Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2021**

Mathematik für Anwender I

Arbeitsblatt 47

Übungsaufgaben

Aufgabe 47.1. Bestimme das Minimum der Funktion

$$f(x) = x^2 + bx + c$$

in Abhängigkeit von b und c. Was hat dies mit partiellen Ableitungen zu tun?

Aufgabe 47.2. Bestimme die partiellen Ableitungen der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto x^2y^5 - \cos\left(x^3 - y^2\right).$$

Aufgabe 47.3. Bestimme die partiellen Ableitungen der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\, (x,y,z) \longmapsto \left(\sqrt{x^2y^2+3} + x^3yz^2,\, x^{11} - x^2y^3e^{xz} - \ln\left(x^2+y^2+x^4z^6+1\right)\right).$$

Aufgabe 47.4. Bestimme die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\, (x,y) \longmapsto \left(x^3y - x^2, x^4y^2 - 3xy^3 + 5y\right).$$

Aufgabe 47.5. Bestimme die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\, (x,y,z) \longmapsto \left(x^2yz^3 - \sin x, \exp(x^4y) - 2x^2z^3\cos(xy^2z)\right).$$

Aufgabe 47.6. Bestimme die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\right\} \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto \frac{x}{y}.$$

Aufgabe 47.7.*

Bestimme die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^3,\, (x,y) \longmapsto \left(\frac{\sin x}{x^2+y^4}, \frac{x^2y}{x^2+y^2}, \ln(x^2+y^2)\right),$$

in jedem Punkt.

Aufgabe 47.8. Beschreibe die Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\, z \longmapsto z^2,$$

in reellen Koordinaten und bestimme die Jacobi-Matrix. Ebenso für z^3, z^4, z^5.

Aufgabe 47.9. Bestimme sämtliche höheren Richtungsableitungen der Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto x^2y^3 - x^3y,$$

die sich mit den beiden Standardrichtungen $(1,0)$ und $(0,1)$ ausdrücken lassen.

Aufgabe 47.10.*

Es sei $\lambda \in \mathbb{R}$

$$f(t,x) = \sin(\lambda x)\, e^{-\lambda^2 t}.$$

Zeige, dass f die *Wärmeleitungsgleichung*

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}$$

erfüllt.

Aufgabe 47.11. Zeige, dass eine Polynomfunktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ beliebig oft stetig differenzierbar ist.

Aufgabe 47.12.*

Man gebe ein Beispiel für eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die im Nullpunkt partiell differenzierbar ist und dort die Eigenschaft besitzt, dass die Richtungsableitung in keine Richtung $v = (a,b)$ mit $a, b \neq 0$ existiert.

In der folgenden Aufgabe ist

$$\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{C}.$$

Die partiellen Ableitungen im komplexen Fall sind wie im reellen Fall zu bestimmen, man verwende die gleichen Regeln für Polynome.

Aufgabe 47.13.*

Es seien P, Q zwei komplexe (bzw. reelle) Polynome und

$$\varphi\colon \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}^2,\ (x,y) \longmapsto (P(x,y), Q(x,y)),$$

die zugehörige Abbildung. Die Determinante der Jacobi-Matrix zu φ sei in jedem Punkt $P \in \mathbb{K}^2$ von 0 verschieden.

(1) Zeige, dass bei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ die Determinante konstant ist.
(2) Zeige durch ein Beispiel, dass bei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ die Determinante nicht konstant sein muss.

Aufgabe 47.14. Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine k-fach stetig differenzierbare Funktion, $P \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt und $v \in \mathbb{R}^n$. Es sei

$$h(t) := f(P + tv).$$

Zeige, dass h k-fach stetig differenzierbar ist und dass

$$h^{(k)}(0) = D_v \cdots D_v f(P)$$

(mit k Richtungsableitungen) gilt.

Aufgabe 47.15.*

Zeige für Polynomfunktionen $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ direkt, dass

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

gilt.

Aufgabe 47.16. Zeige, dass keine partiell differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ existiert, so dass

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = xy \text{ und } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = y^2$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt.

Aufgabe 47.17. Es seien V und W endlichdimensionale, $\mathbb{R}$-Vektorräume $G \subseteq V$ offen und $\varphi\colon G \to W$ eine n-mal stetig differenzierbare Abbildung. Es sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Auswahl von n Vektoren aus V. Zeige, dass dann für jede Permutation $\sigma \in S_n$ die Gleichheit

$$D_{v_n}(...D_{v_2}(D_{v_1}\varphi)\ldots) = D_{v_{\sigma(n)}}(...D_{v_{\sigma(2)}}(D_{v_{\sigma(1)}}\varphi)\ldots)$$

gilt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 47.18. (3 Punkte)

Bestimme die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \longmapsto \left(\sin xy, x^2y^3z^4 - y\sinh z, xy^2z + 5\right).$$

Aufgabe 47.19. (3 Punkte)

Bestimme die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto xy^3 - x^2y^2 - 4y^2.$$

Berechne die Richtungsableitung dieser Abbildung in einem Punkt (x,y) in Richtung $(2,5)$. Bestätige, dass sich diese Richtungsableitung auch ergibt, wenn man die Jacobi-Matrix auf den Vektor $(2,5)$ anwendet.

Aufgabe 47.20. (4 Punkte)

Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion. Zeige, dass es ein $k \in \mathbb{N}$ derart gibt, dass sämtliche k-ten Richtungsableitungen 0 sind.

Aufgabe 47.21. (6 Punkte)

Es sei

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto \varphi(x,y),$$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, für die in jedem Punkt $P \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\varphi(P) = 0$$

gelte. Zeige, dass es dann Funktionen $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derart gibt, dass

$$\varphi(x, y) \,=\, f(x) + g(y)$$

gilt.

Aufgabe 47.22. (6 Punkte)

Zeige, dass die Funktion $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \text{ für } (x, y) \neq (0, 0)\,, \\ 0 \text{ für } (x, y) = (0, 0)\,, \end{cases}$$

zweimal partiell differenzierbar ist, und dass

$$D_1 D_2 f(0, 0) \,\neq\, D_2 D_1 f(0, 0)$$

gilt.

Abbildungsverzeichnis