

Analysis III**Arbeitsblatt 64****Aufwärmaufgaben**

AUFGABE 64.1. Zeige, dass ein äußeres Maß die Subadditivitätseigenschaft für beliebige abzählbare Vereinigungen besitzt.

AUFGABE 64.2. Zeige, dass es für jedes $\epsilon > 0$ eine Familie ϵ_n , $n \in \mathbb{N}$, von positiven reellen Zahlen mit $\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \leq \epsilon$ gibt.

AUFGABE 64.3. Es sei M eine Menge, \mathcal{P} ein Präring auf M ,

$$\mu: \mathcal{P} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

ein äußeres Maß auf M und $\tilde{\mu}$ die Fortsetzung von μ auf die Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$. Zeige, dass für jede Teilmenge $T \subseteq M$ die Beziehung $\tilde{\mu}(S) \leq \tilde{\mu}(S \cap Z) + \tilde{\mu}(S \cap (M \setminus Z))$ gilt.

AUFGABE 64.4. Welche „vertrauten geometrischen Figuren“ kann man als (verallgemeinerte) Quader in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ oder in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ auffassen?

AUFGABE 64.5. Es sei X ein Hausdorff-Raum. Zeige, dass die Diagonale

$$\Delta = \{(x, y) \in X \times X \mid x = y\}$$

eine messbare Teilmenge im Produktraum $X \times X$ ist.

AUFGABE 64.6. Es seien M und N zwei Mengen und sei $T \subseteq M \times N$ eine Teilmenge. Zu $x \in M$ sei $T(x) = \{y \in N \mid (x, y) \in T\}$. Zeige, dass $\{x\} \times T(x)$ die Faser der Hintereinanderschaltung

$$T \hookrightarrow M \times N \xrightarrow{p_1} M$$

über x ist.

AUFGABE 64.7. Es seien (M, \mathcal{A}) und (N, \mathcal{B}) zwei Messräume, die nicht leer seien und wobei die einelementigen Teilmengen messbar seien. Alle Teilmengen von $M \times N$ seien mit der durch $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ induzierten σ -Algebra versehen. Es sei $S \subseteq M$. Zeige, dass folgende Eigenschaften äquivalent sind.

- (1) S ist eine messbare Teilmenge von M .
- (2) Es gibt ein $y \in N$ derart, dass $S \times \{y\} \subseteq M \times \{y\}$ messbar ist.
- (3) Für alle $y \in N$ ist $S \times \{y\} \subseteq M \times \{y\}$ messbar.
- (4) Es gibt ein $y \in N$ derart, dass $S \times \{y\}$ messbar in $M \times N$ ist.
- (5) Für alle $y \in N$ ist $S \times \{y\}$ messbar in $M \times N$.

AUFGABE 64.8. Es seien M, N_1, N_2 Messräume und es seien $f_1: M \rightarrow N_1$ und $f_2: M \rightarrow N_2$ messbare Abbildungen. Zeige, dass auch die Abbildung

$$(f_1, f_2): M \longrightarrow N_1 \times N_2, x \longmapsto (f_1(x), f_2(x)),$$

messbar ist.

AUFGABE 64.9. Es seien X und Y zwei topologische Räume mit abzählbarer Topologie und mit den zugehörigen σ -Algebren der Borelmengen $\mathcal{B}(X)$ und $\mathcal{B}(Y)$. Zeige, dass das Mengensystem der Borelmengen auf dem Produktraum $X \times Y$ mit dem Produkt von $\mathcal{B}(X)$ und $\mathcal{B}(Y)$ übereinstimmt.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 64.10. (4 Punkte)

Es sei \mathcal{P} ein Präring auf \mathbb{R} , der die Intervalle $[a, b]$, $a < b$, enthalte, und es sei μ ein äußeres Maß darauf, das auf diesen Intervallen den Wert $b - a$ besitze. Zeige, dass die Fortsetzung dieses äußeren Maßes auf allen abzählbaren Teilmengen von \mathbb{R} den Wert 0 besitzt.

AUFGABE 64.11. (4 Punkte)

Begründe die einzelnen Abschätzungen in der Abschätzungskette im Beweis zu Lemma 64.3.

Gehe dabei folgendermaßen vor.

- (1) Legen Sie auf Ihrer Benutzerseite (oder Gruppenseite) eine Unterseite an, indem Sie dort die Zeile

[[/Fortsetzung von äußerem Maß/Vergleichskette/Einzelbegründungen]]

 schreiben (d.h. Bearbeiten, Schreiben, Abspeichern; das / vorne ist wichtig).
- (2) Es erscheint ein roter Link. Gehen Sie auf den roten Link und geben Sie dort

{{:Fortsetzung von äußerem Maß/Vergleichskette/Begründungsfenster}}

 ein.

- (3) Es erscheint die Abschätzungskette. Wenn Sie auf eines der Größergleich-Zeichen gehen, erscheint ein roter Link. Gehen Sie auf diesen roten Link und geben Sie dort die Begründung für diese Abschätzung ein.
- (4) Die Abgabe erfolgt online, indem Sie auf der Abgabeseite (die Sie von der Kursseite auf Wikiversity aus erreichen können) einen Link zu Ihrer Lösung hinterlassen, also dort
[[Ihr Benutzername/Fortsetzung von äußerem Maß/Vergleichskette/Einzelbegründungen]]
hinschreiben.

AUFGABE 64.12. (3 Punkte)

Es seien $(M_1, \mathcal{A}_1), \dots, (M_n, \mathcal{A}_n)$ Mengen mit darauf erklärten σ -Algebren. Zeige, dass die Produkt- σ -Algebra $\mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n$ die kleinste σ -Algebra auf $M_1 \times \dots \times M_n$ ist, für die alle Projektionen messbar sind.

AUFGABE 64.13. (3 Punkte)

Bestimme das Urbild der Einheitskreisscheibe $E \subseteq \mathbb{R}^2$ unter den Inklusionsabbildungen

$$\iota_y: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, x \longmapsto (x, y).$$