Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2019/2020**

Bündel, Garben und Kohomologie

Arbeitsblatt 1

In der folgenden Aufgabe verwenden wir die Schreibweise

$$D(r) = \left\{ (r,s,t) \in \mathbb{R}^3 \mid r \neq 0 \right\}.$$

Aufgabe 1.1. Bestimme zum Vektorbündel

$$\begin{aligned} L &= \{(r,s,t,u,v,w) \mid ru+sv+tw=0,\, (r,s,t) \neq (0,0,0)\} \\ &\subseteq \mathbb{R}^3 \setminus \{0,0,0\} \times \mathbb{R}^3 \\ &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0,0,0\} \end{aligned}$$

lineare Trivialisierungen oberhalb von $D(r)$, $D(s)$ und $D(t)$, also von r,s,t abhängige Basen oberhalb von $D(r)$ u.s.w. Bestimme die Basiswechselabbildungen auf $D(rs) = D(r) \cap D(s)$.

Aufgabe 1.2. Bestimme zum Vektorbündel

$$\begin{aligned} L &= \{(r,s,t,u,v,w) \mid ru+sv+tw=0,\, (r,s,t) \neq (0,0,0)\} \\ &\subseteq \mathbb{R}^3 \setminus \{0,0,0\} \times \mathbb{R}^3 \\ &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0,0,0\} \end{aligned}$$

diejenigen Parameter (r,s,t), für die der Vektor $(3,\ 7,\ 4)$ zur Faser $L_{(r,s,t)}$ gehört.

Aufgabe 1.3. Zeige, dass in Beispiel 1.2 auf $D(r)$ durch

$$u(r,s,t) = \frac{t}{r}\begin{pmatrix} s \\ -r \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{s}{r}\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -r \end{pmatrix}$$

ein (von den Parametern abhängiger) Vektor im Lösungsraum definiert ist, der auf ganz $\mathbb{R}^3$ polynomial fortsetzbar ist, obwohl die Koeffizientenfunktionen $\frac{t}{r}$ und $-\frac{s}{r}$ nur auf $D(r)$ definiert sind und nicht fortsetzbar sind. Ist $u(r,s,t)$ überall Teil einer Basis?

Aufgabe 1.4. Bestimme in Beispiel 1.3 die Parameter, für die der Lösungsraum $L_{(a,b,c,d,e,f)}$ ein-, zwei- oder dreidimensional ist. Sind diese Mengen offen oder abgeschlossen?

Aufgabe 1.5. Zeige, dass über einem beliebigen Körper K zu linear unabhängigen Vektoren $u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$ das Kreuzprodukt $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$ zusammen mit u und v keine Basis des K^3 bilden müssen.

Aufgabe 1.6. Betrachte den topologischen Raum

$$Y := \left\{(s,t,u,v) \in \mathbb{R}^4 \mid su + tv = 1\right\}$$

mit der Projektion

$$p\colon\, Y \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} = X,\ (s,t,u,v) \longmapsto (s,t).$$

(1) Zeige, dass jede Faser von p homöomorph zu einer reellen Geraden ist.
(2) Zeige, dass durch

$$\varphi(s,t) = (s,t,u(s,t),v(s,t)) = \left(s,t,\frac{s}{s^2+t^2},\frac{t}{s^2+t^2}\right)$$

eine stetige Abbildung $\varphi\colon\, X \to Y$ mit

$$p \circ \varphi = \mathrm{Id}_X$$

gegeben ist.
(3) Definiere einen Homöomorphismus zwischen Y und $X \times \mathbb{R}$.
(4) Zeige, dass es keine polynomiale Abbildung $\psi\colon\, X \to Y$ mit

$$p \circ \psi = \mathrm{Id}_X$$

gibt.

Aufgabe 1.7. Zeige, dass ein reelles Vektorbündel über einem Punkt (also einem einpunktigen topologischen Raum) das gleiche ist wie ein reeller endlichdimensionaler Vektorraum.

Aufgabe 1.8. Es sei $p\colon\, V \to X$ ein reelles Vektorbündel über einem topologischen Raum X. Zeige, dass V genau dann ein Hausdorffraum ist, wenn X ein Hausdorffraum ist.

Aufgabe 1.9. Es sei X ein topologischer Raum. Zeige, dass man die Identität $\mathrm{Id}_X\colon\, X \to X$ als ein reelles Vektorbündel vom Rang 0 auffassen kann.

Aufgabe 1.10. Es sei X ein topologischer Raum. Zeige, dass ein Homomorphismus der (trivialen) Vektorbündel

$$\varphi\colon\ X \times \mathbb{R}^n \longrightarrow X \times \mathbb{R}^m$$

das gleiche ist wie eine $m \times n$-Matrix, der Einträge stetige Funktionen von X nach $\mathbb{R}$ sind.

Aufgabe 1.11. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Zeige, dass durch das totale Differential in der Form

$$U \times \mathbb{R}^n \longrightarrow U \times \mathbb{R}^m,\ (x, v) \longmapsto (x, (Df)_x(v)),$$

ein Homomorphismus des Vektorbündels $U \times \mathbb{R}^n$ in das Vektorbündel $U \times \mathbb{R}^m$ gegeben ist.

Aufgabe 1.12. Zeige, dass es eine Homöomorphie des Tangentialbündels T_{S_1} der 1-Sphäre S^1 mit dem Produkt $S^1 \times \mathbb{R}$ gibt.

Was hat die vorstehende Aufgabe mit Beispiel 1.1 zu tun?

Aufgabe 1.13. Man gebe ein Beispiel einer differenzierbaren Kurve

$$\gamma\colon\ [0, 1[\longrightarrow S^1$$

derart, dass der Grenzwert $\lim_{t \to 1} \gamma(t)$ existiert, dass aber der Grenzwert $\lim_{t \to 1} (\gamma(t), T_t(\gamma)(1))$ in TS^1 nicht existiert.

Aufgabe 1.14. Zeige, dass die Abbildung

$$TS^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ ((a, b), t(-b, a)) \longmapsto (a, b) + t(-b, a),$$

für jeden Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ außerhalb der Einheitskreisscheibe zwei Urbildpunkte, auf dem Einheitskreis einen Urbildpunkt und innerhalb der offenen Einheitskreisscheibe keinen Urbildpunkt besitzt. Man interpretiere dies geometrisch.

Aufgabe 1.15. Man gebe ein Beispiel einer injektiven differenzierbaren Abbildung

$$\varphi\colon\ M \longrightarrow N$$

zwischen zwei differenzierbaren Mannigfaltigkeiten M und N derart, dass die zugehörige Tangentialabbildung

$$T(\varphi)\colon\ TM \longrightarrow TN$$

nicht injektiv ist.

Aufgabe 1.16. Man gebe ein Beispiel einer surjektiven differenzierbaren Abbildung

$$\varphi\colon M \longrightarrow N$$

zwischen zwei differenzierbaren Mannigfaltigkeiten M und N derart, dass die zugehörige Tangentialabbildung

$$T(\varphi)\colon TM \longrightarrow TN$$

nicht surjektiv ist.

Aufgabe 1.17. Seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten und es sei $\varphi\colon M \to N$ eine differenzierbare Abbildung. Zeige, dass die zugehörige Tangentialabbildung

$$T(\varphi)\colon TM \longrightarrow TN$$

stetig ist.

Abbildungsverzeichnis