quam minimo dato, descripti.

Coroll. 9. *Velocitas angularis qua circumgyratur Tangens* PT, *sive recta in Tangentem perpendicularis* ST, *est ad Velocitatem*

locitatem angularem rectæ S P, ut Semiaxis transversus C D ad distantiam ab altero Foco P F.

Demonstratio.

In *Fig.* III. Sint puncta P, p, quamproxima inter se; ductisque SP. Sp, sint PT, pt duæ Tangentes, ad quas demittantur normales ST, St; iisque parallelæ ducantur radii Curvaturæ PG, pG coeuntes in G: ac describatur, centro S & radio SP, arcus minimus PE occurrens ipsi Sp in E. Manifestum est angulum PGp æqualem esse angulo TSt, sive angulari Velocitati normalis ST. Est autem angulus PSp angularis velocitas rectæ SP; quare angulus PGp est ad angulum PSp ut angularis Velocitas ipsius ST ad angularem velocitatem rectæ SP; hoc est, ut $\frac{Pp}{PG}$ ad $\frac{PE}{PS}$. Sed $Pp . PE :: SP . ST :: CK : CO$ (per *propr.* II). Hæ igitur Velocitates sunt ut $\frac{CK}{PG}$ ad $\frac{CO}{PS}$. Pro PG scribe $\frac{CK^3}{CD \times CO}$ (per *propr.* V.) ac $\frac{CK}{PG}$ fiet $\frac{CD \times CO}{CKq} = \frac{CD \times CO}{PS \times PF}$. Hinc $\frac{CD \times CO}{PS \times PF}$ erit ad $\frac{CO}{PS}$, sive, deletis superfluis, CD ad PF, ut angulus TSt ad angulum PSp, sive Velocitas angularis Tangentis ad angularem Velocitatem distantiæ SP: proinde Velocitas qua circumgyratur Tangens, semper proportionalis est quantitati $\frac{CO \times \sqrt{CD}}{PF \times SPq}$.

Pleraque horum Corollariorum ex aliis Conicarum Sectionum Proprietatibus deducta, vel facile deducenda, inveniet Lector in Sect. III. Lib. I. Princip. Nat. Philosophiæ.

F I N I S.

LONDON, Printed for *W. Innys*, at the *Princes Arms* in St. *Paul's-Church-Yard*, 1717.