15 Equazioni di primo grado

15.1 Identità ed equazioni

Analizziamo le seguenti proposizioni:

a) "cinque è uguale alla differenza tra sette e due";
b) "la somma di quattro e due è uguale a otto";
c) "il doppio di un numero naturale è uguale alla differenza tra nove e il numero stesso";
d) "la somma di due numeri interi è uguale a dieci".

Notiamo che sono tutte costruite con il predicato "essere uguale a". Riscriviamo in formula ciascuna di esse:

a) $5 = 7 - 2$; b) $4 + 2 = 8$; c) $2x = 9 - x$; d) $x + y = 10$.

Notiamo che le prime due contengono solamente numeri, le seconde contengono anche variabili (lettere).

Le formule del primo tipo si dicono *chiuse* e di esse si può subito stabilire se sono vere o false; così in $\mathbb{N}$ la formula $5 = 7 - 2$ è vera, mentre $4 + 2 = 8$ è falsa.

Definizione 15.1. Le *formule chiuse* costruite con il predicato «essere uguale» si chiamano *uguaglianze*; definito l'ambiente in cui vengono enunciate si può immediatamente stabilire il loro valore di verità.

Esempio 15.1. La formula chiusa $1 - 6 = -5$ è un'uguaglianza vera se la consideriamo nell'insieme $\mathbb{Z}$ degli interi relativi, è falsa se la vediamo come sottrazione tra numeri naturali.

Le formule c) e d) che contengono variabili si dicono *aperte*; le variabili che compaiono sono chiamate *incognite*. Di tali formule non si può subito stabilire il valore di verità.

Quando alle incognite sostituiamo un numero, queste si trasformano in formule chiuse e allora possiamo stabilirne il valore di verità relativamente alla sostituzione effettuata.

Esempio 15.2. Nella formula $2x = 9 - x$ sostituiamo alla variabile x il valore 0; quindi otteniamo: $2 \cdot 0 = 9 - 0 \Rightarrow 0 = 9$, falsa.

Sostituiamo ora alla variabile x il valore 3; otteniamo $2 \cdot 3 = 9 - 3 \Rightarrow 6 = 6$, vera.

Esempio 15.3. Nella formula $x + y = 10$ sostituiamo alle variabili coppie di numeri interi come $x = 2$ e $y = 5$; otteniamo $2 + 5 = 10 \Rightarrow 7 = 10$, falsa. Se sostituiamo $x = 4$ e $y = 6$ ci rendiamo subito conto che l'uguaglianza ottenuta è vera. Esistono molte altre coppie di numeri interi che rendono vera l'uguaglianza.

Definizione 15.2. Le formule aperte costruite con il predicato essere uguale si chiamano *equazioni*; le due espressioni che compaiono a sinistra e a destra del segno di uguaglianza si chiamano rispettivamente *primo membro* e *secondo membro*.

L'insieme dei valori che sostituiti alle incognite trasformano l'equazione in un'uguaglianza vera costituisce l'*insieme soluzione* (I. S.) o più semplicemente la *soluzione* dell'equazione.

Affronteremo per ora equazioni in *una sola incognita* che, dopo aver svolto eventuali calcoli nei due membri, comparirà a *grado* 1 e i cui *coefficienti* sono *numeri razionali*. Cercheremo la sua soluzione nell'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali, salvo esplicita indicazione differente.

Esempio 15.4. Cercare le soluzioni nell'insieme indicato.

a) $x^2 = 1$ con $x \in \mathbb{N}$. Risulta vera solo se a x sostituiamo il valore 1; infatti 1 è l'unico numero naturale il cui quadrato è 1. L'insieme soluzione è $\{1\}$.
b) $x^2 = 1$ con $x \in \mathbb{Z}$. Risulta vera se a x sostituiamo il valore 1 oppure il valore -1; infatti sia -1 che 1 elevati al quadrato danno 1. L'insieme soluzione è $\{-1, 1\}$.
c) $x^2 + 1 = 0$ con $x \in \mathbb{R}$. Essendo la formula a sinistra dell'uguale la somma di un quadrato con il numero 1, si ottiene sempre un numero $\geqslant 1$ e non si può ottenere 0, pertanto è impossibile trovare una soluzione, ovvero l'insieme soluzione è $\emptyset$.
d) $2x + 3 = (3 + x) + x$ con $x \in \mathbb{Q}$. Eseguendo il semplice calcolo al secondo membro, ci rendiamo conto che qualunque valore venga sostituito all'incognita l'uguaglianza risulta vera. L'insieme soluzione è $\mathbb{Q}$.

In generale un'equazione in una incognita può essere:

a) *determinata*, quando l'insieme soluzione è un sottoinsieme proprio dell'insieme numerico considerato;
b) *impossibile*, quando l'insieme soluzione è l'insieme vuoto $\emptyset$;
c) *indeterminata* o *identità*, quando l'insieme soluzione coincide con l'insieme considerato.

Esempio 15.5. Analizziamo le equazioni:

a) $3 \cdot x = 0$; b) $0 \cdot x = 5$; c) $0 \cdot x = 0$.

Tutte e tre hanno la stessa struttura: il primo membro è il prodotto di un coefficiente numerico per un valore incognito, il secondo membro è un numero.

a) Per trovare l'insieme soluzione della prima equazione cerchiamo in $\mathbb{Q}$ il numero che moltiplicato per 3 dà come prodotto 0. L'unico numero che rende vera l'uguaglianza è zero. Quindi l'insieme delle soluzioni è $\{0\}$. L'equazione è *determinata*.
b) Per trovare l'insieme soluzione della seconda equazione cerchiamo in $\mathbb{Q}$ il numero che moltiplicato per 0 dà come prodotto 5. Per la proprietà della moltiplicazione quando moltiplichiamo per 0 il prodotto è 0, non otterremo mai 5. Quindi l'insieme soluzione è l'insieme vuoto $\emptyset$. L'equazione è *impossibile*.

c) Per trovare l'insieme soluzione della terza equazione cerchiamo in $\mathbb{Q}$ il numero che moltiplicato per zero dà come prodotto zero. Per la proprietà della moltiplicazione quando moltiplichiamo per 0 il prodotto è 0 qualunque sia l'altro fattore. Quindi l'insieme delle soluzioni è $\mathbb{Q}$. L'equazione è *indeterminata*.

In alcuni casi la soluzione di un'equazione si può trovare applicando semplicemente le proprietà delle operazioni.

Esempio 15.6. Analizziamo lo schema operativo dell'equazione $3x - 1 = 17$ con $x \in \mathbb{N}$.

Si opera sul valore incognito x per ottenere 17:

$$\textit{entra } x, \text{ si moltiplica per tre} \rightarrow 3 \cdot x \text{ si sottrae } 1 \rightarrow 3 \cdot x - 1 \text{ si ottiene } 17.$$

Qual è il valore in ingresso?

Per determinare il valore in ingresso basterà ripercorrere lo schema effettuando le operazioni inverse:

$$\textit{da } 17 \text{ aggiungi } 1 \rightarrow 18 \text{ dividi per tre } \rightarrow 18 : 3 \rightarrow x.$$

La soluzione dell'equazione è $x = 6$ e I. S. (insieme soluzione) è $\{6\}$.

✍ *Esercizio proposto:* 15.1

Per risolvere un'equazione più complessa come $\left(\frac{1}{2}x + 3\right) \cdot (-5 + x) = 12x + \frac{1}{2}x^2$ con $x \in \mathbb{Q}$, non possiamo applicare il procedimento precedente; potremmo procedere per tentativi, sostituendo all'incognita alcuni valori scelti a caso e verificando se il valore assunto dal primo membro risulta uguale a quello assunto dal secondo membro. È evidente però che questo procedimento raramente porterà a trovare tutte le soluzioni di un'equazione.

❑ **Osservazione** Per risolvere un'equazione, cioè per determinare tutte le eventuali soluzioni, si procede applicando i principi d'equivalenza.

15.2 Principi di equivalenza

Definizione 15.3. Due equazioni sono *equivalenti* se hanno lo stesso insieme soluzione.

Principio 15.1 (Primo principio di equivalenza). *Aggiungendo o sottraendo ad ambo i membri di un'equazione data uno stesso numero o una stessa espressione (definita per ogni valore dell'incognita) si ottiene un'equazione equivalente a quella data.*

Principio 15.2 (Secondo principio di equivalenza). *Moltiplicando o dividendo ambo i membri di un'equazione per uno stesso numero non nullo o per un'espressione non nulla (definita per ogni valore attribuito all'incognita) si ottiene un'equazione equivalente alla data.*

La forma più semplice (forma canonica) di un'equazione di primo grado in un'incognita è del tipo:

$$x = \text{ numero}.$$

L'insieme soluzione di una equazione di questo tipo è semplicemente:

$$\text{I. S.} = \{\text{numero}\}.$$

Per esempio, l'insieme delle soluzioni dell'equazione $x = -3$ è $\text{I. S.} = \{-3\}$.

I principi sopra enunciati permettono di trasformare qualunque equazione nella forma canonica che ha lo stesso insieme soluzione di quella assegnata.

15.3 Equazioni intere

In questo paragrafo vedremo come usare i principi d'equivalenza prima enunciati per condurre un'equazione alla forma canonica e dunque determinarne la soluzione.

Definizione 15.4. *Risolvere un'equazione* significa determinare il suo Insieme Soluzione.

Cominciamo con alcuni esempi.

Esempio 15.7. Applicazione del 1° principio di equivalenza.

a) $x - 5 = 3$: aggiungiamo 5 a entrambi i membri: $x - 5 + 5 = 3 + 5 \Rightarrow x = 8$, $\text{I. S.} = \{8\}$.
b) $3x = 2 + 2x$: sottraiamo $2x$ a entrambi i membri: $3x - 2x = 2 + 2x - 2x \Rightarrow x = 2$, $\text{I. S.} = \{2\}$.

Esempio 15.8. Applicazione del 2° principio di equivalenza.

a) $3x = 12$ dividiamo entrambi i membri per 3, si ha

$$\frac{3}{3}x = \frac{12}{3} \quad \Rightarrow \quad x = 4 \quad \rightarrow \quad \text{I. S.} = \{4\}.$$

b) $\frac{1}{2}x = 2$ moltiplichiamo entrambi i membri per 2, si ha

$$2 \cdot \frac{1}{2}x = 2 \cdot 2 \quad \Rightarrow \quad x = 4 \quad \rightarrow \quad \text{I. S.} = \{4\}.$$

Esempio 15.9. $-2x + 1 = 3x - 5$.

a) Sottraiamo 1 a entrambi i membri $-2x + 1 - 1 = 3x - 5 - 1$ quindi $-2x = 3x - 6$;
b) sottraiamo $3x$ a entrambi i membri $-2x - 3x = 3x - 3x - 6$ quindi $-5x = -6$;
c) dividiamo entrambi i membri per -5: $\frac{-5}{-5}x = \frac{-6}{-5} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{6}{5} \quad \rightarrow \quad \text{I. S.} = \left\{\frac{6}{5}\right\}$.

Esempio 15.10. $(x + 1) + 3 \cdot (2 + x) = 12x - 1$.

a) Svolgiamo i calcoli al primo e al secondo membro: $x + 1 + 6 + 3x = 12x - 1$;
b) sommiamo in ciascun membro i termini simili (se ce ne sono): $4x + 7 = 12x - 1$;

c) sottraiamo ad ambo i membri il monomio $12x$, applicando il primo principio: $4x - 12x + 7 = 12x - 1 - 12x$, sommiamo i monomi simili al primo e al secondo membro e otteniamo $-8x + 7 = -1$

d) sottraiamo ad ambo i membri il numero 7, applicando il primo principio e sommiamo i termini simili: $-8x + 7 - 7 = -1 - 7 \quad \Rightarrow \quad -8x = -8$;

e) dividiamo ambo i membri per -8, applicando il secondo principio: $\frac{-8}{-8}x = \frac{-8}{-8} \quad \Rightarrow$ $x = 1$.

L'equazione assegnata $(x + 1) + 3 \cdot (2 + x) = 12x - 1$ risulta equivalente all'ultima trovata $x = 1$, pertanto il suo insieme soluzione è $\text{I. S.} = \{1\}$.

❑ **Osservazione** La trasformazione di un'equazione nella forma canonica prevede che il termine con l'incognita sia collocato da una parte del segno uguale mentre dall'altra parte sia posto il termine numerico.

Enunciamo alcune *regole pratiche* che ci possono aiutare nella procedura risolutiva e che discendono direttamente dal primo principio d'equivalenza.

a) Spostando da un membro all'altro un addendo occorre cambiargli il segno; l'equazione ottenuta è equivalente a quella data.
$2x - 3 = 2$, per lasciare da sola la x al primo membro devo aggiungere $+3$ al primo e al secondo membro, ottengo $2x - 3 + 3 = 2 + 3$ da cui $2x = 2 + 3$.
L'effetto che si ha è che si è spostato il -3 al secondo membro cambiandolo di segno $(+3)$.

b) Se in entrambi i membri dell'equazione compare uno stesso addendo con lo stesso segno, esso può essere cancellato da entrambi i membri: l'equazione che si ottiene è equivalente a quella data.
Infatti: $2x - 3 + x = 2 + x$. La x che sta al secondo membro va portata al primo, cambiandola di segno $2x - 3 + x - x = 2$ da cui $2x - 3 = 2$.
L'effetto che si ha è che si possono eliminare le due x che stanno una al primo membro e una al secondo membro.

c) Se il coefficiente dell'incognita è -1, l'equazione si presenta nella forma $-x = n$, si può cambiare di segno ai termini del primo e del secondo membro, per ottenere la forma $x = -n$ che è equivalente a quella data.
Cambiare di segno equivale a moltiplicare per -1 i due membri dell'equazione.
Infatti: $x - 3 = 2x + 1$. Dobbiamo portare $2x$ al primo membro e -3 al secondo membro, otteniamo $x - 2x = 3 + 1$ da cui $-x = 4$.
Poiché il coefficiente della x è negativo moltiplichiamo per -1 primo e secondo membro $-1 \cdot (-x) = -1 \cdot (4)$ da cui $x = -4$.

Esempio 15.11. Risolvi l'equazione $5x + 2 \cdot (3 - x) + 1 = -(4x - 1) + 2 \cdot (6 - x)$ applicando le regole pratiche sopra descritte.

a) svolgiamo i calcoli: $5x + 6 - 2x + 1 = -4x + 1 + 12 - 2x$;

b) eliminiamo i termini uguali che compaiono nei due membri:

$$5x + 6 \cancel{- 2x} \cancel{+ 1} = -4x \cancel{+ 1} + 12 \cancel{- 2x} \quad \Rightarrow \quad 5x + 6 = -4x + 12;$$

c) spostiamo il monomio $-4x$ del secondo membro a sinistra del segno uguale e il numero $+6$ da sinistra a destra, ottenendo: $5x + 4x = -6 + 12$;
d) sommando i termini simili nei due membri, otteniamo $9x = +6$ da cui, dividendo per 9 ambo i membri, si ottiene

$$x = \frac{2}{3} \quad \to \quad \text{I. S.} = \left\{\frac{2}{3}\right\}.$$

✍ *Esercizi proposti:* 15.2, 15.3, 15.4, 15.5, 15.6, 15.7, 15.8, 15.9, 15.10, 15.11, 15.12, 15.13, 15.14, 15.15

15.3.1 Equazioni in cui l'incognita compare con grado maggiore di uno

Esempio 15.12. $(2x + 1) \cdot (x - 2) = 2 \cdot (x + 1)^2 - 5x$.

Prima di iniziare la procedura risolutiva analizziamo i membri dell'equazione: al primo membro compare il prodotto di due polinomi di primo grado, nel secondo il quadrato di un binomio di primo grado, pertanto l'incognita comparirà a grado due. Apparentemente l'equazione è di secondo grado. Iniziamo la procedura risolutiva:

a) svolgiamo i calcoli e otteniamo:

$$2x^2 - 4x + x - 2 = 2x^2 + 4x + 2 - 5x \Rightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 2x^2 - x + 2;$$

b) applichiamo le regole pratiche eliminando i monomi uguali con l'incognita al secondo grado e otteniamo $-3x + x = +2 + 2$.

Abbiamo ottenuto un'equazione di primo grado; puoi procedere da solo e determinare la forma canonica e l'I. S..

✍ *Esercizi proposti:* 15.16, 15.17, 15.18, 15.19, 15.20, 15.21, 15.22

15.3.2 Equazioni in cui l'incognita scompare

Esempio 15.13. $\frac{4}{5} - \frac{x}{2} = \frac{2 - 5x}{10}$.

a) Calcoliamo il mcm tra i denominatori: in questo caso $\text{mcm}(5, 2, 10) = 10$;
b) moltiplichiamo per 10 ambo i membri dell'equazione: $10\left(\frac{4}{5} - \frac{x}{2}\right) = 10\left(\frac{2 - 5x}{10}\right)$;
c) eseguiamo i calcoli: $8 - 5x = 2 - 5x$;
d) applichiamo la regola pratica: $-5x + 5x = 2 - 8$ i monomi in x si annullano!
e) sommando i monomi simili si ottiene: $0 \cdot x = -6$.

Il coefficiente dell'incognita è zero; non possiamo applicare il secondo principio e dividere ambo i membri per zero. D'altra parte non esiste nessun numero che moltiplicato per zero dia come prodotto -6. Quindi I. S. $= \emptyset$, l'equazione risulta impossibile.

Esempio 15.14. $\frac{x}{6} - \frac{2x}{3} = -\frac{x}{2}$.

a) Calcoliamo il mcm tra i denominatori: in questo caso $\text{mcm}(6, 3, 2) = 6$.
b) moltiplichiamo per 6 ambo i membri dell'equazione: $6\left(\frac{x}{6} - \frac{2x}{3}\right) = 6\left(-\frac{x}{2}\right)$;
c) eseguiamo i calcoli: $x - 4x = -3x$;
d) applicando il primo principio si ottiene $0 \cdot x = 0$.

Il coefficiente dell'incognita è zero; non possiamo applicare il secondo principio e dividere ambo i membri per zero. D'altra parte per la proprietà della moltiplicazione qualunque numero moltiplicato per zero dà come prodotto zero. Quindi $\text{I. S.} = \mathbb{Q}$, l'equazione è indeterminata (identità).

15.4 Equazioni a coefficienti frazionari

Vediamo, illustrando qualche esempio, come si procede.

Esempio 15.15. $\frac{2}{3}x + 4 - \frac{1}{2} + 2x = \frac{x+2}{3} - \frac{5}{2}x + 1$.
Sappiamo che il secondo principio d'equivalenza ci permette di moltiplicare ambo i membri per uno stesso numero diverso da zero per ottenere un'equazione equivalente alla data.

a) Calcoliamo il mcm tra i denominatori: in questo caso $\text{mcm}(2, 3) = 6$;
b) moltiplichiamo per 6 ambo i membri dell'equazione:

$$6\left(\frac{2}{3}x + 4 - \frac{1}{2} + 2x\right) = 6\left(\frac{x+2}{3} - \frac{5}{2}x + 1\right);$$

c) eseguiamo i calcoli: $4x + 24 - 3 + 12x = 2x + 4 - 15x + 6$.

I coefficienti dell'equazione sono ora numeri interi, puoi procedere da solo come abbiamo visto negli esempi precedenti. Il risultato è $x = -\frac{11}{29}$.

✍ *Esercizi proposti:* 15.23, 15.24

Riassumendo, quando si ha un'equazione del tipo $A \cdot x = B$ con A e B numeri razionali è la forma canonica dell'equazione di primo grado in una incognita a coefficienti numerici.
Possono presentarsi i seguenti casi:

➡ se $A \neq 0$ possiamo applicare il secondo principio d'equivalenza dividendo ambo i membri per A quindi $\text{I. S.} = \left\{\frac{B}{A}\right\}$. L'equazione è determinata.

➡ se $A = 0$ non possiamo applicare il secondo principio d'equivalenza e dividere ambo i membri per A e si presentano due casi:

- $B = 0$ allora $\text{I. S.} = \mathbb{Q}$. L'equazione è indeterminata.
- $B \neq 0$ allora $\text{I. S.} = \emptyset$. L'equazione è impossibile.

Lo schema precedente si può rappresentare anche con un grafo ad albero:

- $A \cdot x = B$
  - $A \neq 0 \to$ equazione determinata e $\text{I. S.} = \left\{ \dfrac{B}{A} \right\}$
  - $A = 0$
    - $B = 0 \to$ equazione indeterminata e $\text{I. S.} = \mathbb{Q}$
    - $B \neq 0 \to$ equazione impossibile e $\text{I. S.} = \emptyset$

✍ *Esercizi proposti:* 15.25, 15.26, 15.27, 15.28, 15.29, 15.30, 15.31, 15.32, 15.33, 15.34, 15.35, 15.36, 15.37, 15.38, 15.39, 15.40, 15.41, 15.42, 15.43