**Prof. Dr. H. Brenner** **Universität Osnabrück SoSe 2026**

# Algebraische Zahlentheorie

## Arbeitsblatt 14

### Aufgaben

**Aufgabe 14.1.** Es sei $A_D$ ein quadratischer Zahlbereich und sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal $\neq 0$ in $A_D$. Zeige, dass das konjugierte Ideal $\overline{\mathfrak{a}}$ in der Klassengruppe das Inverse zu $\mathfrak{a}$ ist.

**Aufgabe 14.2.** Es sei $R$ ein Dedekindbereich und es seien $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{g}$ gebrochene Ideale. Zeige, dass die beiden gebrochenen Ideale genau dann die gleiche Klasse in der Divisorenklassengruppe definieren, wenn sie als $R$-Moduln isomorph sind.

**Aufgabe 14.3.** Es sei $R$ ein Dedekindbereich. Zeige, dass ein exakter Komplex

$$1 \longrightarrow R^\times \longrightarrow Q(R)^\times \longrightarrow \operatorname{Div}(R) \longrightarrow \operatorname{DKG}(R) \longrightarrow 0$$

vorliegt.

**Aufgabe 14.4.** Interpretiere Lemma 14.4 für die folgenden Fälle:

(1) $S$ wird durch ein Element erzeugt.
(2) $S = R \setminus \{0\}$
(3) $R_S$ ist faktoriell.
(4) $S = R \setminus \mathfrak{p}$.

**Aufgabe 14.5.** Es sei $R$ ein Zahlbereich vom Grad $d$. Zeige, dass die Norm einen natürlichen Gruppenhomomorphismus

$$N\colon\ \operatorname{DKG}(R) \longrightarrow \mathbb{Q}_+^\times/T$$

definiert, wobei $T$ die Menge der Beträge von Normen von Elementen $\neq 0$ aus $R$ bezeichnet. Zeige ferner, dass $\left(\mathbb{Q}_+^\times\right)^d \subseteq T$ gilt.

**Aufgabe 14.6.***

Es sei $S$ der ganze Abschluss von $\mathbb{Z}$ in der Körpererweiterung

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}[\sqrt{-5}, \sqrt{2}].$$

(1) Zeige, dass $z = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{-10}}{2}$ zu $S$ gehört.
(2) Zeige $\sqrt{-5} \in \mathbb{Z}[z]$.
(3) Zeige $\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}[z]$.
(4) Bestimme eine Ganzheitsgleichung für $z$ über $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.
(5) Bestimme eine Ganzheitsgleichung für $z$ über $\mathbb{Z}$.

**Aufgabe 14.7.***
Wir betrachten die Ringerweiterungen

$$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = R \subseteq \mathbb{Z}[\sqrt{-5}, \mathrm{i}] \subseteq T,$$

wobei $T$ den ganzen Abschluss von $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}[\sqrt{-5}, \mathrm{i}]$ bezeichnet. Zeige, dass das Erweiterungsideal zu

$$\mathfrak{p} = \big(2, 1+\sqrt{-5}\big)$$

in $T$ ein Hauptideal wird.

**Aufgabe 14.8.** Erkläre „geometrisch“, warum die Primideale der Form $(X-a, Y-b)$ des Ringes $\mathbb{R}[X,Y]/(X^2+Y^2-1)$ keine Hauptideale sind.

**Aufgabe 14.9.** Es sei $R = \mathbb{R}[X,Y]/(X^2+Y^2-1)$. Zeige, dass alle Primideale von $R$ der Form $(X-a, Y-b)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ die gleiche Divisorklasse festlegen.

**Aufgabe 14.10.** Zeige, dass der Ringhomomorphismus

$$K[X,Y]/(X^2+Y^2-1) \longrightarrow K[U,V]/(U^2+V^2-1),\ (X,Y) \longmapsto (U^2-V^2, 2UV),$$

über jedem Körper der Charakteristik $\neq 2$ ganz ist.

**Aufgabe 14.11.** Wir betrachten den kommutativen Ring

$$R = \mathbb{R}[X,Y]/(X^2+Y^2-1)$$

und das Ideal $\mathfrak{p} = (X, Y-1)$ aus Beispiel 14.7. Zeige, dass der Ring $R_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}[X,Y]/(X^2+Y^2-1)$ ein Hauptidealbereich ist und bestimme einen Erzeuger für das Erweiterungsideal $(X, Y-1)R_{\mathbb{C}}$.

## Abbildungsverzeichnis