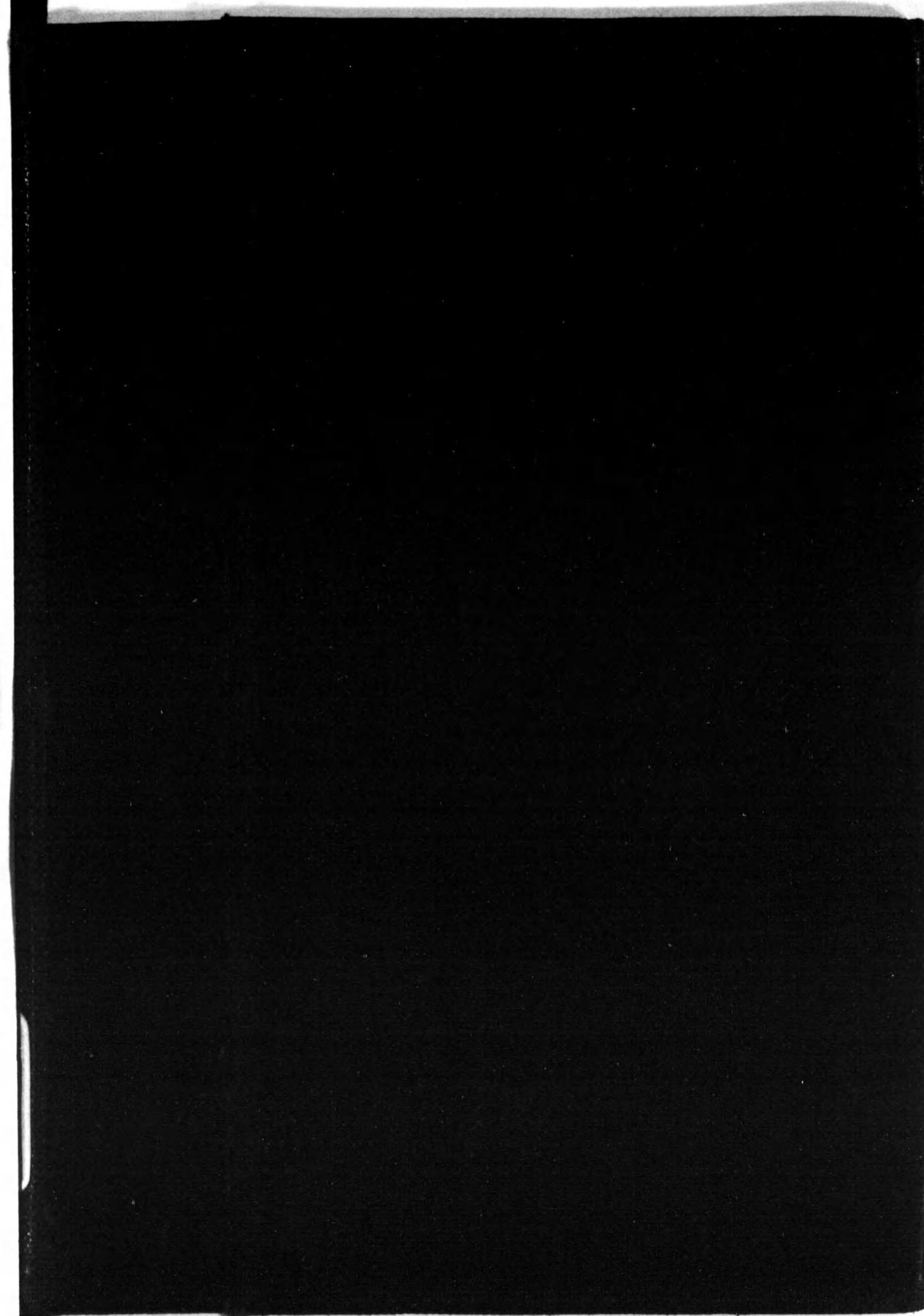
始



中等教育用

平面幾何學

理學士 飯島正之助
三上義夫
共編

水野書店發行
明治四十年十二月

目 錄

頁

第一章　緒論

1. **立體**. 凡テ物體ニ就キテハ,之ヲ組ミ立ツル物質ノ如何ヲ顧ミズ,其ノ形狀ト大小ト位置トノミヲ考フルコトヲ得. 物體ヲ此ノ如クニ考ヘタルモノヲ**立體** (solid) ト稱ス.

物體ハ各々空間ノ一部分ヲ充塞ス；而シテ一物體ト,其物體ガ充塞スル所ノ空間トハ,形狀,大小及ビ位置ニ於テ全ク相一致シ,唯,彼ハ特殊ノ物質ヨリ成ルニ,此ハ全ク物質ヲ有セザルノ差異アルノミ. 故ニ,物質ヲ顧ミザル物體即チ

立體トハ空間ノ一部分ナリ

ト謂フコトヲ得.

立體ニハ長サト幅ト厚サトアリ.

2. **面**. 立體ノ界,即チ空間内ニ於テ物體ノ充塞スル部分ト之ニ接スル他ノ部分トノ界ヲ**面**(surface)ト稱ス.

面ハ空間ノ相接スル二ツノ部分ノ界ナルガ故ニ,少シモ空間ヲ充塞スルコトナシ; 又タ其ノ界スル所ノ空間ノ何レニモ屬スルコトナシ. 從ヒテ,面ニハ厚サナシ,長サト幅トアルノミ,

例ヘバ茲ニがらすノこつぷアリ. 此こつぷハ空間ノ一部分ヲ充塞シ,其ノ外ノ空間ハ空氣アリテ之ヲ充塞セリ. がらすノ在ル部分ト空氣ノ在ル部分トハ相接スルガ故ニ,其ノ界タル面ニハ厚サアルコト能ハズ,故ニ其面ハがらすニモ空氣ニモ屬セズ. 唯,見易カランガ爲メニ,之ヲがらすノ面ト稱スレドモ,空氣ノ面ト稱ストモ亦不可ナシ.

今,此こつぷニ水ヲ入ルレバ,こつぷト水トノ接スル界モ面ニシテ,之ヲこつぷノ面ト稱シ,又同ジク水ノ面トモ稱ス. 又水ノ上部ハ空氣ト相接ス. 此水ト空氣トノ界モ面ニシテ之ヲ水面ト稱スレドモ,空氣ノ面ト稱ストモ不可ナシ.

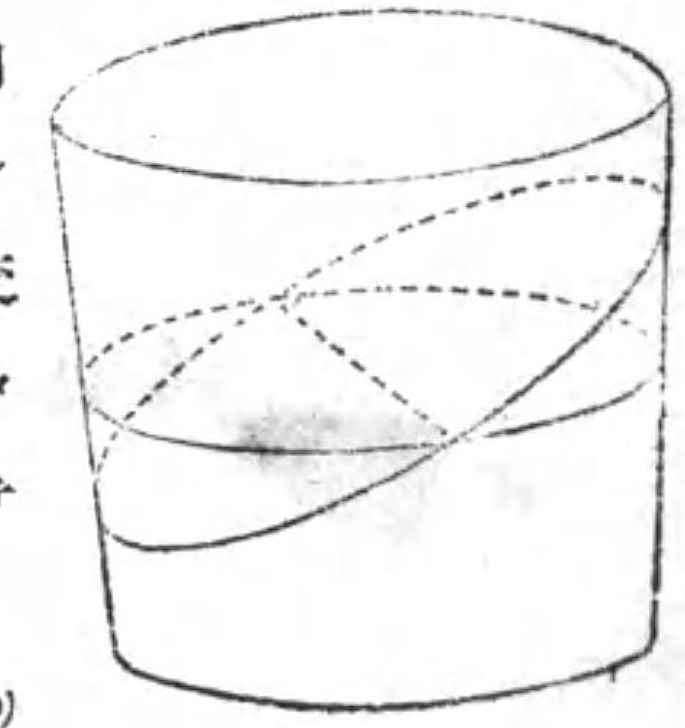
3. **線**. 面ノ界,即チ面ノ一部分ト之ニ接スル他ノ部分トノ界ヲ**線**(line)ト稱ス.

線ハ面ノ相接スル二ツノ部分ノ界ナルガ故ニ,線ニハ幅モ厚サモナシ,唯,長サアルノミ.

前條ノ例ニ於テ,こつぷノ内面ハ水ニ接スル下部ト,空氣ニ接スル上部トニ分レ,此兩部ハ相接セリ,故ニ此兩部ノ界タル線ニハ幅モ厚サモナシ,唯長サアルノミ.

4. **點**. 線ノ界,即チ線ノ一部分ト之ニ接スル他ノ部分トノ界ヲ**點**(Point)ト稱ス.

點ニハ長サモ幅モ厚サモナシ,唯,位置アルノミ.



例ヘバ,前例ノこつぷニ於テ,之ヲ傾クレバ,其ノ内部ナル水ノ上面ニ接スル線ハ變ジテ,舊ノ線ト相交リ,互ニ二ツノ部分ニ分タル. 其兩部分ノ界ハ即チ點ナリ. 故ニ

點ハ二線ノ交ル所ナリトモ謂フコトヲ得.

又點ハ線ノ一部分ガ次ノ部分ニ接スル所,即チ其部分ノ終リナレバ,點ハ線ノ端ナリトモ謂フコトヲ得.

5. 點及び線の圖示. 點ヲ畫クニハ,如何ニ之ヲ小サクストモ,全ク大サナキコト能ハズ. 故ニ畫ケル點ハ眞ノ點(即チ幾何學上ノ點)ニ非ズ.然レドモ見易カランガ爲メニ,此ノ如キ點ヲ以テ眞ノ點ヲ表示スルヲ常トス.

線ニ就キテモ同樣ニテ,見易カランガ爲メニ幅アル實線又ハ點線ヲ以テ眞ノ線(即チ幾何學上ノ線)ヲ表示スルヲ常トス.

6. 直線,曲線. 線ニハ**直線** (straight line) 即チ眞直ナル線ト,**曲線** (curve) 即チ曲レル線トノ別アリ.

直線ハ次ノ如キ特徴ヲ有ス:

二點A,Bヲ結ビ付クル直線ハ唯一ツナリ,即チ直線ハ其ノ二點ニテ決定ス.

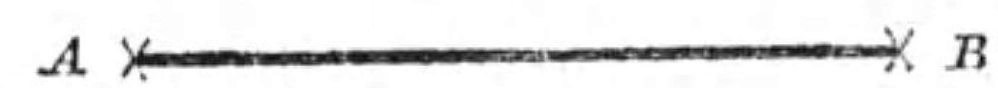
故ニ,一點ニ於テ交ル所ノ二直線ハ,再ビ他ノ點ニ於テ交ルコト能ハズ.

又二直線ハ,其ノ一部分ノミハ相合シ,他ノ部分ニ於テハ相離ルトイフコト能ハズ.

直線ナラザル線ハ總テ曲線ト稱ス.

7. 直線の呼び方. 二點間の距離

二點A,Bヲ結ビ付クル直線ヲ**直線AB**ト稱ス.



「直線ABノ長サ」トハAヨリBニ至ル長サニシテ,之ヲ其兩端A,B間ノ**距離** (distance) トモ稱ス.

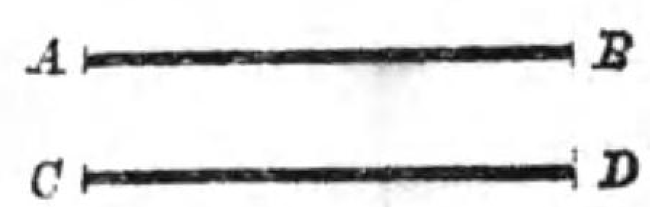
8. 直線の延長. 直線ABヲBノ方ニCマデ**延長スル** (produce) トキ,其延長シタル部分BCヲABノ**延長**ト稱ス.

直線ハ何レノ方ニ何ホドデモ延長スルコトヲ得.

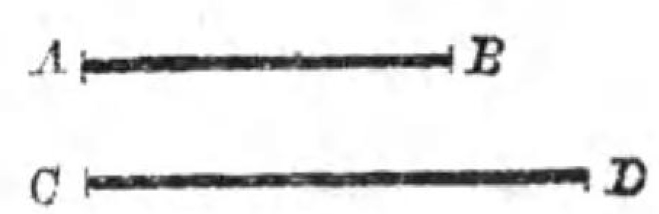
直線ト其延長トハ一直線ヲ成ス.

9. 直線の相等. 直線の大小.

直線ABヲ直線CDノ上ニ重ネテ,相合セシムルコトヲ得ルトキハ,此二線ハ**相等シ** equal ト云ヒ,之ヲ AB = CD ト書キ表ハス.



直線ABヲCDノ上ニ重ネ,AトCトヲ相合セシメテ見ルトキ,BガCDノ内ニ落ツレバ,ABハCDヨリ**小**ナリト云ヒ,之ニ反シテBガCDノ外ニ落ツレバ,ABハCDヨリ**大**ナリト云フ.



ABガCDヨリ大ナルコトハ AB > CD ト書キ,ABガCDヨリ小ナルコトハ AB < CD ト書キ表ハス.

10. 平面,曲面.

面ハ之ヲ**平面** plane 即チ平ラナル面ト,**曲面**即チ曲レル面トニ分ツコトヲ得.

平面ハ次ノ如キ特徴ヲ有ス:

一ツノ平面上ノ如何ナル二點ヲ結ビ付クル直線モ必ズ全ク其面ニ合ス.

平面ナラザル面ハ凡テ曲面ト稱ス.

11. 圖形. 幾何學. 平面幾何學.

點,線,面,立體及ビ此等ノ集合ヲ**圖形** figure ト稱ス.

幾何學**トハ圖形ニ就キテ論ズル學科ナリ.

平面幾何學トハ一平面上ノ圖形ノミニ就キテ論ズル學科ナリ.

**幾何學ノ原語(英語ニテハ Geometry, 獨語ニテハ Geometrie, 佛語ニテハ Géométrie)ハ二ツノ希臘語 (gē 及ビ metron) ヨリ出デ,土地測量法ノ義ナリ. 埃及ニ於テ土地測量ノ必要上ヨリ起レル學術ナルニ由リテ此名アルナリ.

我國ニ於テ幾何學ト稱スルハ支那ノ譯名ニ基ケルモノナリ. 明朝ノ末ニ當リ支那ノ學者ガ天主教ノ僧侶ト謀リ幾何學ノ鼻祖希臘人 Euclid ノ著セル幾何學書ヲ飜譯シ,之ヲ幾何原本ト名ケシヨリ,其名稱永ク行ハレテ,遂ニ今日ニ至レルナリ.

12. 公理. 定理.

幾何學ニ於テハ,若干ノ事項ヲ基礎トシ,此ヨリ推理ニ依リテ他ノ事項ヲ證明ス. 其基礎トスル所ノ事項ヲ**公理** axiom トシ,證明スル所ノ事項ヲ**定理** theorem ト稱ス.

既ニ證明ヲ經タル定理ハ之ヲ他定理ノ證明ニ引用スルコトヲ得.

公理ハ他ノ事項ニ依リテ之ヲ證明スルコトヲ得ザルモノトス.

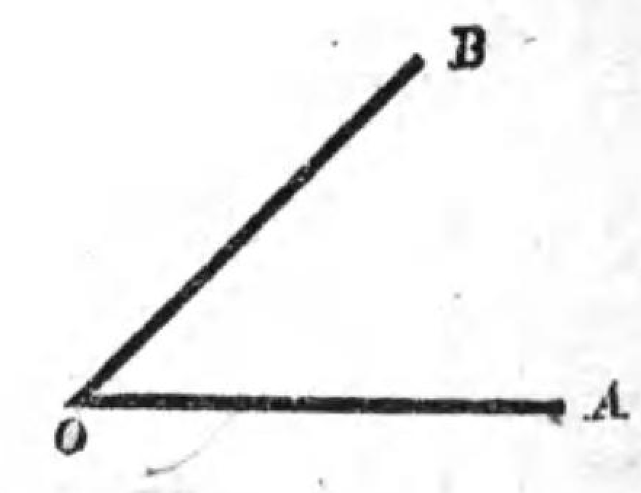
13. 幾何學に於て用ふる公理の一例:

A, B 相等シク, B,C 相等シケレバ,
A, C モ亦相等シ.

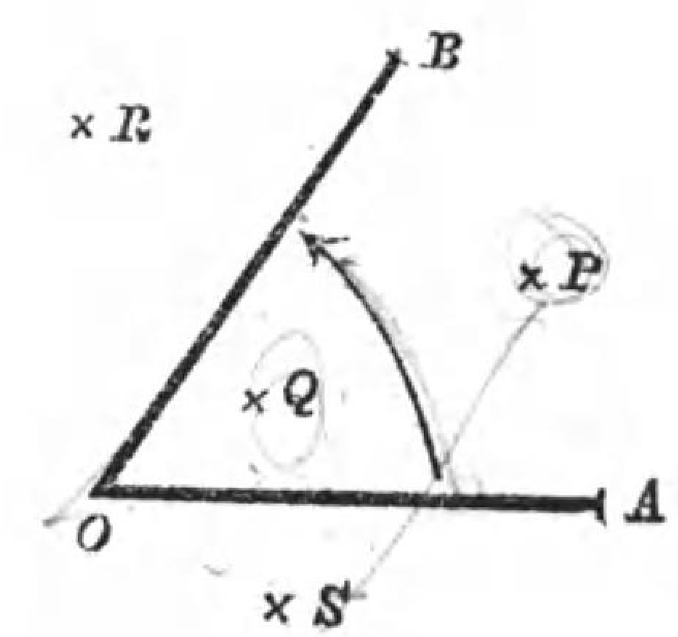
A, B 相等シク, C,D 相等シケレバ,
A, C ノ和ト B,D ノ和トモ相等シ.

第二章　角

14. 角. 一點 O ヨリ引ケル二直線 OA,OB ハ一ツノ**角** angle ヲ成ス又ハ一ツノ角ヲ夾ムト云ヒ,其角ヲ角 AOB ト稱ス.



點 O ヨリ引ケル無限直線ガ,O ヲ周リテ OA ノ位置ヨリ OB ノ位置マデ,矢ニテ示セル向キニ廻ルトキ,其直線ハ角 AOB ダケ廻リタリトイヒ,其直線ノ通リタル點(例ヘバ P,Q ノ如キ)ハ總テ**角ノ内**ニ在リトイヒ,其直線ノ到ラヌ點(例ヘバ R,S ノ如キ)ハ**角ノ外**ニ在リトイフ.



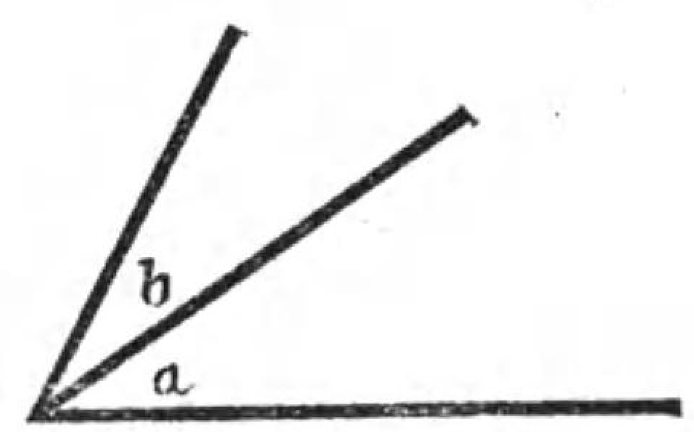
角AOBニ於テ,點Oヲ其角ノ頂點(vertex)ト稱シ,直線OA,OBヲ其角ノ邊(sides)ト稱ス.

15. 角の呼び方. 角の記號.

角AOB又ハ角BOAハ外ニ紛ルヽ恐レナキトキハ,角Oトモ稱ス. 例ヘバOヲ頂點トスル角ガ唯一ツナルトキノ如シ.

又,角ト云フ字ノ代リニ記號(∠)ヲ用ヒテ,∠AOB, ∠Oノ如ク書キ表ハスコトアリ.

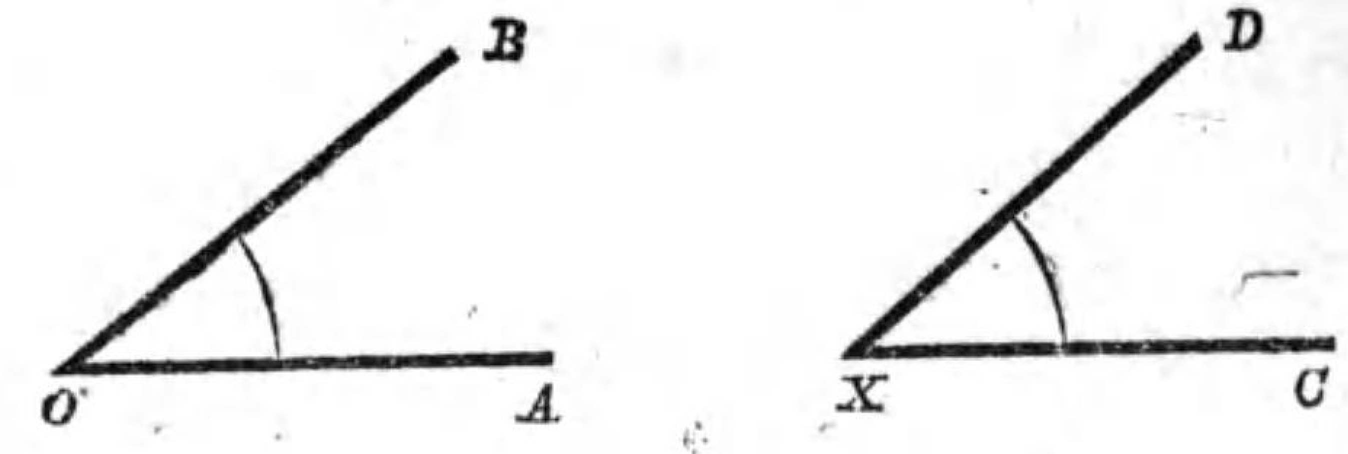
又角ハ其ノ内ニ書ケル小文字ヲ以テ示スコトアリ. 例ヘバ∠a及ビ∠bト稱スルガ如シ.



16. 角の相等, 大小.

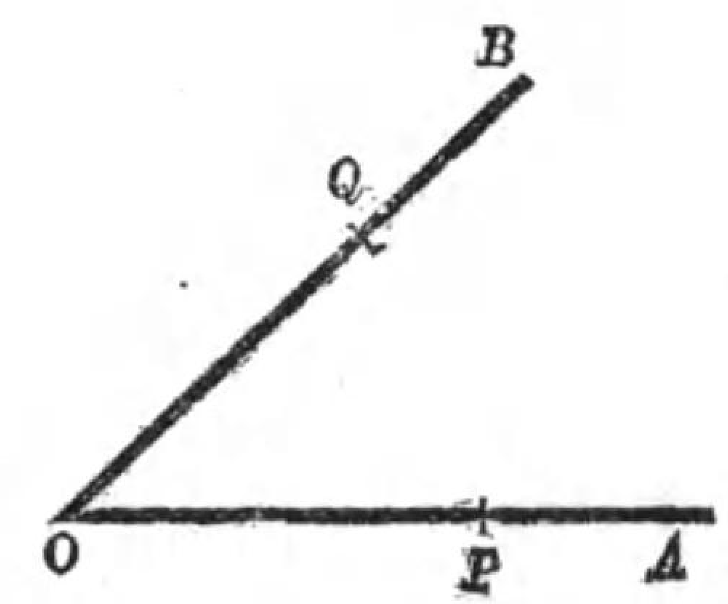
二角AOB,CXDノ相等シトハ,其ノ全ク相合スルコトナリ; 即チ邊XCハ邊OAノ上ニ,邊XDハ邊OBノ上ニ,重ナル樣ニ置クコトヲ得,且ツ其時∠CXDノ内ノ點ハ∠AOBノ内ニ落ツレバ

此兩角ハ相等シキナリ.



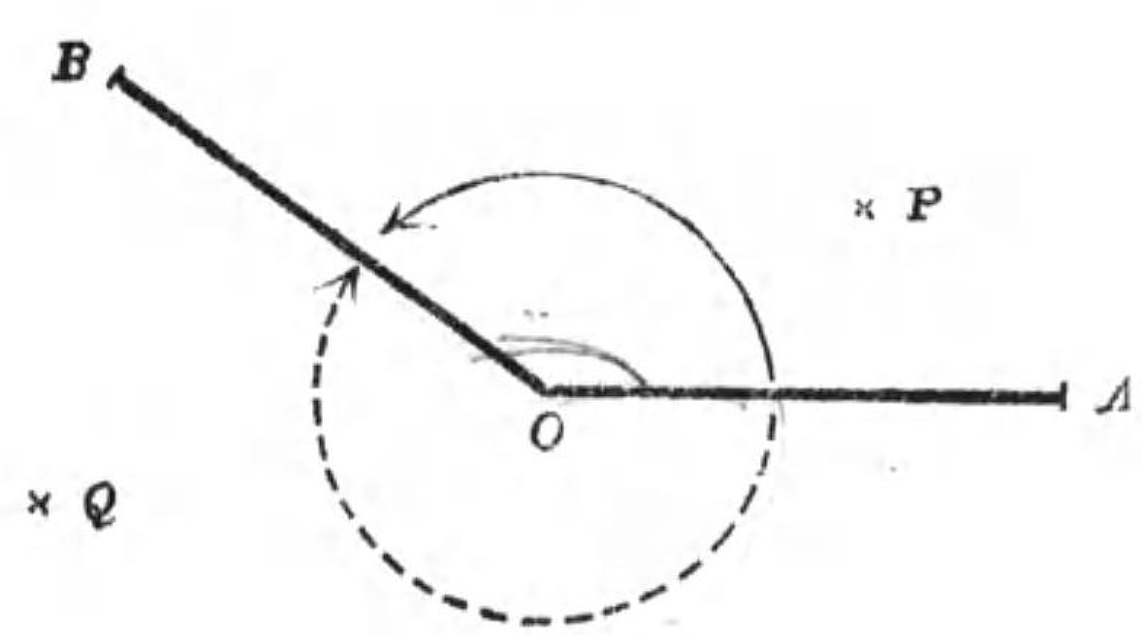
角AOBヲ角CXDノ上ニ重ネ,頂點Oガ頂點Xノ上ニ,邊OAガ邊XCノ上ニ落ツル樣ニ置クニ,邊OBガ角CXDノ内ニ落ツルトキハ,角AOBハ角CXDヨリ小ナリト云ヒ,之ニ反シテOBガ角CXDノ外ニ落ツルトキハ,∠AOBハ∠CXDヨリ大ナリト云フ.

注意 一ツノ角ノ大小ハ其二邊ノ長短ニ關係ナシ, 即チ今OA上ノ一點ヲPトシ,又OB上ノ一點ヲQトスレバ,∠AOBト云フモ,∠POQトイフモ,其ノ指ス所ノ角ハ同一ナリ.



17. 優角(凹角),劣角(凸角)

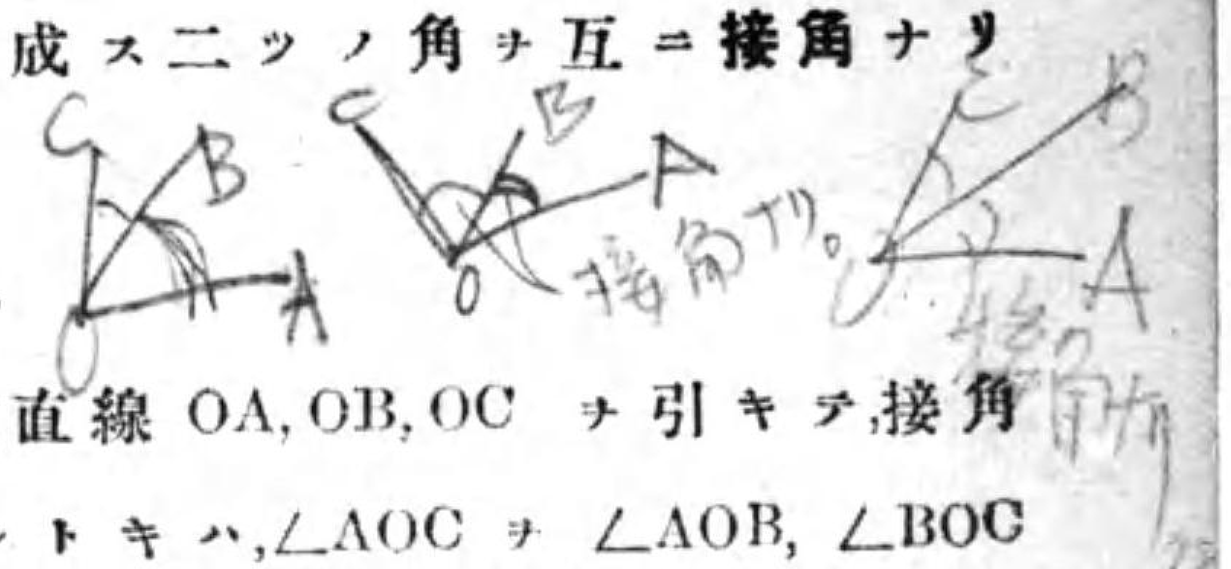
一點Oヨリ引ケル二直線OA,OBアルトキ,OAヨリOBニ至ル廻轉ハ圖ニ示ス如ク(Pヲ通過スルモノト,Qヲ通過スルモノトノ)二樣アルヲ以テ,二直線OAトOBトハ點Oニ於テ同時ニ二ツノ角ヲ成スナリ.



二ツノ直線ガ成ス二角ノ中ニテ,小ナル方(圖ニ於テ實線ノ矢ニテ示セルモノ)ヲ劣角(又ハ凸角 convex a.),大ナル方ヲ優角(又ハ凹角 concave a.)ト稱ス,

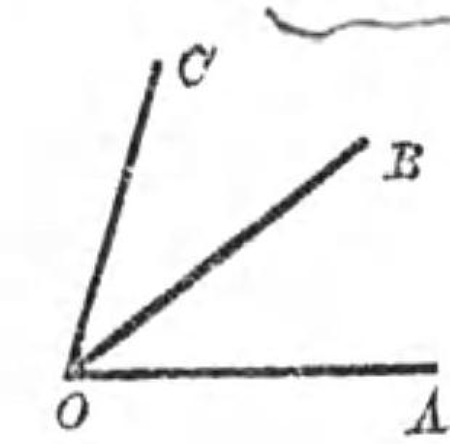
注意 二直線ノ成ス角トイフトキハ,二ツノ角ノ何レヲ指スカ不明ナル理ナレド,以後單ニ二直線ノ成ス角ト稱スルトキハ,劣角ノ方ヲ指スモノト知ルベシ.

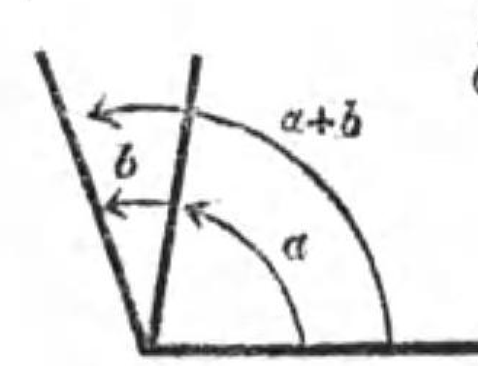
18. 接角. 一點ヨリ三直線ヲ引キ,其一ツヲ他ノ二ツノ中間ニ在リトスルトキハ,此直線ガ外部ニ在ル二直線ト成ス二ツノ角ヲ互ニ接角ナリト云フ.

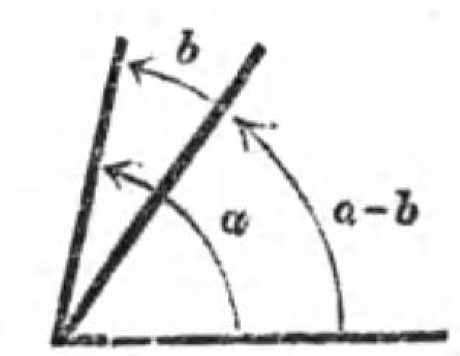


19. 角の和及び差.

一點Oヨリ三直線OA,OB,OCヲ引キテ,接角AOB,BOCヲ作ルトキハ,∠AOCヲ∠AOB,∠BOCノ和ト稱シ,∠BOCヲ∠AOC,∠AOBノ差ト稱ス。





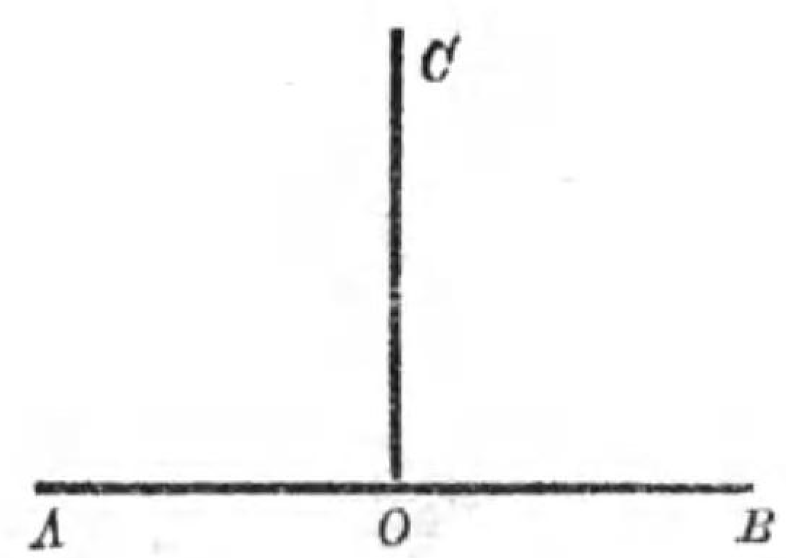


一般ニ二角ノ和トハ,之ヲ互ニ接角トナルベキ位置ニ移セルトキノ兩接角ノ和ナリ.

又一般ニ二角ノ差トハ,其一邊ト頂點トヲ夫々相合セシメテ,小角ノ方ノ第二邊ガ大角ノ內ニ在ル樣ニ之ヲ書キタルトキ,其ノ第二邊ガ成ス所ノ角ナリ.

20. 直角, 垂直, 垂線.

一直線ガ他ノ一直線ノ上ニ立チテ成ス所ノ二ツノ接角ガ相等シキトキハ,其二ツノ角ヲ各々**直角**ト稱ス,而シテ其二直線ハ互ニ**垂直**(perpendicular)ナリ(又ハ互ニ**垂線**ナリ)トイフ.



即チ直線 OC ガ直線 AB ノ上ニ立チテ,二ツノ接角 AOC, BOC ヲ成シ, $\angle AOC = \angle BOC$ ナルトキハ, $\angle AOC$ ト $\angle BOC$ トハ各々直角ナリ.

系 直角ハ凡テ相等シ.

注意 AB,CO ノ互ニ垂直ナルコトハ,記號ニテ,$AB \perp CO$ ト書ク.

21. 銳角, 鈍角.

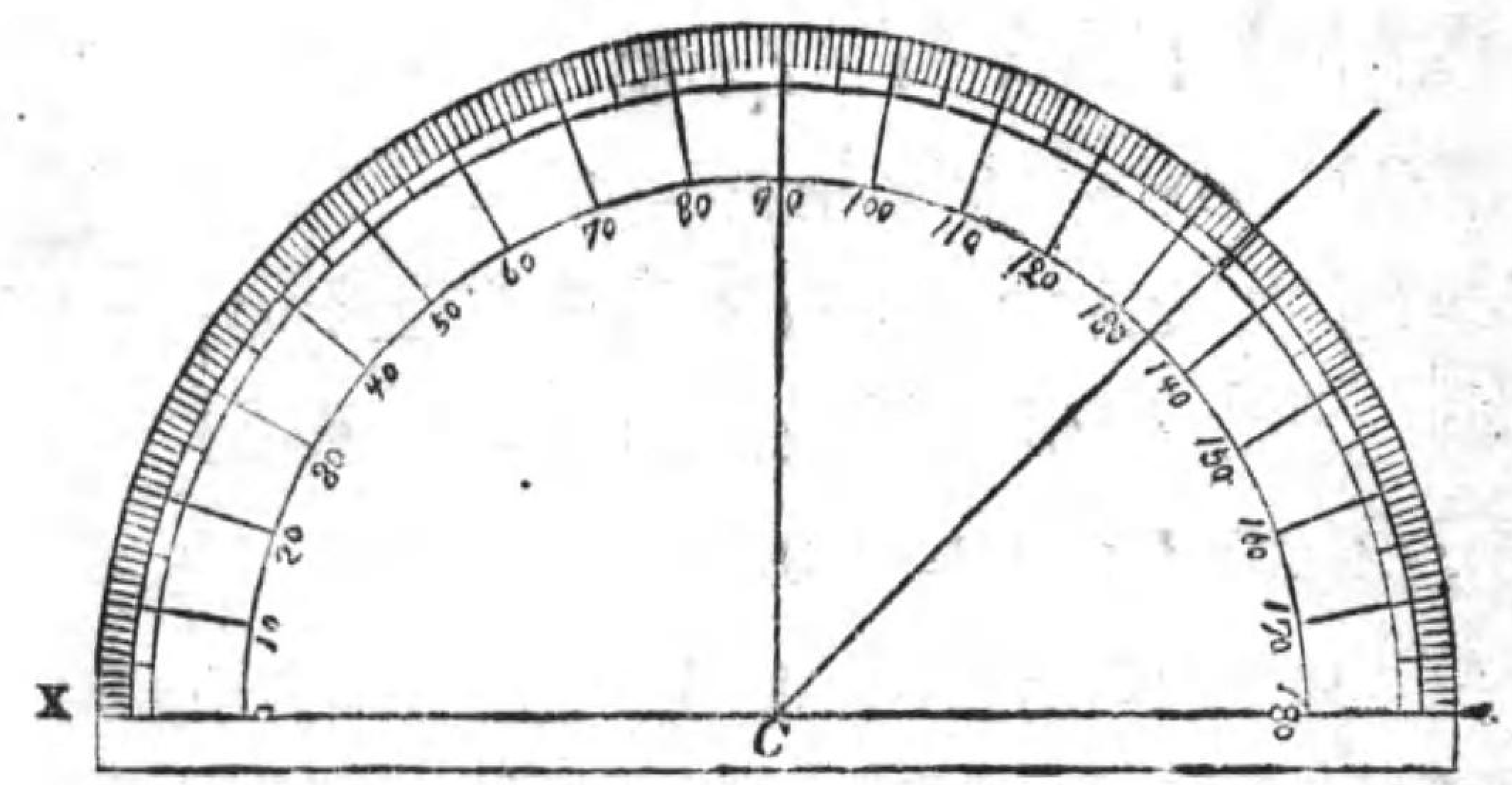
銳角トハ直角ヨリ小ナル角,**鈍角**トハ直角ヨリ大ナル凸角ナリ.

22. 角の計り方. 度,分,秒.

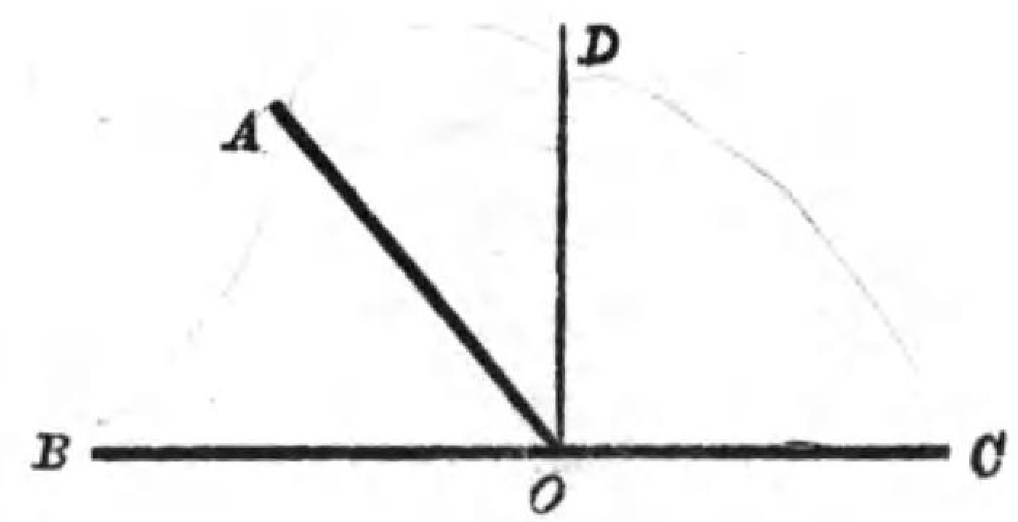
直角ノ $\frac{1}{90}$ ヲ**一度**,一度ノ $\frac{1}{60}$ ヲ**一分**,一分ノ $\frac{1}{60}$ ヲ**一秒**ト稱ス.

度,分,秒ハ夫々記號(°,′,″)ヲ用ヒテ書キ表ハス. 例ヘバ $23° 18' 35''$ ノ如シ.

注意 下圖ニ示セルハ**分度規**ト稱シ,角ノ大サ(度數)ヲ見ル,(又ハ度數ノ知レタル角ヲ書ク),ニ用フルモノナリ. 其法ハ角ノ頂點ニ C ヲ當テ,其ノ一邊ニ CX ヲ合セシメテ,他ノ一邊ニ當ル所ノ目盛ヲ見ルニ在リ.



23. 定理1 一直線が他の一直線上に立ちて成す所の二角の和は2直角に等し



前提 直線AOハ直線BCトOニ於テ會ス.

求證 ∠BOA + ∠AOC = 2直角.

作圖 ODヲBCニ垂直ニ引ク.

證明 $\left.\begin{array}{l}\angle AOC = \angle AOD + \angle DOC \\ \angle AOB = \angle DOB - \angle AOD\end{array}\right\}$

∴ ∠AOB+∠AOC=∠DOB +∠DOC

即チ =2直角. (作圖)

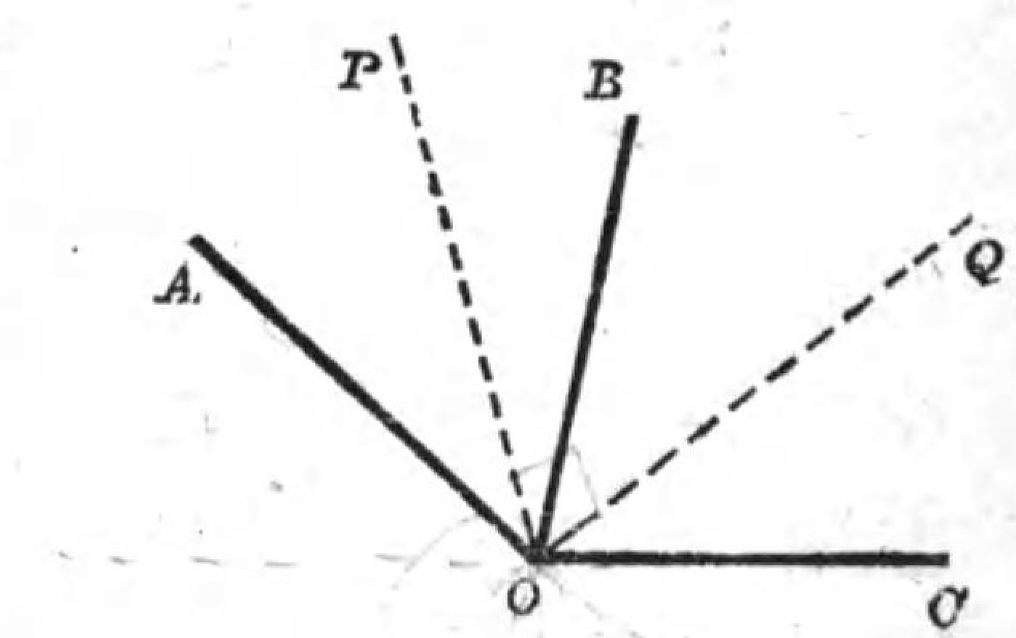
24. 系 幾つかの直線が一點に於て相會するときは,此等諸直線が次々に夾む所の總ての角の和は4直角に等し.

〔問題〕

1 二直線AB,CDカOニ於テ相交リ,∠AOCガ直角ナルトキハ,Oニ於ケル他ノ三角モ各々直角ナリ.

2 一點Oヨリ引ケル三ツノ直線OA, OB, OCアリ. ∠AOBヲ直線OPニテ二等分シ,又角BOCヲ直線OQニテ二等分スルトキハ,

$\angle POQ=\frac{1}{2}\angle AOC$



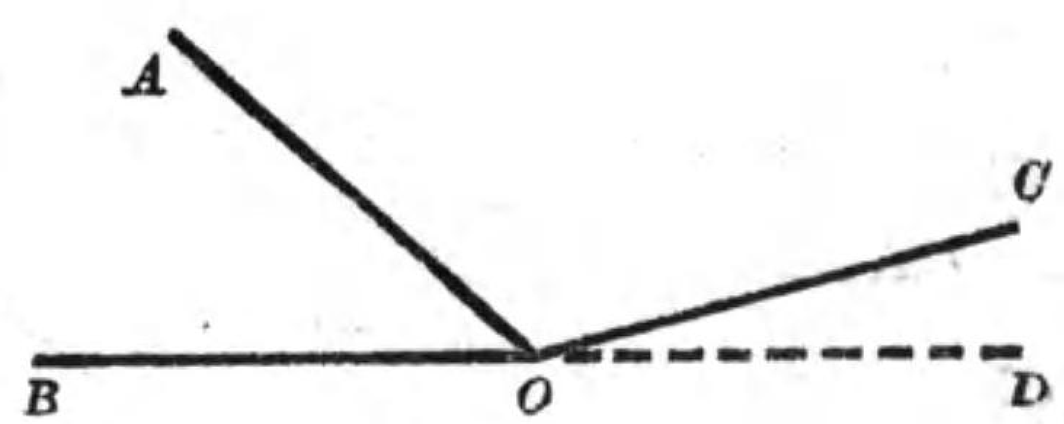
3 一直線ガ他ノ直線上ニ立チテ成ス所ノ二ツノ接角ノ二等分線ハ互ニ垂直ナリ.

25. 補角. 二ツノ角ノ和ガ2直角ニ等シキトキハ,其一方ハ他ノ方ノ補角(supplement)ナリト云フ.

〔問題〕

相等シキ角ノ補角ハ相等シ

26. 定理[2] 二つの接角の和が2直角に等しきときは,外の方なる二邊は一直線を成す.(前定理の逆)



前提 $\angle BOA+\angle AOC=2$直角.

求證 BOC ハ一ツノ直線ナリ.

作圖 BO ヲ D マデ延長ス.

證明 AO ハ O ニ於テ BD ノ上ニ立ツ,

$\therefore\ \angle BOA+\angle AOD=2$直角 〔定理[1]〕

然ルニ $\angle BOA+\angle AOC=2$直角 〔前提〕

$\therefore\ \angle BOA+\angle AOD=\angle BOA+\angle AOC$,

$\therefore\ \angle AOD=\angle AOC$.

故ニ OC ハ OD ト合ス.

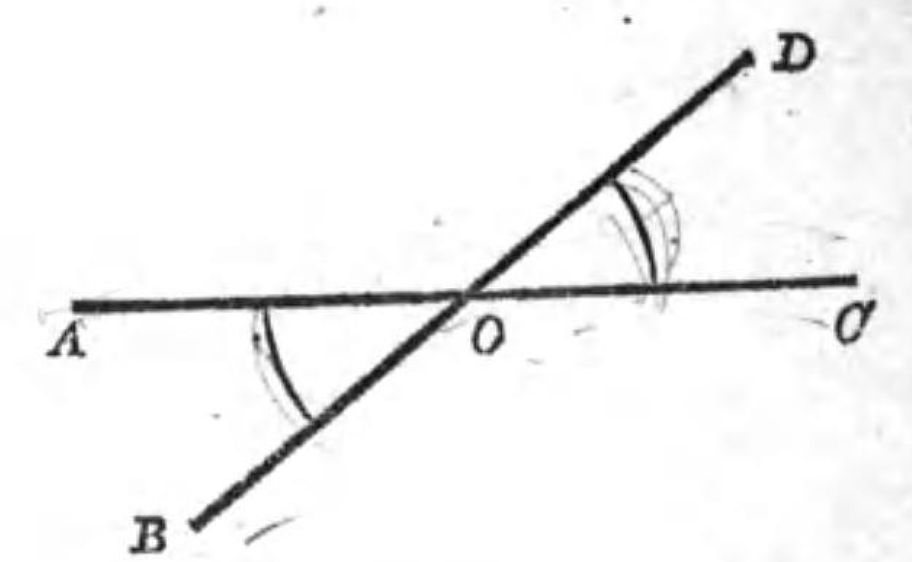
然ルニ BOD ハ一直線ナリ. 〔作圖〕

故ニ BOC モ一直線ナリ.

〔問題〕

1 直線AB上ノ一點Aヨリ,其直線ノ兩側ニ於テ,之ニ垂直ニAC,ADヲ引クトキハ,CADハ一直線ナリ.

2 圖ニ於テ,$\angle COD=\angle AOB$,且ツAOC一直線ナルトキハ,BODモ亦一直線ナリ.



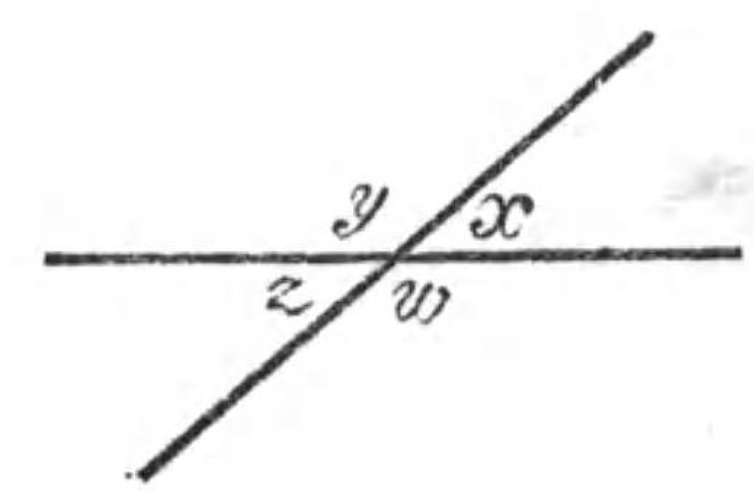
3 A,B,C,Dガ一直線上ノ四點ニシテ,AC=BDナルトキハ,AB=CD.

27. **對頂角.** 二ツノ直線ガ相交リテ成ス所ノ相對スル角ヲ**對頂角**ト稱ス.

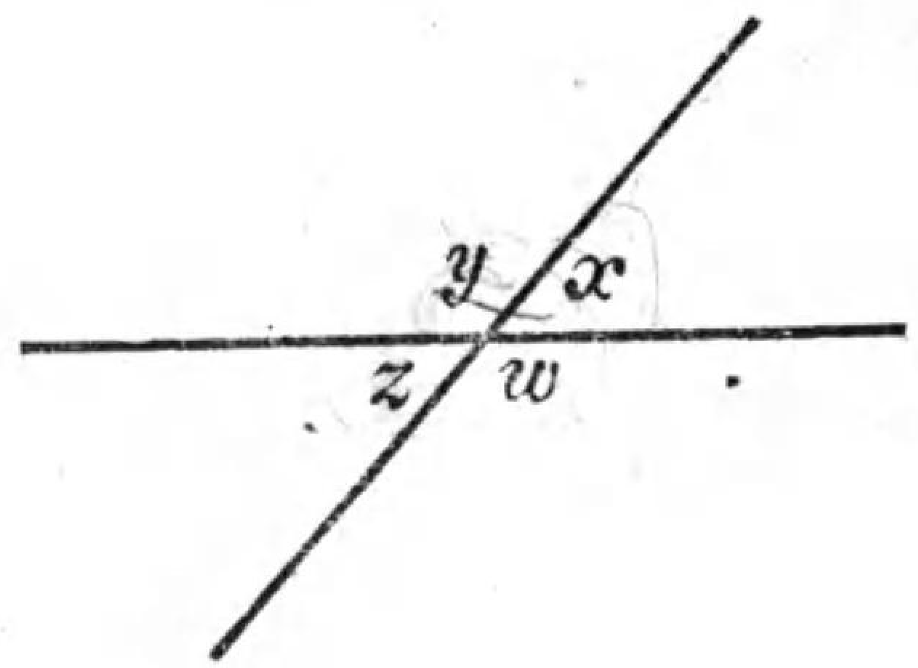
二直線ガ相交ルトキハ,二對ノ對頂角ヲ成ス.

圖ニ於テ,

xトzトモ,yトwトモ互ニ對頂角ナリ.



28. 定理[3]　對頂角ハ相等シ.



前提　二直線相交リテ四角 x, y, z, w ヲ成ス.

求證　(1) $\angle x = \angle z$,(對頂角),

(2) $\angle y = \angle w$(對頂角).

證明　(1) $\left.\begin{array}{l}\angle x + \angle y = 2\text{直角}\\ \angle y + \angle z = 2\text{直角}\end{array}\right\}$　〔何故ニカ〕

$\therefore\ \angle x + \angle y = \angle y + \angle z$,

$\therefore\ \angle x = \angle z$.

(2)　同理ニテ

$\angle y = \angle w$.

∠

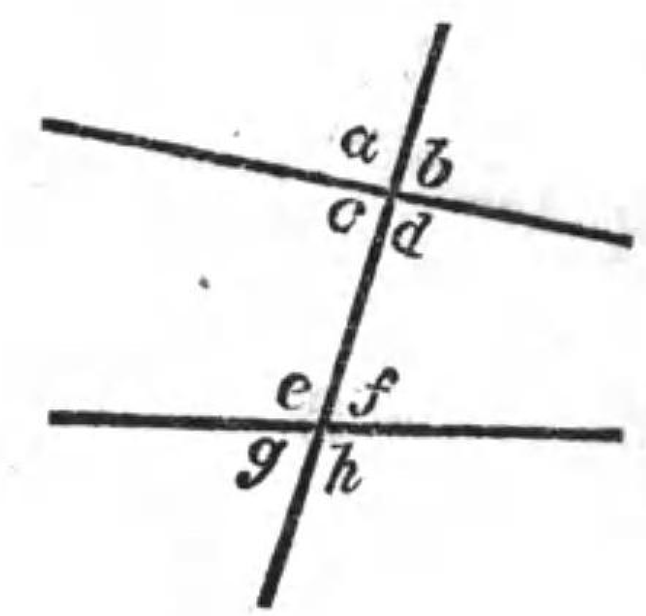
第三章　平行直線

29. 平行直線. 二直線カ**平行**(parallel)ナリ(又ハ**平行直線**ナリ)トハ,共ニ同一平面上ニ在リテ,双方ヘ何ホド延長ストモ相交ラザルコトナリ. 平行直線ハ畧シテ**平行線**トモ稱ス.

二直線 AB,CD ガ平行ナルコトヲ,記號〔∥〕ヲ用ヒテ AB∥CD ト書キ表ハス.

30. 内角,外角,錯角,同位角.

二直線ガ第三直線ト交リテ成ス所ノ八角中,二直線ノ内側ニ在ル四ツヲ**内角**,其外側ナル四ツヲ**外角**,第三直線ノ反對ノ側ニ在リ接角ナラサル二内角ヲ**錯角**,又第三直線ノ同側ニ在リ且ツ接角ナラサル内角ト外角トヲ**同位角**ト稱ス.



〔問　題〕

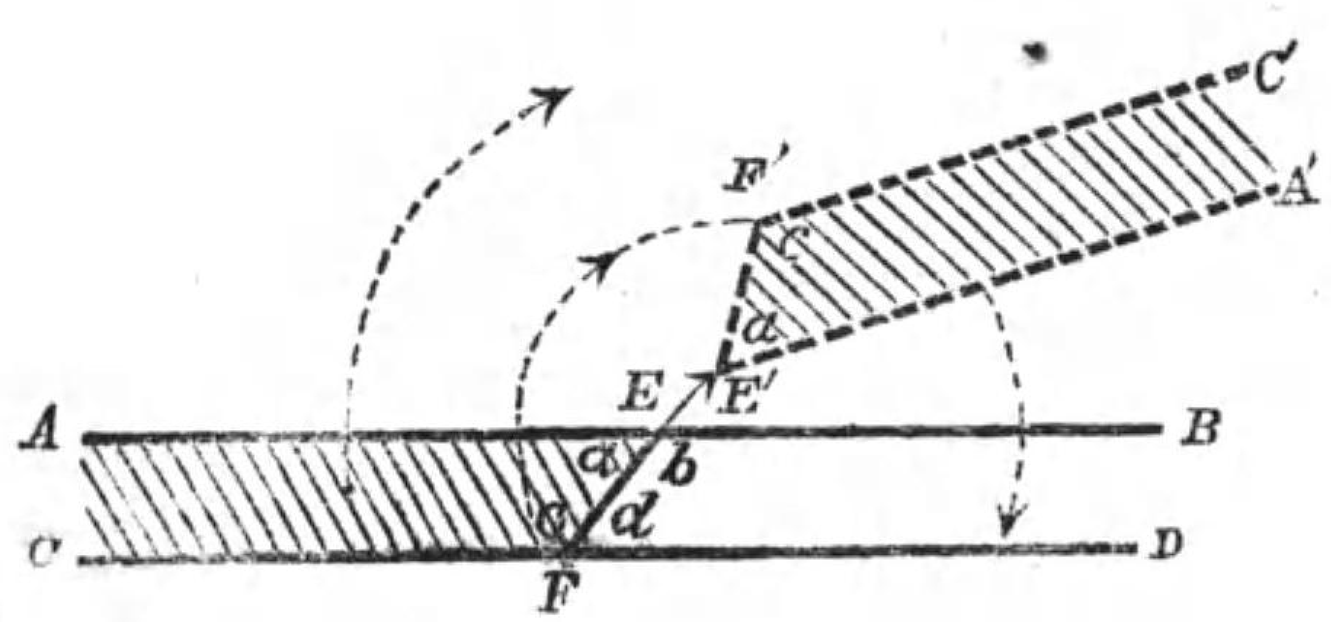
[1] 錯角及ビ同位角ヲ悉ク擧示セヨ.

[2] $\angle c=\angle f$ ナルトキハ, $\angle c=\angle g$.

[3] $\angle c=\angle f$ ナルトキハ,

$\angle d+\angle f=2$ 直角.

31. [定理4] 二直線が第三直線と交りて成す所の一對の錯角相等しければ其二直線は平行なり.



[前提] 直線 EF ハ二直線 AB, CD ト夫々 E, F ニ於テ交リ, 角 a, b, c, d ヲ成シ, 且ツ

$\angle a=\angle d$ (錯角).

[求證] AB ト CD トハ平行ナリ.

[證明] 直線 EF ハ直線 AEB 上ニ立ツ,

$\therefore\ \angle a+\angle b=2$ 直角 〔定理〕

$\angle c+\angle d=2$ 直角 "

$\therefore\ \angle a+\angle b=\angle c+\angle d.$

然ルニ $\angle a=\angle d,$ 〔前提〕

$\therefore\ \angle b=\angle c$

部分 AEFC ヲ取リテ A'E'F'C' ト名ヅケ, 之ヲ同平面內ニ於テ廻轉シテ部分 DFEB ノ上ニ置キ, E' ハ F ニ, E'A' ハ FD ニ合スル樣ニス.

然ルニ, $\angle a=\angle d.$ 〔前提〕

故ニ, E'F' モ FE ニ合ス.

然ルニ　E'F' = FE.　〔何故ニカ〕

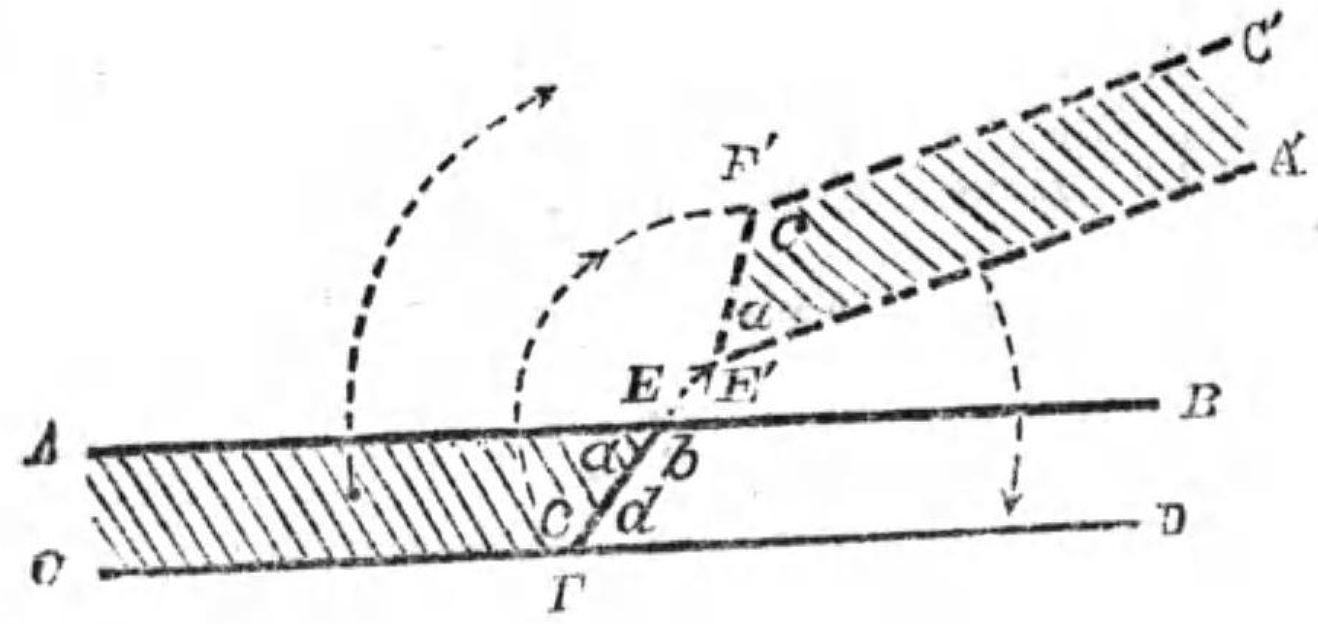
故ニ F' モ E ニ合ス.

又 $\angle c=\angle b,$ 〔證明濟〕

故ニ F'C' モ EB ニ合ス

乃チ A'E'F'C' ハ全ク DFEB ト合ス.

今 EB, FD ハ B 及ビ D ノ方ヘ延長スルトキ相交ルトセバ, F'C', E'A' モ C' 及ビ A' ノ方ヘ延長スルトキ相交ラザル可ラズ, 即チ FC, EA モ C 及ビ A ノ方ヘ延長スルトキ相交ラザル可ラズ.



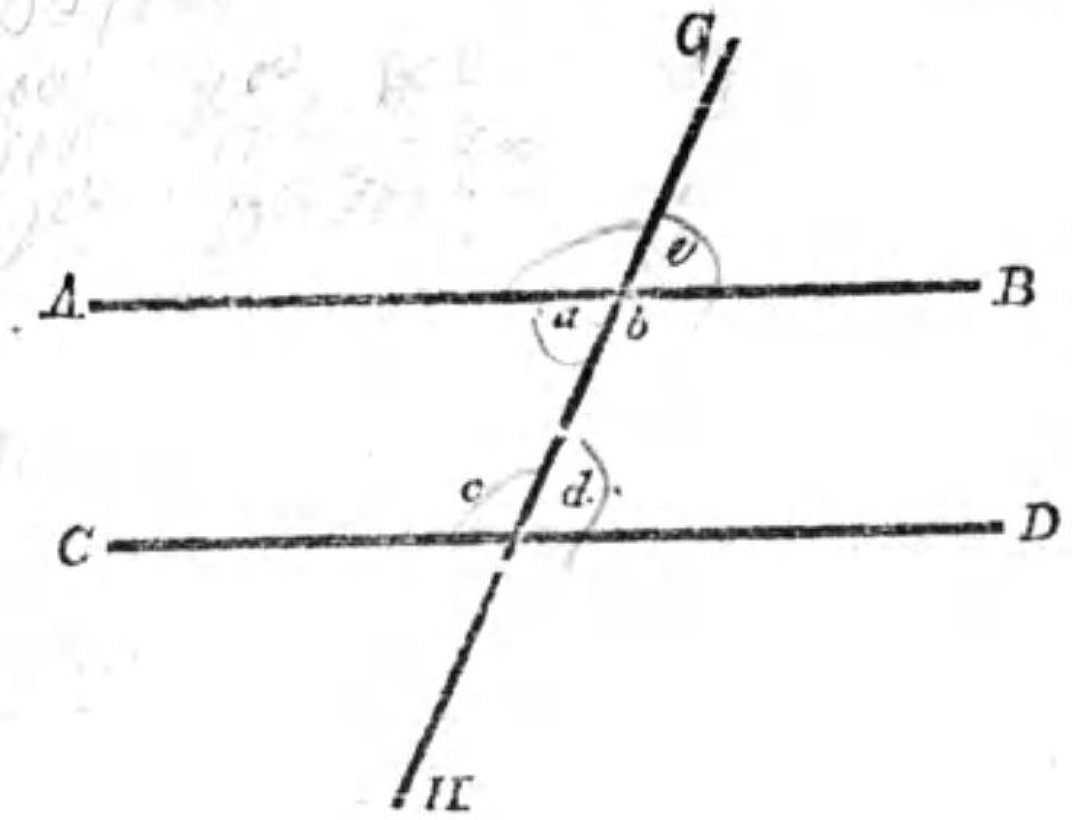
故ニABトCDトハ,之ヲ一方ニ延長スルトキ相交ルトセバ,之ヲ他ノ方ニ延長スルトキモ亦相交ルベシ. 然レドモ是レ不可能ナリ(二ツノ直線ハ二ツノ點ニ於テ相交ルコトヲ得ザルニ依ル).

故ニABトCDトハ,之ヲ何レノ方ヘ何ホド延長ストモ,相交ルコトヲ得ズ.

故ニABトCDトハ平行ナリ.

32 [系] 同一直線に垂直なる二直線は互に平行なり.

33. [定理5] **二直線が第三直線と交りて成す所の一對の同位角相等しければ,其二直線は平行なり.**



[前提] 直線GHハ二直線AB,CDト交リテ,角a, b, c, d, eヲ成シ,且ツ

$\angle e = \angle d$ (同位角).

[求證] $AB \parallel CD$.

[證明] $\angle e = \angle a$ (對頂角)

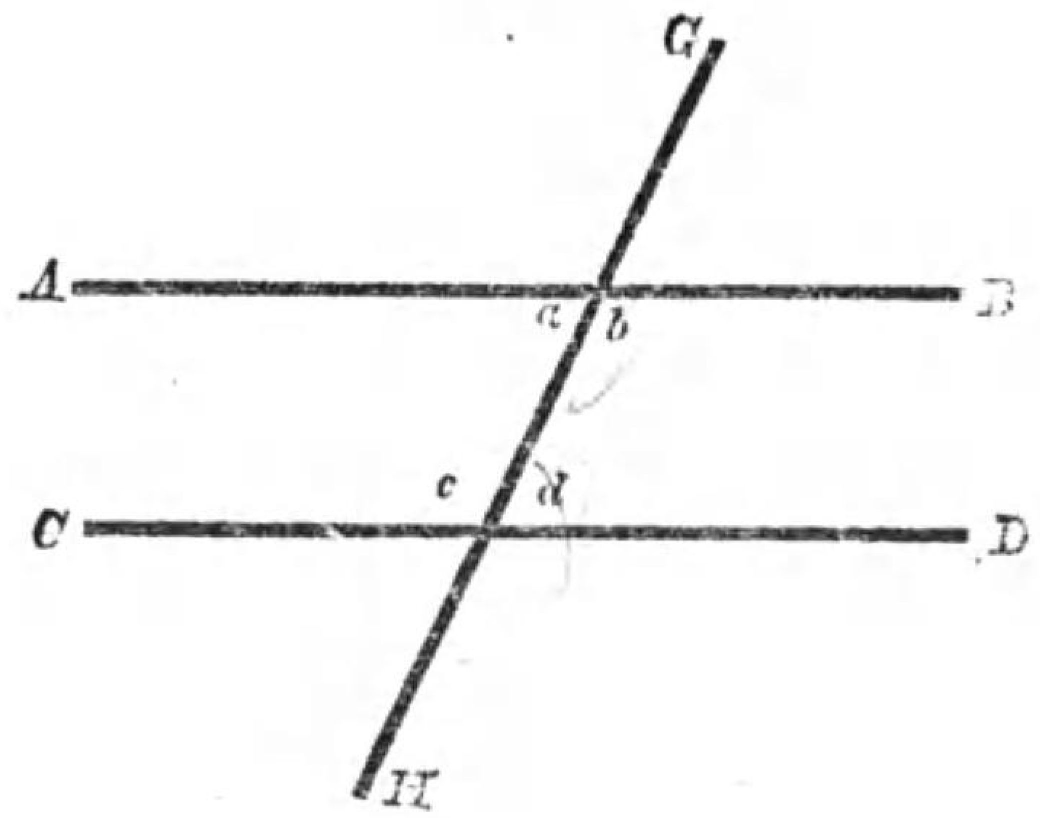
然ルニ $\angle e = \angle d$ 〔前提〕

$\therefore \angle a = \angle d$

然ルニ $\angle a, \angle d$ ハ錯角ナリ.

$\therefore AB \parallel CD$. 〔前定理〕

34. 定理6 二直線が第三直線と交るとき,其の同側の內角の和が二直角に等しければ,其二直線は平行なり.



前提 $\angle b+\angle d=2$直角.

求證 AB ∥ CD.

證明 $\angle b+\angle a=2$直角 〔定理〕

然ルニ $\angle b+\angle d=2$直角 〔前提〕

$\therefore \angle b+\angle a=\angle b+\angle d,$

$\therefore \angle a=\angle d.$

然ルニ此二角ハ錯角ナリ.

$\therefore$ AB ∥ CD. 〔定理〕

35. 公理 一定點を過ぎて一定直線に平行なる直線は一つあり,而して唯一つあるのみ.

36. 四邊形, 對角線.

四直線ニテ圍メル平面圖形ヲ**四邊形** (quadrilateral) ト稱ス.

四邊形ノ相對スル二隅ヲ結ビ付クル直線ヲ其ノ**對角線** (diagonal) ト稱ス.

37. 平行四邊形. 四邊形ノ相對スル二對ノ邊ガ互ニ平行ナルモノヲ**平行四邊形** (parallelogram) ト稱ス.

平行四邊形ト書ク代リニ記號〔▱〕ヲ用フルコトアリ. 例ヘバ ▱ ABCD ト書クガ如シ.

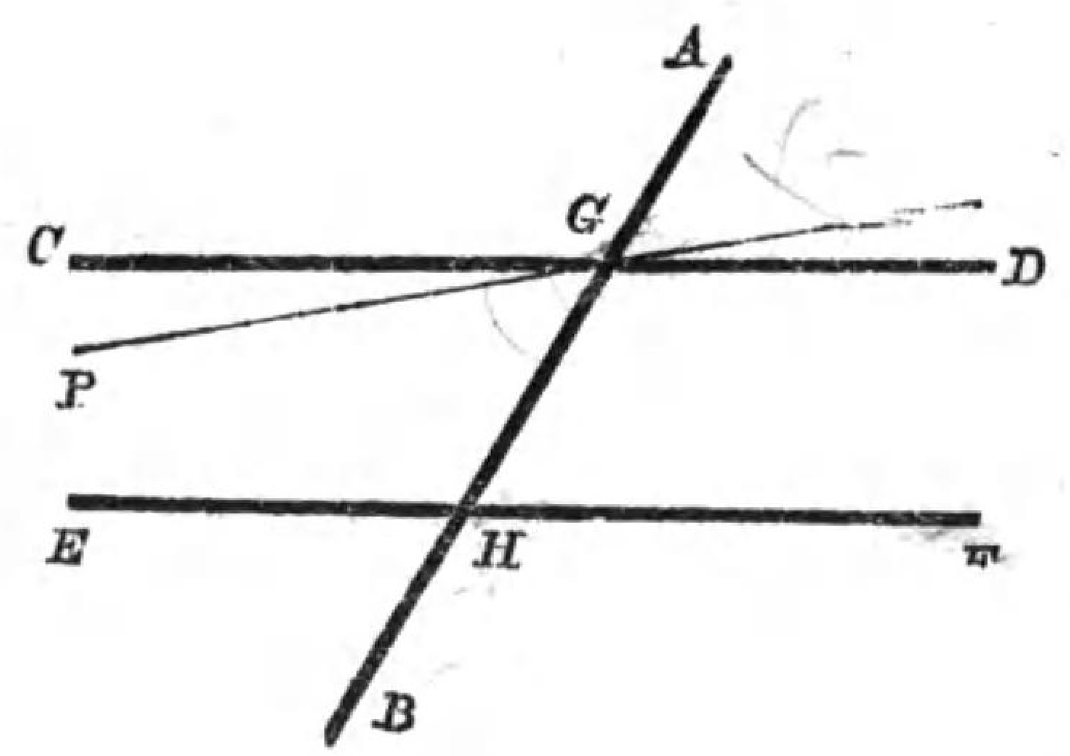
〔問題〕

1 四邊形 ABCD ノ對角線 AC ヲ引クニ, $\angle$BAC$=\angle$ACD, 且ツ $\angle$DAC$=\angle$ACB ナレバ, ABCD ハ ▱ ナリ.

2 四邊形ノ四角皆直角ナルモノハ ▱ ナリ.

38. 定理7 一直線が二つの平行直線と交りて成す所の錯角は相等し.

(定理4の逆)



前提 CD ∥ EF,

且ツ AB ハ CD, EF ト G, H ニ於テ交ル.

求證 ∠CGH = ∠GHF (錯角).

作圖 ∠CGH ガ ∠GHF ニ等シカラザレバ,GP ヲ引キテ ∠PGH=∠GHF トス.

證明 ∠PGH=∠GHF (同位角), 〔假定〕

∴ PG ∥ EF. 〔定理6〕

乃チ PG モ CG モ共ニ一點 G ヲ過ギ,

且ツ共ニ一直線 EF ニ平行ナリ.

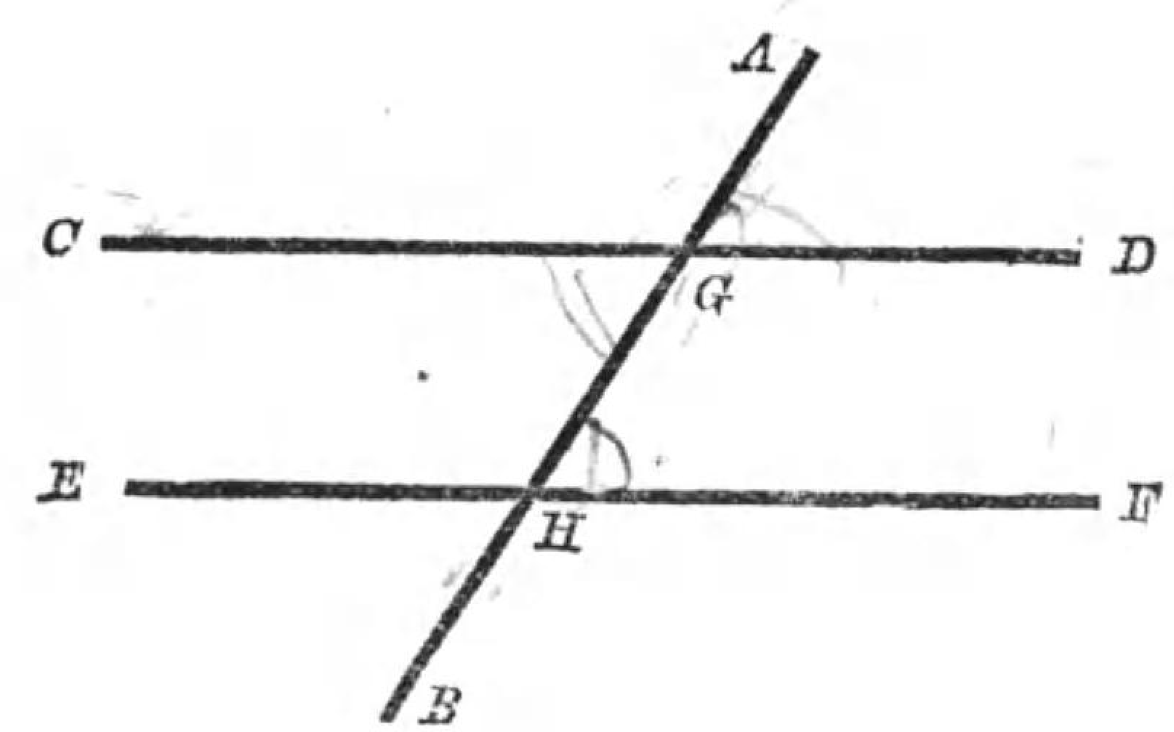
然レドモ是レ不可能ナリ. 〔公理〕

故ニ ∠CGH,∠GHF ハ不等ナルコトヲ得ズ.

∴ ∠CGH=∠GHF.

39. 定理8 一直線が二つの平行直線と交りて成す所の同位角は相等し.

(定理5の逆)



前提 CD ∥ EF.

AB ハ CD, EF ト G,H ニ於テ交ル.

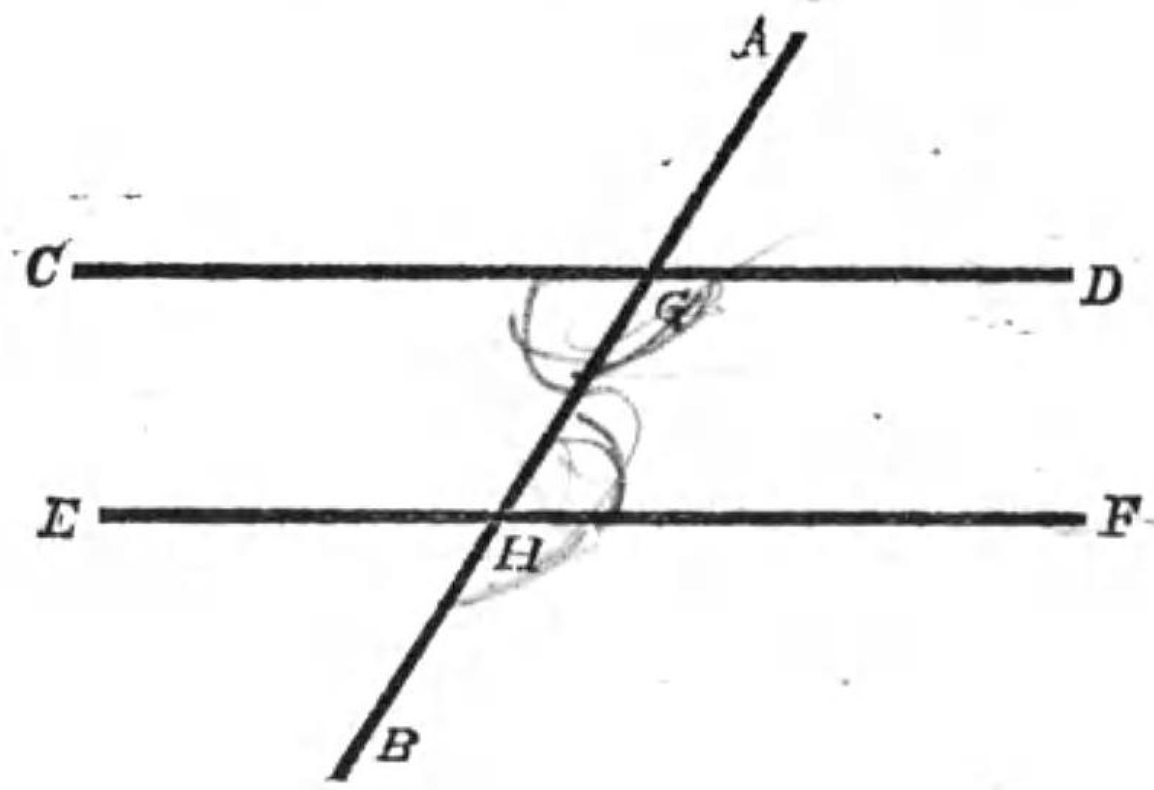
求證 ∠AGD=∠GHF (同位角).

證明 ∠CGH=∠GHF, 〔定理7〕

又 ∠CGH=∠AGD (對頂角),

∴ ∠AGD=∠GHF.

40. [定理9] 一つの直線が二つの平行直線と交りて成す所の内角の中,初の直線の同側に在るものの和は2直角に等し.(定理6の逆)



[前提] CD ∥ EF,

AB ハ CD, EF ト夫々 G,H ニ於テ交ル.

[求證] ∠DGH+∠GHF=2直角.

[證明] ∠DGH+∠CGH=2直角 〔何故ニカ〕

∠CGH=∠GHF 〔定理[7]〕

∴ ∠DGH+∠GHF=2直角.

〔問題〕

* 二ツの平行直線の一方に垂直なる直線は他の一方にも垂直なり.

41. 定理及び其の逆

定理ノ文ハ通例次ノ二部ニ分ツコトヲ得.

前提(又ハ假設), Premise hypothesis

結論(又ハ終結若クハ斷定).** Conclusion judgment

例へば,定理[4]

「二直線ガ第三直線ト交リテ成ス所ノ一對ノ錯角相等シケレバ,其二直線ハ平行ナリ」

ニ於テ,前提ハ

「二直線ガ第三直線ト交リテ成ス所ノ一對ノ錯角相等シ」

ニシテ,

「其二直線ハ平行ナリ」

ハ其ノ結論ナリ.

---

* 星章(*)ヲ附シタルハ重要ナル問題ナリ.

** 本書ニ求證ト標セルモノ即チ結論ノ事項ナリ.

一定理ノ前提ト結論トヲ交換シテ得ル所ノモノヲ原定理ノ逆(Converse)ト稱ス.

例ヘバ上ノ例ノ逆ハ次ノ如シ.

「二直線ガ平行ナレバ,其二直線ガ第三直線ト交リテ成ス所ノ一對ノ錯角ハ相等シ」

又定理

「二直線ガ第三直線ト交リテ成ス所ノ同位角相等シナレバ,其二直線ハ平行ナリ」

ノ逆ハ次ノ如シ;

「二直線ガ平行ナレバ,其二直線ガ第三直線ト交リテ成ス所ノ同位角ハ相等シ」

注意 一定理ガ眞實ナリトモ,其ノ逆ハ必ズシモ眞實ナラズ. 例ヘバ定理[3]

「二角ガ對頂角ナレバ,其二角ハ相等シ」

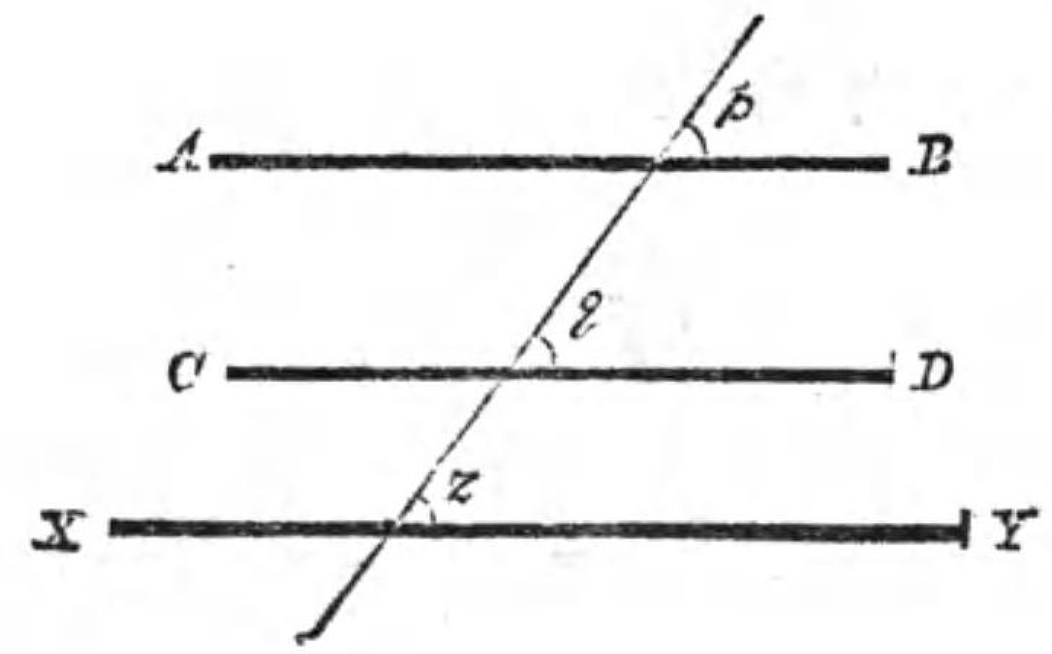
ハ眞實ナレドモ,此ノ逆タル

「二角相等シケレバ,其二角ハ對頂角ナリ」

ハ眞實ニアラズ.

故ニ證明ヲ經タル定理ナリトモ,其ノ逆ハ必ズ別ニ證明シタル後ニアラザレバ,之ヲ用フルコト能ハザルナリ.

42. **定理10** 同一の直線に平行なる二直線は互に平行なり



前提 AB ∥ XY 且ツ CD ∥ XY.

求證 AB ∥ CD.

作圖 AB, CD, XY ヲ横ギル所ノ一直線ヲ引キテ,同位角 p,q,z ヲ作ル

證明 AB ∥ XY, 〔前提〕

$\therefore \angle p=\angle z$ (同位角) 〔定理[8]〕

又 CD ∥ XY, 〔前提〕

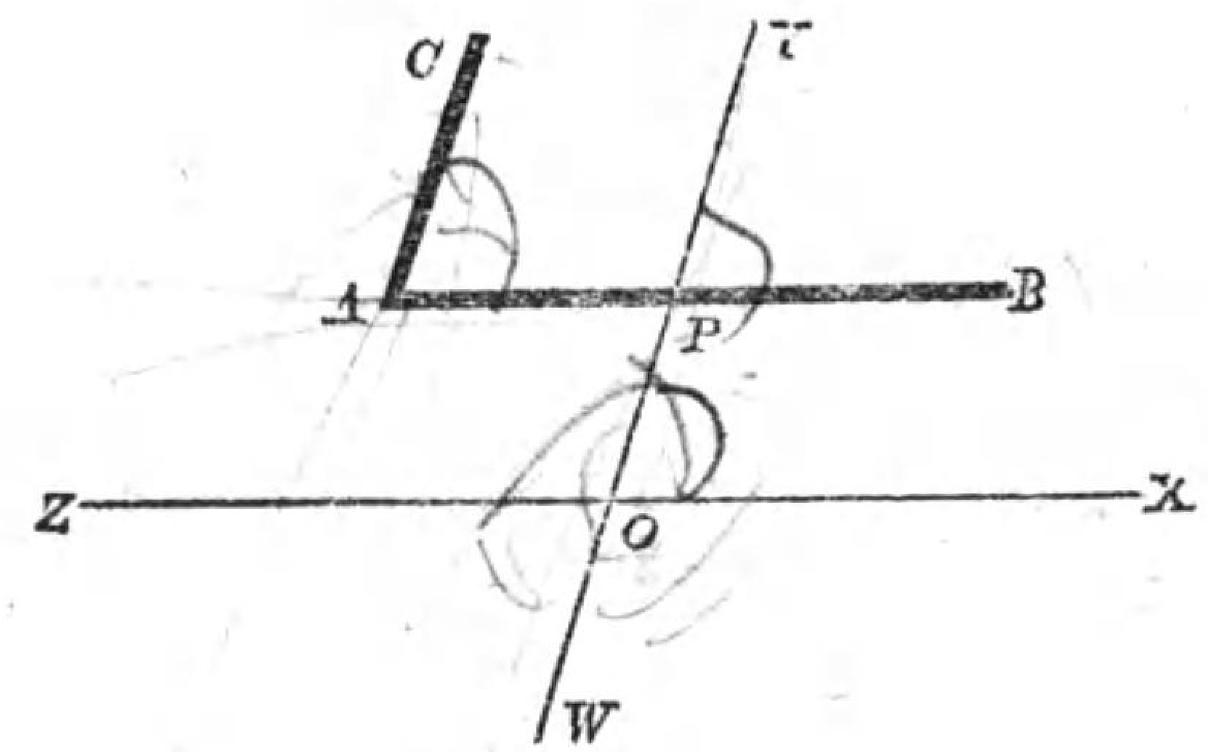
$\therefore \angle q=\angle z$ (同位角). 〔定理[8]〕

$\therefore \angle p=\angle q$.

然ルニ p ト q トハ同位角ナリ. 〔作圖〕

$\therefore$ AB ∥ CD. 〔定理[9]〕

43. 定理11 一點より一つの角の兩邊に平行なる二直線を引けば,此二直線の夾む角は初の角に等しきか,又は其の補角なり.



前提 BAC ハ一ツノ角ナリ.

O ヨリ OX, OY ヲ引キテ, OX ∥ AB, OY ∥ AC ナラシメ,且ツ OX ハ AB ト, OY ハ AC ト,同ジ向キニアリトス.

XO ヲ Z マデ, YO ヲ W マデ,延長ス.

求證 ∠XOY=∠ZOW=∠BAC,

∠YOZ=∠WOX=(∠BAC ノ補角).

證明 WY ガ AB ト交ル點ヲ P トスレバ,

∠XOY=∠BPY 〔何故ニカ〕

∠BAC=∠BPY 〃

∴ ∠XOY=∠BAC.

然ルニ ∠ZOW=∠XOY (對頂角), 〔定理5〕

∴ ∠ZOW=∠BAC.

∠YOZ=∠XOW=(∠XOY ノ補角)

=(∠BAC ノ補角)

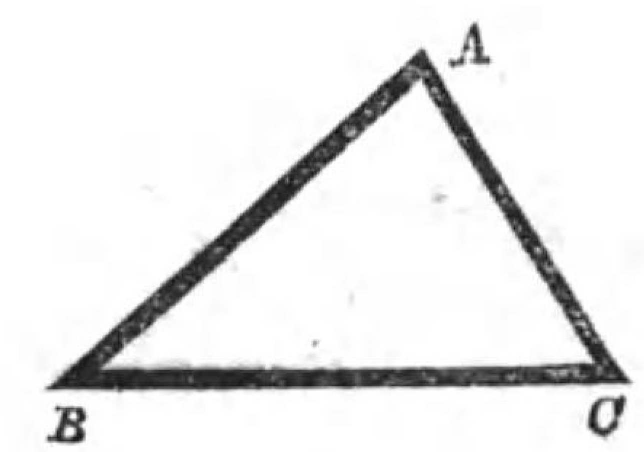
---

*問題 一點より一角の兩邊へ垂直に引ける直線の夾む角は初の角に等しきか,又は其の補角なり.

44 三角形. その頂點及び邊.

三ツノ直線ニテ圍メル平面圖形ヲ**三角形**ト稱ス.

三ツノ直線 AB, BC, CA ニテ圍メル三角形ハ三角形 ABC ト呼ブ.



△ABC ニ於テハ三點 A, B, C ヲ其ノ**頂點**ト稱シ,直線 AB, BC, CA ヲ其ノ**邊**ト稱ス.

三角形ト書ク代リニ記號〔△〕ヲ用フルコトアリ．例ヘバ△ABCト書クガ如シ．

二等邊—，等邊—，不等邊—，直角三角形．

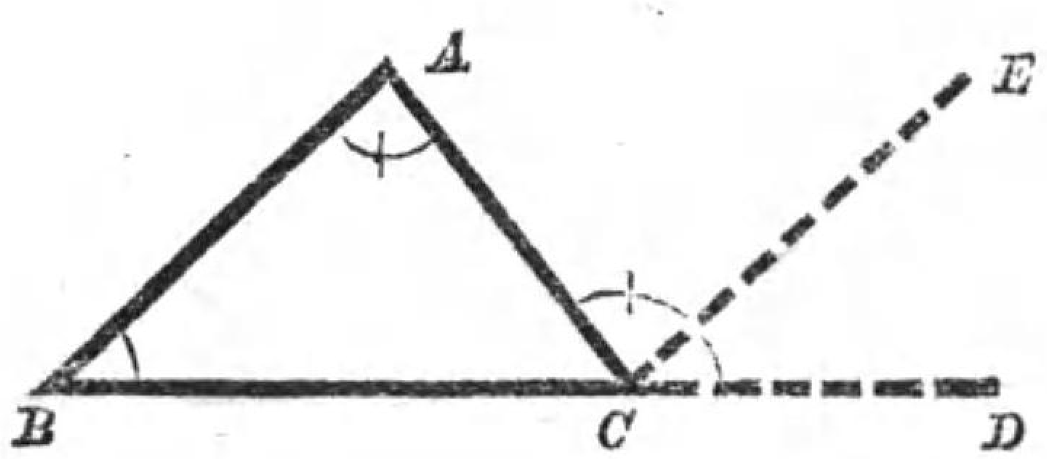
二等邊三角形トハ三角形ノ二邊ダケ相等シキモノナリ．

等邊三角形又ハ**正三角形**トハ三角形ノ三邊悉ク相等シキモノナリ．

不等邊三角形トハ三角形ノ三邊中ノ何レノ二ツモ相等シカラザルモノナリ．

直角三角形トハ三角形ノ一角ガ直角ナルモノナリ．直角三角形ノ**斜邊**トハ直角ニ對スル邊ナリ．

45 定理12 三角形の三つの角の和は2直角に等し



前提 ABCハ三角形ナリ．

求證 $\angle A+\angle B+\angle C=2$直角．

作圖 BCヲDマデ延長シ,CヨリBAニ平行ニCEヲ引ク．

證明 ACハ平行直線AB,CEト交ル．

$\therefore \angle A=\angle ACE$（錯角）． 〔定理〕

又BCハ平行直線AB,CEト交ル．

$\therefore \angle B=\angle ECD$（同位角）． 〔定理〕

$\therefore \angle A+\angle B=\angle ACE+\angle ECD.$

此ノ兩邊ニ$\angle ACB$ヲ加フレバ，

$$\angle A+\angle B+\angle ACB=\angle ACB+\angle ACE+\angle ECD$$

$$=2\text{直角}$$

（BCDハ一直線ナルニ依ル）．

故ニ△ABCノ三角ノ和ハ2直角ニ等シ．

46. 系

1 三角形の一邊を延長する時に生ずる角(外角)は之と接角ならざる角(内對角)の和に等し．

2 三角形の一つの外角は二つの内對角の何れよりも大なり．

[3] 三角形の二角の和は何れも2直角より小なり.

[4] 三角形には少くとも二ツの鋭角あり.

[*5] 一三角形の二角が他三角形の二角と夫々相等しければ,第三角も相等し.

47. **餘角.** 二角ノ和ガ直角ニ等シキトキ,其一ハ他ノ**餘角**(complement)ナリト云フ.

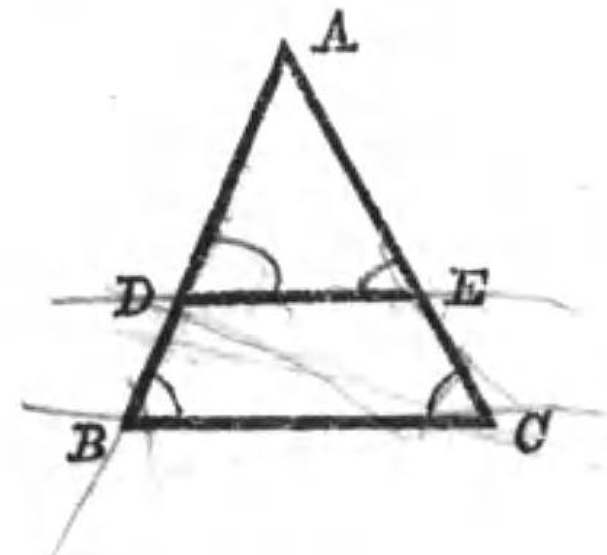
〔問　題〕

[1] 直角△ノ直角ニアラザル二角ハ互ニ餘角ナリ.

[2] ∠A=∠B ナル △ABC ニ於テ,BC ヲ D マデ延長スレバ,∠DCA=2∠B.

[3] 三角形ノ三邊ヲ順次ニ延長シテ得ル所ノ三外角ノ和ハ幾直角ナルカ.

[4] ∠B=∠C ナル△ABC ニ於テ BC ニ平行ニ DE ヲ引キ,其ノ邊 AB, AC ト交ル點ヲ夫々 D,E トスレバ, ∠ADE=∠AED.



[*5] 四邊形の四角の和は4直角なり.

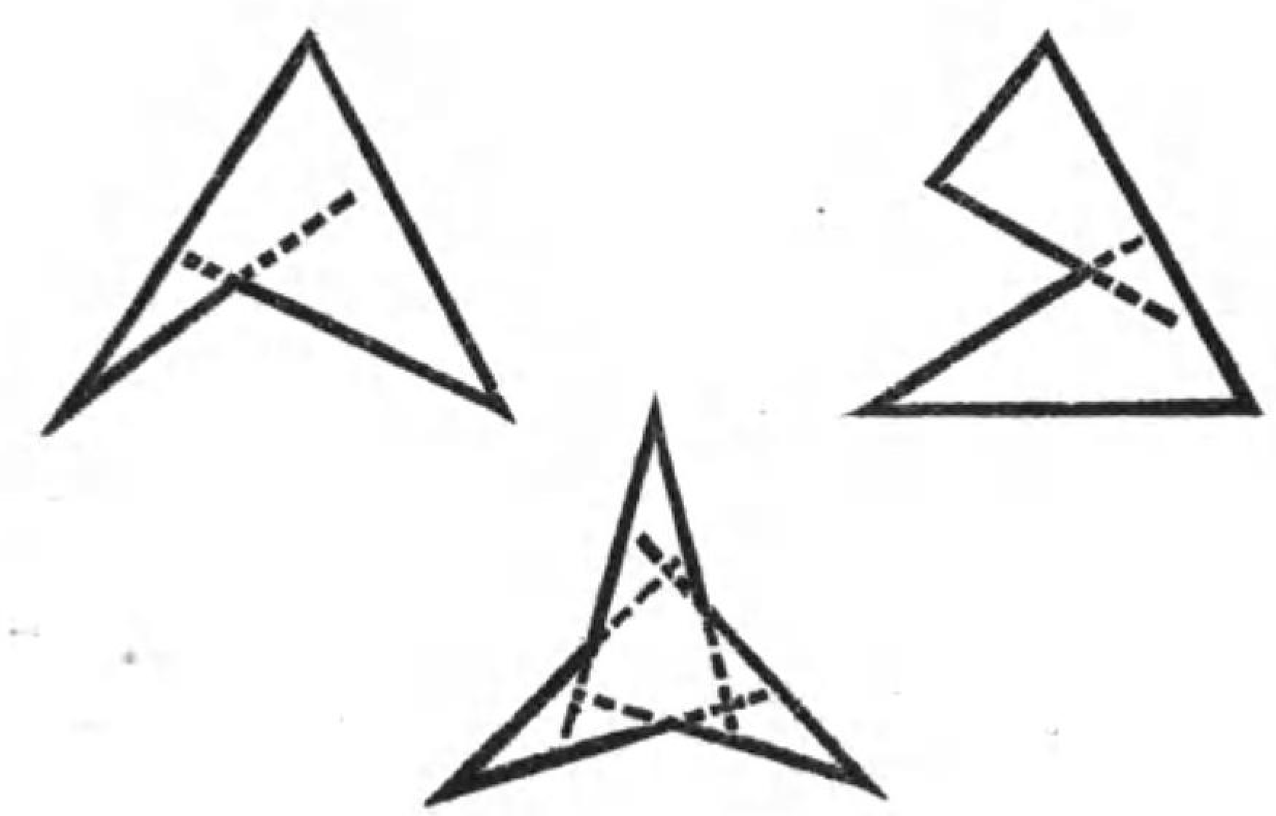
48. **多角形.**

直線ヲ以テ圍メル平面圖形ヲ**多角形**(polygon)ト稱ス.

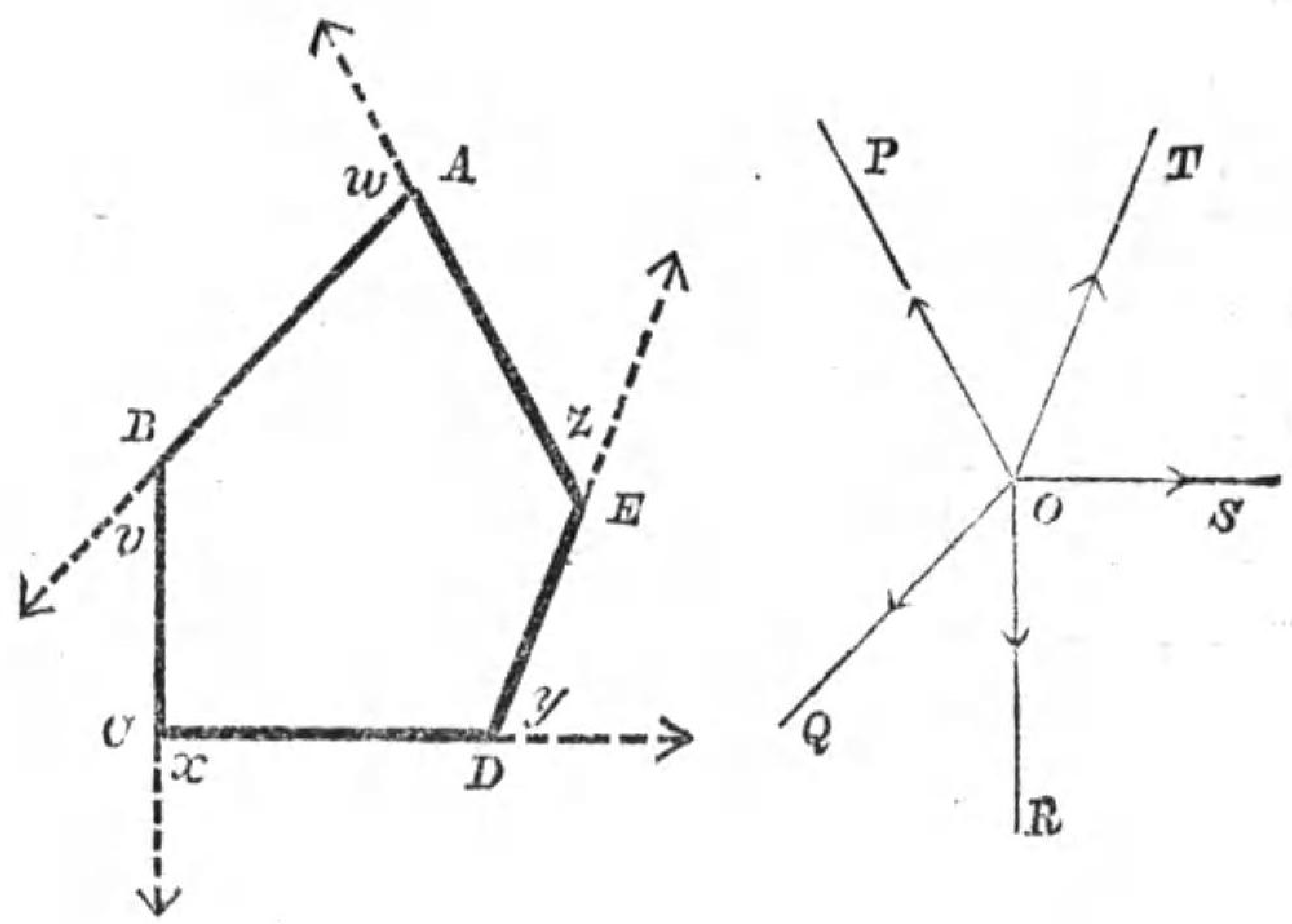
多角形ハ,其ノ邊數ニ依リテ之ヲ**四邊形,五邊形**,…… ト稱ス. 四邊形,五邊形,…… ニハ夫々4角,5角,…… アルニ由リテ亦之ヲ**四角形,五角形**,…… トモ稱ス.

多角形ノ何レノ邊ノ延長モ其形內ニ入ラザルモノヲ**凸多角形**(convex P.)ト稱シ,之ニ反シテ其ノ或邊ノ延長ガ其形內ニ入ルモノヲ**凹多角形**(concave P.)ト稱ス.

[注意] 以後單ニ多角形ト云フハ凸多角形ヲ指スモノナリ.



49. 定理13 凸多角形の邊を順次に延長するとき生ずる所の外角の和は4直角に等し.



前提 凸多角形ABCDEノ邊ヲ順次ニ延長シ,生ズル所ノ角ヲ w, v, x, y, z トス.

求證 $\angle w+\angle v+\angle x+\angle y+\angle z=4$ 直角.

作圖 任意ノ一點Oヨリ OP, OQ, OR, OS, OTヲ夫々 EA, AB, BC, CD, DEト平行ニ且ツ同ジ向キニ引ク

證明 OPトOQトハ夫々EA,ABニ平行ニシテ且ツ同ジ向キニアリ.

$\therefore \angle w=\angle POQ,$ 〔定理11〕

同樣ニ $\angle v=\angle QOR,$

$\angle x=\angle ROS,$

$\angle y=\angle SOT,$

$\angle z=\angle TOP,$

$\therefore \angle w+\angle v+\angle x+\angle y+\angle z$

$=$(Oニ於ケル諸角ノ和)

$=4$直角. 〔定理1ノ系〕

50. 系 凸多角形の內角の和に4直角を足したるものは邊數の二倍だけの直角に等し.

〔問題〕

1 五角形ノ角ノ和ヲ問フ.

2 十一角形ノ角ノ和ヲ問フ.

3 十六邊形ノ邊ヲ順次ニ延長スルトキ生ズル所ノ外角ノ和ヲ問フ.

51. 正多角形.

多角形ノ邊ガ總テ相等シク,角モ總テ相等シキモノヲ**正多角形**(regular polygon)ト稱ス.

正多角形ハ其邊數ガ5,6,……ナルニ從ヒテ之ヲ**正五角形,正六角形,**……ト稱ス.

〔問　題〕

1　正八角形ノ外角ノ大サハ各々幾直角ナルカ.

2　正十角形ノ一內角ノ大サ如何.

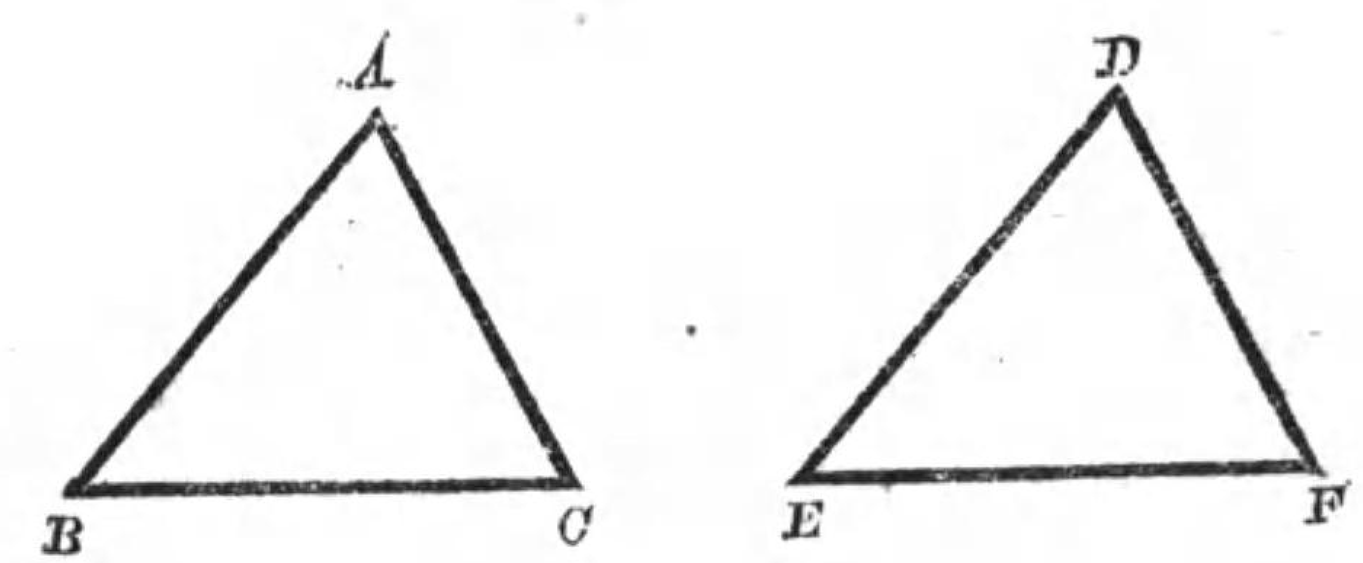
3　正十二角形ノ內角ハ各々幾度ナルカ.

4　正多角形ノ外角ガ$\frac{2}{3}$直角ナルモノハ何角形ナルカ.

第四章　相合する三角形

52. 相等しき(又は相合する)圖形.　二ツノ圖形ヲ重ネテ全ク相合セシムルコトヲ得ルトキハ,此二ツハ**相等シ**ト云フ.

例ヘバ△DEFヲ△ABCノ上ニ重ヌルニ,DハAト,EハBト,又FハCト,悉ク合スルトキハ,此兩三角形ハ全ク相等シト云フナリ.

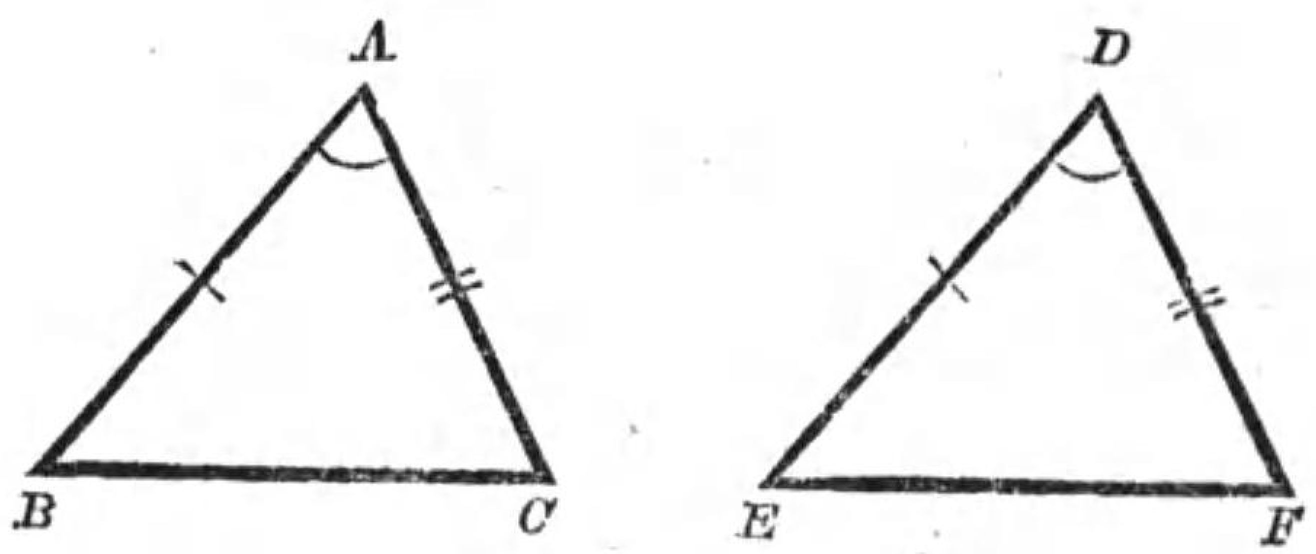


全ク相等シキコトヲ**相合ス**(congruent)トモイフ.

相合スルコトヲ表ハスニハ,記號〔$\equiv$〕ヲ用フ.

例ヘバ,　△ABC$\equiv$△DEF　ト書クガ如シ.

53. 定理14　一三角形の二邊が夫々他三角形の二邊に等しく,且つ其の夾む所の角も相等しければ,其兩三角形は相合す



前提　二ツノ △ABC, DEF ニ於テ

AB＝DE, AC＝DF, ∠A＝∠D.

求證　△ABC≡△DEF

證明　△ABC ヲ △DEF ノ上ニ重ネ A ハ D ノ上ニ, AB ハ DE ノ上ニ重ナル樣ニス,

然ルニ, AB＝DE,　〔前提〕

∴ B ハ E ニ合ス.

又 ∠BAC＝∠EDF,　〔前提〕

∴ AC ハ DF ノ上ニ重ナル.

又 AC＝DF,　〔前提〕

∴ C ハ F ニ合ス.

∴ △ABC≡△DEF.

〔問　題〕

1　△ABC ノ一邊 BC ノ中點ヲ D トシ, AD ヲ E マデ延長シテ, DE＝AD トスレバ,

AB＝CE.

2　直線 AB ノ中點 X ニ於テ XY ヲ AB ニ垂直ニ立ツルトキハ, AY＝BY.

*3　二等邊△の相等しき邊の夾む角の二等分線は第三邊を垂直に二等分す.

4　四邊形 ABCD ニ於テ, AB ＝ DC, 且ツ AB ∥ DC ナレバ,

AD＝BC.

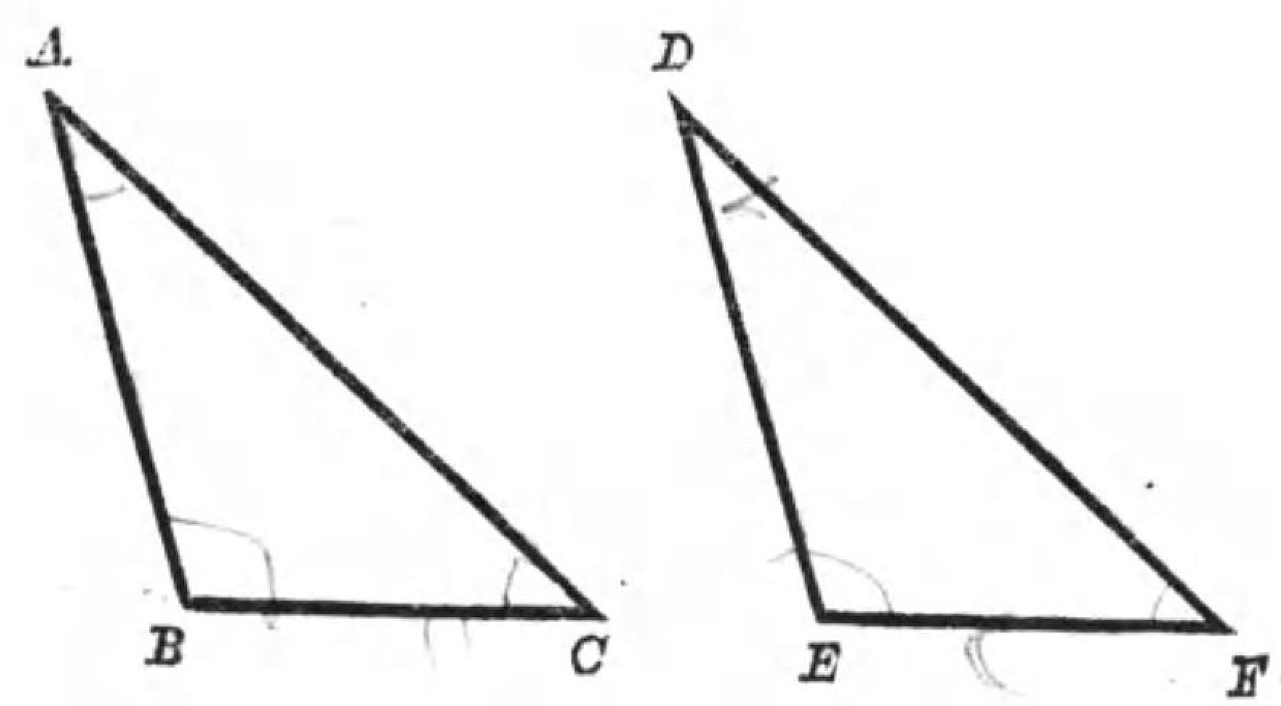
5　且ツ　AD ∥ BC.

6　二直線 AB,CD ガ O ニ於テ互ニ二等分スレバ,

AC＝DB 且ツ AC ∥ DB.

7　又　AD＝CB 且ツ AD ∥ CB.

54. **定理15** 一三角形の一邊が他の三角形の一邊と相等しく,且つ一方の二角が他の方の之に對應する二角と夫々相等しければ,其兩三角形は相合す.



前提 兩△ABC, DEF ニ於テ,

$$BC=EF,$$

且ツ△ABC ノ二角ト△DEF ノ之ニ對應スル二角トハ夫々相等シ.

求證 $\triangle ABC \equiv \triangle DEF.$

證明 △ABC ノ二角ハ夫々△DEF ノ二角ト相等シ.

∴(△ABC ノ第三角)=(△DEF ノ第三角). 〔定理12,系5〕

$$\therefore \begin{cases} \angle A=\angle D \\ \angle B=\angle E \\ \angle C=\angle F. \end{cases}$$

今△ABC ヲ△DEF ノ上ニ置キ,B ハ E ノ上ニ,BC ハ EF ノ上ニ,重ナル様ニスルニ,

$BC=EF$ 〔前提〕

∴ C ハ F ニ合ス.

$\angle B=\angle E,$ 〔證明濟〕

∴ AB ハ DE ノ上ニ重ナル.

故ニ A ハ ED 又ハ其ノ延長ノ上ニ重ナル.

又 $\angle C=\angle F,$ 〔證明濟〕

∴ CA ハ FD ノ上ニ重ナル;

故ニ A ハ FD 又ハ其ノ延長ノ上ニ重ナル.

∴ A ハ D ニ合ス.

∴ $\triangle ABC \equiv \triangle DEF.$

〔問　題〕

[1] 三角形ノ一角ノ二等分線ガ其ノ對邊(卽チ其角ニ對スル邊)ヲ直角ニ二等分スレバ,其三角形ハ二等邊三角形ナリ.

[2] 全ク相等シキ △ABC,DEF ニ於テ相對應スル角 ∠A,∠D ノ二等分線 AG,DH ガ其ノ對邊ト交ル點ヲ夫々 G,H トスレバ,

AG＝DH.

[3] 又　　BG＝EH.

[4] 角ノ二等分線上ノ一點ヨリ其ノ二邊へ引ケル垂線ハ相等シ,

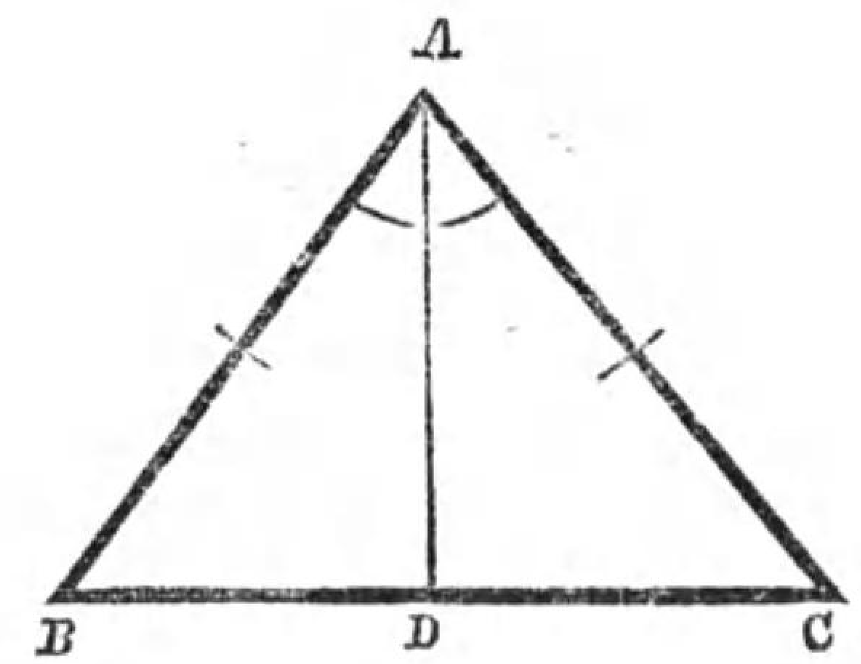
[5] ▱ABCD ニ於テハ, AB＝CD.

[6] △ABC ニ於テ AB＝AC ナレバ, B,C ヨリ其ノ對邊ヘ引ケル垂邊ハ相等シ.

[7] △ABC ニ於テ ∠B＝∠C ナレバ, B,C ヨリ其ノ對邊マデ下セル垂線ハ相等シ.

[8] △ABC ニ於テ ∠B＝∠C ナレバ, BC ノ中點 M ヨリ二邊 AB,AC マデ引ケル垂線 ME,MF ハ相等シ.

55. **[定理16]** 三角形の二邊相等しければ,此二邊に對する角も相等し.



[前提] △ABC ニ於テ, AB＝AC.

[求證] ∠C＝∠B.

[作圖] ∠A ノ二等分線 AD ヲ引キ,其ノ對邊ト交ル點ヲ D トス.

[證明] △ABD,ACD ニ於テ

$$\begin{cases} AB=AC & \text{〔前提〕} \\ AD\ \text{ハ共通} & \\ \angle BAD=\angle CAD\text{(二邊ノ夾ム角)} & \text{〔作圖〕} \end{cases}$$

∴ △ABD≡△ACD,　　〔定理14〕

∴ ∠B＝∠C.

56. 二等邊三角形の邊,底,頂角,頂點,底角.

二等邊三角形ニ於テ相等シキ二邊ヲ單ニ其二等邊三角形ノ邊,他ノ一邊ヲ其ノ底邊又ハ底(base),底ノ對角ヲ其ノ頂角,頂角ノ頂點ヲ其ノ頂點,又其底ノ兩端ニ於ケル各角ヲ其ノ底角ト稱ス.

〔問題〕

[1] 二等邊三角形ノ底角ハ鋭角ナリ.

[2] 二等邊三角形ノ底角ガ頂角ノ二倍ナルトキハ,其底角ノ大サ各々何程ナルカ.

[*3] 等邊三角形は亦等角△なり; 即ち△の三邊が皆相等しければ,其の角も亦皆相等し.

[4] 二等邊△ノ邊AB,ACヲ底ノ方ニ夫々X,Yマデ延長スルトキ,外角XBC,YCBハ相等シ.

[5] 直線ABノ中點OヨリOAニ等シクOCヲ引クトキハ,∠ACBハ直角ナリ.

[6] 二等邊△ノ頂點ヨリ底マデ引ケル垂線ハ底ヲ二等分ス.

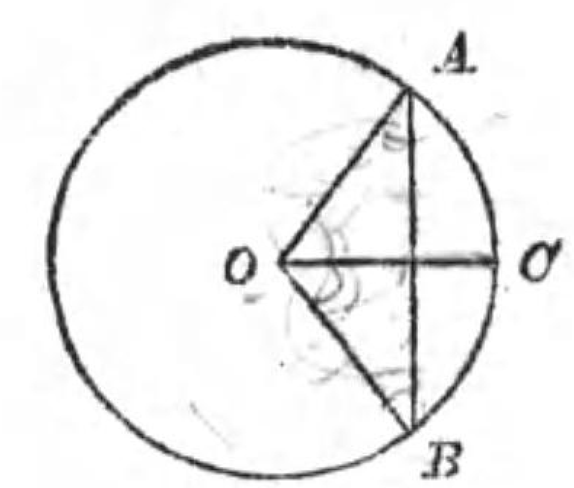
[7] 二等邊△ノ底角ノ二等分線ノ其△內ニ在ル部分ハ相等シ.

57. 圓. その中心,半徑.

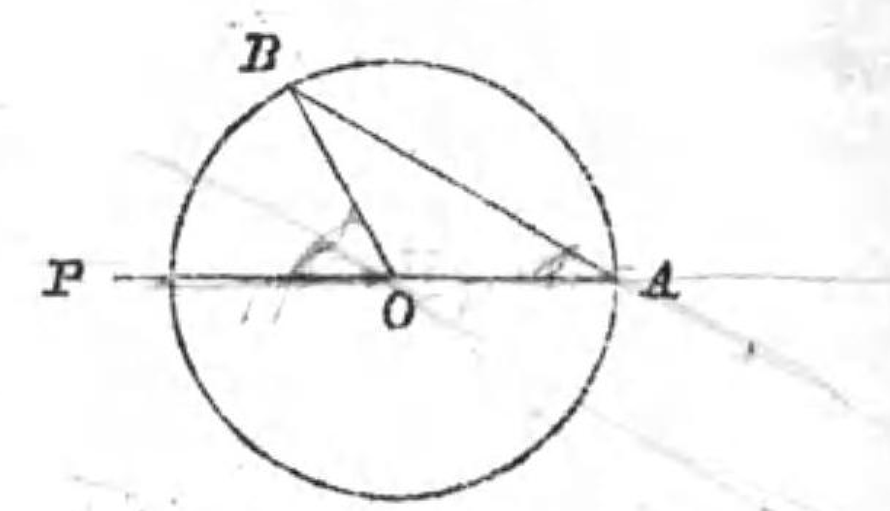
一平面上ニ在ル曲線(即チ平面曲線)ノ上ノ點ガ何レモ一定點ヨリ一定距離ニ在ルモノヲ圓(circle)ト稱シ,其一定點ヲ圓ノ中心(centre),中心ヨリ圓ノ上ノ一點ニ至ル直線ヲ圓ノ半徑(radius)ト稱ス.

一ツノ圓ノ半徑ハ皆相等シ.

〔問題〕



[1] 中心Oナル圓ノ半徑OA,OBノ夾ム角ヲ二等分スル所ノ半徑OCハABヲ直角ニ二等分ス.

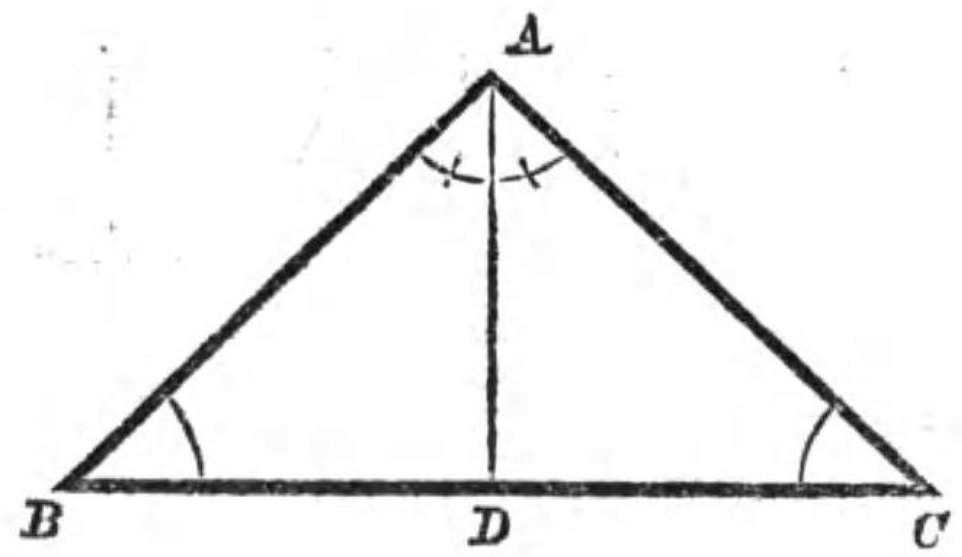


[2] OA,OBヲ圓ノ半徑トシ,AOヲOノ方ヘPマデ延長スレバ,

$\angle BOP = 2\angle BAP$.

58. 定理17 三角形の二角相等しければ,此二角に對する邊も相等し.

(定理16の逆)



前提 △ABC ニ於テ, ∠B=∠C.

求證 AC=AB.

作圖 ∠BAC ノ二等分線 AD ヲ引キ, BC ト D ニ於テ交ラシム.

證明 兩△ABD, ACD ニ於テ

∠B=∠C (前提)
∠BAD=∠CAD (作圖)
AD ハ共通

∴ △ABD≡△ACD, (定理15)

∴ AB=AC.

〔問題〕

*1 等角三角形は亦等邊△なり.

2 二等邊△ノ邊ヲ其ノ底邊ニ平行ナル直線ニテ切レバ,亦二等邊△ヲ生ズ.

D 3 二等邊△ABC ノ底角 B,C ノ二等分線ノ相交ル點ヲ O トスレバ,

△OBC モ二等邊△ナリ;

C 4 又 OA ハ ∠A ヲ二等分ス.

5 角ノ二等分線上ノ一點ヨリ,其ノ一邊ニ平行ニ直線ヲ引キテ他ノ一邊ニ會セシムレバ,二等邊△ヲ生ズ.

6 四邊形 ABCD ニ於テ, AB=AD, 且ツ ∠B=∠D ナルトキハ,

CB=CD.

7 等邊三角形ノ角ノ大サ各々何程ナルカ.

59. $\boxed{\text{定理18}}$ **一三角形の三邊が他三角形の三邊と夫々相等しきときは此兩三角形は相合す.**

$\boxed{\text{前提}}$ $\triangle ABC, DEF$ ニ於テ

$BC=EF,\quad CA=FD,\quad AB=DE.$

$\boxed{\text{求證}}$ $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$

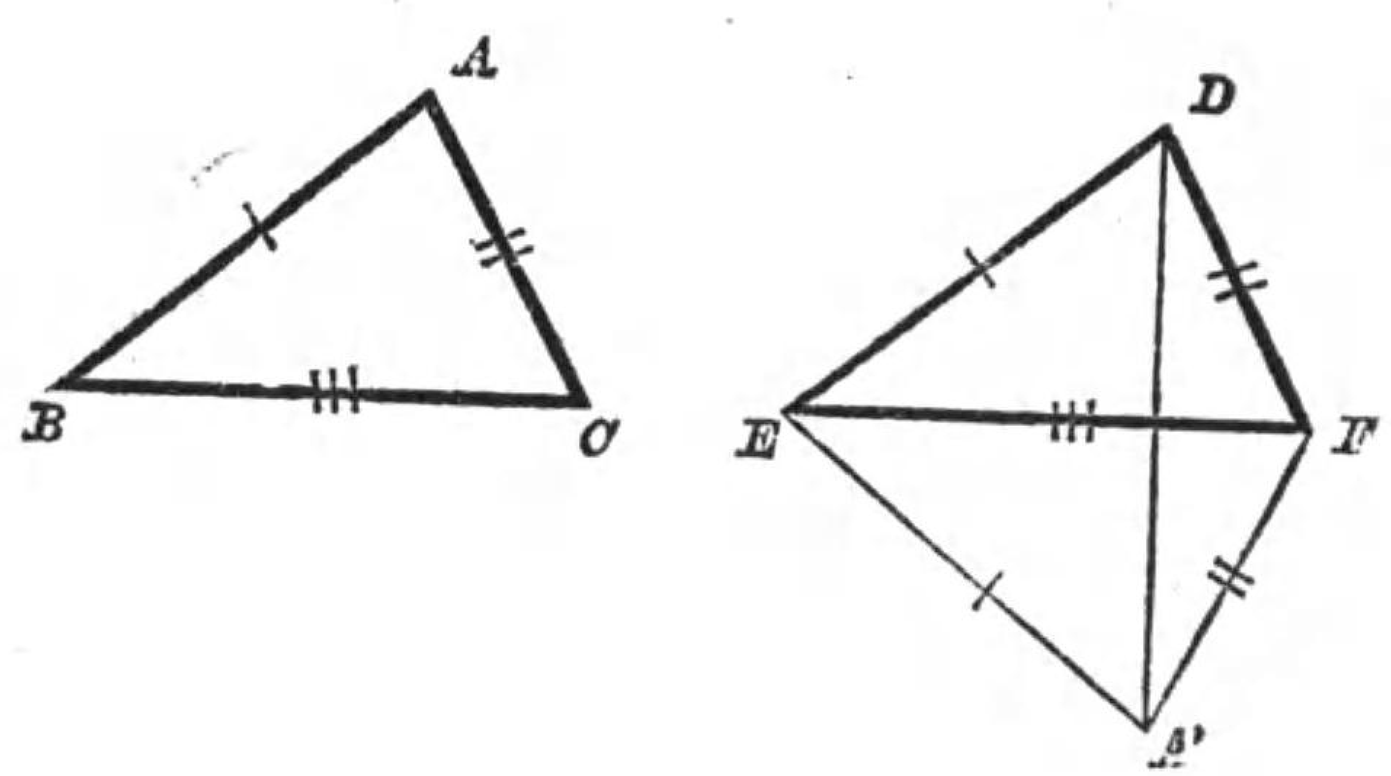
$\boxed{\text{證明}}$ $\triangle ABC$ ヲ裏返シテ $\triangle DEF$ ノ下方ニ附ケ,

B ハ E ノ上ニ, BC ハ EF ノ上ニ重ナリ,

且ツ A ト D トハ EF ノ反對ノ側ニ在ル樣ニシ,

其時 A ノ落ツル點ヲ A′ トス.

DA′ ヲ結ビ付ク.



$BC=EF,$ 〔前提〕

∴ C ハ F ト相合ス.

玆ニ (1) DA′ ガ EF ト交ル場合ト,

(2) DA′ ガ EF ノ一端ヲ通ル場合ト,

(3) DA′ ガ EF ノ延長ト交ル場合トアリ,

(1) DA′ ガ EF ト交ル場合ノ證明:

$\triangle EDA'$ ニ於テ,

$ED=EA'(=BA),$

$\therefore \angle EA'D=\angle EDA'$ 〔定理16〕

$\triangle FDA'$ ニ於テ,

$FD=FA'(=CA),$

$\therefore \angle FA'D=\angle FDA'.$ 〔定理16〕

$\therefore \angle EA'D+\angle FA'D=\angle EDA'+\angle FDA',$

即チ $\angle EA'F=\angle EDF,$

即チ $\underline{\angle BAC=\angle EDF.}$

$\therefore \triangle ABC, DEF$ ニ於テ

$$\begin{cases} AB=DE & \text{〔前提〕} \\ AC=DF & 〃 \\ \angle BAC=\angle EDF & \text{〔前證〕} \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC \equiv \triangle DEF.$

〔問　題〕

[1] 前定理ノ(2)ノ場合ヲ證明セヨ.

[2] 前定理ノ(3)ノ場合ヲ證明セヨ.

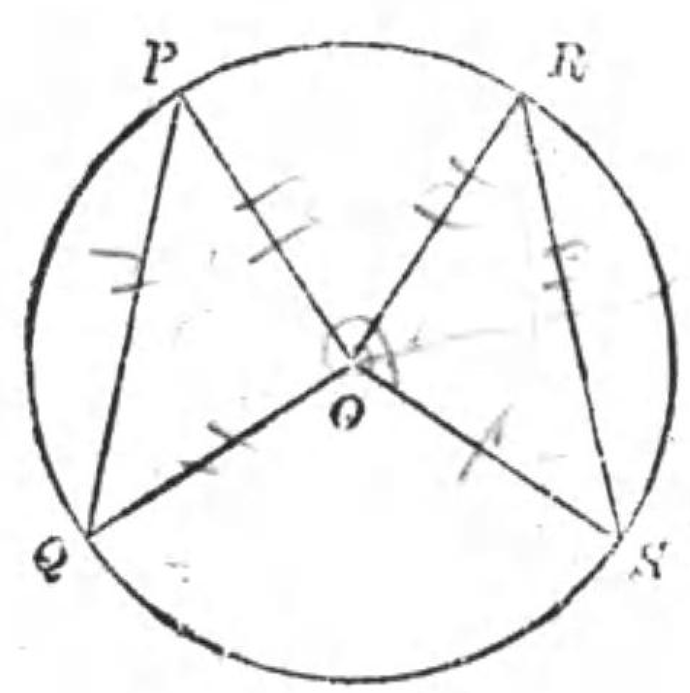
[3] 四邊形 ABCD ニ於テ, AB=AD, CB=CD ナルトキハ, AC ハ ∠A 及ビ ∠C ヲ二等分ス.

[4] 二等邊 △ABC ノ底角 B,C ノ二等分線ノ交ル點ヲ O トスレバ, OA ハ ∠A ヲ二等分ス.

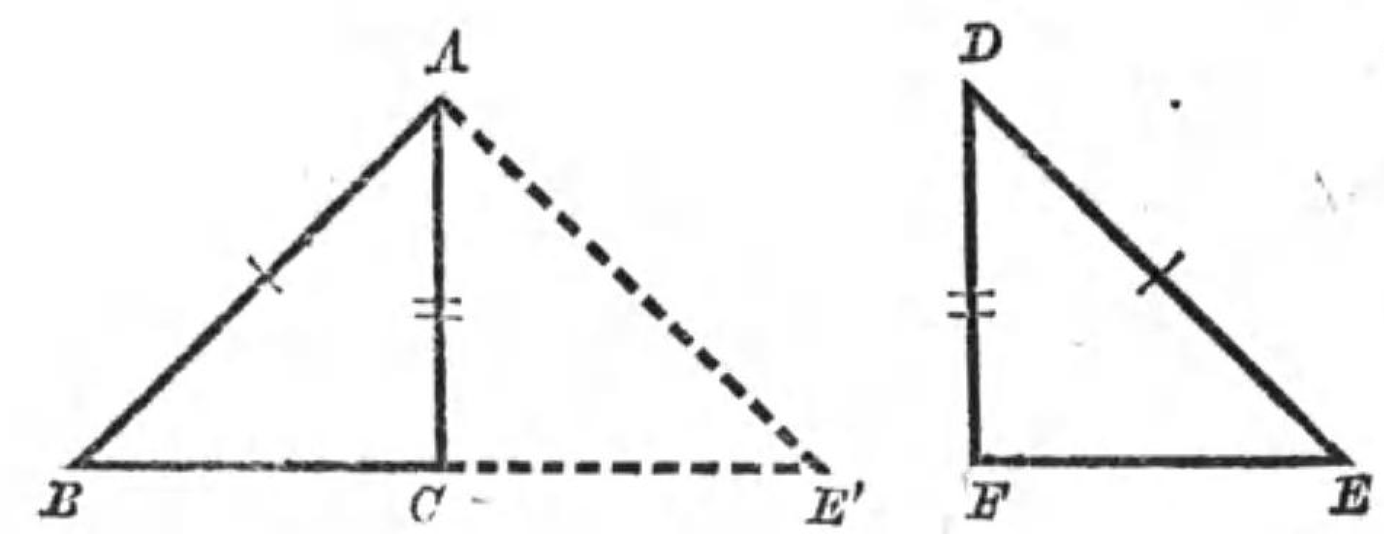
[5] 四邊形ノ對邊(即チ相對スル邊)相等シキモノハ ▱ ナリ.

[6] 中心 O ナル圓ノ上ニ四點 P, Q, R, S. ヲ PQ=RS ナル様ニ設クレバ,

∠POQ=∠ROS.



60. 定理19 一の直角三角形の斜邊及び一邊が他の直角三角形の斜邊及び一邊と夫々相等しければ,此兩三角形は相合す.



前提 △ABC,DEF ニ於テ,

C モ F モ直角,

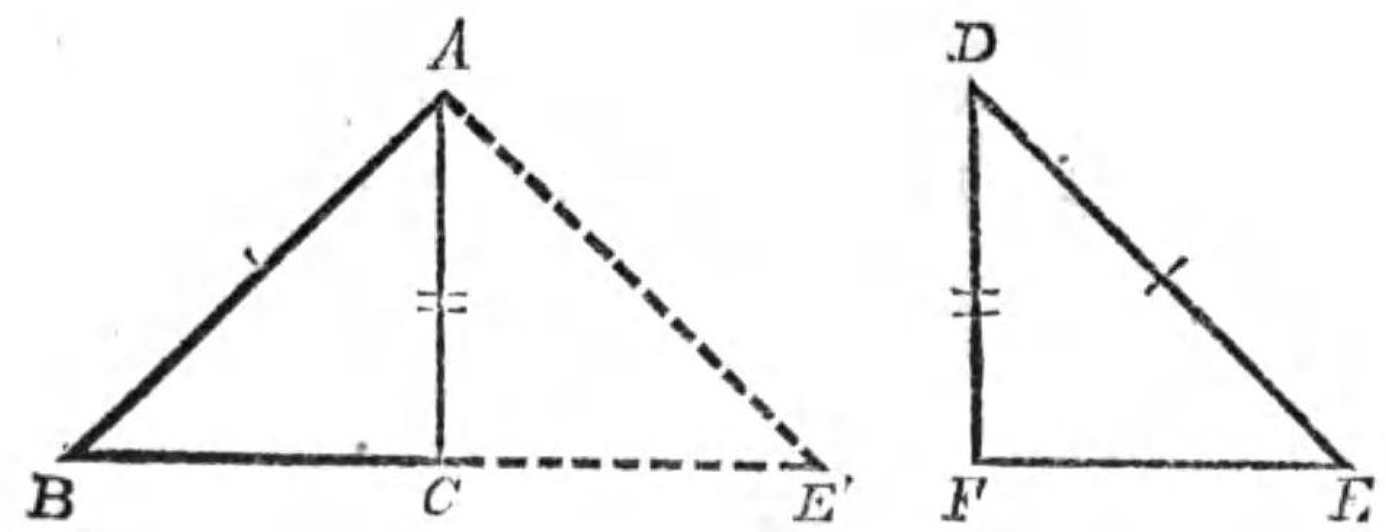
且ツ AB=DE, AC=DF.

求證 △ABC≡△DEF.

證明 △DEF ヲ移シテ, D ハ A ノ上ニ, DF ハ AC ノ上ニ,重ナリ,且ツ E ト B トハ AC ノ反對ノ側ニ在ル様ニ置キ,其時 E ハ E′ ニ落ツトス.

DF=AC　　〔前提〕

∴ F ハ C ト相合ス.



∠ACB モ ∠ACE′(即チ DFE) モ直角ナリ,
〔前提〕

$\therefore$ BCE′ ハ一直線ナリ.　〔定理[9]〕

$\therefore$ ABE′ ハ一ツノ△ナリ.

此△ニ於テ

AB=AE′(=DE),　〔前提〕

$\therefore$ ∠E′=∠B.　〔定理[16]〕

即チ兩△ABC, AE′C ニ於テ

$\begin{cases} \angle B=\angle E' & \text{〔前證〕} \\ \angle ACB=\angle ACE' & \text{〔前提〕} \\ AB=AE' & \text{〃} \end{cases}$

$\therefore$ △ABC≡△AE′C,　〔定理[15]〕

$\therefore$ △ABC≡△DEF.

〔問題〕

[*1] 二等邊△の頂點より底まで引ける垂線は底を直角に二等分す.

[2] 二等邊△ノ頂點ヨリ底マデ引ケル垂線ハ之ヲ相等シキ兩△ニ分ツ.

[3] 三角形ノ二ツノ頂點ヨリ其ノ對邊マデ引ケル垂線ガ相等シケレバ,其ノ對邊ハ相等シ.

[4] 三角形ノ一邊ノ中點ヨリ他ノ二邊マデ引ケル垂線相等シケレバ,其ノ三角形ハ二等邊三角形ナリ.

[5] 中心 O ナル圓ノ一ツノ弦 AB アリ. O ヨリ AB マデ引ケル垂線ハ AB ヲ二等分ス.

第五章　作圖題

61. **作圖上の規定.** 作圖ヲ爲スニハ,目盛ナキ定木ト兩脚規(こんぱす)トノミヲ用フルモノトス,而シテ定木ハ次ノ作圖ニ用ヒラル:

(1) 二點を通る所の直線を引くこと,

(2) 既に引ける直線を延長すること.

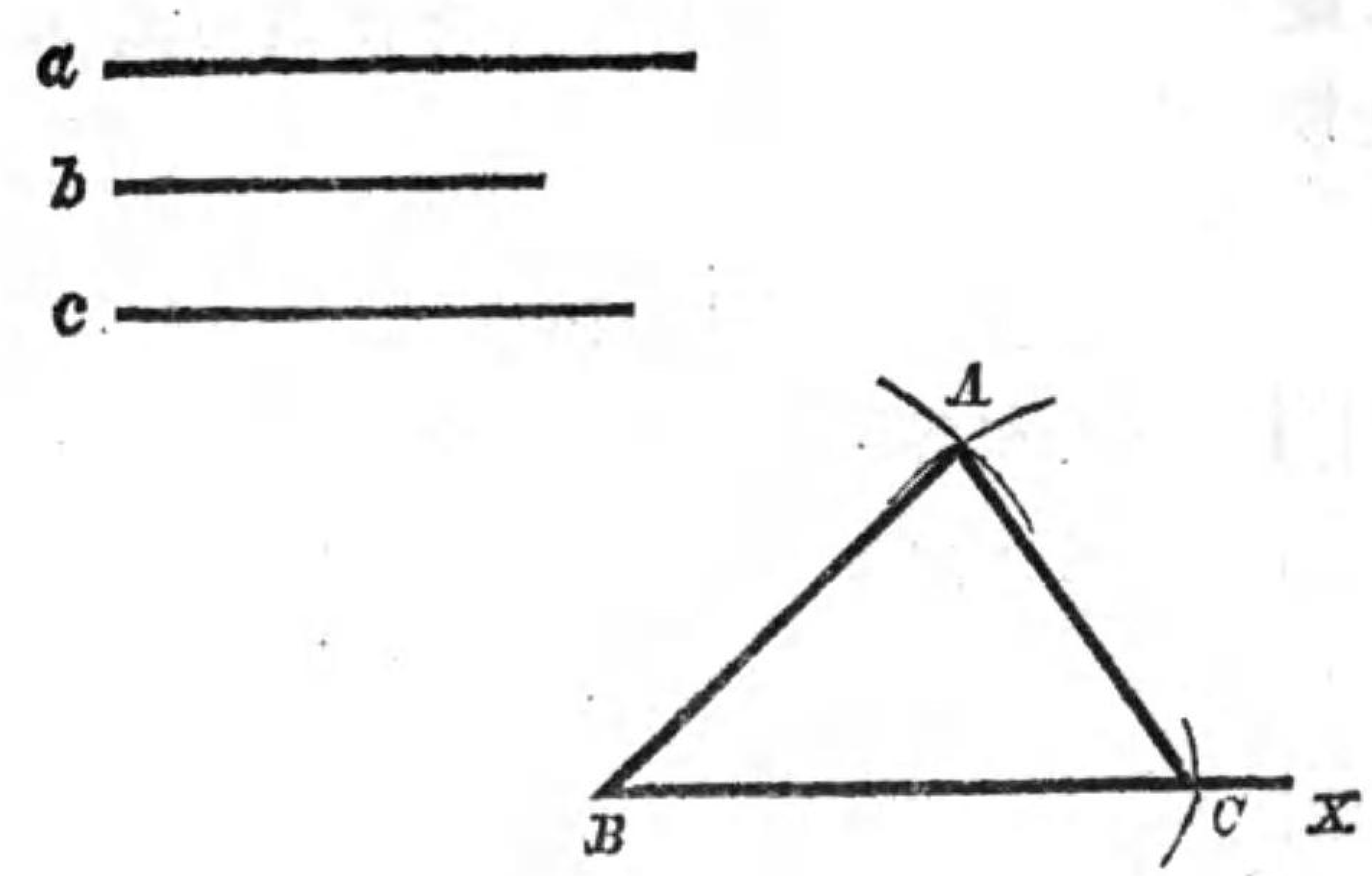
又,兩脚規ハ次ノ作圖ニ用ヒラル:

(3) 定點を中心とし,定直線を半徑とする圓を畫くこと

(4) 距離を移すこと(即ち一直線上に他直線に等しき部分を作ること)(實ハ(3)ニ含マル).

$\boxed{\text{注意}}$ 作圖ハ,既ニ證明シタル定理ニ據リテ,其ノ正シキコトヲ證明スベキモノトス.

62. $\boxed{\text{作圖題1}}$ **與へられたる三直線を三邊として三角形を作ること.**



a, b, c ヲ與ヘラレタル三直線トス.

$\boxed{\text{作圖}}$ 直線BXヲ引キ,BXノ上ニaニ等シキ部分BCヲ作ル.

Bヲ中心トシ,cヲ半徑トスル圓**ヲ畫ク.

C 〃 b 〃

其兩圓ノ交ル點ヲAトス.

直線AB, ACヲ引ク.

然ルトキハ,ABCハ所要ノ△ナリ.

**此圓ハ全部ヲ畫クニ及バズ,其ノ必要ナル部分ノミニ止メテ可ナリ. 以下モ之ニ倣フ.

注意 與ヘラレタル三直線中ノ一線ガ他ノ二線ノ和ヨリ大ナルトキハ,此作圖ハ爲スコトヲ得ズ.

〔問題〕

[1] 全ク相等シキ三角形ヲ二ツ書クコト**

[2] 一邊ノ與ヘラレタル等邊三角形ヲ作ルコト.

[3] 任意ニ ∠ABC ヲ書キ, AB, BC ヲ相接スル二邊トスル平行四邊形ヲ作ルコト.

[4] 60° ノ角ヲ作ルコト.

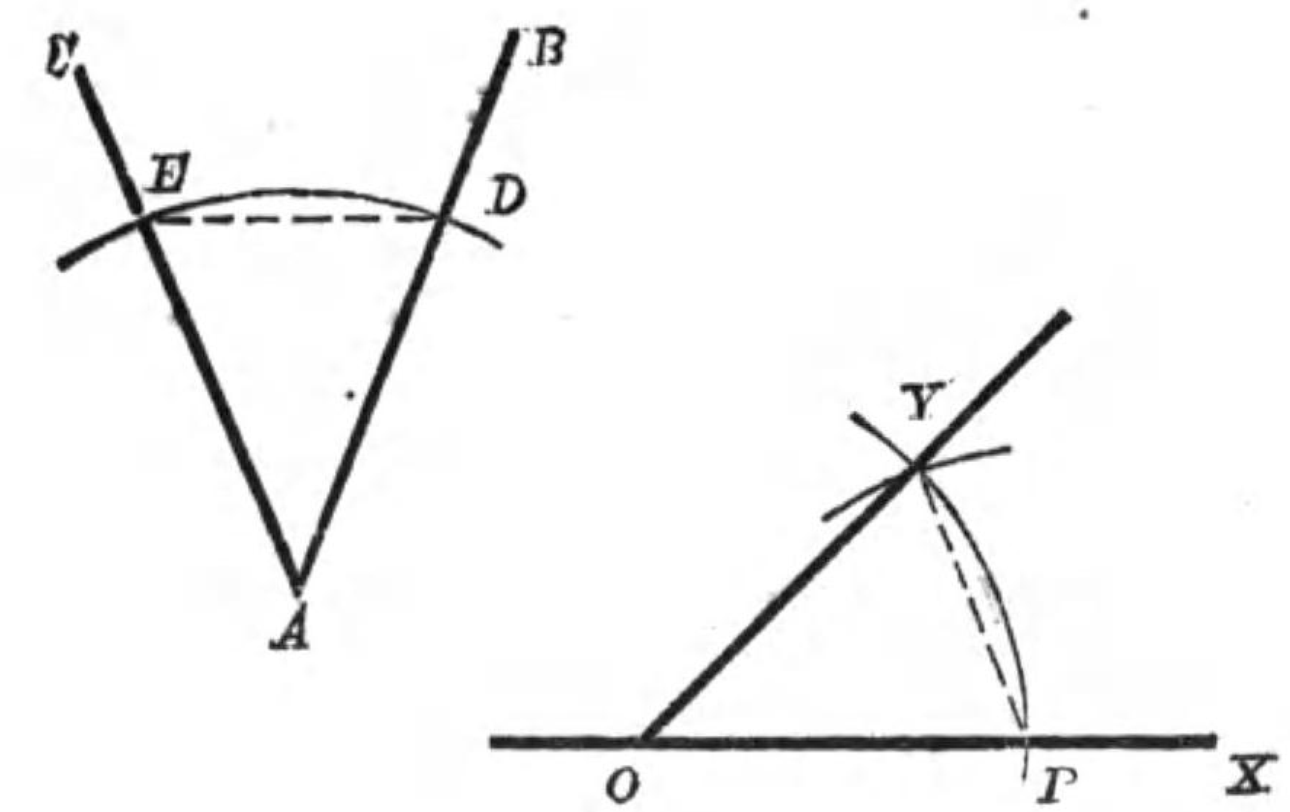
[5] 120° ノ角ヲ作ルコト.

[6] 底3寸,二ツノ等邊各々4寸ナル二等邊三角形ヲ作ルコト.

[7] 頂角 120° ニテ,二邊ノ長サ各々3寸5分ナル二等邊三角形ヲ作ルコト.

** 圖ハ必ズ充分大キク書クベシ. 餘リ小サク書クベカラズ.

63. 作圖題2 直線 OX 上の一點 O より直線 OY を引き, ∠XOY を與へられたる ∠BAC に等しからしむること.



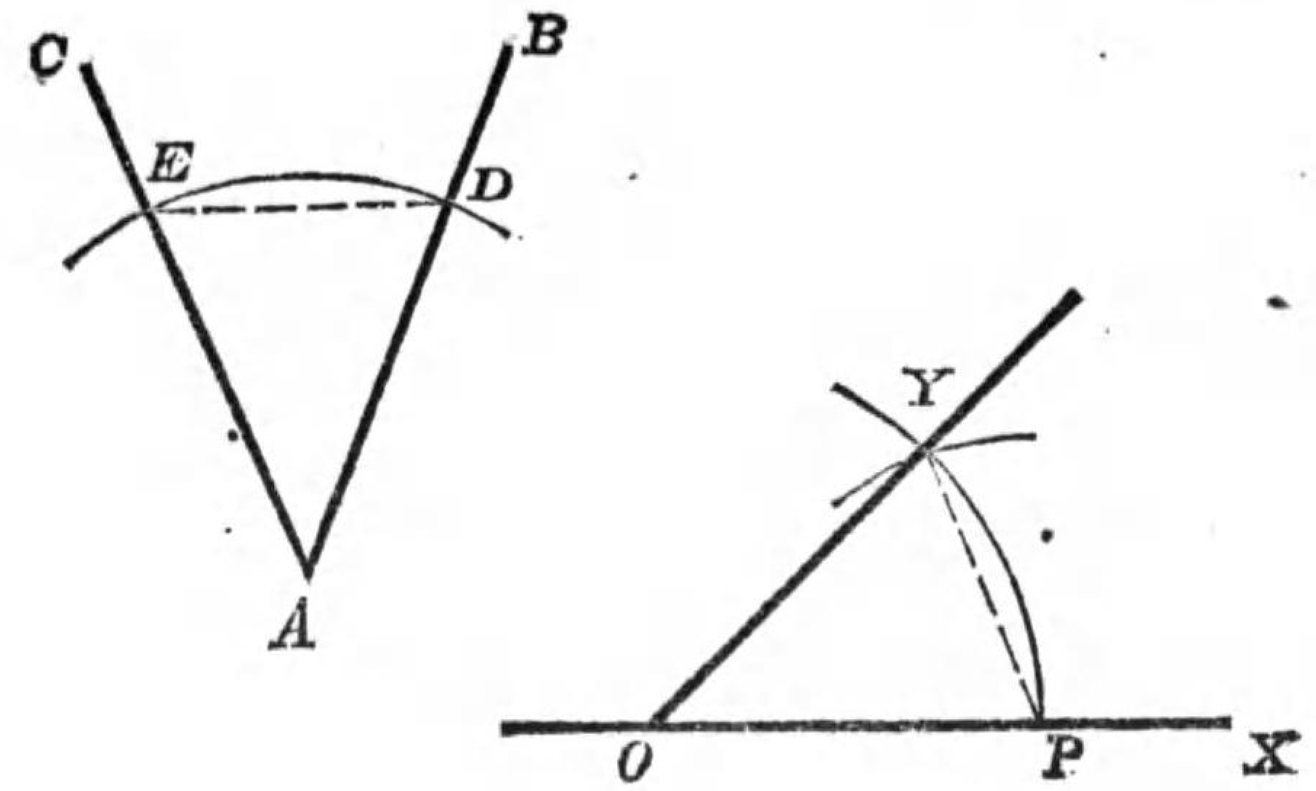
作圖 A ヲ中心トシ,任意ノ半徑ヲ以テ圓ヲ書キテ, AB,AC ト夫々 D,E ニ於テ交ラシム.

O ヲ中心トシ,前ト等シキ半徑ヲ以テ圓 PY ヲ書キ, OX ト P ニ於テ交ラシム.

P ヲ中心, DE ヲ半徑トスル圓ヲ書キ,前ノ圓 PY ト Y ニ於テ交ラシム.

直線 OY ヲ作ル.

然ルトキハ ∠XOY ハ所要ノ角ナリ.



證明　直線 DE,PY ヲ引ク.

兩 △ADE, OPY ニ於テ

$$\begin{cases} OP=AD & \text{〔作圖〕} \\ OY=AE & \text{〃} \\ PY=DE & \text{〃} \end{cases}$$

$\therefore\ \triangle POY \equiv \triangle DAE,$　〔定理15〕

$\therefore\ \angle POY=\angle DAE,$

即チ $\angle XOY=\angle BAC.$

——〔問　題〕——

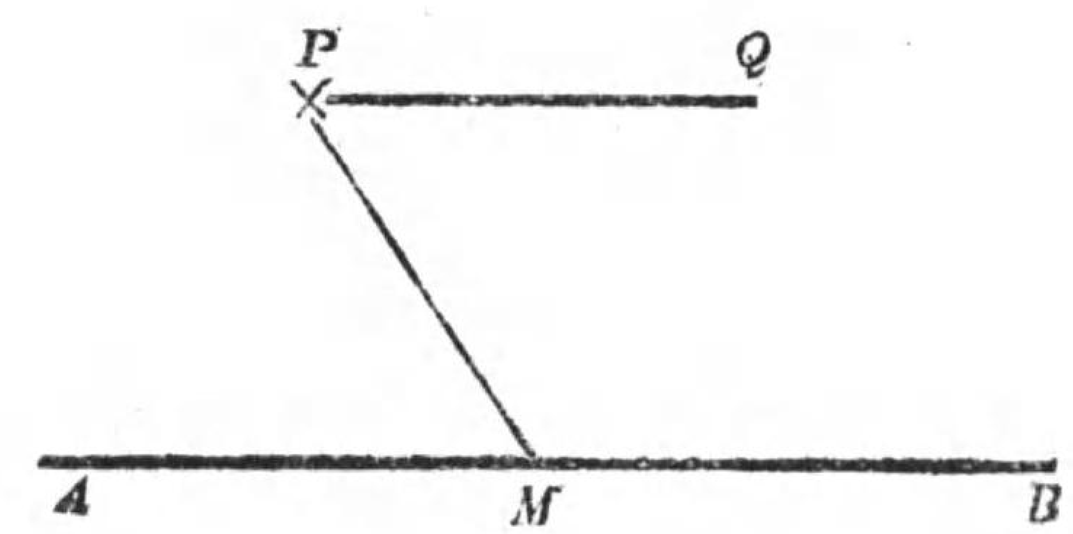
1　與ヘラレタル二直線及ビ一角ヲ夫々二邊及ビ其夾角トスル△ヲ作ルコト.

2　一邊及ビ之ニ隣レル二角ヲ與ヘラレテ,△ヲ作ルコト.

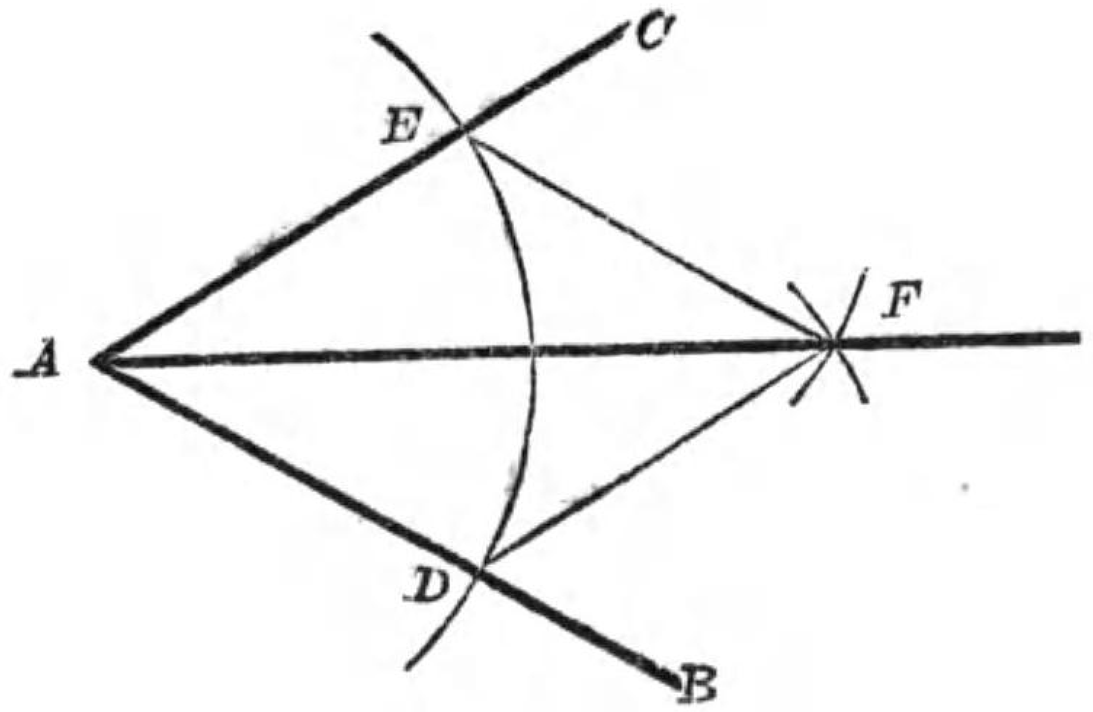
3　BC 及ビ ∠A, ∠B ヲ與ヘラレテ,三角形 ABC ヲ作ルコト.

***4**　一直線 AB と其線外の一點 P とを與へられて,P を過ぎ AB に平行なる直線を作ること.

〔P ヨリ任意ニ一直線 PM ヲ引キテ AB ヲ M ニ於テ切リ,次ニ ∠MPQ=∠PMA ナラシメヨ〕



64. **作圖題3** 與へられたる角を二等分すること.



∠BAC ヲ與ヘラレタル角トス.

作圖 AB, AC 上ニ相等シキ長サ AD, AE ヲ定メ,

適宜ノ半徑**ヲ以テ,D ト E トヲ中心トスル相等シキ圓ヲ畫キ,其相交ル點ヲ F トス.

AF ヲ結ビ付ク.

AF ハ即チ ∠BAC ノ二等分線ナリ.

**此半徑ガ短カ過ギテ,兩圓相交ラザルトキハ,半徑ヲ大ニシテ兩圓ヲ相交ラシムベシ.

證明 DF,EF ヲ結ビ付ク.

兩△ADF,AEF ニ於テ

$$\begin{cases} AD = AE & \text{〔作圖〕} \\ DF = EF & \text{〃} \\ AF \text{ ハ共通} & \end{cases}$$

∴ △ADF≡△AEF. 〔定理18〕

∴ ∠DAF=∠EAF.

故ニ AF ハ ∠BAC ヲ二等分ス.

〔問題〕

1 與ヘラレタル角ヲ四等分スルコト.

2 30° ノ角ヲ作ルコト.

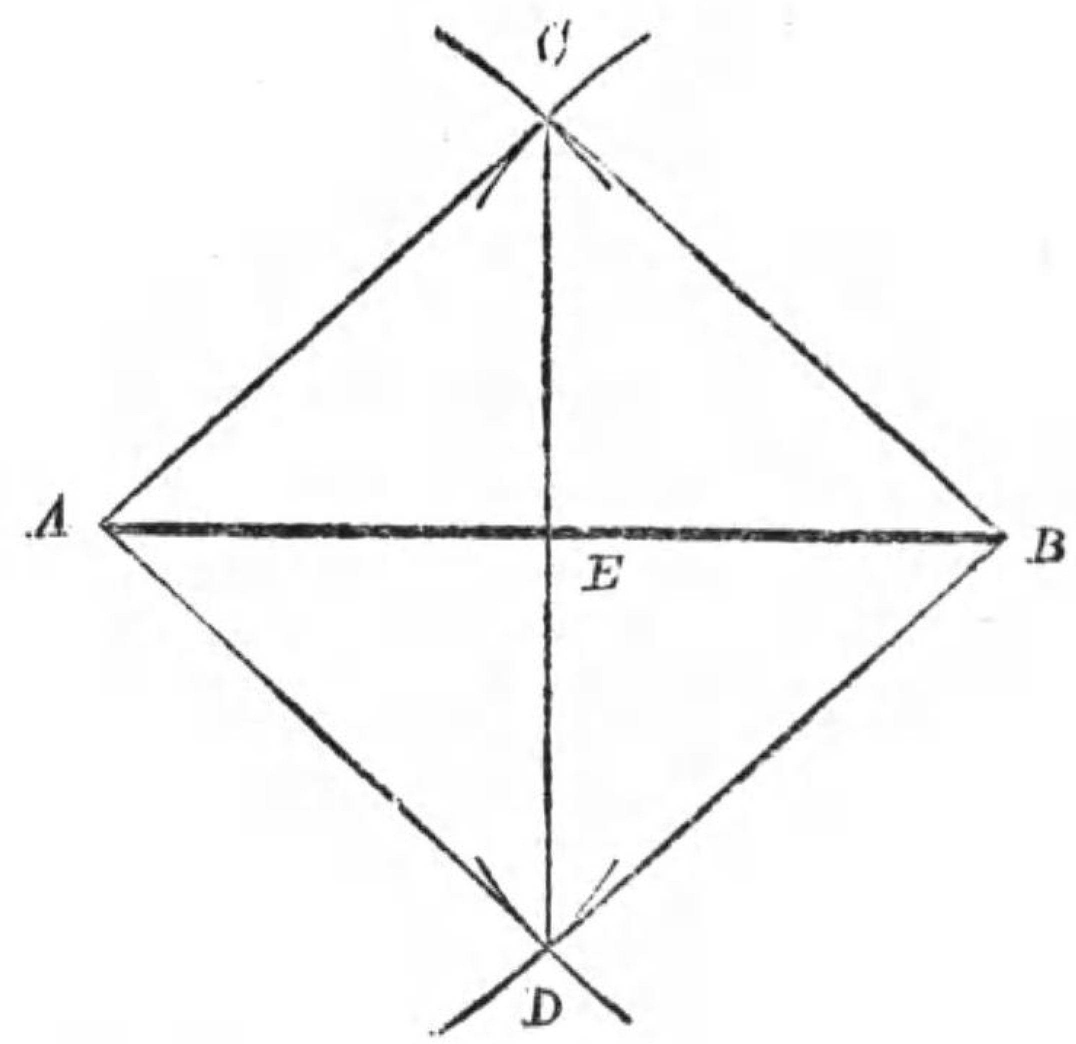
3 15° ノ角ヲ作ルコト.

4 150° ノ角ヲ作ルコト.

5 一ツノ二等邊三角形ヲ畫キ,其頂角ヲ二等分スルコト. 其二等分線ハ底ヲ二等分スルヤ否ヤヲ兩脚規ニテ驗メセ.

6 一ツノ三角形ヲ畫キ,其三ツノ角ヲ二等分スルコト.

65. 作圖題4　與へられたる直線を二等分すること.



AB ヲ與ヘラレタル直線トス.

作圖　A ト B トヲ中心トシ,

適宜ノ半徑ヲ以テ,相等シキ圓ヲ書キ,

二點C,D ニ於テ相交ラシム.

CD ヲ引キ,AB ヲ E ニ於テ切ラシム.

然ルトキハ,E ハ AB ノ中點ナリ.

證明　AC, BC, AD, BD ヲ結ビ付ク.

兩△ACD, BCD ニ於テ.

$$\begin{cases} AC=BC & \text{(相等シキ圓ノ半徑)} \\ AD=BD & (\ ,,\ ) \\ CD \text{ ハ共通} \end{cases}$$

∴ △ACD≡△BCD,　〔定理18〕

∴ ∠ACD＝∠BCD

即チ CED ハ二等邊△ CAB ノ頂角 C ヲ二等分ス.

故ニ CE ハ底 AB ヲ垂直ニ二等分ス.

〔頁45,問題 3〕

即チ E ハ AB ノ中點ナリ.

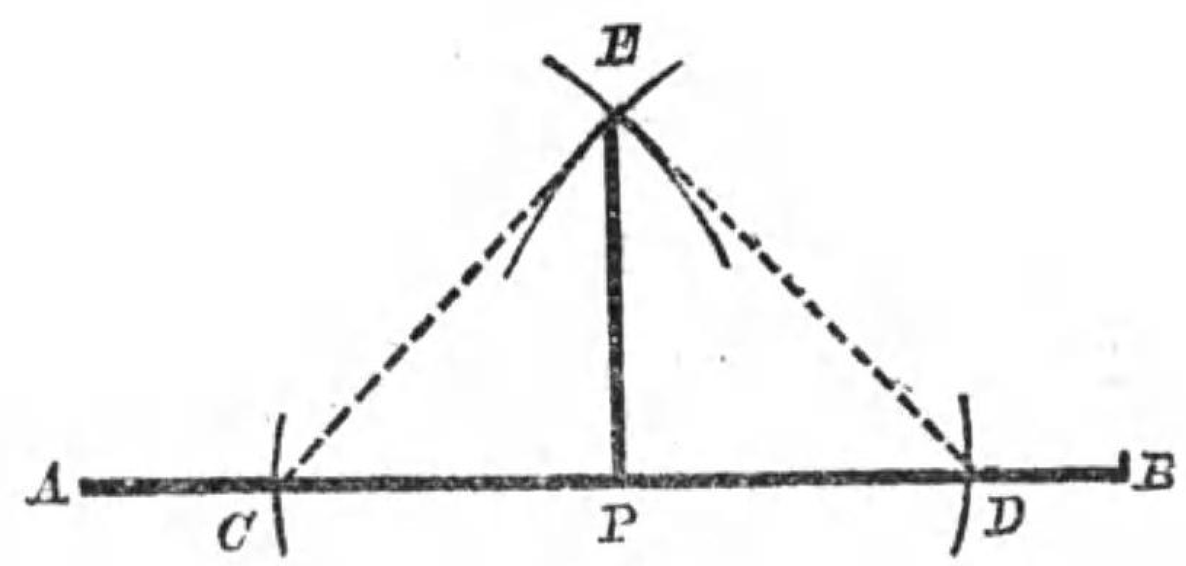
〔問題〕

1　一ツノ直線ヲ書キ,之ヲ四等分スルコト

2　一ツノ圓ニ於テ一ツノ弦(即チ一ツノ直線ノ兩端ガ圓ノ上ニ在ルモノ)ヲ書キ,此弦ヲ直角ニ二等分スル直線ヲ作ルコト.

3　一ツノ三角形ヲ作リ,其ノ三邊ノ垂直二等分線ヲ作ルコト.

66. 作圖題5 與へられたる直線 AB 上の與へられたる一點 P より垂線を立つること.



作圖 AB 上ニ P ヨリ等距離ナル點 C,D ヲ定メ C, D ヲ中心トシ適宜ノ半徑ヲ以テ相等シキ圓ヲ畫キテ,E ニ於テ相交ラシム.

PE ヲ結ブ.

然ルトキハ PE⊥AB.

證明 CE, DE ヲ結ブ.

兩 △CPE, DPE ニ於テ

PC=PD 〔作圖〕
CE=DE (相等シキ圓ノ半徑)
PE ハ共通

∴ △CPE≡△DPE, 〔定理18〕

∴ ∠EPC=∠EPD.

∴ PE⊥AB.

〔問題〕

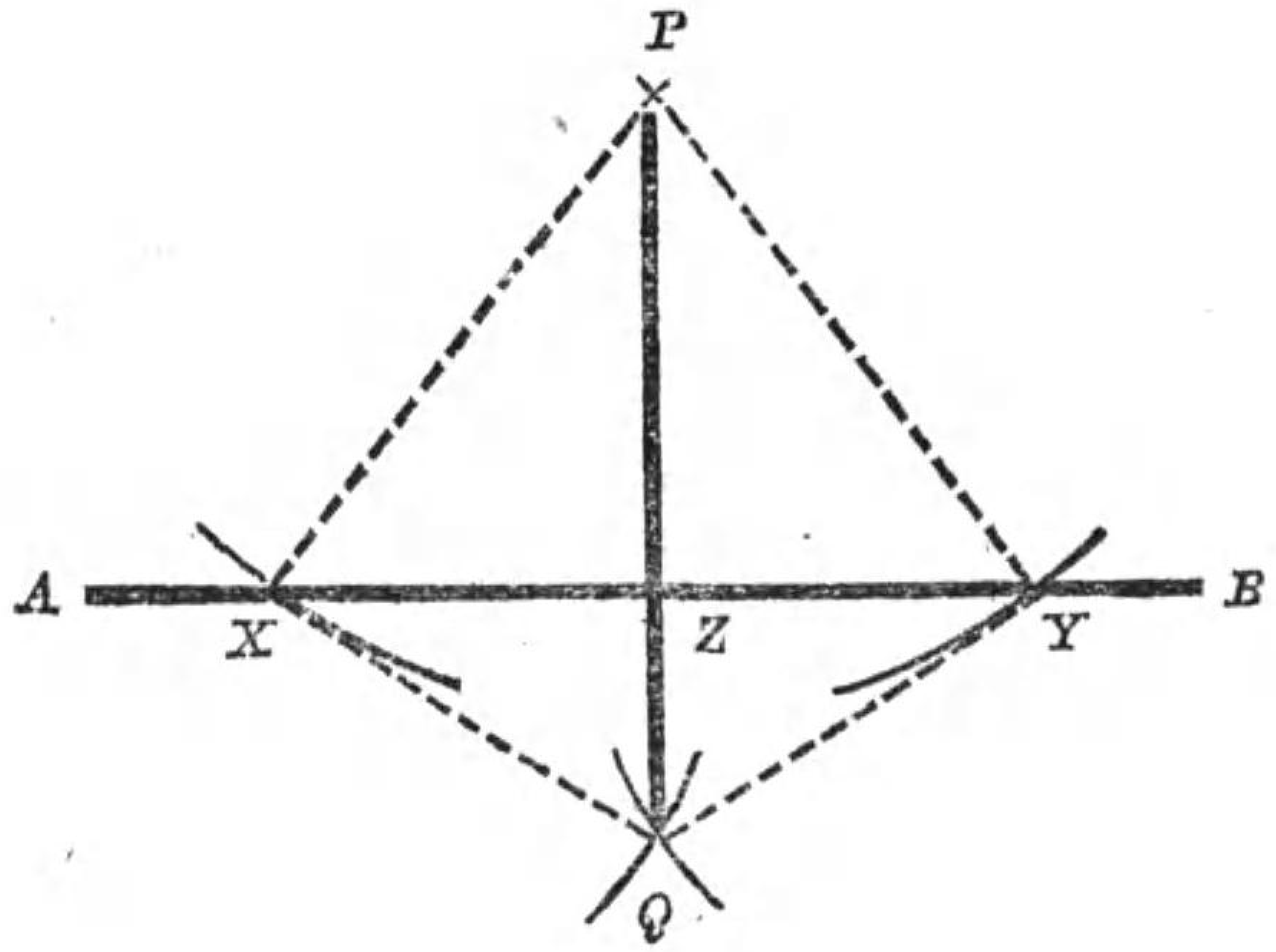
1 45°ノ角ヲ作ルコト.

2 75°ノ角ヲ作ルコト.

3 斜邊ト一邊トノ與ヘラレタル直角△ヲ作ルコト.

4 任意ニ∠AOB ヲ作リ, OA, OB 上ニ相等シク OM, ON ヲ取リ, M ニ於テ MP ヲ OA ニ垂直ニ,又 N ニ於テ NP ヲ OB ニ垂直ニ引キ, OP ヲ結ビ付クベシ. OP ハ ∠AOB ノ二等分線ナルコトヲ示セ.

67. 作圖題[6] 與へられたる直線 AB へ其の外なる與へられたる一點 P より垂線を引くこと.



作圖 P ヲ中心トスル適宜ノ圓ヲ書キテ, AB ト二點 X,Y ニ於テ交ラシム.

X, Y ヲ中心トシ,適宜ノ半徑ヲ以テ,相等シキ圓ヲ書キテ,Q ニ於テ相交ラシム.

直線 PQ ヲ引キ,Z ニ於テ AB ヲ切ラシム.

然ルトキハ,

$$PZ \perp AB.$$

證明 XP, YP, XQ, YQ ヲ結ビ付ク.

兩 $\triangle PQX$, PQY ニ於テ

$$\begin{cases} PX=PY \text{ (同ジ圓ノ半徑)} \\ QX=QY \text{ (等シキ圓ノ半徑)} \\ PQ \text{ ハ共通} \end{cases}$$

$\therefore \triangle PQX \equiv \triangle PQY,$ 〔定理18〕

$\therefore \angle XPQ = \angle YPQ.$

乃チ PZ ハ二等邊 $\triangle PXY$ ノ頂角 P ヲ二等分ス.

$\therefore PZ \perp AB$ 〔頁45, 問題3〕

〔問題〕

1 圓ノ中心ヨリ一ツノ弦ヘ垂線ヲ引クコト.

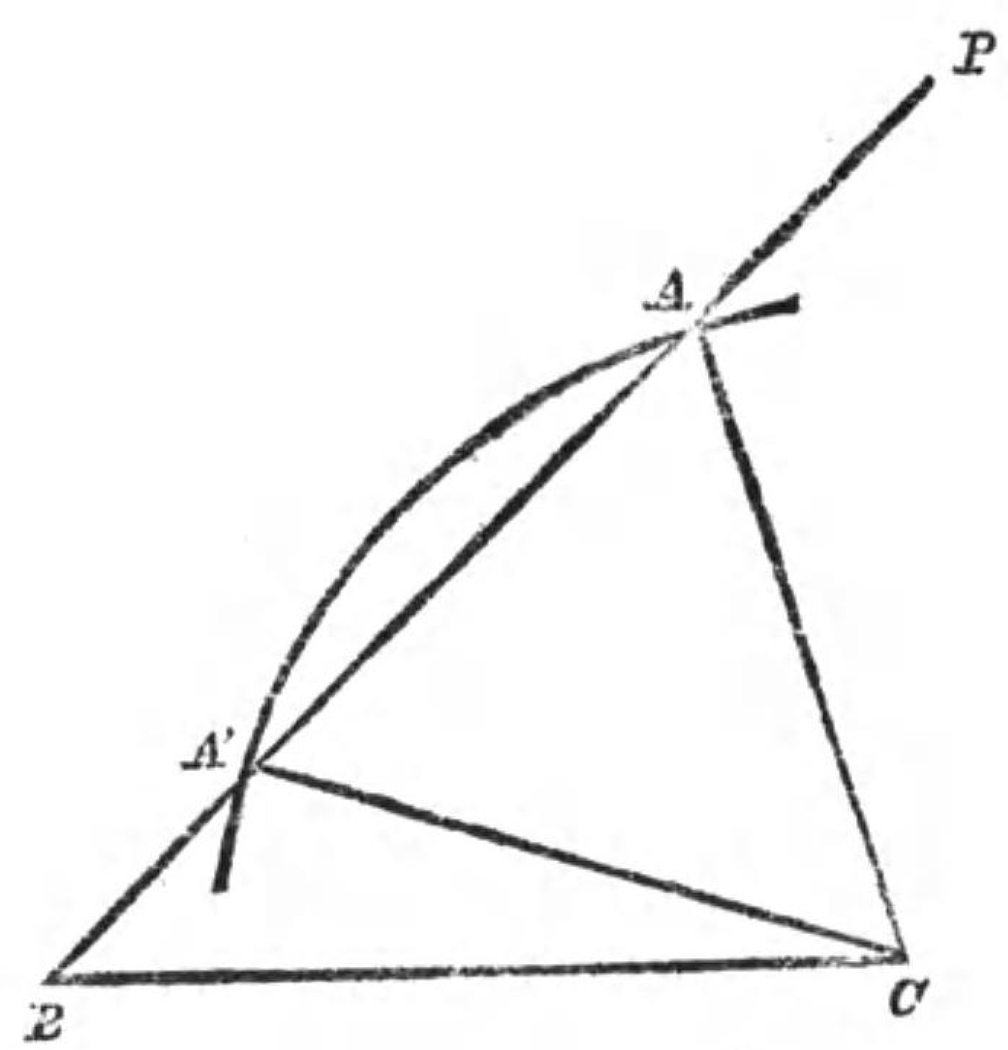
2 一ツノ鋭角三角形* ヲ書キ其ノ各頂點ヨリ對邊ヘ垂線ヲ引クコト.

3 一ツノ直角三角形ニ於テ各頂點ヨリ對邊ヘ垂線ヲ下スコト.

4 一ツノ鈍角三角形** ノ各頂點ヨリ對邊ヘ垂線ヲ引クコト.

*) 各角ガ鋭角ナル△ **) 一角ガ鈍角ナル△.

68. 作圖題7 二邊 BC, CA と其の一邊に對する ∠B とを與へられて三角形ABC を作ること.



作圖 與ヘラレタル邊 BC ヲ引キ, B ニ於テ與ヘラレタル角 B ニ等シク ∠CBP ヲ作ル.

C ヲ中心トシ,與ヘラレタル邊 CA ヲ半徑トスル圓ヲ書キ, BP ト二點 A, A' ニ於テ交ラシム.

CA, CA' ヲ結ビ付ク.

乃チ △ABC, △A'BC ハ共ニ所要ノ△ナリ.

此作圖ノ證明如何.

注意 C ヲ中心トシ,與ヘラレタル邊 CA ヲ半徑トスル圓ガ BP (BP ヲ B ノ方ヘ延長シタルモノヲ用フベカラズ) ト,唯一點ニ於テ相交ルトキハ,所要ノ三角形ハ唯一ツアリ;全ク相交ラザルトキハ,所要ノ三角形ナシ.

〔問 題〕

1 與ヘラレタル直線ヲ底トシ, 底ノ2倍ニ等シキ邊ヲ有スル二等邊△ヲ作ルコト.

2 三角形ノ二角ヲ知リテ第三角ヲ求ムルコト.

三角形ノ頂點ヨリ對邊ノ中點ニ至ル直線ヲ其三角形ノ中線ト稱ス.

3 △ABC ノ二邊 AB, BC 及ビ A ヨリ引ケル中線ノ長サヲ知リテ其△ヲ作ルコト.

4 二邊 AB, AC ト A ヨリ BC マデ引ケル垂線トヲ知リテ △ABC ヲ作ルコト.

5 四邊 AB, BC, CD, DA ト ∠A トヲ與ヘラレテ四邊形ABCD ヲ作ルコト.

6 頂點ヨリ底マデ引ケル垂線ト兩邊トヲ知リテ二等邊△ヲ作ルコト.

7 與ヘラレタル直線 CD ノ兩側ニ在ル與ヘラレタル二點ヲ A,B トシ, CD 上ニ一點 P ヲ求メ, ∠APC=∠BPD ナラシムルコト

8 與ヘラレタル直線 CD ノ同側ニ與ヘラレタル二點ヲ A,B トシ, CD 上ニ一點 P ヲ求メ, ∠APC=∠BPD ナラシムルコト.

9 底及ビ頂角ト一底角トノ和ノ與ヘラレタル二等邊△ヲ作ルコト.

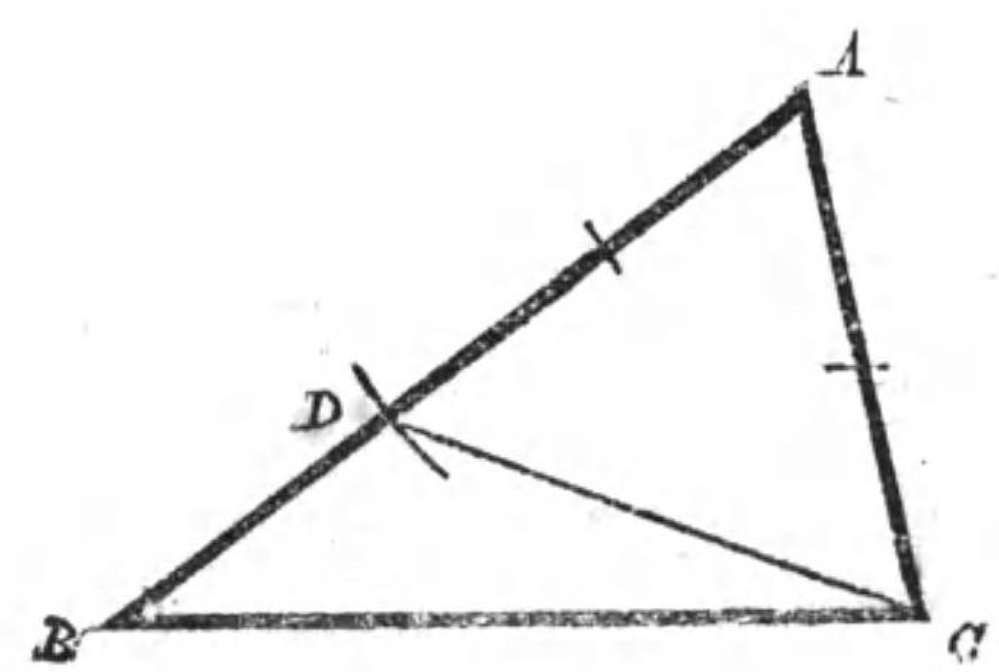
10 中線ヲ知リテ等邊△ヲ作ルコト.

11 二等邊△ノ邊 AB, AC 上ニ夫々點 X,Y ヲ求メ, BX=XY=YC ナラシムルコト.

12 △ABC ニ於テ, ∠B < ∠C ナルトキ, 邊 AB 上ニ一點 P ヲ取リ PB=PC ナラシムルコト.

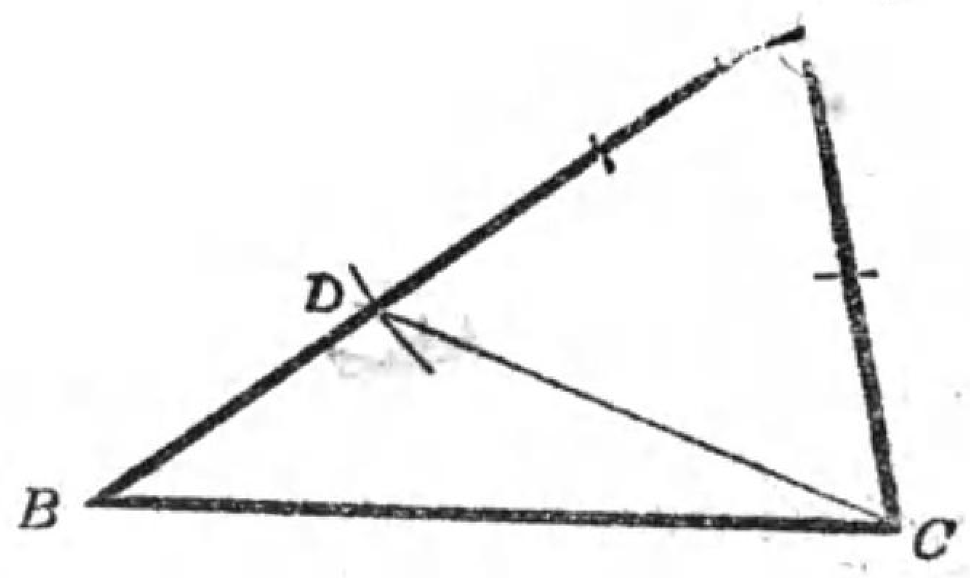
第六章　三角形の邊及び角の比較

69. 定理20　三角形の二邊相等しからざるときは,其の大なる方の對角は小なる方の對角より大なり.



前提 △ABC ニ於テ,

$$AB > AC.$$



求證 $\angle ACB > \angle B$

作圖 大邊 AB 上ニ一點 D ヲ設ケ, AD=AC ナラシム.

CD ヲ結ビ付ク.

證明 △ACD ニ於テ.

$AD=AC$, 〔作圖〕

$\therefore\ \angle ACD=\angle ADC.$ 〔定理16〕

然ルニ △DBC ニ就キテ.

外角 $ADC > \angle B$ (内對角)

〔定理12,系 2〕

$\therefore\ \angle ACD > \angle B$

然ルニ $\angle ACB > \angle ACD$ ($\angle ACB$ ノ一部分).

$\therefore\ \angle ACB > \angle B.$

保留—〔問 題〕———

[1] 三角形ノ三角中,最大ナル邊ニ對スルモノガ最大ナリ.

[2] 三角形ノ最大邊ノ兩端ニ於ケル角ハ何レモ鋭角ナリ.

[3] ▱ABCD ニ於テ, AB>AD ナレバ,

$$\angle ADB > \angle BDC.$$

[4] 四邊形 ABCD ニ於テ, AB ガ最小邊, CD ガ最大邊ナルトキハ,

$\angle B > \angle D$, 且ツ $\angle A > \angle C$.

[5] 平行四邊形 ABCD ノ兩對角線 AC, BD ハ互ニ二等分スト假定シ, BD>AC ナルトキハ, ∠DAB ハ鈍角ナリ.

〔兩對角線ノ相交ル點ヲ O トスレバ.

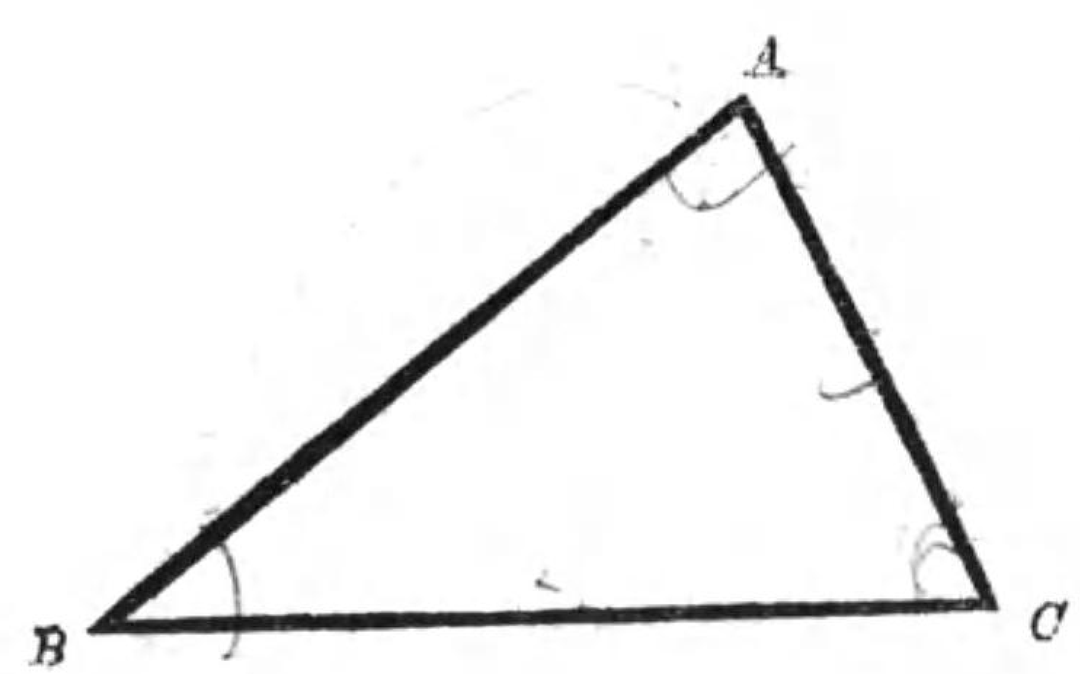
$$OB>OA \text{ 且ツ } OD>OA$$

ナルコトニ注意セヨ.〕

[6] 本定理ノ圖ニ於テ, AB 上ニ AC ニ等シク AD ヲ取リ, AE ヲ引キテ ∠BAC ヲ二等分シ, DE ヲ結ビ付ケテ,本定理ヲ證明スベシ.

70. 定理21 三角形の二角相等しからざるときは,其の大なる方の對邊は小なる方の對邊よりも大なり.

(定理20の逆)



前提 △ABC ニ於テ, ∠C > ∠B.

求證 AB>AC.

證明 1) AB>AC ナラズバ,

2) AB=AC,

又ハ 3) AB<AC.

若シ(3)ノ通リ AB<AC ナラバ,

∠C < ∠B. 〔定理[2]〕

是レ前提ニ反ス.

若シ(2)ノ通リ AB=AC ナラバ,

∠C=∠B. 〔定理[16]〕

是レ亦前提ニ反ス.

故ニ AB>AC ナラザル可ラズ.

注意 上ニ用ヒタル證明法ヲ**間接證明法**ト稱ス.

——〔問 題〕——

*1 直角三角形に於て斜邊は最大邊なり.

*2 鈍角三角形に於て鈍角に對する邊は最大邊なり.

3 三角形ノ最大邊ハ最大角ニ對ス.

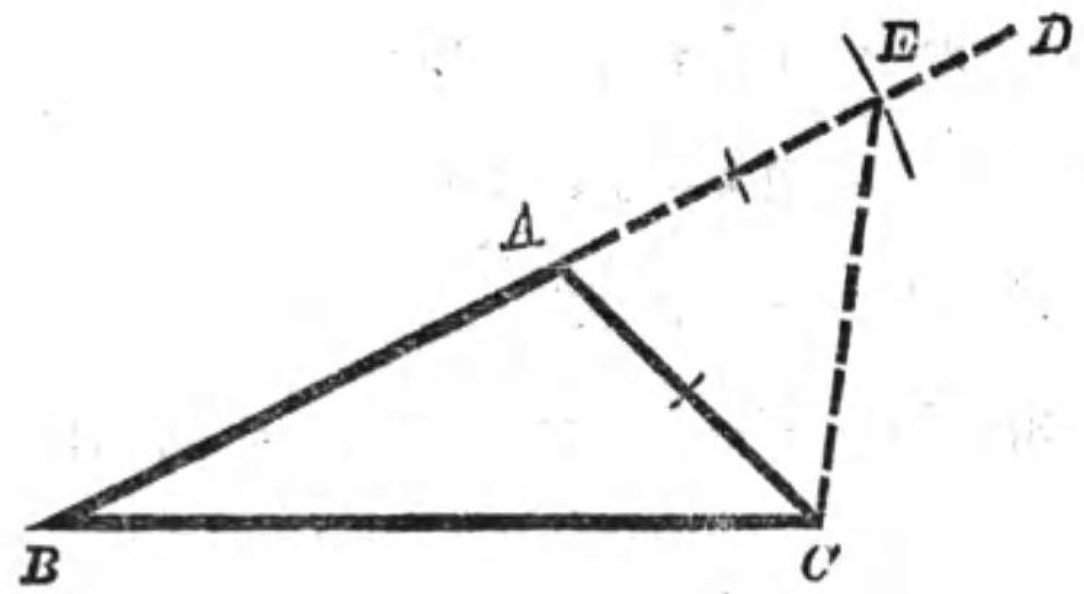
4 直線ABノ外ナル一點OヨリABヘ垂線ONト垂線ナラザルOPトヲ引ケバ,

ON<OP.

5 二等邊△ノ頂點ト底ノ上ノ一點トヲ結ビ付クル直線ハ等邊ノ一ヨリ小ナリ.

6 二等邊△ノ頂點ト底ノ延長上ノ一點トヲ結ビ付クル直線ハ等邊ノ一ヨリ大ナリ.

71. 定理22 三角形の邊の何れの二つの和も第三邊よりは大なり,



前提 ABC ハ△ナリ.

求證 1) BA+AC > BC,

2) CB+BA > CA,

3) AC+CB > AB.

1) **作圖** BA ノ延長 AD ノ上ニ點 E ヲ設ケ, AE=AC ナラシメ, CE ヲ結ビ付ク.

證明 △AEC ニ於テ,

AE=AC, 〔作圖〕

∴ ∠ACE=∠AEC. 〔定理16〕

然ルニ ∠BCE > ∠ACE (∠BCE ノ一部分)

∴ ∠BCE > ∠AEC.

故ニ△EBC 於テ

∠BCE > ∠BEC,

∴ BE > BC, 〔定理21〕

即チ BA+AE > BC,

∴ BA+AC > BC, 〔作圖〕

2) CB+BA > CA モ

3) AC+CB > AB モ同樣ニ證明セラル.

〔問題〕

1 三角形ノ二邊ノ差ハ第三邊ヨリ大ナリ.

2 四邊形ノ三邊ノ和ハ第四邊ヨリ大ナリ.

3 △ABC ノ邊 AC 上ニ一點 D ヲ取レバ,

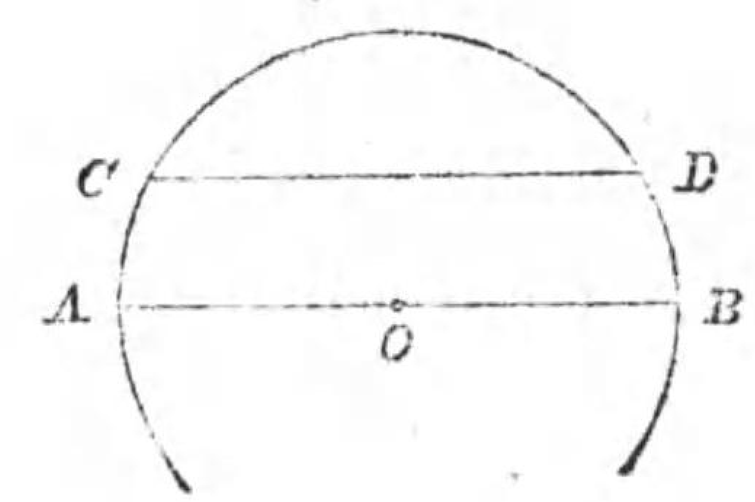
BD+DC < BA+AC.

4 △ABC ノ內ニ一點 P ヲ取レバ,

AB+BC+CA > PA+PB+PC.

5 圖ノ如ク O ヲ中心トスル圓ニ於テハ,

AB > CD.

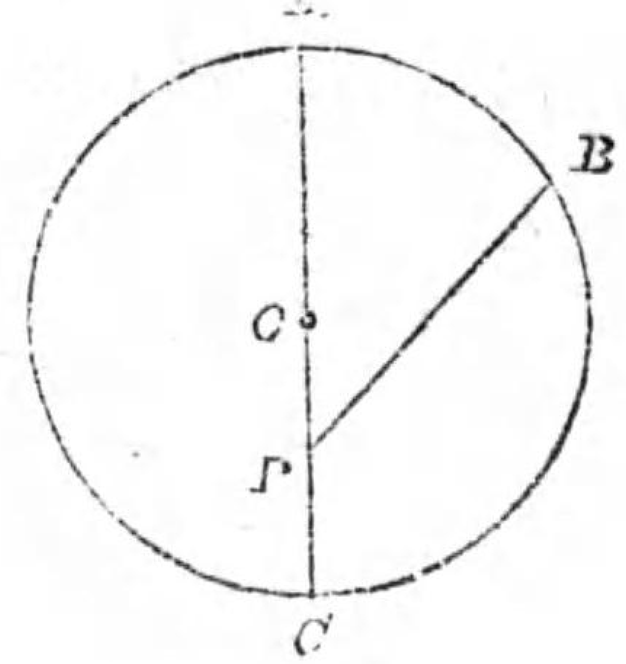


[6] 圖ノ如ク

Oヲ中心トスル

圓ニ於テハ,

$PA > PB > PC$



72. [定理23] 一三角形の二邊と他の三角形の二邊とは夫々相等しく,其の夾角は相等しからざれば,第三邊は夾角の大なる方が大なり

前提 $\triangle ABC, DEF$ ニ於テ

$AB=DE,\ AC=DF,$

$\angle BAC > \angle EDF.$

求證 $BC > EF$.

證明 $\triangle ABC$ ヲ $\triangle DEF$ ノ上ニ置キ, A ハ D ノ上ニ, AB ハ DE ノ上ニ,重ナル樣ニス.

然ルトキハ

$AB=DE,$ 〔前提〕

$\therefore$ B ハ E ノ上ニ合ス.

又 $\angle BAC > \angle EDF,$ 〔前提〕

故ニ, AC ハ $\angle EDF$ ノ外ニ落ツ; 其ノ C ノ落ツル點ヲ C' トス.

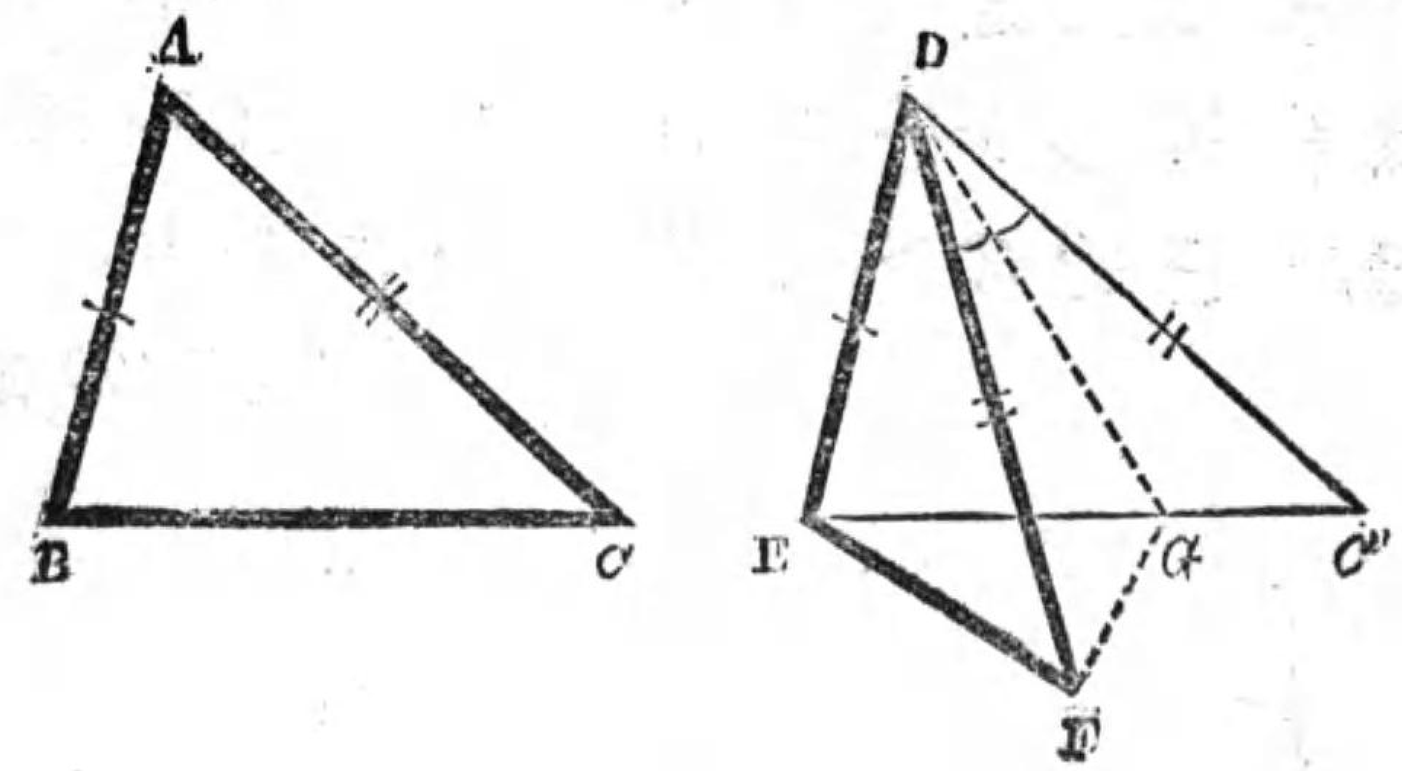
茲ニ次ノ如キ二ツノ場合アリ:

(I) EFC' ガ一直線ヲ成ス場合.

$EC' > EF$, 即チ $BC > EF$.

(II) EFC' ガ一直線ニアラザル場合.

$\angle FDC'$ ノ二等分線 DG ヲ引キテ, EC' ト交ル點ヲ G トス.



兩$\triangle DGF, DGC'$ ニ於テ,

$DF=DC'$ 〔前提〕

DG ハ共通

$\angle FDG=\angle C'DG$ (夾角) 〔作圖〕

$\therefore\ \triangle DGF\equiv\triangle DGC'$. 〔定理14〕

$\therefore\ GF=GC'$,

然ルニ$\triangle EFG$ ニ於テ,

$EG+GF>EF$. 〔定理22〕

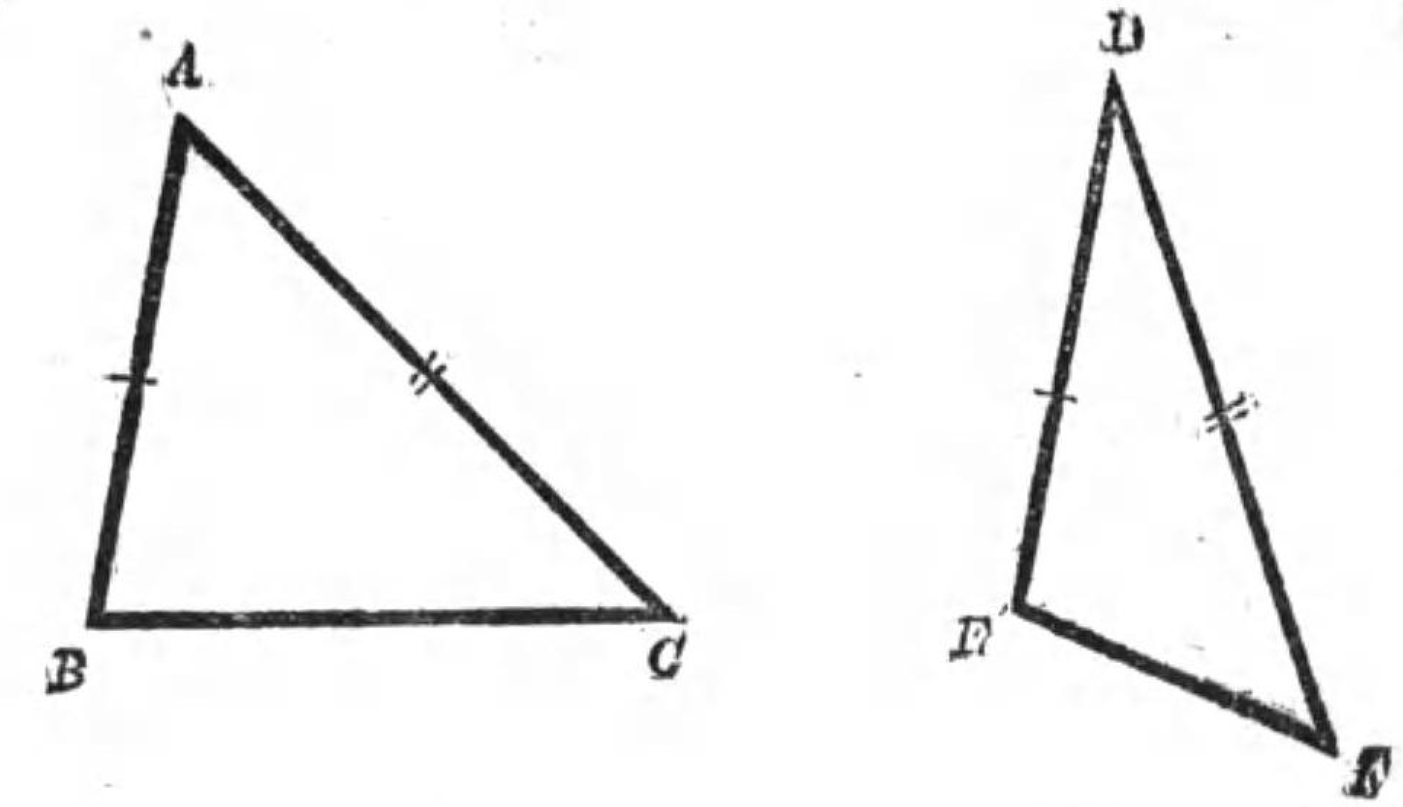
$\therefore\ EG+GC'>EF$,

即チ $EC'>EF$,

即チ $BC>EF$,

73. 定理24 一三角形の二邊は他の三角形の二邊と夫々相等しく,第三邊は相等しからざれば,其二邊の夾角は,第三邊の大なる方が大なり.

(定理23の逆)



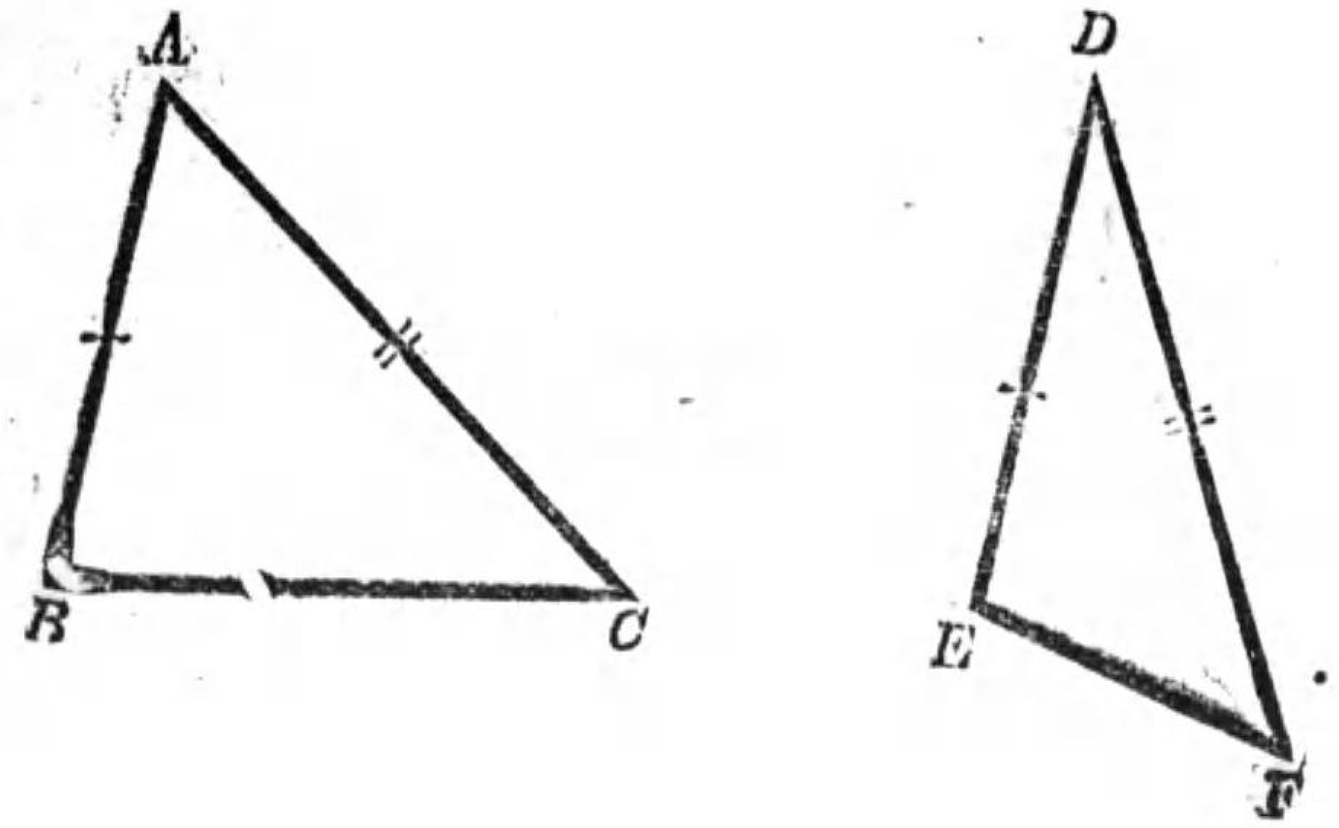
前提 兩$\triangle ABC, DEF$ ニ於テ

$AB=DE$,

$AC=DF$,

$BC>EF$.

求證 $\angle BAC>\angle EDF$.



證明 (1) ∠BAC > ∠EDF,

或ハ (2) ∠BAC = ∠EDF,

或ハ (3) ∠BAC < ∠EDF,

ナル外ナシ.

(3)ノ如ク∠BAC < ∠EDFナラバ,

BC<EF 〔定理20〕

トナリテ,前提ニ反ス.

若シ(2)ノ如ク∠BAC=∠EDFナラバ,

BC=EF 〔定理14〕

トナリテ,コレモ前提ニ反ス.

故ニ∠BAC > ∠EDFナラザルヲ得ズ.

〔問　題〕

1 四邊形ABCDニ於テ, AD=BC, 且ツ∠ADC > ∠BCDナレバ,

AC>BD.

2 AB>ACナル△ABCニ於テ,邊BCノ中點ヲDトスレバ,

∠ADCハ鋭角ナリ.

3 AB> ACナル△ABCノ中線AD上ニ一點Pヲ取ルトキハ,

PB>PC.

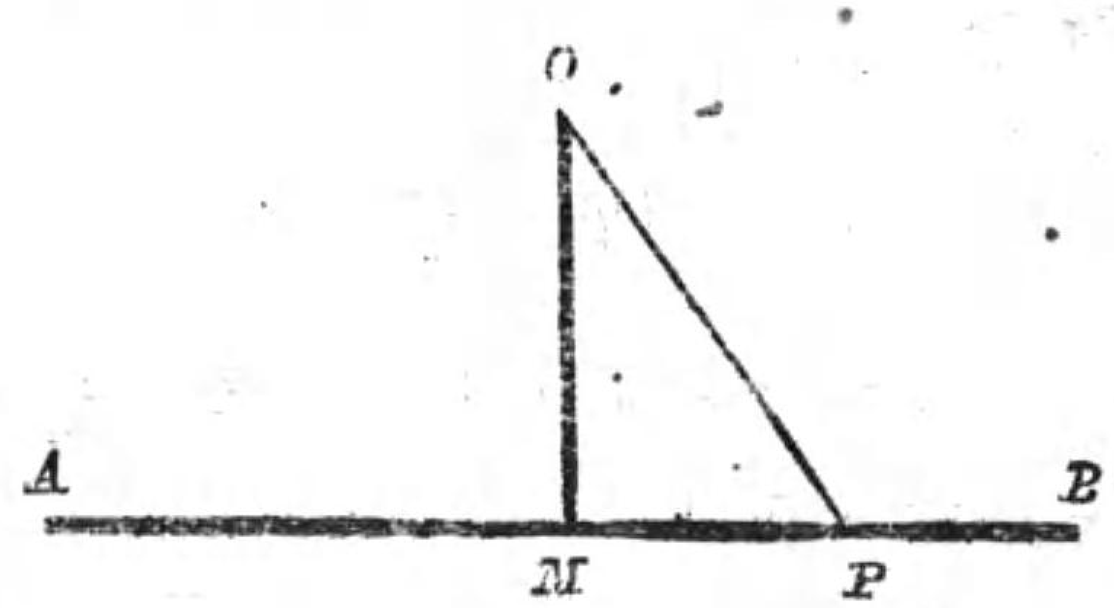
4 四邊形ABCDニ於テ, AD=BC, 且ツAC>BDナルトキハ,

∠ADC > ∠BCD.

5 四邊形ABCDニ於テ, AD=BC, 且ツAB<CDナルトキハ,

∠DAC > ∠ACB.

74. 定理25　一直線外なる一點より此直線まで引ける總ての直線中,垂線は最も短し.



前提　O ハ直線 AB 外ノ一點,

OM ⊥ AB,

M ハ AB 上ノ一點ナリ,

求證　OM ハ O ヨリ AB マデ引キ得ル他ノ直線ヨリモ短シ.

作圖　AB 上ニ於テ M ノ外ノ任意ノ一點 P ヲ O ニ結ビ付クル直線 OP ヲ引ク.

證明　直角 △OMP ニ於テ,

OM < OP (斜邊)　(頁81,問題1)

故ニ OM ハ O ヨリ AB マデ引キ得ル諸直線中ノ最短ナルモノナリ.

75. **點と直線との距離**　直線外ナル一點ヨリ其直線マデ引ケル垂線ノ長サヲ其點ト直線トノ**距離**トモ,又ハ其ノ一方ヨリ他ノ方ニ至ル**距離**トモ稱ス.

〔問　題〕

1　一直線ノ兩端ハ其ノ中點ヲ過グル直線ヨリ等距離ニ在リ.

2　三角形ノ二角ノ二等分線ノ交點ハ三邊ヨリ等距離ニ在リ.

3　△ABC 內ニ一點 O ヲ取レバ,

∠BOC > ∠BAC.

4　三角形ノ一邊ノ半分ト之ヲ二等分スル中線トノ和ハ他二邊ノ和ノ半分ヨリ大ナリ.

5　三角形ノ二邊ノ和ハ此二邊ノ相會スル頂點ヨリ引ケル中線ノ 2 倍ヨリ大ナリ.

6　四邊形 ABCD 內ニ一點 O ヲ取レバ,

OA+OB+OC+OD ハ AC+BD ヨリ小ナラズ.

7　△ABC 內ノ一點 O ヨリ三頂點マデノ距離ノ和ハ三邊ノ和ノ半ヨリ大ナリ.

[8] 三角形內ノ一點ヨリ三頂點マデノ距離ノ和ハ三角形ノ周(即チ三邊ノ和)ヨリ小ナリ.

[9] 四邊形ノ兩對角線ノ和ハ周ノ半分ヨリ大ナリ.

[10] 四邊形ノ兩對角線ノ和ハ周ヨリ小ナリ.

[11] 三角形ノ三ツノ中線ノ和ハ周ヨリモ小ナリ.

[12] △ABC ノ邊 BC ノ中點ヲ D トスルトキ, AD<BD ナレバ, ABC ハ鈍角三角形ナリ.

[13] AB>AC ナル △ABC ノ中線 AD ヲ D ノ先ヘ P マデ延長スレバ, PB<PC

[14] 四邊形 ABCD ニ於テ, AD=BC, 且ツ ∠BCA>∠DAC ナルトキハ,

∠ADB>∠DBC.

[15] O ガ等邊 △ABC 內ノ一點ニシテ,且ツ ∠OAB>∠OAC ナルトキハ,

∠OCB>∠OBC.

第七章　平行四邊形

76. 定理26　平行四邊形の相對する角は相等し.

證明　如何.

77. 系　平行四邊形の一角が直角なれば,他の三角も皆直角なり.

78. 定理27　平行四邊形の相對する邊は相等し.

證明　如何.

79. 系.

[1] 平行四邊形の相隣れる二邊相等しければ,諸邊皆相等し.

[2] 二ツの平行直線の距離,即ち一方の一點より他の方に至る距離は何處にても相等し.

80. 定理28　平行四邊形の對角線は其平行四邊形を二つの相等しき三角形に分つ.

證明　如何.

81. 定理29　平行四邊形の二つの對角線は互に二等分す.

證明　如何.

82. **矩形, 正方形, 菱形, 梯形,**

平行四邊形の角ガ悉ク直角ナルモノヲ**矩形**(rectangle)ト稱ス.

矩形ノ四邊皆相等シキモノヲ**正方形**(square)ト稱ス.

平行四邊形ノ相隣レル邊ノ相等シキモノヲ**菱形**(rhombus)ト稱ス.

四邊形ノ對邊ノ一對ノミガ平行ナルモノヲ**梯形**(trapezoid)ト稱ス.

梯形ノ平行ナラザル二邊ガ相等シキモノヲ**二等邊梯形**又ハ**等脚梯形**ト稱ス.

——〔問　題〕——

1　二等邊△ABC ノ底ニ平行ナル DE ヲ引キテ兩邊 AB, AC ヲ D, E ニ於テ切レバ,得ル所ノ DBCE ハ等脚梯形ナリ.

2　平行四邊形ノ相隣レル二角ノ二等分線ハ互ニ垂直ナリ.

3　▱ノ對角ノ二等分線ハ互ニ平行ナリ.

83. 定理30　(1)　二對の相等しき對角を有する四邊形は平行四邊形なり.

(定理26の逆)

證明　四邊形ノ角ノ和ハ4直角ナルコトニ依リテ考ヘヨ.

(2)　一對の對邊が平行にて且つ相等しき四邊形は平行四邊形なり.

證明　對角線ヲ一ツ引キテ得ル所ノ兩△ニ就キテ考ヘヨ.

系　一ツの直線の同側に立てたる相等しき垂線の端を結ぶ直線は前の直線に平行なり.

(3) 二對の相等しき對邊を有する四邊形は平行四邊形なり.

(定理27の逆)

證明　對角線ヲ一ツ引キテ得ル所ノ兩△ニ就キテ考ヘヨ.

(4) 互に二等分する所の對角線を有する四邊形は平行四邊形なり.

(定理29の逆)

證明　兩對角線ノ成ス對頂角内ナル兩△ニ就キテ考ヘヨ.

〔問　題〕

[1] ▱ノ二ツノ對邊ノ中點ヲ結ブ直線ハ他ノ二邊ニ平行ナリ.

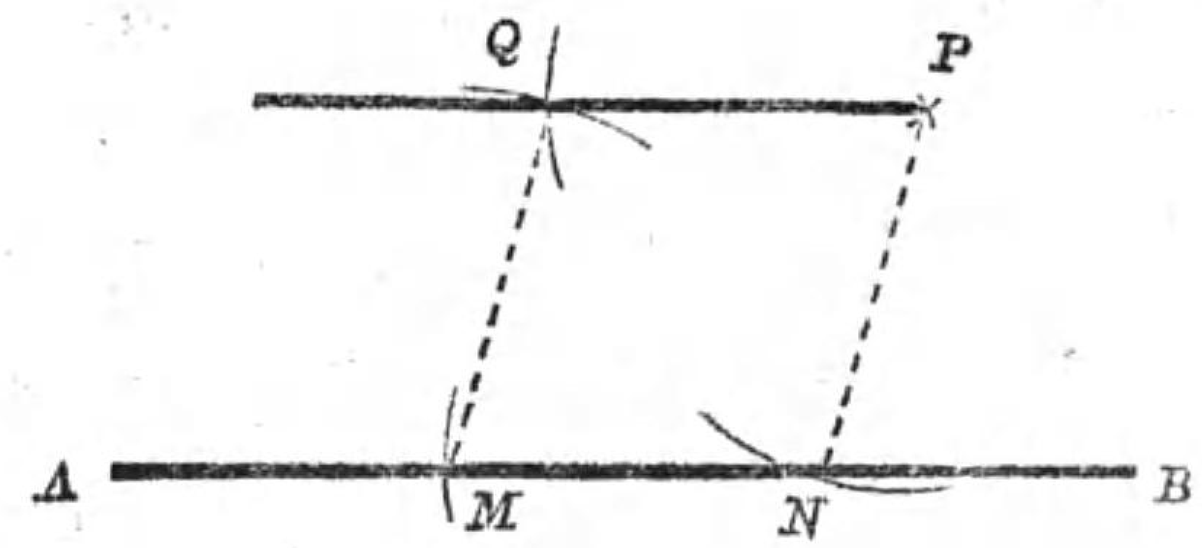
[2] 兩對角線相等シク且ツ直角ニ二等分スル所ノ四邊形ハ正方形ナリ.

[3] 菱形ノ對角線ハ互ニ垂直ナリ.

[4] 對角線相等シキ平行四邊形ハ矩形ナリ.

[5] ▱ノ對角線ガ互ニ垂直ナルハ菱形ナリ.

84. **作圖題8** 與へられたる點Pを過ぎ且つ直線ABに平行なる直線を引くこと.



作圖 AB上ニ,任意ノ一點Mヲ取リ,且ツ任意ノ長サMNヲ取ル.

Mヲ中心トシPNヲ半徑トスル圓ト,

Pヲ中心トシMNヲ半徑トスル圓トヲ畫キ,

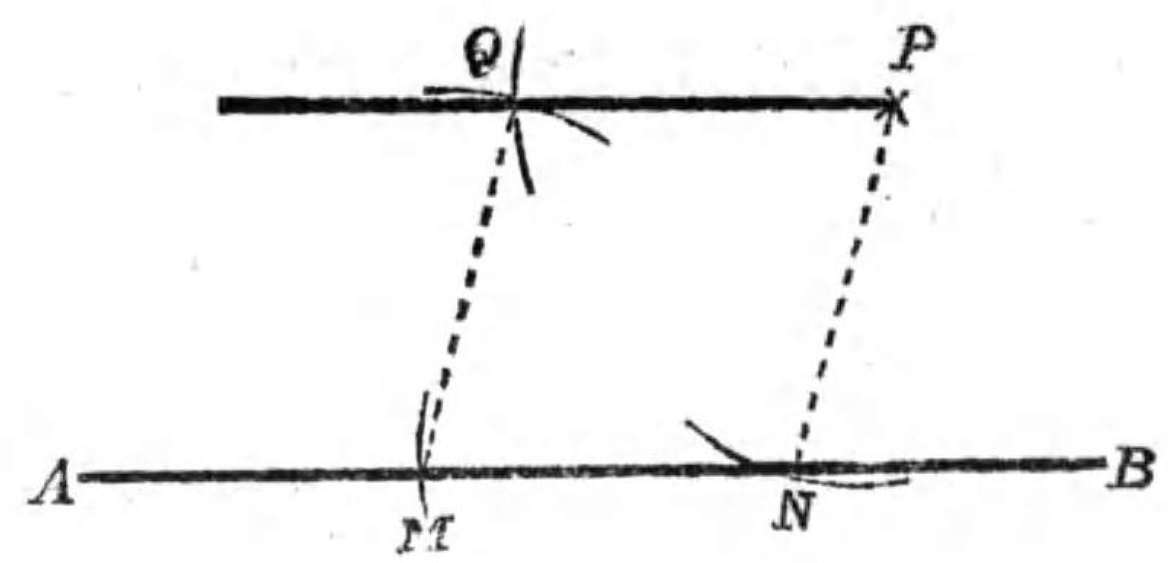
ABニ對シPト同側ナルQニ於テ相交ラシム.

然ルトキハ　PQ∥AB.

證明 PN,QMヲ結ビ付クレバ,

四邊形PQMNニ於テ,

$$\begin{cases} PQ=NM, & \text{〔作圖〕} \\ PN=QM & \text{〔作圖〕} \end{cases}$$



故ニ PQMN ハ ▱ ナリ.　　〔定理30(3)〕

∴ PQ ∥ AB.

〔問　題〕

[1] 相隣ル二邊ト其ノ夾角ト與ヘラレテ,平行四邊形ヲ作ルコト.

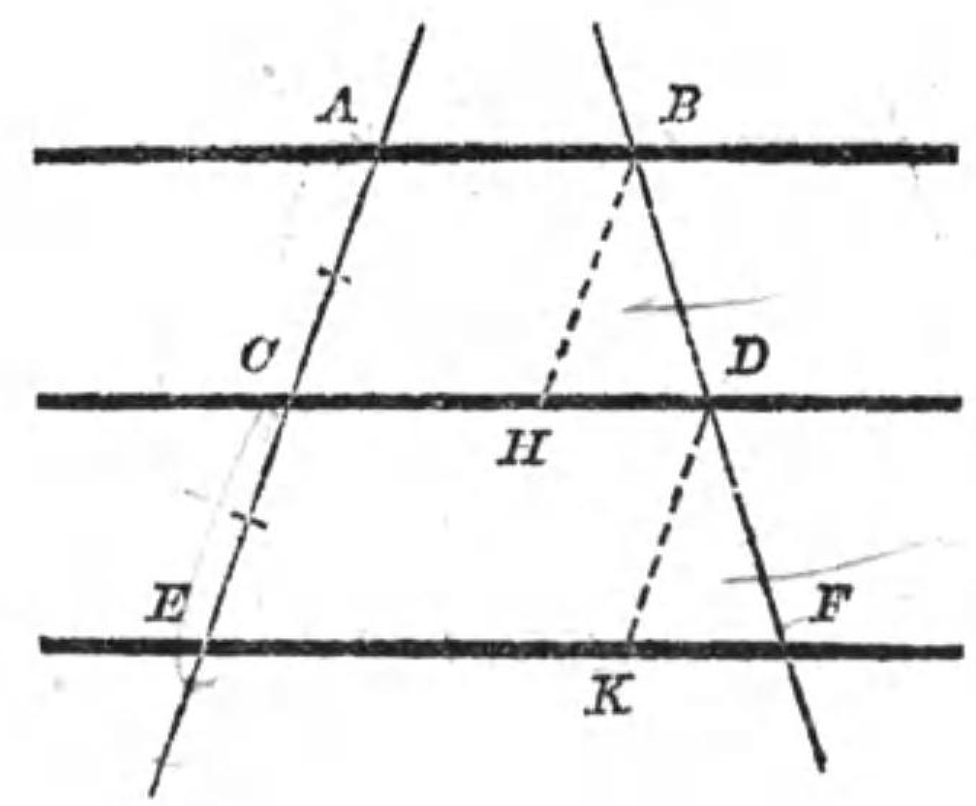
[2] 一邊ト之ニ隣ル一角ト與ヘラレテ,菱形ヲ作ルコト.

[3] 兩對角線ト其ノ夾角トヲ與ヘラレテ,平行四邊形ヲ作ルコト.

[4] 二邊ト一對角線ト與ヘラレテ平行四邊形ヲ作ルコト.

[5] 兩對角線ヲ與ヘラレテ菱形ヲ作ルコト.

85. **定理31** 三つ以上の平行直線が一直線と交りて相等しき部分を切り取れば,如何なる他直線と交りても亦相等しき部分を切り取る.



前提 平行直線 AB, CD, EF ハ一直線 ACE ヨリ AC, CE ヲ切リ取ル,而シテ.

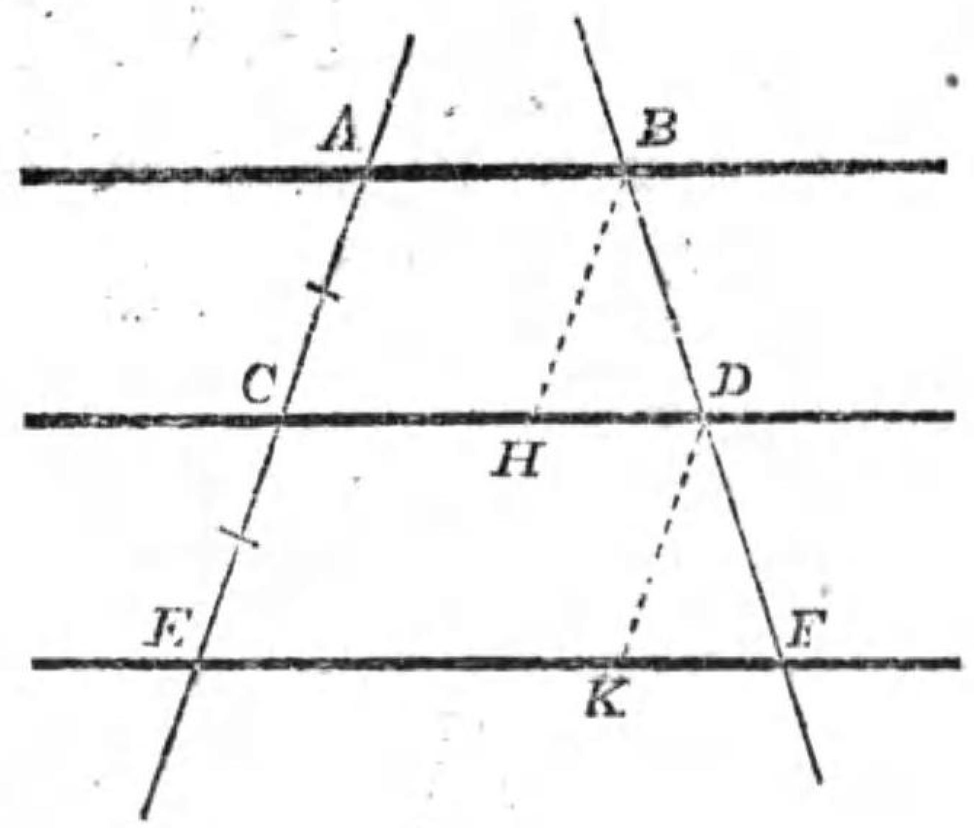
∴ AC=CE.

又直線 BDF ヨリ BD, DF ヲ切リ取ル.

求證 BD=DF.

作圖 BH ∥ AC, DK ∥ CE

ナル様ニ BH, DK ヲ引キ,



CD, EF ト夫々 H, K ニ於テ交ラシム.

證明　∵ ACHB ハ ▱ ナリ,

∴ AC＝BH.　〔定理27〕

CEKD モ ▱ ナリ.

∴ CE＝DK.　〔定理27〕

然ルニ AC＝CE,　〔前提〕

∴ BH＝DK.

サテ CD ∥ EF,

∴ ∠BDH＝∠DFK (同位角)　〔定理8〕

又 BH ∥ DK (共ニ ACE ニ平行),

∴ ∠DBH＝∠FDK (同位角)　〔定理8〕

故ニ △BHD, DKF ニ於テ,

$$\begin{cases}\angle BDH=\angle DFK\\ \angle DBH=\angle FDK\\ BH=DK\end{cases}$$

∴ △BHD≡△DKF　〔定理15〕

∴ BD＝DF.

〔問　題〕

1　三角形ノ一邊ノ中點ヲ過ギテ他ノ一邊ニ平行ニ引ケル直線ハ第三邊ヲ二等分ス.

*2　三角形の二邊の中點を結ぶ直線は第三邊に平行なり.

*3　三角形の二邊の中點を結ぶ直線は第三邊の半分に等し.

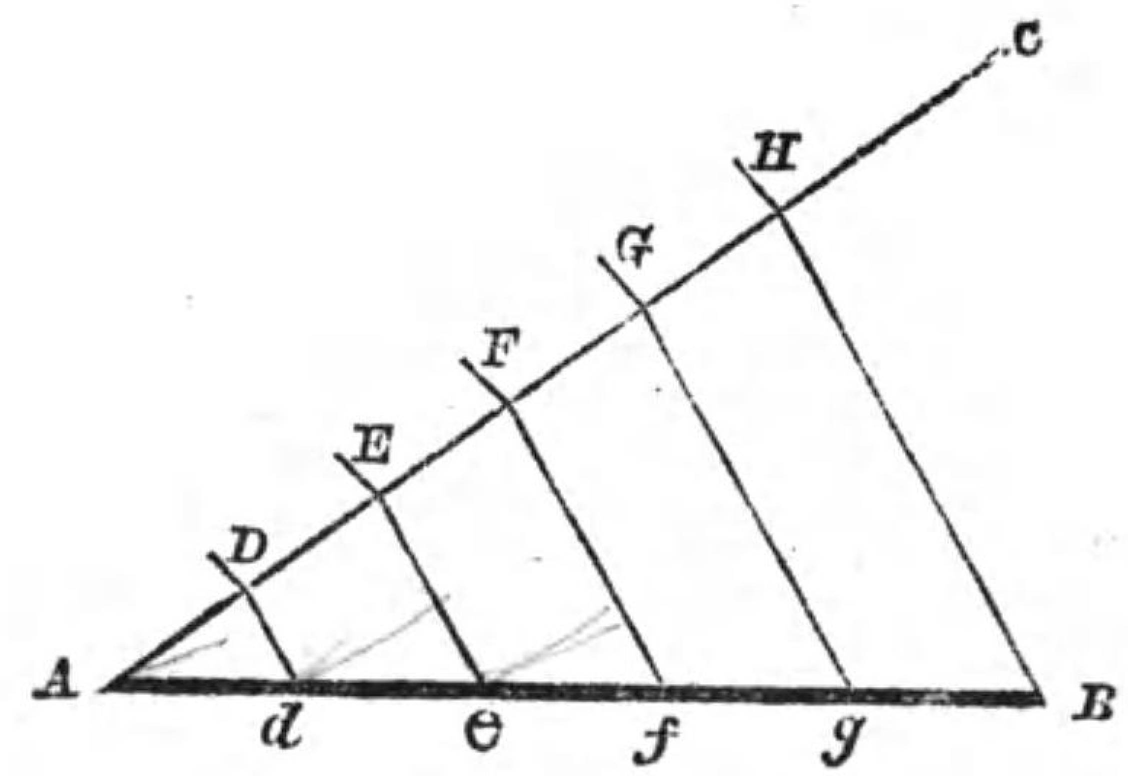
4　三邊ノ中點ヲ與ヘラレテ三角形ヲ作ルコト.

5　四邊形ノ邊ノ中點ヲ順次ニ結ビ付ケテ得ル所ノ四邊形ハ ▱ ナリ.

6　四邊形ノ對邊ノ中點ヲ結ビ付クル直線ハ互ニ二等分ス.

8

86. **作圖題[9]** **與へられたる直線ABを任意の數(例へば五つ)に等分すること.**



作圖 一端Aヨリ適宜ニ直線ACヲ引キ,

其ノ上ニ適宜ニADヲ取ル.

DC上ニ次々ニADニ等シク,DE, EF, FG, GHヲ取ル.

BHヲ結ビ付ク.

BHニ平行ニDd, Ee, Ff, Ggヲ引キテ,

ABヲd, e, f, gニ於テ切ル.

然ルトキハ,ABハ五等分セラル.

證明 AD=DE=・・・, 〔作圖〕

又$Dd, Ee,$………ハ總テ平行ナリ. ”

∴ $Ad=de=$・・・ 〔定理[23]〕

故ニABハ五等分セラル.

對稱.

87. 直線に付て對稱なる圖形. 對稱軸.

一枚ノ紙ヲ取リ,之ヲ折リ合セ,任意ノ形狀ニ切リ,然ル後開キテ元ノ如ク平ラニ展バスベシ,此ノ如クニシテ得ル所ノ圖形ハ,折リ目ノ線ニツキテ**對稱ナリ**(symmetrical)トイヒ,其折リ目ノ線ヲ其圖形ノ**對稱軸**ト稱ス. 即チ

一直線(軸)ニツキテ對稱ナル圖形トハ,軸ニ垂直ナル直線ガ此圖形ト交ル二點何レモ軸ヨリ等距離ニ在ルモノナリ.

右ニ示セルはーと形ハ其中央ニ引ケル直線ニツキテ對稱ナリ.

〔問　題〕

1　直線ABノ兩側ニ畫ケル△ABC, ABDニ於テ,Aニ於ケル角,Bニ於ケル角ガ夫々相等シキトキハ,四邊形ACBDハABニ付テ對稱ナリ.

2　正方形ハ其對角線ニ付テ對稱ナリ.

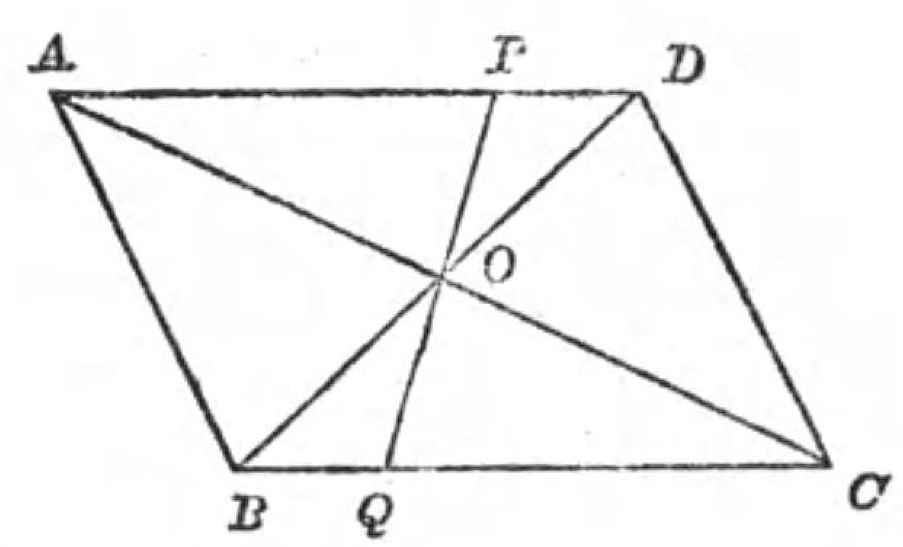
3　菱形ハ其對角線ニ付テ對稱ナリ.

4　兩對角線ノ何レニ付テモ對稱ナル四邊形ハ菱形ナリ.

5　二等邊△ハ頂點ヨリ底ニ下セル垂線ニ付テ對稱ナリ.

88. 點に付て對稱なる圖形. 對稱中心.

平行四邊形ABCDノ對角線ノ交點Oヲ通ル直線PQヲ引キ,其邊トP, Qニ於テ交ラシムレバ,PQハ常ニOニ於テ二ツニ等分セラル.

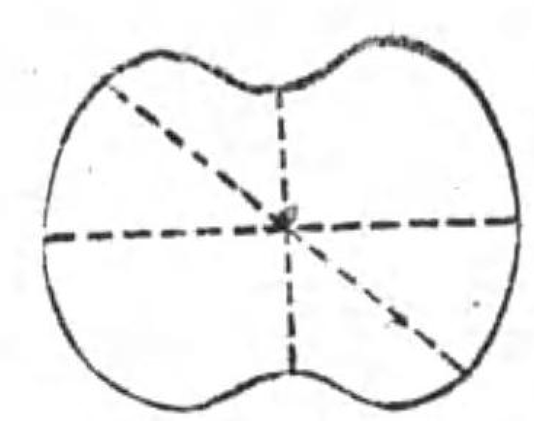


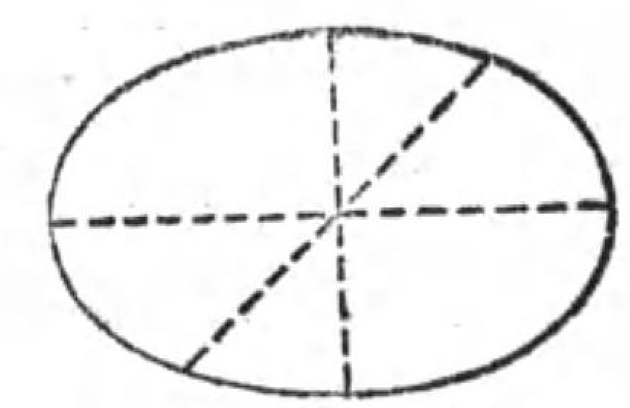
此ノ如ク,一定點Oヲ過ギテ如何ナル直線ヲ引クトモ,其ノ一圖形ト交ル一對ノ點ガ常ニOヨリ等距離ニ在レバ,其圖形ハ**點Oニ付テ對稱ナリ**又ハ**點對稱ヲ有ス**トイヒ,Oヲ其圖形ノ**(對稱)中心**ト稱ス.

平行四邊形ハ其對角線ノ交點ニ付テ點對稱ヲ有ス.

圓ハ其ノ中心ニ付キテ點對稱ヲ有ス.

下ニ掲グル圖形モ點對稱ヲ有スルモノナリ





第八章　軌跡

89. 二定點A,Bヨリ等距離ナル點ヲ幾ツカ畫キ，此ノ如キ一團ノ點ハ如何ナル處ニ在ルベキカヲ考ヘヨ．其諸點ノ在ル處ガ簡單ナル線ナルコトハ容易ニ思ヒ付クベシ．

ソハ如何ナル線ナルカ．

此線ハABヲ直角ニ二等分スル直線ニ外ナラズ．詳言スレバ，A,Bヨリ等距離ナル點ハ凡テ此直線上ニ在リ且ツ此直線ノ何處ニモ此ノ如キ點アルナリ(證明ハ後ニ廻ス)．

二點A,Bヨリ等距離ナル點ガ在ル所ノ線ヲ，二點A,Bヨリ等距離ナル點ノ**軌跡**(locus)ト稱ス．

〔問　題〕

[1] 一定點ヨリ一定距離ニ在ル點ノ軌跡ハ何ナルカ．上ニ說ク所ニ準ヘテ考ヘヨ．

[2] 一定直線ABヨリ一定距離ニ在ル點ノ軌跡ハ何ナルカ．

[3] 時計ノ針ノ端ノ軌跡ハ何ナルカ．

90. 軌跡　一定ノ條件ニ從フ所ノ點ノ軌跡トハ，其點ノ一團ガ在ル處ナリ；換言スレバ，

一定ノ條件ニ從フ所ノ點ノ軌跡トハ，其條件ニ從ヒテ點ガ動クトキニ畫ク所ノ線路ナリ．

〔問　題〕

[1] 一ツノ角ノ兩邊ヨリノ距離ガ相等シキ樣ニ動ク點ノ軌跡ハ何ナルカ．

[2] 直角ニ交レル二直線ヨリノ距離ノ和ガ一定セル樣ニ動ク點ノ軌跡ヲ畫ケ．

[3] 直角ノ兩邊ヨリノ距離ノ差ガ一定セル樣ニ動ク點ノ軌跡ヲ畫ケ．

91. **定理32** 二定點A,Bより等距離なる點の軌跡は,此二點を結ぶ直線を直角に二等分する直線なり.

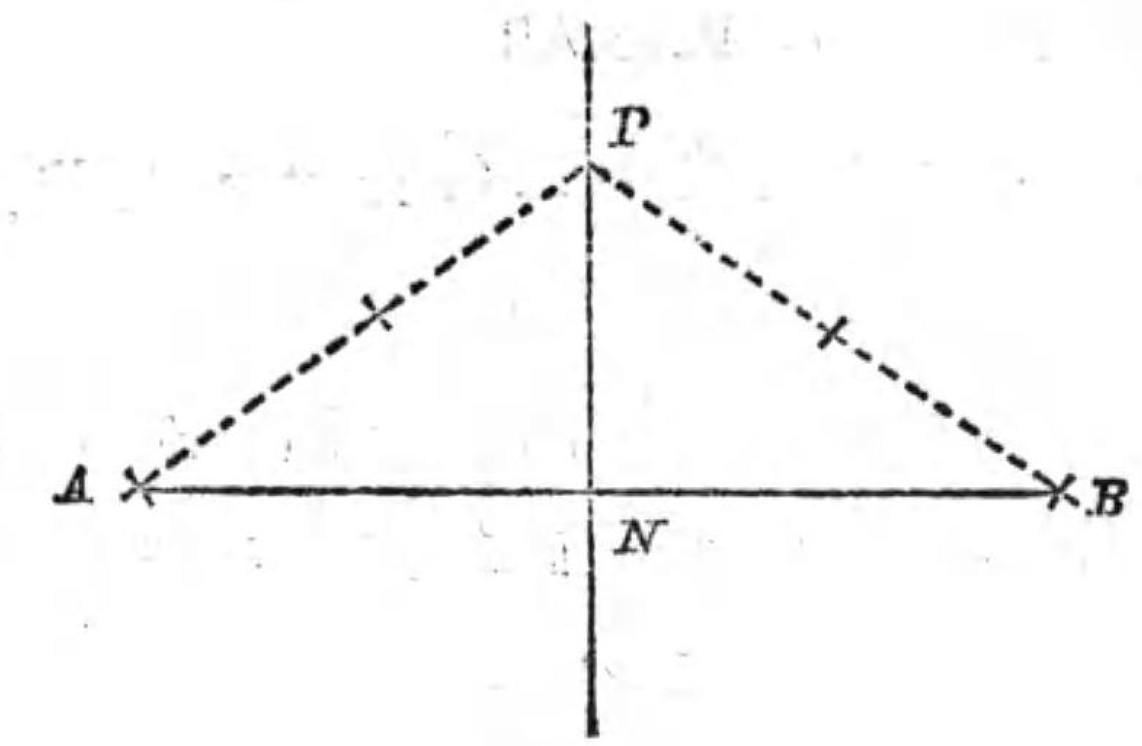
本定理ハ通例次ノ二定理ニ分解シテ證明ス.

(甲) A,Bヨリ等距離ナル點ハ何レモ直線ABノ垂直二等分線上ニ在リ.

(乙) 直線ABノ垂直二等分線上ニ在ル點ハ何レモA,Bヨリ等距離ナリ.

(甲)ニ於テハA,Bヨリ等距離ナル點ハABノ垂直二等分線上ニ在リト云フノミナレバ,此ノ如キ點ガ其線外ニナキコトダケハ明カナレドモ,其線上ノ何處ニ在ルカトイフコトニ就キテハ未ダ明カナラズ. 故ニ(甲)ノ證明ノミニテハ此定理ノ完全ナル證明トナラズ.

(乙)ニ至リテ,此線上ノ何處ニモ其點アリトイフコト,即チABノ垂直二等分線上ノ點ハ何レモA,Bヨリ等距離ニ在リトイフコト明白トナル. 即チ(甲)ト(乙)トノ證明ニテ此定理ハ完全ニ證明セラルヽ理ナリ.



(甲) A,Bより等距離なる點は何れも直線ABの垂直二等分線上に在り.

前提 PハA,Bヨリ等距離ニ在ル任意ノ一點ナリ. 即チ　AP=BP.

求證 PハABノ垂直二等分線上ニ在リ.

作圖 ABヲ結ビ,ABノ中點ヲNトス. NPヲ結ビ付ク.

證明 兩△ANP,BNPニ於テ

$$\begin{cases} AP=BP & \text{〔前提〕} \\ AN=BN & \text{〔作圖〕} \\ PN \text{ハ共通} & \end{cases}$$

$\therefore\ \triangle ANP \equiv \triangle BNP.$ 〔定理18〕

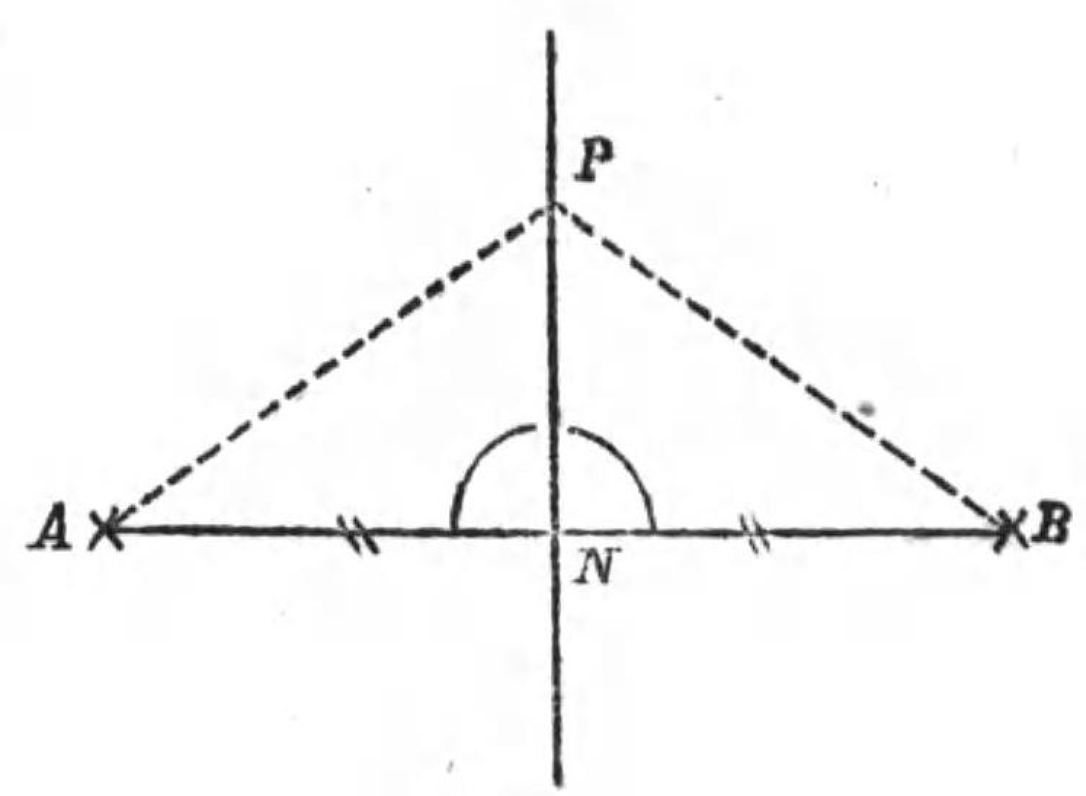
$$\therefore \angle ANP = \angle BNP.$$

$$\therefore PN \perp AB.$$

故ニPハABヲ垂直ニ二等分スル直線上ニ在リ.

即チAトBトヨリ等距離ナル點ハ,何レモABヲ直角ニ二等分スル直線上ニ在リ(即チ此直線外ニハ決シテ無シ).

(乙) 直線ABの垂直二等分線上に在る點は何れもA,Bより等距離に在り.



前提 PハABヲ垂直ニ二等分スル直線NP上ノ任意ノ一點ナリ.

求證 PハA,Bヨリ等距離ニ在リ,即チ

$$AP = BP.$$

證明 兩△ANP, BNPニ於テ,

$$\begin{cases} AN = BN \\ NP\text{ハ共通} \\ \angle ANP = \angle BNP\ (\text{直角}) \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ANP \equiv \triangle BNP. \qquad (\text{定理})$$

$$\therefore AP = BP.$$

故ニABノ垂直二等分線上ノ點ハ何レモA,Bヨリ等距離ニ在リ.

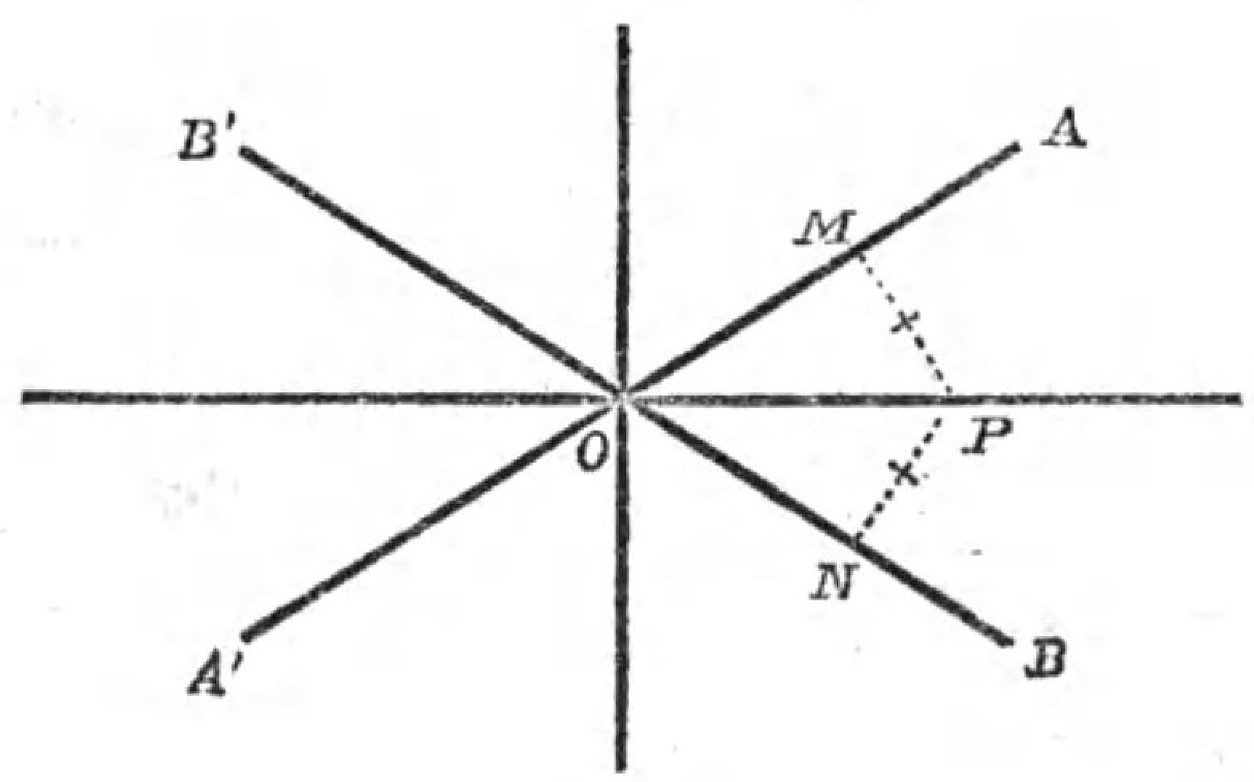
(甲),(乙)ノ通リナルヲ以テ,ABノ垂直二等分線ハ即チA,Bヨリ等距離ナル點ノ軌跡ナリ.

〔問　題〕

ABノ垂直二等分線外ノ點ハ何レモA,Bヨリ等距離ニ在ラズ.

(是レ既ニ上ノ(甲)ニ依リテ明カナレドモ,茲ニハ直接ノ證明ヲ試ミルベシ.)

92. 定理33 相交る二直線より等距離なる點の軌跡は其二直線間の角を二等分する直線なり(二直線あり).



(甲) 相交る二直線より等距離なる點は其二直線間の角の二等分線上に在り.

前提 二直線AOA',BOB' ハ O ニ於テ交リ,

此兩直線ヨリ等距離ニ在ル任意ノ一點ヲ P トス(假リニ∠AOB內ニ在リトス).

求證 P ハ AOA',BOB' ノ夾ム角ノ二等分線上ニ在リ.

作圖 AA',BB' ニ垂直ニ夫々PM,PN ヲ引キ, OP ヲ結ビ付ク.

證明 兩直角△POM,PON ニ於テ

∠M=∠N(共ニ直角)
OP ハ共通
PM=PN 〔前提〕

∴ △POM≡△PON, 〔定理17〕

∴ ∠POM=∠PON,

故ニ P ハ∠AOB(又ハ∠A'OB')ノ二等分線上ニ在リ,(從ヒテ此二等分線ノ外ニハ在ラズ)

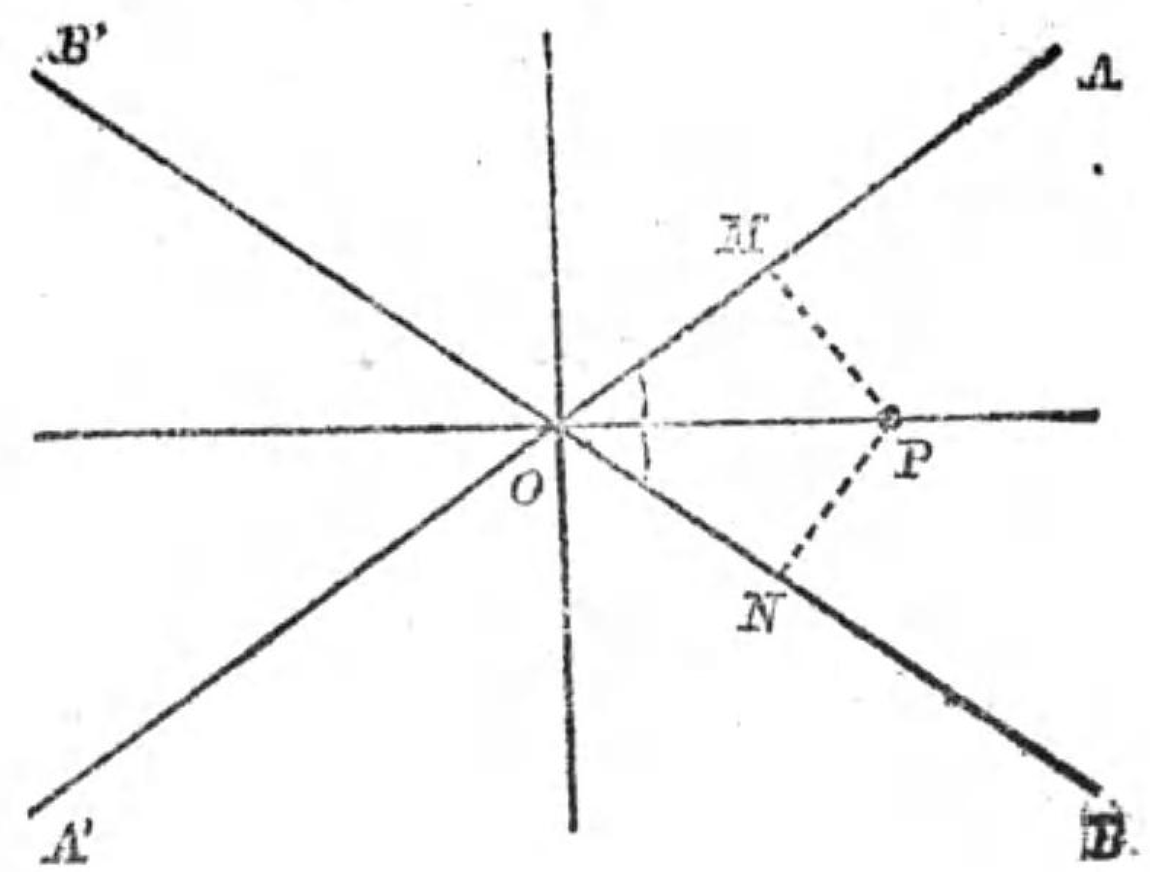
P ヲ∠AOB'ノ內又ハ∠A'OB ノ內ニ取ルトモ, P ハ∠AOB'(又ハ∠A'OB)ノ二等分線上ニ在ルコト,同樣ニ證明セラル.

(乙) 相交る二直線間の角を二等分する直線上の點は其二直線より等距離に在り.

前提 P ハ二直線AOA',BOB' ノ夾ム角ヲ二等分スル直線上ノ任意ノ一點ナリ(假リニ∠AOB ノ二等分線OP上ニ在リトス).

PM,PN ハ P ヨリ夫々OA,OB マデ引ケル垂線ナリ.

求證 PM＝PN.



證明 兩△OMP, ONP ニ於テ

$\begin{cases} \text{OP ハ共通} \\ \angle\text{POM}=\angle\text{PON} \\ \angle\text{M}=\angle\text{N}\ (\text{直角}) \end{cases}$ 〔前提〕

∴ △OMP≡△ONP, 〔定理[15]〕

∴ PM＝PN.

故ニ∠AOB(又ハ∠A'OB')ノ二等分線上ノ點ハ,何レモ二直線AOA', BOB'ヨリ等距離ニ在リ.

∠AOB'(又ハ∠BOA')ノ二等分線上ノ點ガ二線AOA', BOB'ヨリ等距離ニ在リトイフコトモ,同

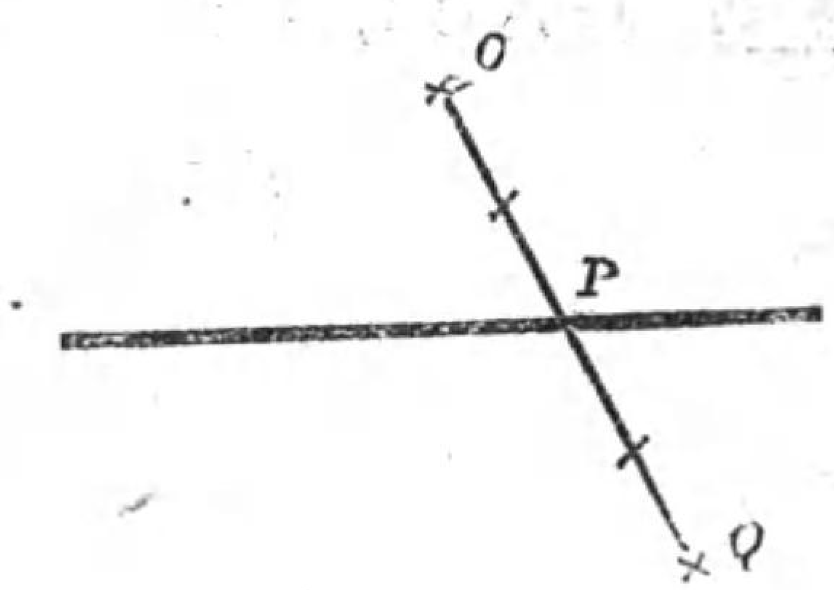
樣ニ證明セラル.

(甲),(乙)ノ通リナルガ故ニ,二ツノ直線ヨリ等距離ニ在ル點ノ軌跡ハ,其二直線ノ夾ム角ヲ二等分スル所ノ二ツノ直線ナリ.

〔問題〕

[1] 一定直線ヨリ一定距離ニ在ル點ノ軌跡ハ之ニ平行ナル二直線ナリ.

[2] Oヲ一定點トシ,Pヲ一定直線上ノ動點トシ,OPノ延長ノ上ニ點Qヲ取リテ,PQ＝OPトスレバ,Qノ軌跡ハ定直線ニ平行ナル一ツノ直線ナリ.



[3] Oヲ一定點トシ,Pヲ一定直線上ノ動點トシ,OPノ上ニ點Qヲ取リテOQトQPトヲ相等シカラシムレバ,點Qノ軌跡ハ矢張リ定直線ニ平行ナル一ツノ直線ナリ.

軌跡の交り.

93. 相交る二直線 AOA′, BOB′ より一定距離に在る點を求むること.

先ヅ AOA′ ヨリ定距離ニ在ル點ノ軌跡(二ツノ平行直線)ヲ畫ケ. 求ムル所ノ點ハ此軌跡上ニ在リ.

次ニ BOB′ ヨリ前ト同距離ニ在ル點ノ軌跡(矢張リ二ツノ平行直線)ヲ畫ケ. 求ムル所ノ點ハ此軌跡上ニモ在リ.

故ニ求ムル所ノ點ハ此兩軌跡ニ共通ナル點, 即チ其ノ交點ナラザルベカラズ.

然ルニ兩軌跡ハ四點ニ於テ相交ル. 此四點ガ即チ求ムル所ノ點ナリ.

——〔問　題〕——

[1] 相交ル二直線ノ一方ヨリハ一寸,他ノ方ヨリハ二寸ノ距離ニ在ル點ヲ求ムルコト.

[2] 直線 AB ヨリ 2 寸隔リテ一點 O アリ, O ヨリモ AB ヨリモ 3 寸隔レル點ヲ求ムルコト.

[3] A, B ハ相距ルコト三寸ナリ. A ヨリハ一寸, B ヨリハ 5 寸ナル點ヲ求ムルコト.

[4] ∠AOB ノ兩邊ヨリ等距離ニ在リ,且ツ邊 OB 上ノ一點 P ヨリ 2. OP ニ等シキ距離ニ在ル點ヲ求ムルコト.

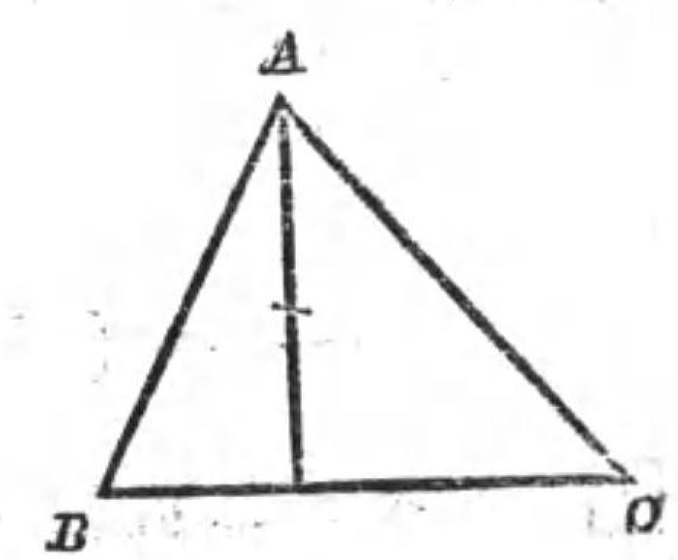
[5] 二等邊△ノ一邊上ニ於テ,他ノ一邊ト底トヨリ等距離ニ在ル點ヲ求ムルコト.

[6] 不等邊△ノ一邊上ニ於テ他ノ二邊ヨリ等距離ニ在ル一點ヲ求ムルコト.

[7] 一ツノ三角形ノ内ニ在リ且ツ其ノ三邊ヨリ等距離ナル點ヲ求ムルコト.

[8] 三角形ノ三頂點ヨリ等距離ナル點ヲ求ムルコト.

[9] △ABC ノ底 BC ト ∠B ト高サ(頂點ヨリ底マデ引ケル垂線ノ長サ)トヲ知リテ三角形ヲ作ルコト.



10 AヨリBCマデ引ケル高サト二邊AB, ACトヲ知リテ,△ABCヲ作ルコト.

11 邊BCト∠BトBヨリ引ケル中線トヲ與ヘラレテ,△ABCヲ作ルコト.

12 Aヨリ引ケル高サ及ビ中線ト邊BCトヲ知リテ,△ABCヲ作ルコト.

13 等邊ガ各々高サノ二倍ニ等シキ二等邊△ヲ作ルコト.

練習雜題.

1 底BCト∠B=60°トヲ與ヘラレテ邊CAノ最小ナル△ABCヲ作ルコト.

2 與ヘラレタル△ABCノ邊AB上ニ一點P,邊AC上ニ一點Qヲ求メ,PQヲシテBCニ平行ニ且ツ$\frac{1}{3}$BCニ等シカラシムルコト.

3 與ヘラレタル二平行直線上ニ夫々與ヘラレタル點ヲA,Bトシ,別ニ此二直線上ニ夫々點D,Cヲ求メテ,菱形ABCDヲ作ルコト.

4 與ヘラレタル直線CDノ同側ニ與ヘラレタル二點ヲA,Bトス. CD上ニ一點Pヲ求メAPトBPトノ差ヲ最大ナラシムルコト. (但シAB∥CDナラズ.

5 A,Bハ與ヘラレタル直線CDノ同側ニ與ヘラレタル二點トス. CD上ニ一點Pヲ求メ,AP,BPノ和ヲ最小ナラシムルコト.

(CDニ付テAニ對稱ナル點ヲA′トシ,
BA′ヲ結ビ付ケ,其ノCDト交ル點ヲPトスレバヨシ).

6 三角形ノ底ノ上ニ一ノ頂點ヲ有シ且ツ其ノ兩邊上ニ二邊ヲ有スル菱形ヲ畫クコト.

7 與ヘラレタル直線ニ等シク且ツ平行ナル直線ヲ引キテ,其ノ兩端ヲ與ヘラレタル角ノ兩邊上ニ在ラシムルコト.

8 同ジ底ノ上ニ立テル二ツノ二等邊三角形ノ頂點ヲ通ル直線ハ其底ヲ垂直ニ二等分ス.

9 同ジ底ノ上ニ立テル二等邊△ノ頂點ノ軌跡ヲ求ムルコト.

10 ▱ ABCD ノ一ツノ對角線AC. ノ上ニ二點P, Q ヲ取リテ, AP=CQ トセバ, BPDQ ハ平行四邊形ナリ.

11 二等邊△ABC ノ兩底角ノ二等分線ガ對邊ト相交ル點ヲ夫々E,F トスレバ, EF ハ底ニ平行ナリ.

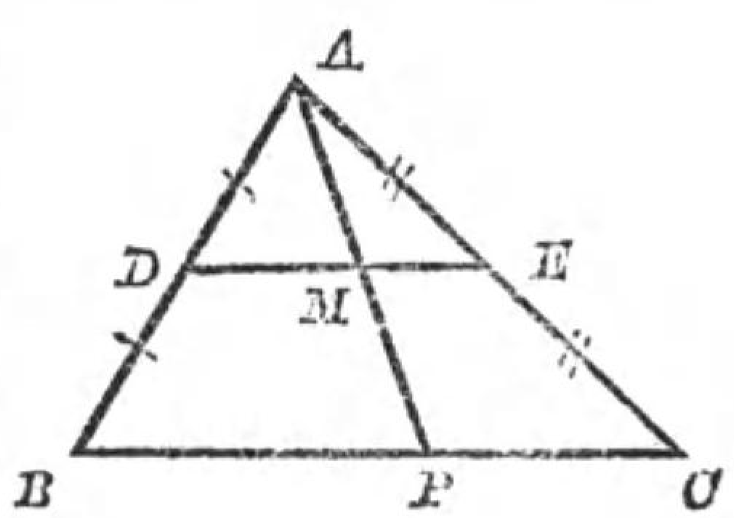
12 四邊形 ABCD ニ於テ, AB=CD, 且ツ ∠B=∠C ナルトキハ, AD ∥ BC.

13 等脚梯形ノ兩對角線ハ相等シ.

14 四邊形 ABCD ニ於テ, ∠A=∠B, ∠C=∠D ナルトキハ, AD=BC,

15 矩形ノ邊ノ中點ヲ順次結ビ付ケテ得ル所ノ四邊形ハ菱形ナリ.

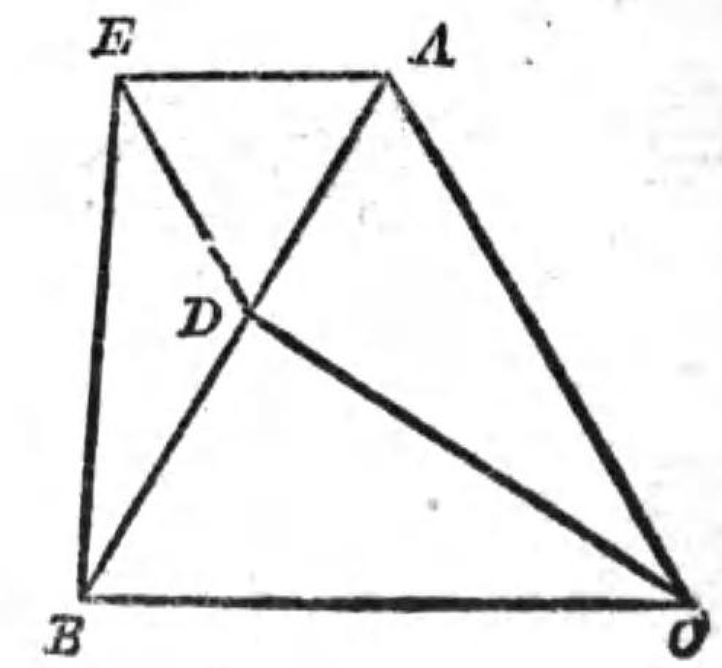
16 △ノ頂點ト底上ノ一點トヲ結ブ直線ハ, 他ノ二邊ノ中點ヲ結ブ直線ニ二等分セラル.



17 直角△ノ直角ニアラザル二角ノ一方ガ他ノ方ノ二倍ナルトキハ,最短邊ハ斜邊ノ二分ノ一ナリ.

18 直角三角形ニ於テ直角ノ頂點ト斜邊ノ中點トヲ結ビ付クル直線ハ斜邊ノ半分ナリ.

19 等邊三角形ABC ノ一邊 AB 上ニ任意ノ一點D ヲ取リ, AD ヲ一邊トシテ△ABC ノ外側ニ等邊三角形ADE ヲ作ルトキハ, BE=CD.



第九章　面積

94. 矩形の面積.

例ヘバ,長サガ4寸ニテ幅ガ3寸ナル矩形ハ,邊ガ1寸ナル正方形ヲ4×3箇ダケ含メリ;即チ其ノ面積ハ4×3平方寸ナリ.

又,長サガ2.3寸ニテ幅ガ1.5寸ナル矩形ハ,邊ガ1分ナル正方形ヲ23×15箇ダケ含メリ;故ニ其面積ハ23×15平方分ナリ: 然ルニ

$$1(\text{平方分})=\frac{1}{100}(\text{平方寸})$$

ナレバ,

$$\begin{aligned}23\times15(\text{平方分})&=\frac{23\times15}{100}(\text{平方寸})\\&=\frac{23}{10}\times\frac{15}{10}(\text{平方寸})\\&=2.3\times1.5(\text{平方寸})\end{aligned}$$

乃チ長サ2.3寸,幅1.5寸ナル矩形ノ面積.

$$=2.3\times1.5(\text{平方寸})$$

故ニ,矩形ニ含マルル,長サノ單位ノ上ノ正方形ノ數ヲ求ムルニハ,其長サ及ビ幅ノ中ニ在ル長サノ單位ノ數ヲ掛ケ合ハスベシ.

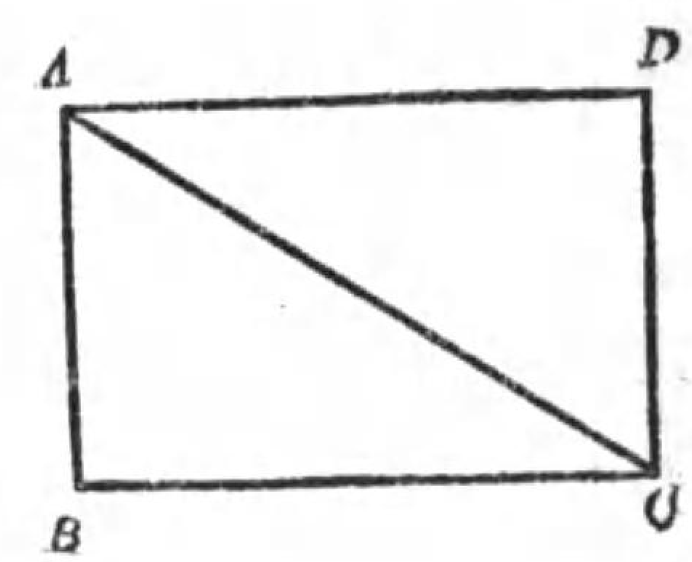
此事ハ通例次ノ如ク略言ス:

矩形の面積は其の長さ及び幅の積に等し.

又式ニテハ此事ヲ次ノ如ク書キ表ハス:

$$(\text{矩形})=(\text{長サ})\times(\text{幅}).$$

95. 直角三角形の面積.



矩形ハ其ノ一對角線ニ依リテ二ツノ相等シキ直角三角形ニ分タル. 故ニ直角三角形ノ面積ハ之ヲ矩形ノ半分ト見テ求メラル. 即チ

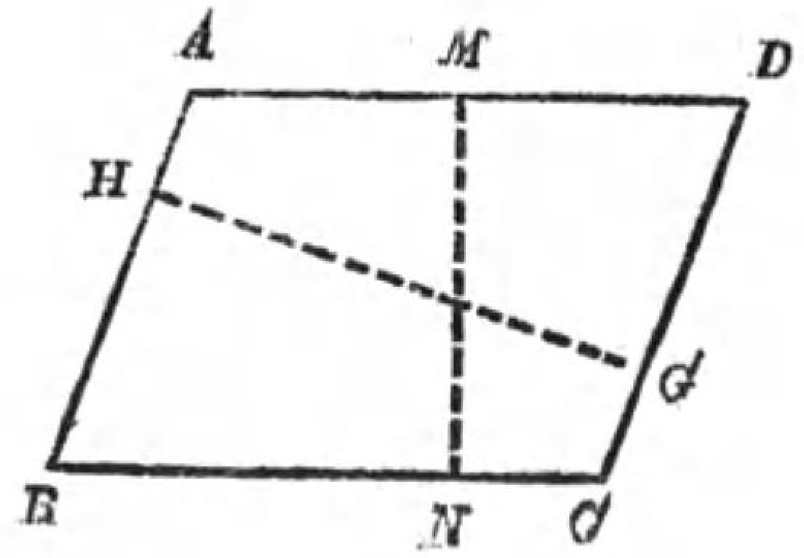
$$\text{直角}\triangle ABC=\frac{1}{2}AB.BC$$

但シ$\angle B$ハ直角.

96. 平行四邊形の底及び高さ.

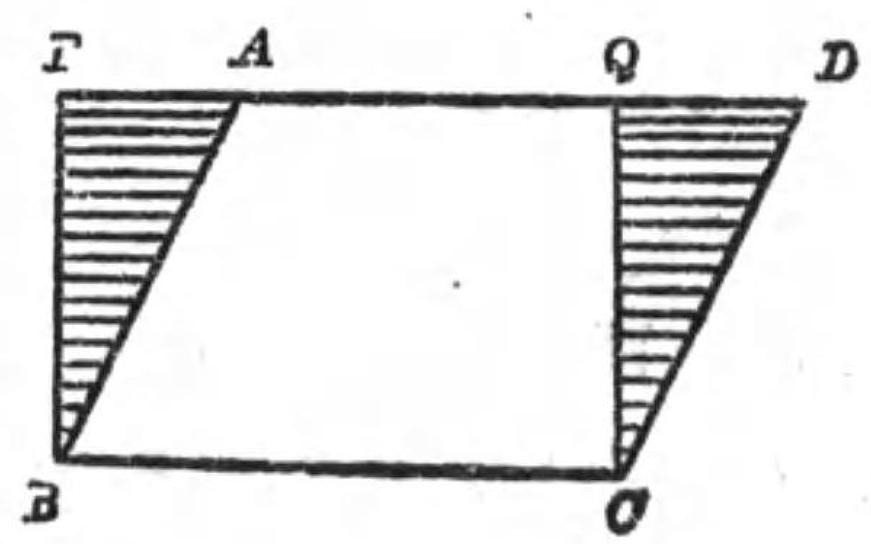
平行四邊形ニ於テハ任意ノ一邊ヲ其ノ底ト稱スルコトヲ得,而シテ底ト其ノ對邊トノ垂線距離ヲ其ノ高サト稱ス.

▱ABCDニ於テBCヲ其ノ底ト稱スルトキハ, BC,AD間ノ垂直距離MNガ此平行四邊形ノ高サナリ; 又ABヲ其ノ底ト稱スルトキハ, AB, DCノ垂線距離GHガ此平行四邊形ノ高サナリ.



97. 矩形と等積なる平行四邊形.

矩形PBCQノ左端ヨリ直角三角形ナル部分PABヲ切リ取リ,之ヲ移シテ右端ニ附ケ,邊PB,ガ邊QCニ合スル様ニシテ,QDCノ位置ヲ取ラシ



ムレバ,▱ABCDヲ生ズ.

故ニ,矩形PBCQト▱ABCDトハ面積相等シ.

二ツノ圖形ガ相等シキ面積ヲ有スルコトヲ,其圖形ハ**等積**ナリト云フ.

等積ナルコトハ等號(=)ヲ用ヒテ書キ表ス.

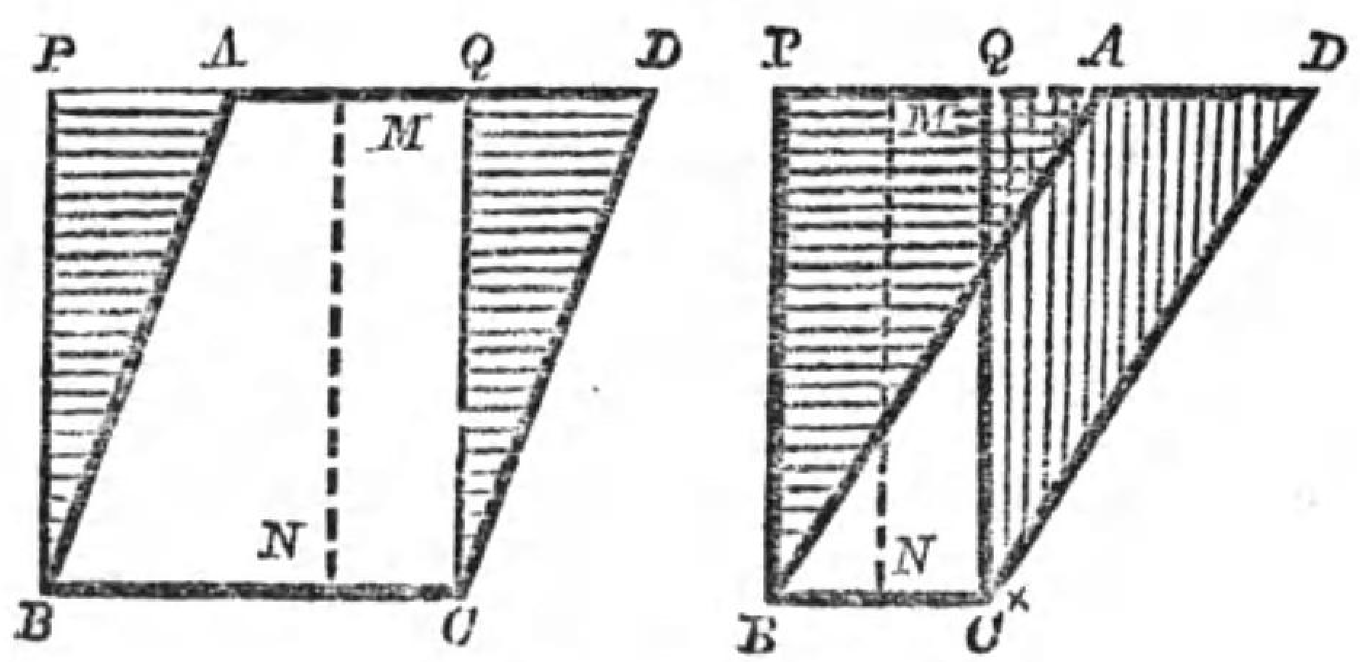
例ヘバ,

$$□PBCQ=▱ABCD$$

ト書クガ如シ. 玆ニ記號□ハ矩形ト云フ語ノ代リニ用フルモノナリ.

注意　一般ニ,二ツノ圖形ガ其儘ニハ相合セズトモ,一方ノ部分ト他ノ方ノ部分トヲ悉ク相合セシムルコトヲ得レバ,其ノ兩圖形ハ等積ナリ. 即チ相等シカラザル圖形ニテモ等積ナルコトヲ得ルナリ. 相等シキ圖形ノ等積ナルコトハ言フニ及バズ.

98. 定理34　平行四邊形は,之と同じ底を有し,且つ同じ平行線間に在る(即ち同じ高さの)矩形と等積なり.



前提　▱ABCD ト □PBCQ トハ

同ジ底BC ノ上ニ在リ,

且ツ同ジ平行直線BC, PD ノ間ニ在リ.

求證　▱ABCD＝□PBCQ.

證明　兩△PBA, QCD ニ於テ,

∠BAP＝∠CDQ(同位角), ∵ BA ∥ CD　〔定理[illegible]〕

∠BPA＝∠CQD(同位角) ∵ BP ∥ CQ　"

BA＝CD　(ABCD ハ ▱ ナレバ)　〔定理[illegible]〕

∴ △PBA≡△QCD　〔定理[illegible]〕

サテ, ▱ABCD＝PBCD－△PBA,

又, □PBCQ＝PBCD－△QCD,

∴ ▱ABCD＝□PBCQ.

99. 系

1　平行四邊形の面積は其の底と高さとの積を以て計らる.

▱ABCD ノ高サヲMN トス.

□PBCQ＝BC. PB.

∴ ▱ABCD＝BC. PB.

然ルニ PB＝MN.

∴ ▱ABCD＝BC. MN.

2　同じ底を有し且つ同じ平行線間に在る平行四邊形は等積なり.

3　相等しき底の上に在り且つ同じ平行線間に在る平行四邊形は等積なり.

〔問　題〕

1　與ヘラレタル矩形ト同ジ底ヲ有シ且ツ之ト等積ニシテ,一ツノ底角ガ與ヘラレタル角ニ等シキ▱ヲ作ルコト.

[2] 底ガ高サノ二倍ナル矩形ノ底ヲ底トシ且ツ之ト等積ナル菱形ヲ作ルコト.

[3] 一ツノ矩形ノ底ヲ底トシ,之ト等積ニシテ,且ツ與ヘラレタル直線ニ等シキ他ノ一邊ヲ有スル▱ヲ作ルコト.

[4] 與ヘラレタル二邊ヲ有シ,且ツ與ヘラレタル矩形ト等積ナル▱ヲ作ルコト.

100. 三角形の底及び高さ.

三角形ニ於テハ任意ノ一邊ヲ其ノ**底**ト稱スルコトヲ得. 底ニ對スル頂點ヨリ底マデ引ケル垂線ヲ其三角形ノ**高サ**ト稱ス.

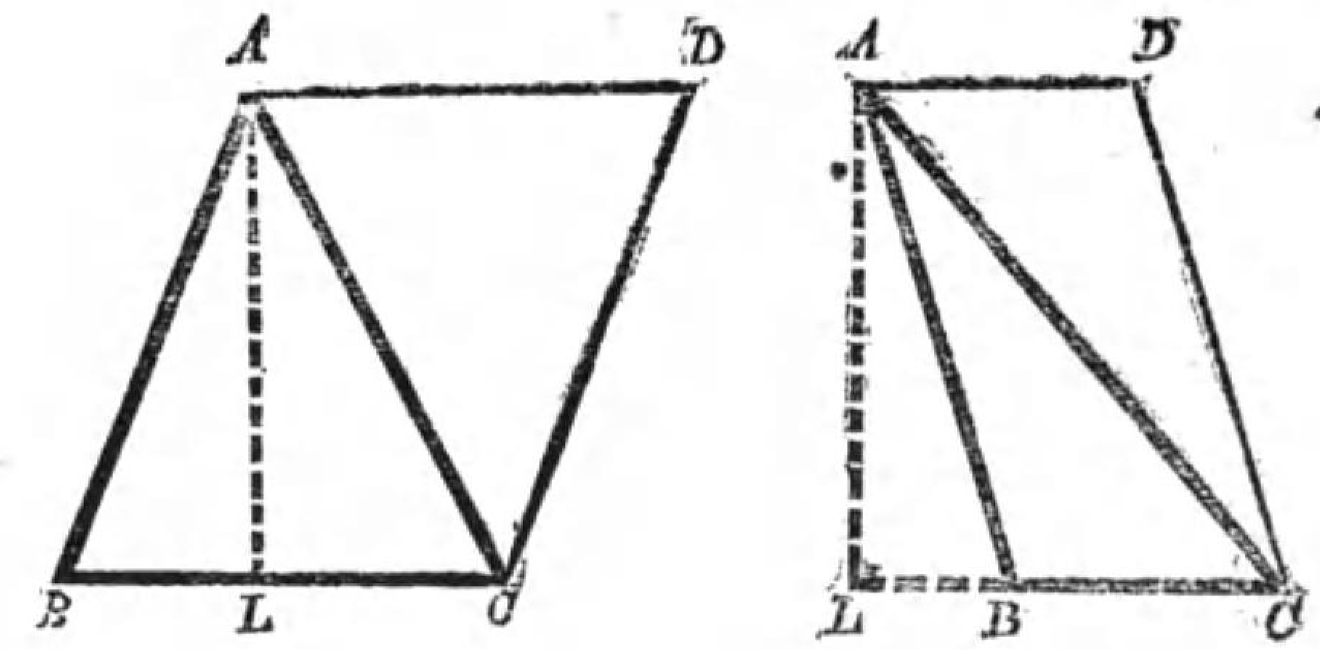
〔問題〕

[1] 一ツノ直角△ノ三ツノ高サヲ引ケ.

[2] 二ツノ高サガ相等シキ三角形ハ二等邊三角形ナリ.

[3] 三ツノ高サノ悉ク相等シキ三角形ハ如何ナル△ナルカ.

101. $\boxed{\text{定理35}}$ **三角形の面積は其の底と高さとを二邊とする矩形の面積の半分なり.**



$\boxed{\text{前提}}$ △ABC ニ於テ,BC ヲ底,AL ヲ高サトス

$\boxed{\text{求證}}$ $\triangle ABC = \frac{1}{2}(BC.\ AL)$.

$\boxed{\text{作圖}}$ AD ∥ BC, CD ∥ BA トシテ,

▱ABCD ヲ作ル.

$\boxed{\text{證明}}$ $\triangle ABC \equiv \triangle CDA$, 〔何故ニカ〕

然ルニ ▱ABCD = △ABC + △CDA,

∴ △ABC = $\frac{1}{2}$ ▱ABCD.

又 ▱ABCD = BC. AL, 〔定理34,系1〕

∴ $\triangle ABC = \frac{1}{2}(BC.\ AL)$.

——〔問題〕——

[1] 直角三角形ノ面積ハ其ノ直角ノ二邊ノ積ノ半分ナリ.

[2] 菱形ノ面積ハ其ノ兩對角線ノ積ノ半分ナリ.

[3] △ABC ノ底 BC ノ中點ヲ D トスレバ,

$$\triangle ABD = \triangle ACD.$$

[4] 四邊形 ABCD ノ對角線 AC ガ對角線 BD ヲ二等分スレバ, AC ハ其四邊形ヲ等積ナル兩三角形ニ分ツ.

[5] 四邊形 ABCD ノ對角線 AC ノ中點ヲ E トスレバ,

$$ABED = CBED.$$

[6] △ABC ノ中線 AD 上ノ一點ヲ E トスレバ,

$$\triangle ABE = \triangle ACE.$$

[7] △ABC ノ邊 BC 上ノ任意ノ點ヲ D トシ, AD ノ中點ヲ E トスルトキハ,

$$\triangle BEC = \frac{1}{2}\triangle ABC.$$

102. [定理36] **同じ底を有し,且つ同じ平行線間に在る三角形は等積なり.**

[證明] 此ノ如キ三角形ハ同ジ底ト高サトヲ有スルガ故ニ,

何レモ其ノ底ト高サトヲ二邊トスル矩形ノ半分ニ等シ.

故ニ此ノ如キ三角形ハ總ベテ等積ナリ.

103. [系] 相等しき底を有し,且つ同じ平行線間に在る三角形は等積なり.

——〔問題〕——

[1] 與ヘラレタル不等邊三角形ト同ジ底ヲ有シ,且ツ之ト等積ナル二等邊三角形ヲ畫クコト.

[2] 與ヘラレタル三角形ト等積ニシテ,之ト同ジ底ヲ有シ,且ツ與ヘラレタル一邊ヲ有スル三角形ヲ作ルコト.

[3] 與ヘラレタル三角形ト等積ナル直角三角形ヲ作ルコト.

[4] 與ヘラレタル三角形ト等積ニシテ,且ツ與ヘラレタル底ヲ有スル所ノ二等邊三角形ヲ作ルコト.

[5] △ABC ノ底 BC ニ平行ニ DE ヲ引キテ, AB, AC ヲ夫々 D, E ニ於テ切レバ.

$$\triangle ABE = \triangle ACD.$$

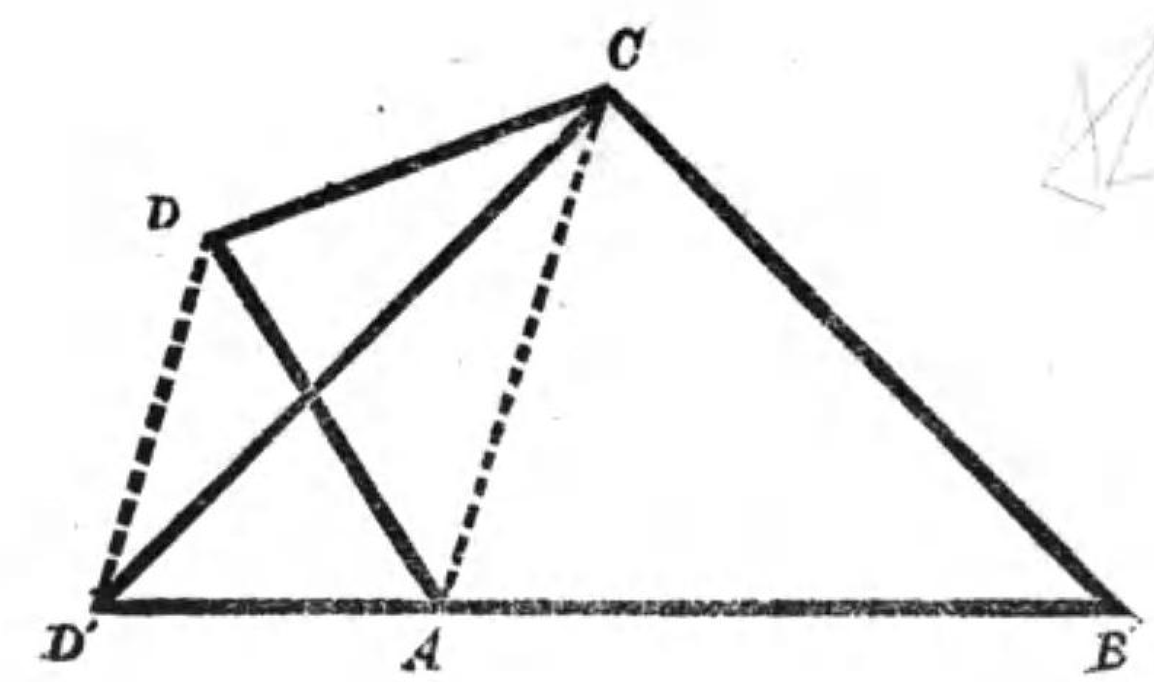
[6] △ABC ノ底 BC 上ニ任意ニ點 F ヲ取リ, BC ノ中點 E ヨリ AF ニ平行ニ ED ヲ引キテ AC ト D ニ於テ相交ラシムレバ,

$$\triangle FDC = \frac{1}{2}\triangle ABC.$$

[7] 三角形ノ一邊上ナル任意ノ一點ヲ過グル直線ヲ引キテ此三角形ヲ二等分スルコト.

[8] 與ヘラレタル底ヲ有シ,且ツ面積ノ不變ナル三角形ノ頂點ノ軌跡ハ底ニ平行ナル二直線ナリ.

104. **[作圖題10]** **四邊形ABCDと等積なる三角形を作ること.**



[作圖] CA ヲ結ビ,

D ヨリ DD' ヲ CA ニ平行ニ引キ,

BA ノ延長ト D' ニ於テ相交ラシメ,

サテ, CD' ヲ結ブ.

然ルトキハ, △BCD'=ABCD.

[證明] △ACD'=△ACD.　〔何故ニカ〕

此兩邊ニ△ACB ヲ加フレバ,

△BCD'=ABCD.

[注意] 何邊形ト等積ナル三角形ニテモ,此ト同ジ方法ニテ作ルコトヲ得.

〔問題〕

[*1] 一つの五角形と等積なる三角形を作ること.

[2] 與ヘラレタル四邊形ABCDノ一邊ABヲ一邊トシ,其ノ一角Aヲ一角トシ,且ツ之ト等積ナル△ヲ作ルコト.

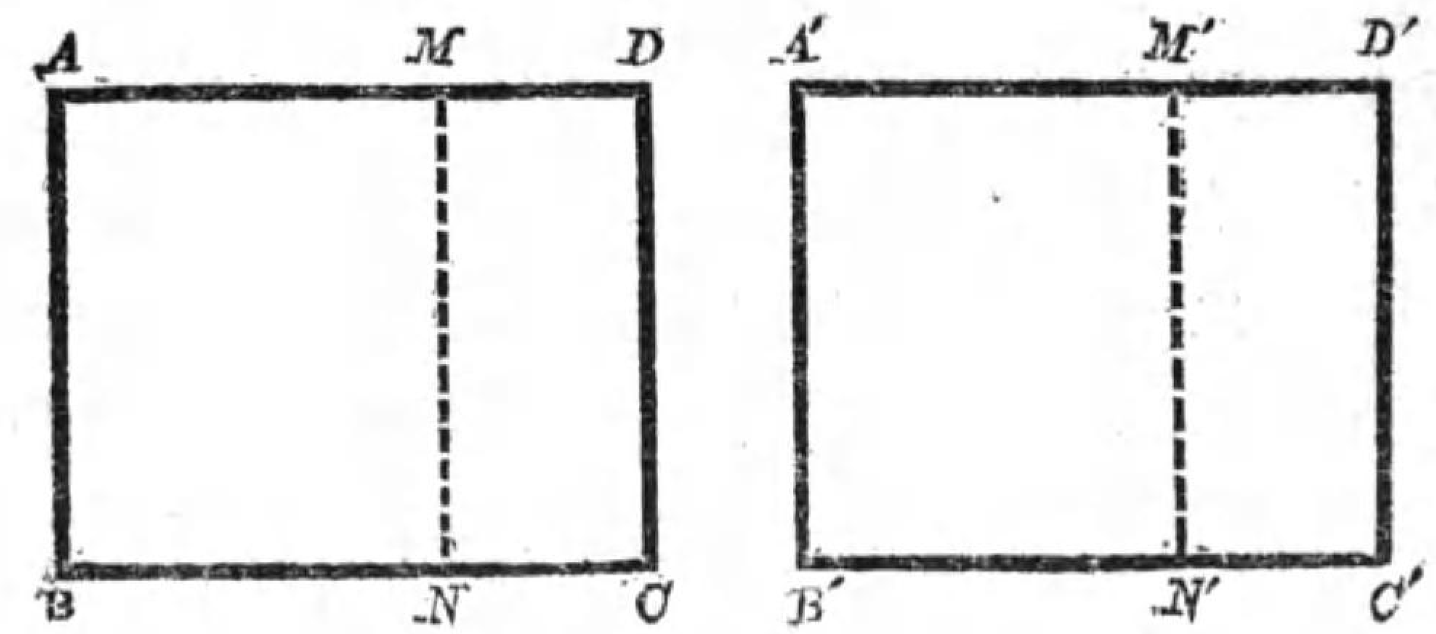
[3] 與ヘラレタル二ツノ△ノ面積ノ和ニ等シキ面積ヲ有スル△ヲ作ルコト.

[4] 與ヘラレタル二ツノ△ノ面積ノ差ニ等シキ面積ヲ有スル△ヲ作ルコト.

[5] 梯形ABCDノ平行ナラザル邊DCノ中點Eヲ過ギテABニ平行ニPQヲ引キ,ADノ延長及ビBCト夫々P, Qニ於テ交ラシムレバ,其梯形ト▱APQBトハ等積ナリ.

[*6] 梯形の面積は平行なる二邊の和の半分と其の高さとの積にて計らる.

105. [定理37] 相等しき底を有する等積の矩形は又相等しき高さを有す.



[前提] □ABCD, A′B′C′D′ハ相等シキ底BC, B′C′ヲ有シ,且ツ等積ナリ.

MN, M′N′ヲ此兩□ノ高サトス.

[求證] $MN = M'N'$.

[證明] $\square ABCD = \square A'B'C'D'$. 〔前提〕

然ルニ $\square ABCD = BC.MN$. 〔定理34, 系1〕

$\square A'B'C'D' = B'C'.M'N'$.

$\therefore BC.MN = B'C'.M'N'$

サテ $BC = B'C'$, 〔前提〕

$\therefore MN = M'N'$.

106. 系 .

1 相等しき底(又は同じ底)を有する等積の三角形は又相等しき高さを有す.

2 同じ底を有し且つ其の同じ側に在る等積なる三角形の頂點を結び付くる直線は底に平行なり.

3 二つの等積なる三角形が同じ直線上に於て相等しき底を有し,且つ其の同じ側に在るときは,其の頂點を結び付くる直線は底に平行なり.

〔問　題〕

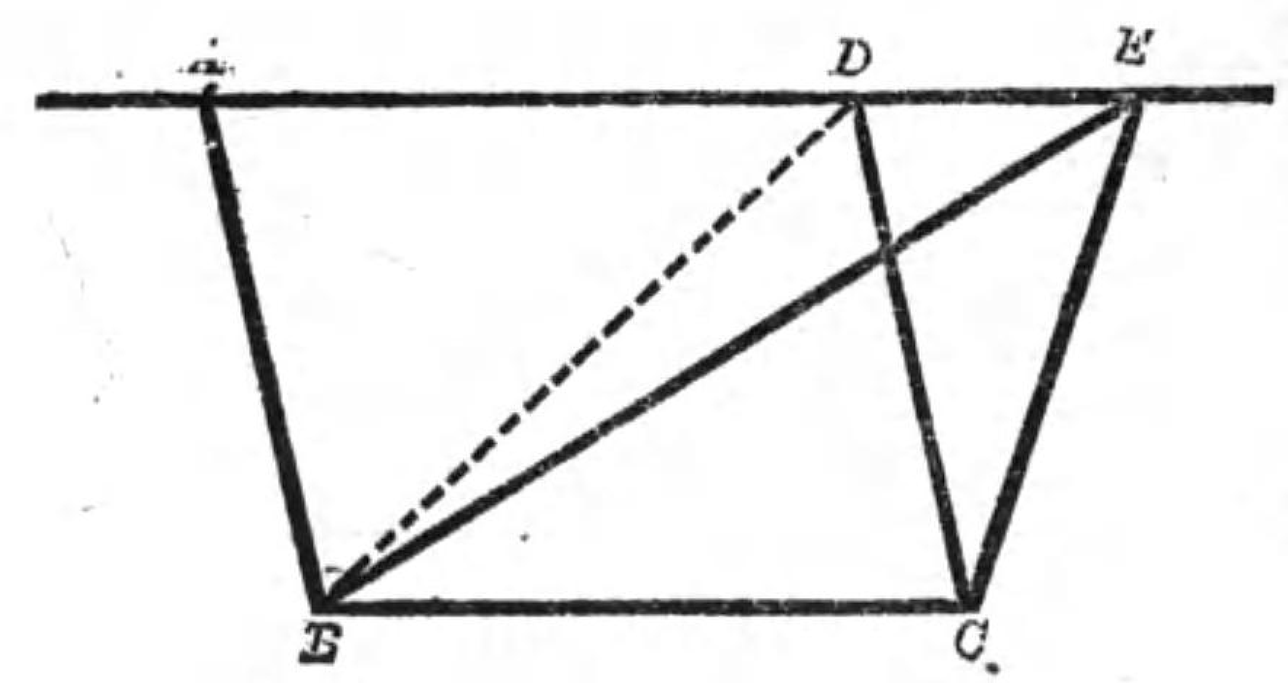
*1 $\triangle ABC$の二邊AB, ACの中點を夫々D, Eとすれば, $DE \parallel BC$.

2 四邊形ABCDノ對角線ノ交點ヲOトスルトキ, $\triangle AOB=\triangle COD$ナレバ, $AD \parallel BC$.

3 $\triangle ABC$ノ二邊AB, ACノ上ニ夫々點D, Eアリテ, $\triangle AEB=\triangle ADC$ナレバ, $DE \parallel BC$.

4 與ヘラレタル直線ヲ底トシ,且ツ與ヘラレタル面積ヲ有スル三角形ノ頂點ノ軌跡ヲ求ムルコト.

107 定理38 **三角形と平行四邊形とが同じ底を有し,且つ同じ平行線間に在るときは,其三角形の面積は平行四邊形の面積の半分なり.**



前提 $\triangle EBC$ト$\square ABCD$トハ同ジ底BCヲ有シ,且ツ同ジ平行直線BC, AEノ間ニ在リ.

求證 $\triangle EBC=\frac{1}{2}\square ABCD$.

作圖 BDヲ結ビ付ク.

證明 $\triangle EBC=\triangle DBC$, 〔何ノ故ニカ〕

$\triangle DBC=\frac{1}{2}\square ABCD$,

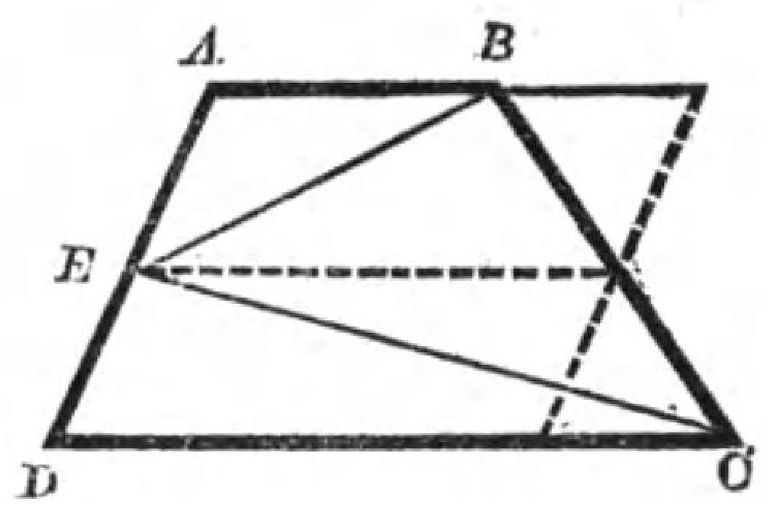
$\therefore \triangle EBC=\frac{1}{2}\square ABCD$.

〔問題〕

[1] 定三角形ト等積ナル矩形ヲ作ルコト.

[2] ▱ABCD ノ二邊 AB, BC ノ上ニ夫々點 P, Q ヲ取レバ, △CPD=△AQD.

[3] AB, DC ヲ平行邊トスル梯形 ABCD ノ一邊 AD ノ中點ヲ E トスレバ, △BEC ハ梯形ノ半分ナリ.



[4] ▱ABCD 内ニ一點 O ヲ取レバ,

$\triangle OAB + \triangle OCD = \frac{1}{2}$▱ABCD.

練習問題.

[1] ▱ABCD ノ對角線 BD 上ノ一點 O ヲ過ギテ AB ニ平行ニ EOF ヲ, AD ニ平行ニ GOH ヲ引クトキハ, ▱AGOE=▱CFOH.

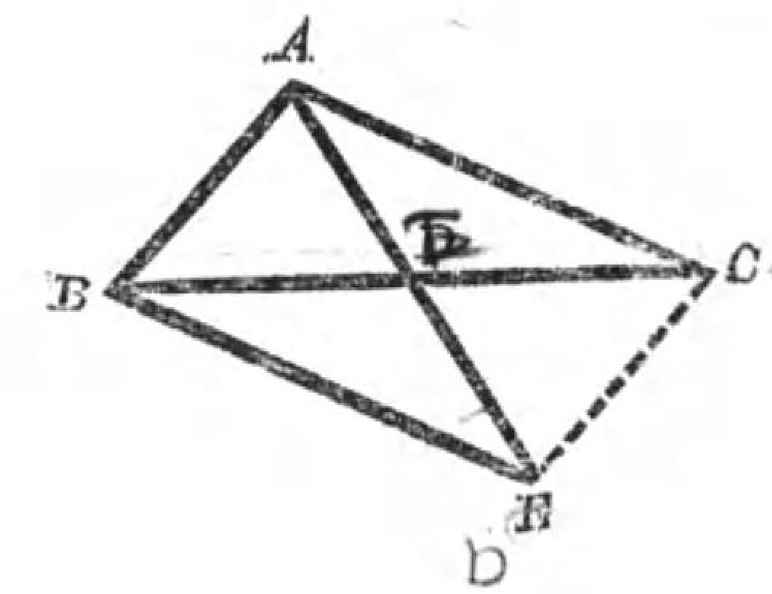
[2] 平行四邊形ノ中心(對角線ノ交點)ヲ過グル所ノ任意ノ直線ハ此平行四邊形ヲ二等分ス.

[3] 平行四邊形ヲ等積ナル三ツノ平行四邊形ニ分ツコト.

[4] 平行四邊形ヲ,其ノ一邊ニ垂直ナル直線ヲ引キテ二等分スルコト.

[5] ▱ABCD ノ對角線 AC 上ノ一點ヲ E トスレバ, △ABE=△ADE.

[6] △ABC ノ中線 AD ヲ E マデ延長シテ, DE=DA トスレバ, △ABE=△ABC.

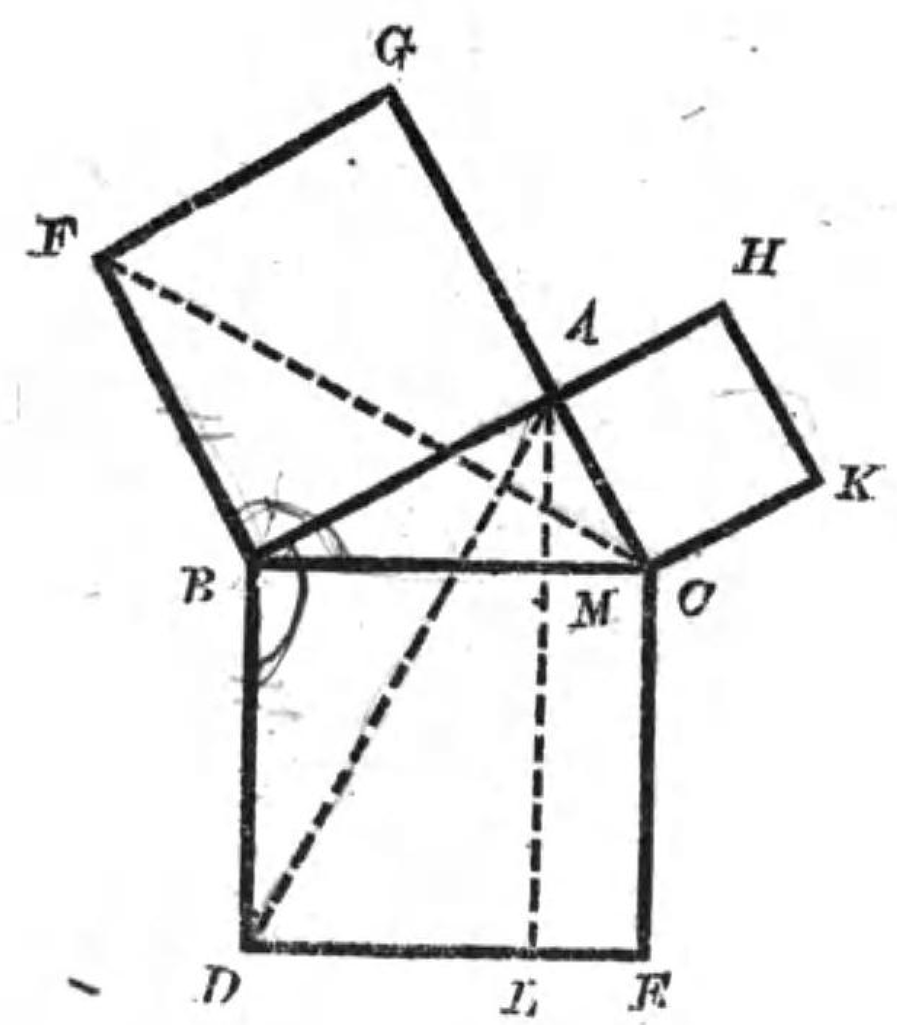


[7] 梯形 ABCD ノ平行邊 AB, CD ノ中點ヲ夫々 L, M トスレバ, LM ハ梯形ヲ二等分ス.

[8] 四邊形 ABCD ノ邊ノ中點ヲ順次ニ連ネテ得ル所ノ四邊形ハ原四邊形ノ半分ナリ.

108. 定理39 （ピタゴラスの定理）

直角三角形に於て,斜邊上の正方形は他の二邊上の正方形の和に等し,



前提　△ABC ニ於テ,∠A ハ直角,

BDEC, CKHA, AGFB ハ夫々 BC, CA, AB 上ニ書ケル正方形ナリ.

求證　□*BDEC＝□CKHA＋□AGFB.

---

*□ハ正方形トイフ語ノ代リニ用フル記號ナリ

作圖　A ヨリ BD ニ平行ニ AL ヲ引キ,

CF, AD ヲ結ビ付ク.

證明　∠CBD＝∠FBA（共ニ直角),

∴ ∠CBD＋∠ABC＝∠FBA＋∠ABC.

即チ ∠ABD＝∠FBC.

故ニ兩 △ABD, FBC ニ於テ,

$$\begin{cases} \angle ABD = \angle FBC, \\ AB = FB \\ BD = BC \end{cases}$$ 〔何故ニカ〕

∴ △ABD≡△FBC.　〔定理11〕

次ニ ∠CAB, BAG ハ共ニ直角ナリ,

故ニ CAG ハ直線ナリ,

且ツ BF ニ平行ナリ.

∴ △FBC＝$\frac{1}{2}$□AGFB.　〔定理35〕

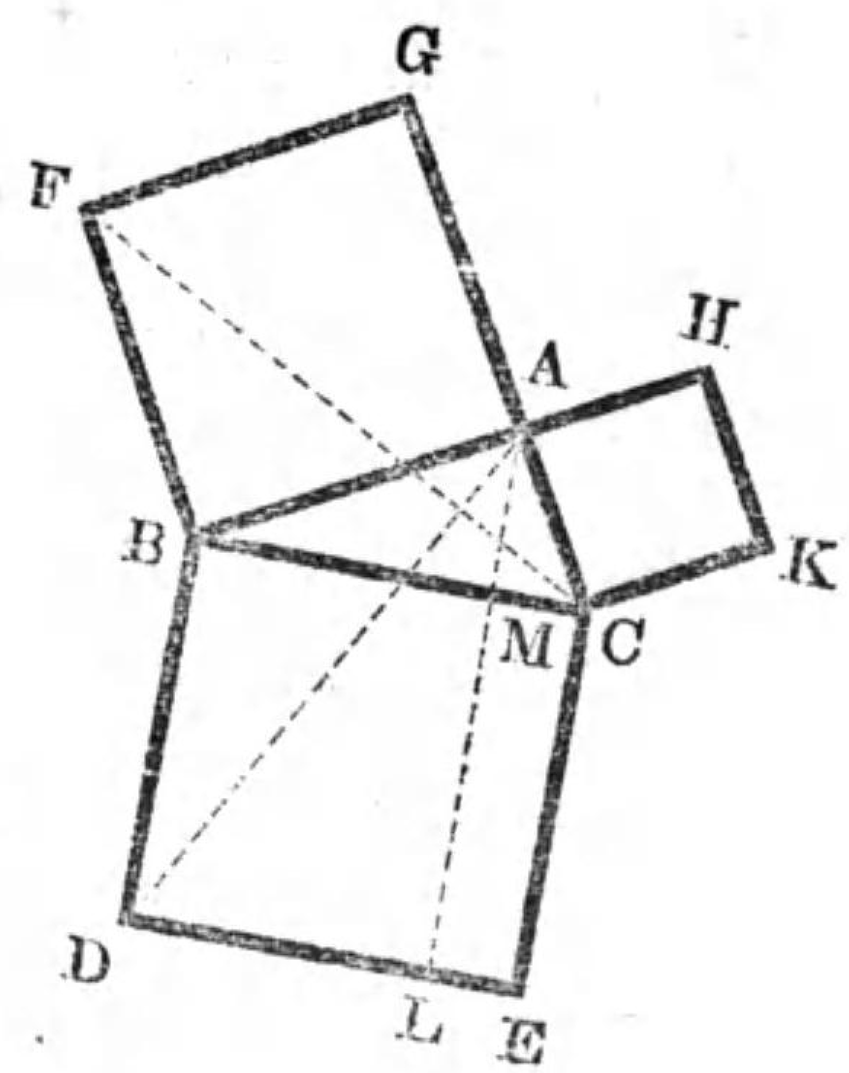
同理ニテ,△ABD＝$\frac{1}{2}$□BDLM.

然ルニ △FBC≡△ABD.　〔既證〕

∴ □AGFB＝□BDLM.

同理ニテ □CKHA＝□CELM.

(BK, AE ヲ結ビ,前ノ如ク證明ス).



故ニ □AGFB + □CKHA

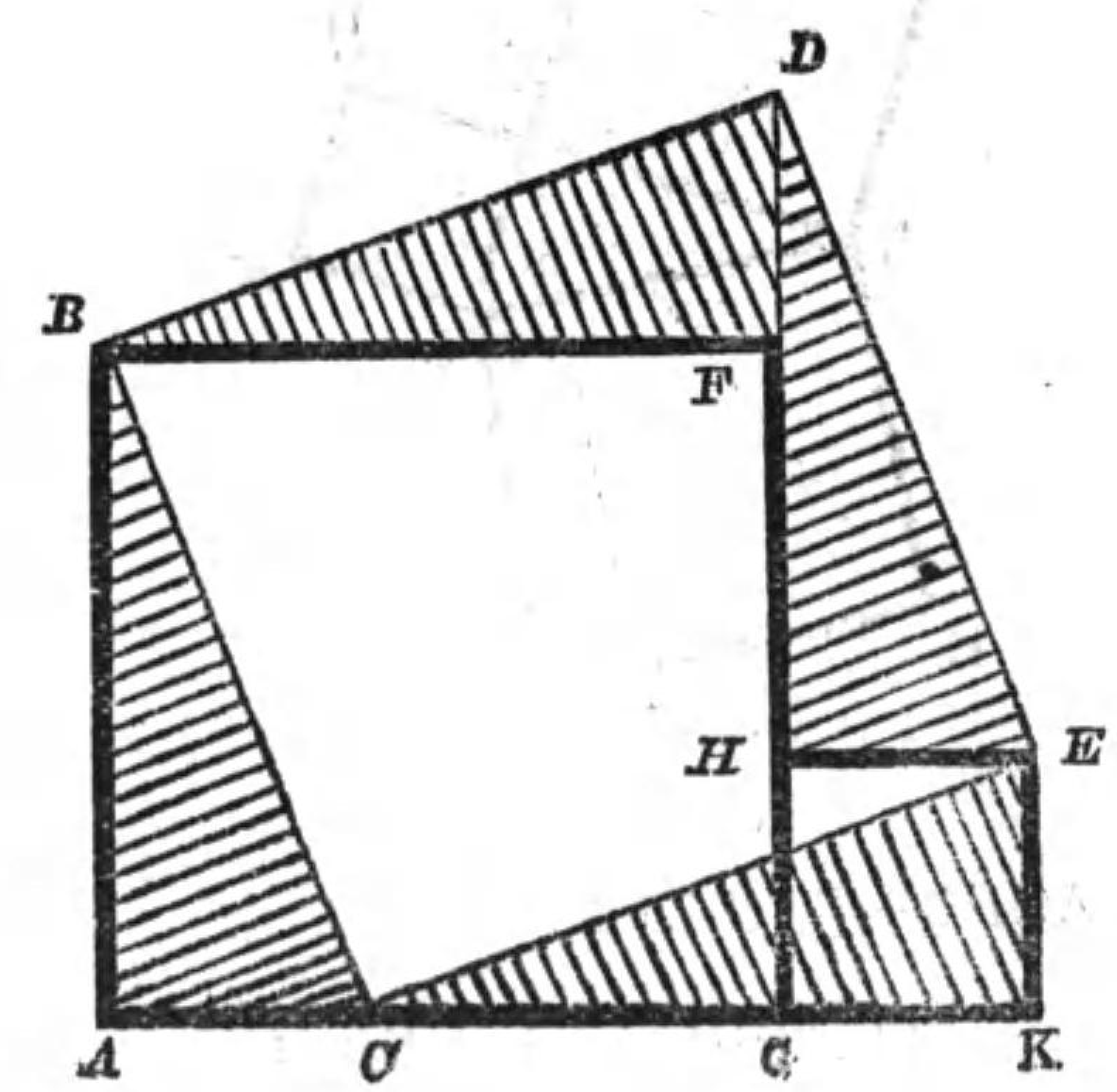
= □BDLM + □CELM

= □BDEC.

ぴたごらすノ定理ハ希臘人Pythagoras(西暦紀元前570年頃生,500年頃死)ノ發見ニ係リ,甚ダ重要ナルモノナリ. 支那ニテハ, Pythagoras ニ先ダツコト數百年ナル周公ノ頃ニ,既ニ此定理ヲ應用セリ.

109. ピタゴラスの定理の別證, 第一.

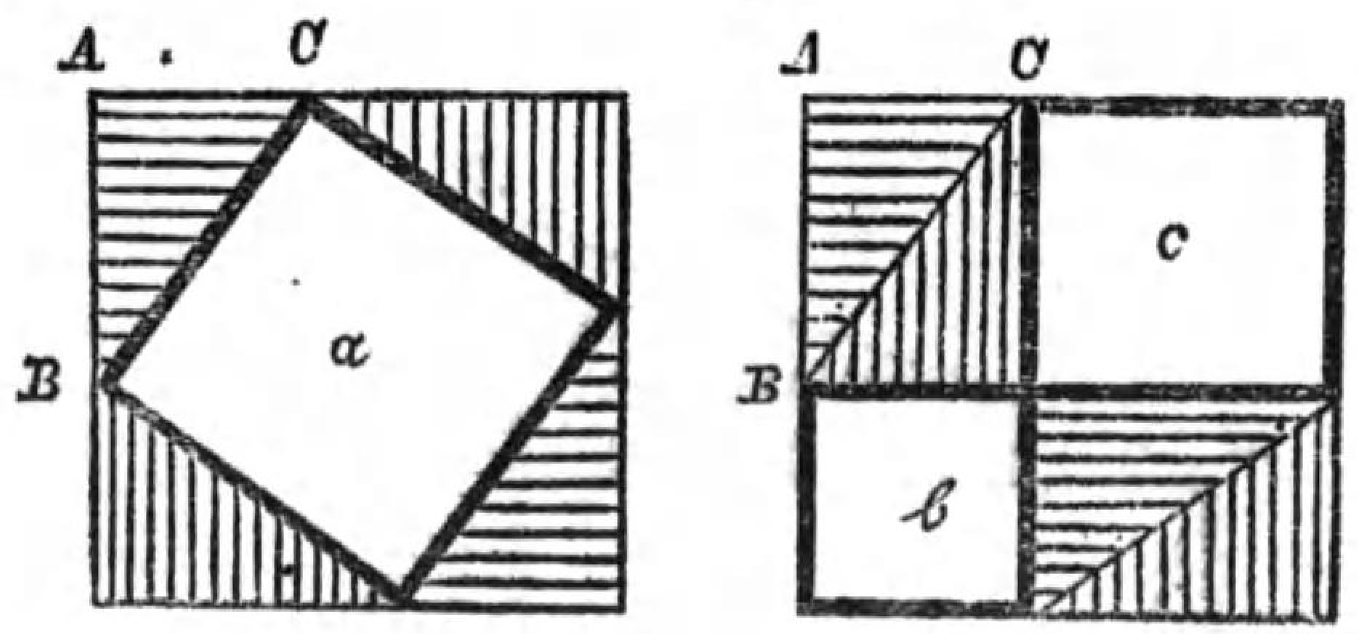
詳述ハ學生ニ讓リ,大要ヲ次ニ示ス:



直角三角形ABCノ一邊AC上ノ正方形ヲバ, GKEHノ如ク,AB上ノ□AGFBニ接シテ置キ, GFヲ延長シテFD=ACトシ,四邊形BCEDヲ作ル.

先ヅBCEDガ正方形ナルコトヲ證明スレバ, ぴたごらすノ定理ハ容易ニ推定シ得ベシ.

110. ピタゴラスの定理の別證, 第二.



直角△ABC ノ斜邊 BC 上ノ正方形 a ヲ容ルル矩形(左方ノ圖)ヲ作リ,又,別ニ邊 AC, AB 上ノ正方形 b, c ヲ容ルル矩形(右方ノ圖)ヲ作ル.

先ヅ此ノ兩矩形ハ等積ノ正方形ナルコトヲ證明スレバ,容易ニ $b+c=a$ ヲ推定スルコトヲ得ベシ.

111. 正方形の(面積の)書き表はし方.

直線 AB 上ノ正方形(ノ面積)ハ,矩形ノ面積ノ書キ表ハシ方(第 95 條)ニ準ジテ, AB^2 ト書キ表ハス.

此ノ書キ表ハシ方ニ依レバ,ぴたごらすノ定理ハ次ノ如ク書キ表ハサル:

$$AB^2+AC^2=BC^2.$$

〔問題〕

$\boxed{1}$ 與ヘラレタル二ツノ正方形ノ和ニ等シキ正方形ヲ作ルコト.

$\boxed{2}$ 二ツノ定正方形ノ差ニ等シキ正方形ヲ作ルコト.

$\boxed{3}$ 與ヘラレタル三ツノ正方形ノ和ニ等シキ正方形ヲ作ルコト.

$\boxed{4}$ 定正方形ノ二倍ニ等シキ正方形ヲ作ルコト.

$\boxed{5}$ A ニ於テ直角ヲ有スル直角△ABC ノ邊 AB 上ニ一點 S ヲ取レバ,

$$AB^2+CS^2=BC^2+AS^2.$$

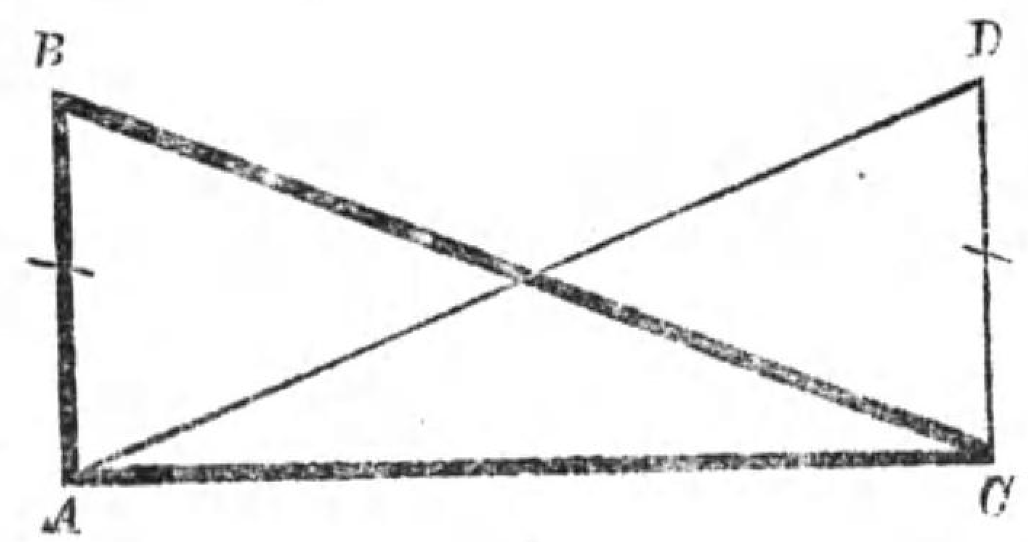
$\boxed{6}$ A ヲ直角トスル直角△ABC ノ邊 AB, AC 上ニ夫々點 X, Y ヲ取レバ,

$$BY^2+CX^2=XY^2+BC^2.$$

$\boxed{7}$ 四邊形 ABCD ノ對角線ガ直角ニ相交レバ,

$$AB^2+CD^2=BC^2+DA^2.$$

112. 定理40 三角形の一邊上の正方形が他の二邊上の正方形の和に等しきときは,此二邊の夾む角は直角なり.(ピタゴラスの定理の逆)



前提 △ABC ニ於テ,

$BC^2=AB^2+AC^2$.

求證 ∠BAC ハ直角ナリ.

作圖 C ヨリ AC ニ垂直ニ CD ヲ引キ,

CD=AB トシ,

AD ヲ結ビ付ク.

證明 直角△ACD ニ於テ

$AD^2=CD^2+AC^2$ 〔ピタゴラス〕

然ルニ CD=AB, 〔作圖〕

∴ $AD^2=AB^2+AC^2$.

然ルニ $BC^2=AB^2+AC^2$ 〔前提〕

∴ $BC^2=AD^2$,

∴ BC=DA.

仍テ兩△ABC, CDA ニ於テ

BC=DA 〔既證〕

AC ハ共通

AB=CD 〔作圖〕

∴ △ABC≡△CDA, 〔定理18〕

∴ ∠BAC≡∠DCA.

然ルニ∠DCA ハ直角ナリ.

故ニ∠BAC モ直角ナリ.

代數學に於ける恒等式に對應する幾何學の定理

數種

113. 二つの直線の包む矩形.

長サ a 寸,幅 b 寸ナル矩形ノ面積ハ ab 平方寸ナリ.

之ニ因ミテ,二ツノ直線 a ト b トノ包ム(即チ a,b ヲ相接スル二邊トスル)矩形ハ**矩形 ab** 又ハ單ニ **ab** ト書キ表ハサル.

注意 矩形 ab トイフトキノ ab ハ $a\times b$ ト同義ナラズ.

〔問　題〕

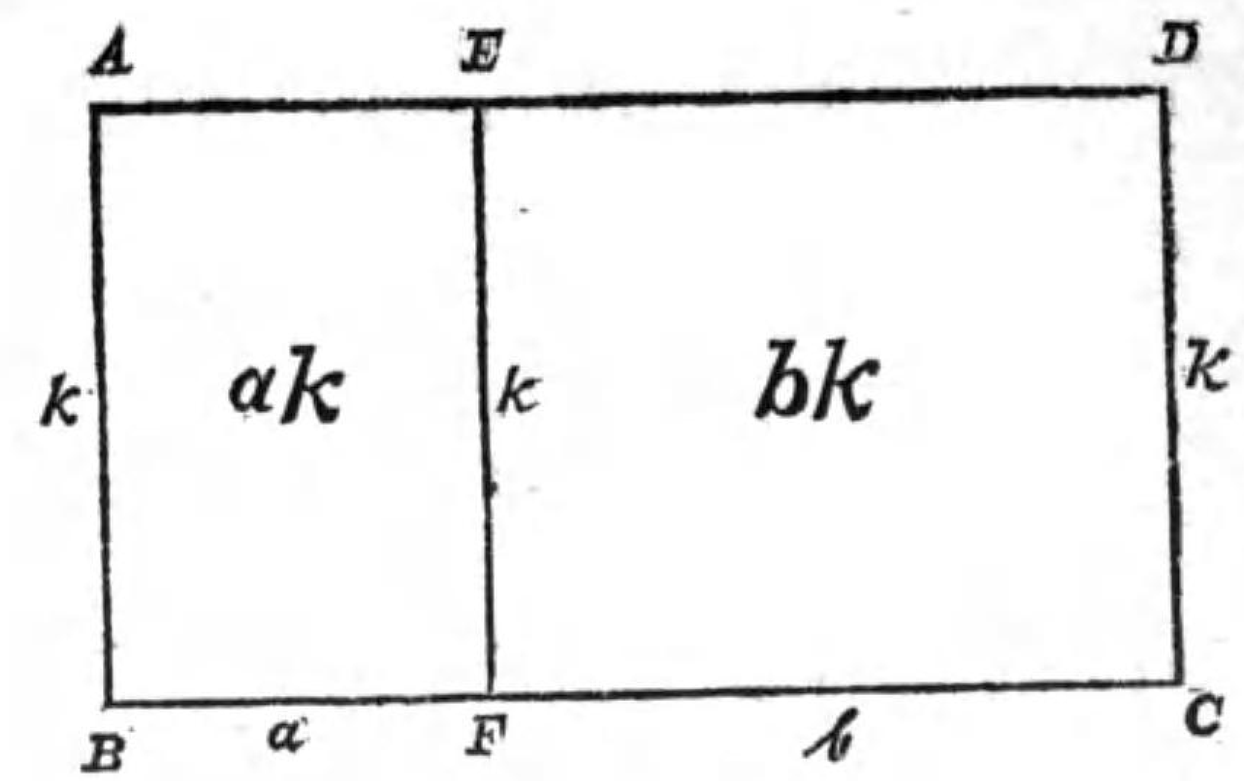
1 長サ $2x$ 米,幅 $8y$ 米ナル矩形ノ面積ヲ問フ,

2 長サ $(a+b)$ 寸,幅 k 寸ナル矩形ノ面積ハ幾平方寸ナルカ.

3 長サ $(a+b)$ 尺,幅 $(a-b)$ 尺ナル矩形ノ面積ヲ問フ.

114. $(a+b)k\equiv ak+bk$ に對する

定理41 矩形 $(a+b)k$ は矩形 ak と bk との和に等し.



證明 圖ノ如ク任意ノ $\square$ ABCD ヲ其ノ一邊ニ平行ナル直線 EF ニテ二ツニ分テバ,

$\square$ ABCD $=\square$ ABFE $+\square$ EFCD,

即チ $\square(\mathrm{AE}+\mathrm{ED}).\mathrm{AB}=\square\mathrm{AE}\ \mathrm{AB}+\square\mathrm{ED}.\mathrm{EF}$,

然ルニ　EF=AB,

$\therefore\ \square(\mathrm{AE}+\mathrm{ED}).\mathrm{AB}=\square\mathrm{AE}.\mathrm{AB}+\square\mathrm{ED}.\mathrm{AB}$.

今 AE$=a$, ED$=b$, AB$=k$ ト記セバ,

$\square(a+b)k=\square ak+\square bk$.

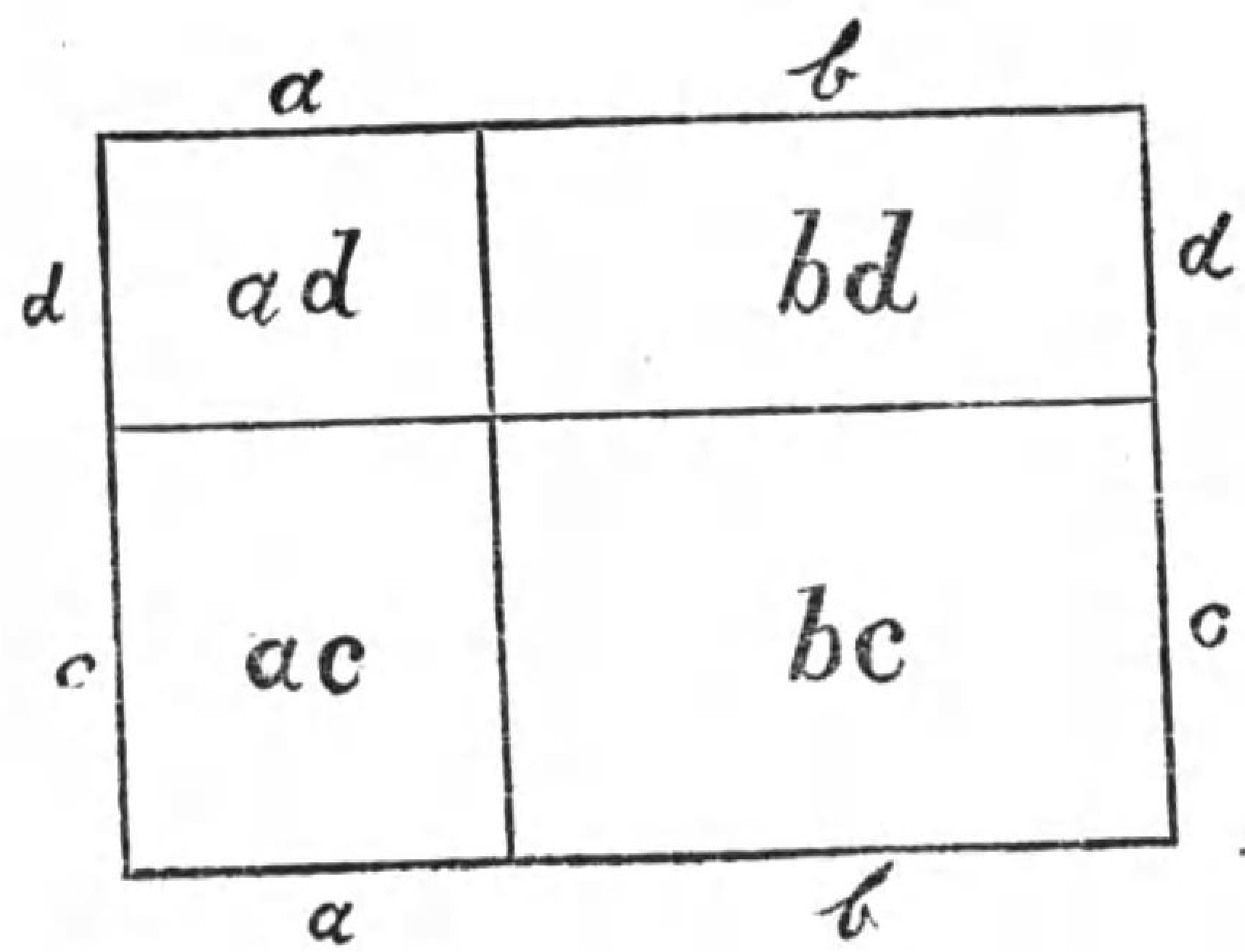
〔問　題〕

1 $\square(a+b+c)k=\square ak+\square bk+\square ck$.

2 $\square(a-b)k=\square ak-\square bk$.

115. $(a+b)(c+d)\equiv ac+bc+ad+bd$ に對する

$\boxed{\text{定理}42}$ 矩形$(a+b)(c+d)$は矩形ac, bc, ad, bdの和に等し,



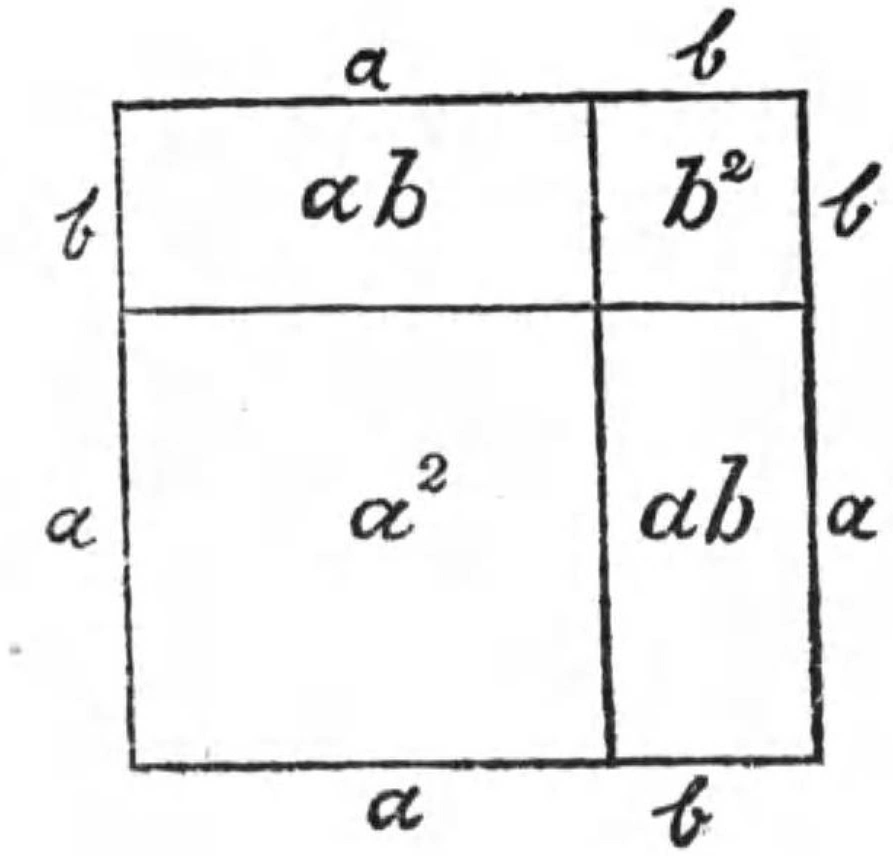
圖ニ就キテ見ラルル如ク,$(a+b)$ト$(c+d)$トヲ二邊トスル矩形ハ,邊ニ平行ナル二直線ヲ引キテ,之ヲac, bc, ad, bdナル四ツノ矩形ニ分ツコトヲ得ベシ.

故ニ

$$\square(a+b)(c+d)=\square ac+\square bc+\square ad+\square bd$$

116. $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$ に對する

$\boxed{\text{定理}43}$ 正方形$(a+b)^2$は正方形a^2, b^2の和より大なること矩形abの2倍だけなり.



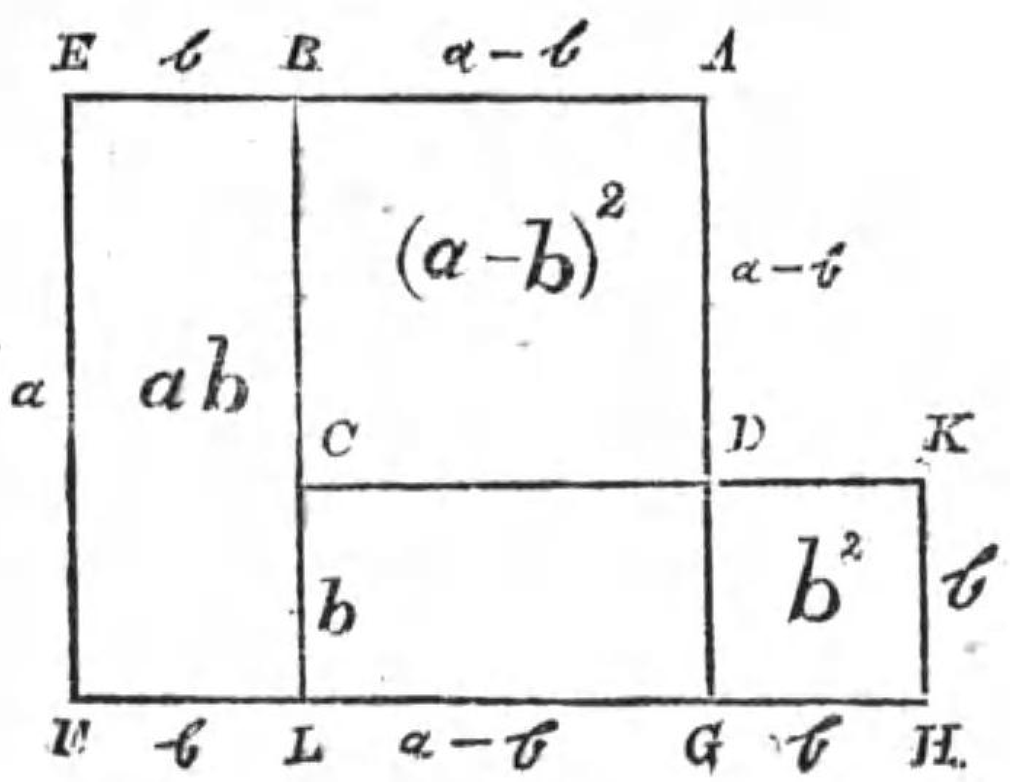
一邊ガ$(a+b)$ナル正方形ノ相接スル二邊ヲaトbトニ分ケ,其ノ分點ヲ過ギテ他ノ邊ニ平行ニ直線ヲ引キ,其正方形ヲ圖ノ如ク四ツニ分テバ,其ノ四ツハa^2, b^2ナル二ツノ正方形ト,abニ等シキ二ツノ相等シキ矩形トナルヲ觀ル.

故ニ

$$\square(a+b)^2=\square a^2+\square b^2+2\square ab.$$

117. $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$ に對する

定理44 正方形$(a-b)^2$は正方形a^2, b^2の和より小なること矩形abの2倍だけなり.



證明 圖ノ如ク AG=a, DG=b トシ, ABCD, AEFG, DGHK ガ何レモ正方形トナル樣ニ作圖シ, BC ヲ延長シテ FG トLニ於テ會セシム, 然ルトキハ

$$\begin{aligned} \mathrm{ABCD} &= \mathrm{AEFG}-\mathrm{BEFL}-\mathrm{CLGD} \\ &= \mathrm{AEFG}-\mathrm{BEFL} \\ &\qquad -\mathrm{CLHK}+\mathrm{DGHK} \end{aligned}$$

即チ $\quad =\mathrm{AEFG}-2.\,\mathrm{BEFL}+\mathrm{DGHK}.$

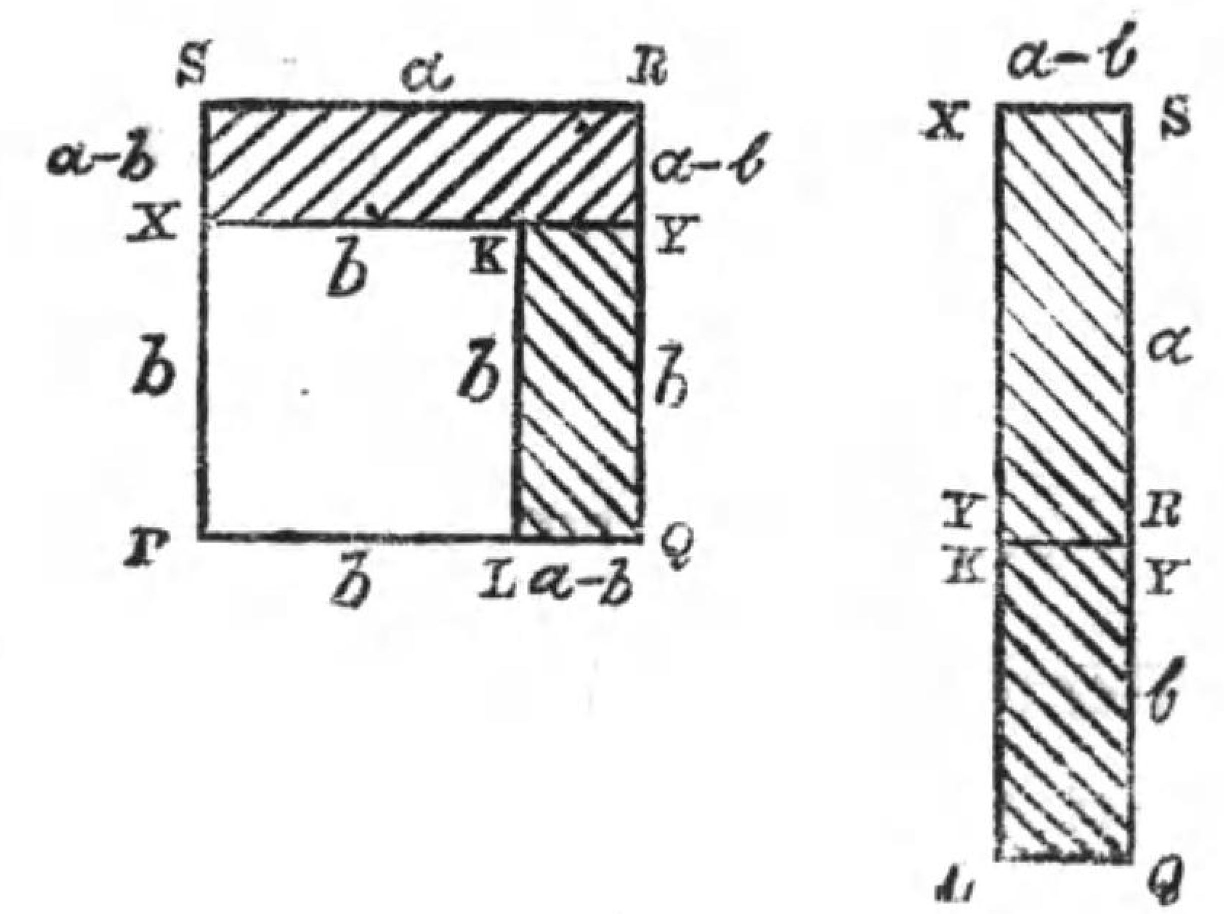
之ヲ書キ直セバ,

$$\square(a-b)^2=\square a^2+\square b^2-2\square ab.$$

118. $a^2-b^2\equiv(a+b)(a-b)$ に對する

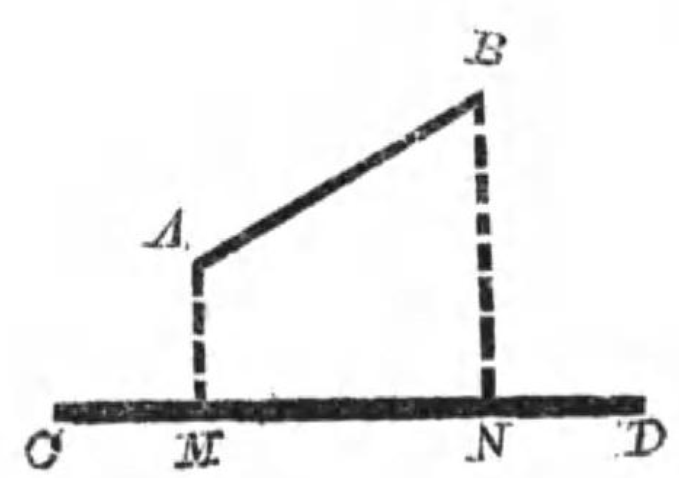
定理45 正方形a^2, b^2の差は矩形$(a+b)(a-b)$に等し.

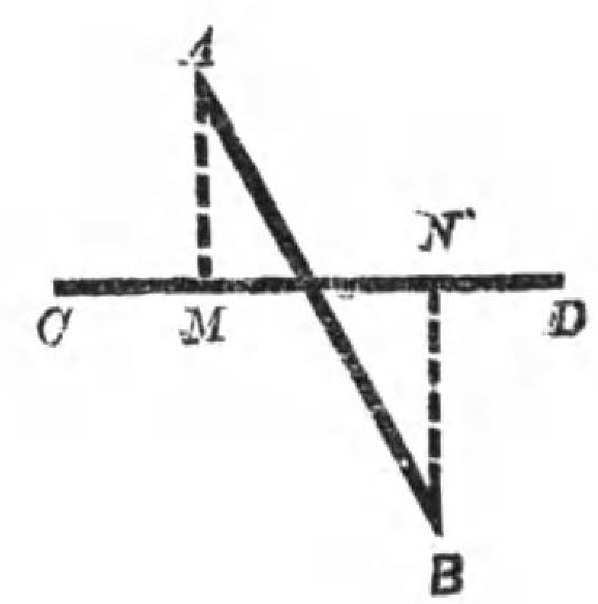
證明 下圖ニ就キテ證明ヲ試ミルベシ. 但シ右方ノ矩形 SXLQ ハ左方ノ圖中ニ於ケル陰影ヲ附シタル兩矩形ヲ相接セシメテ作レルモノナリ.



正射影.

119. **正射影.** 一ツ直線ABノ兩端ヨリ直線CDマデ垂線AM, BNヲ引クトキハ, MNヲCD上ニ於ケルABノ**正射影**ト稱ス.
orthogonal projection





〔問　題〕

[*1] 平行にして且つ相等しき直線の同じ直線上に於ける正射影は相等し.

[2] ABノ中點ヲOトスレバ,一ツノ直線上ニ於ケルABノ正射影ノ中點ハOノ正射影ナ

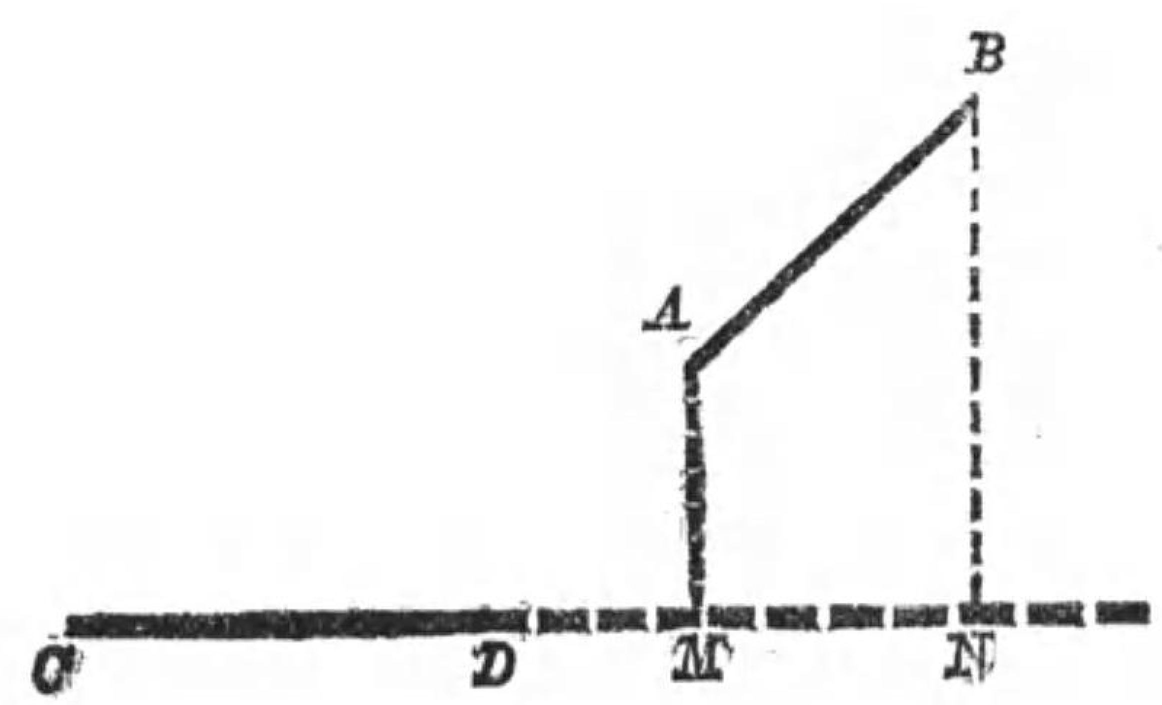
[3] 一ツノ直線ト其ノ正射影トハ相等シキコトアリヤ.

[4] 一ツノ直線ノ正射影ガ一點トナルコトアリヤ.

[5] 長サlナル直線ノ,直角ニ相交レル二直線上ニ於ケル正射影ノ長サヲx, yトスレバ,

$$x^2+y^2=l^2.$$

注意　一ツノ直線ABノ他ノ直線CD上ニ於ケル正射影ヲ作ルトキ,直線CDハ必要ニ應ジテ充分ニ延長スベキモノトス.

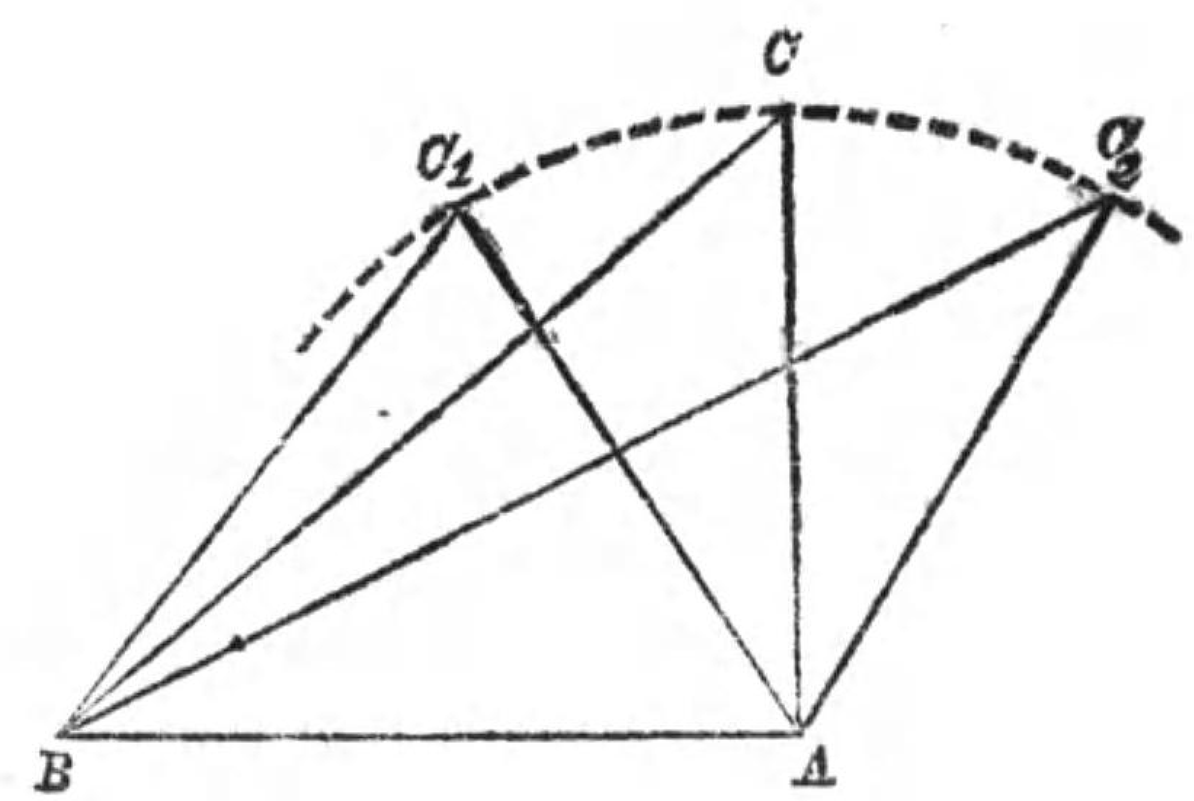


120. ピタゴラスの定理の推し擴め

$\triangle BAC, BAC_1, BAC_2$ ハ A ニ於テ夫々直角,鋭角,鈍角ヲ有シ,且ツ

$$AC = AC_1 = AC_2$$

ナリトス.



然ルトキハ,定理[23]ニ依リテ,

$$BC_1 < BC < BC_2.$$

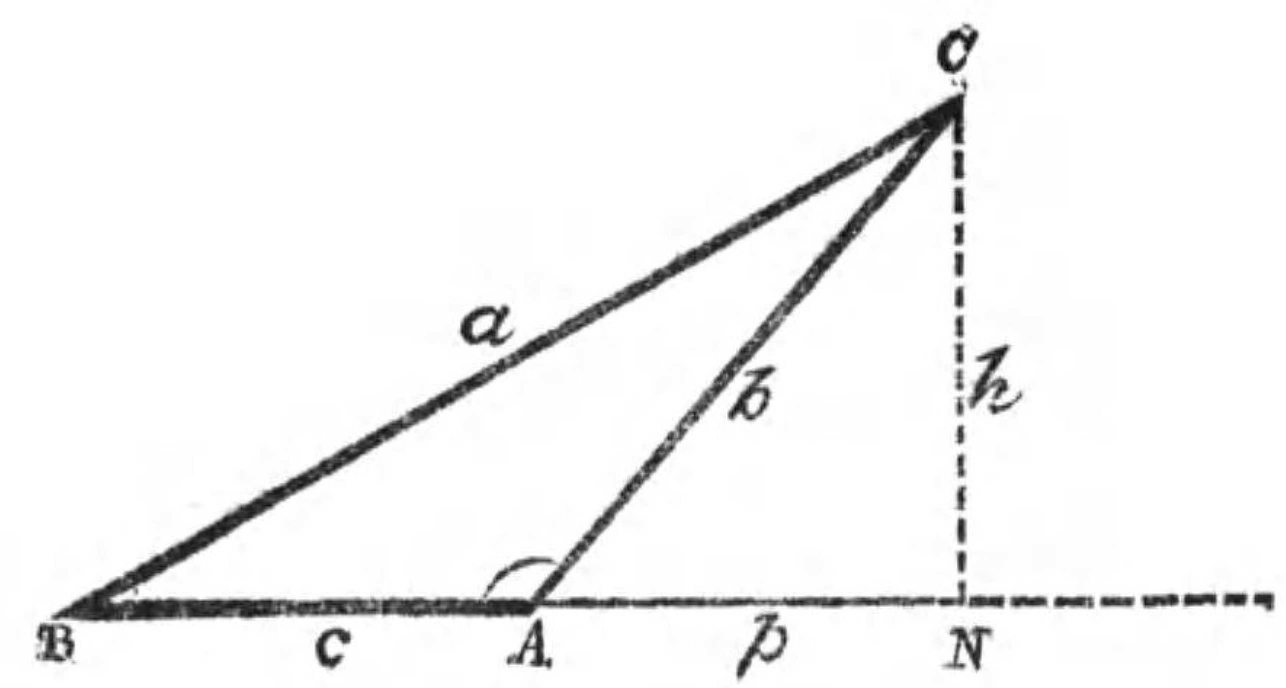
然ルニ　$BC^2 = CA^2 + AB^2$,　〔定理[19]〕

$$\therefore\ BC_1^2 = C_1A^2 + AB^2 - (\text{若干}),$$

$$BC_2^2 = C_2A^2 + AB^2 + (\text{若干}).$$

此(若干)トハ何程ノモノナルカ. 次ノ二定理ハ之ヲ示スモノナリ.

121. **定理46** **鈍角三角形に於て,鈍角に對する邊上の正方形は他の二邊上の正方形の和より大なること,此二邊の一方と其の上に於ける他の方の正射影との包む矩形の2倍だけなり.**



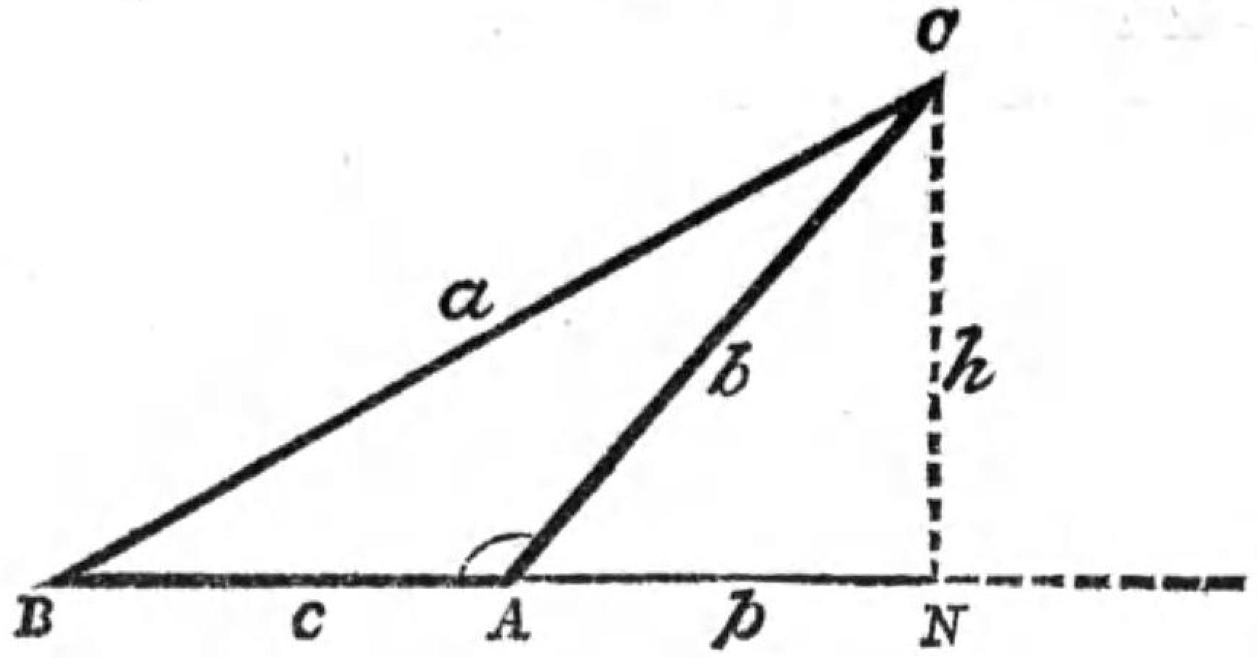
前提 $\triangle ABC$ ニ於テ $\angle A$ ハ鈍角ナリ.

邊 BA 上ニ於ケル邊 AC ノ正射影ハ AN ナリ.

即チ　$CN \perp BA$.

又　$BC = a,\ CA = b,\ AB = c,$

$AN = p,\ CN = h$　トス.



求證 $BC^2=CA^2+AB^2+2.AB.AN,$

即チ $a^2=b^2+c^2+2cp.$

證明 BNCハ直角△ナリ,

$\therefore BC^2=BN^2+NC^2,$ 〔ぴたごらす〕

即チ $a^2=(c+p)^2+h^2$

$=c^2+2cp+p^2+h^2$

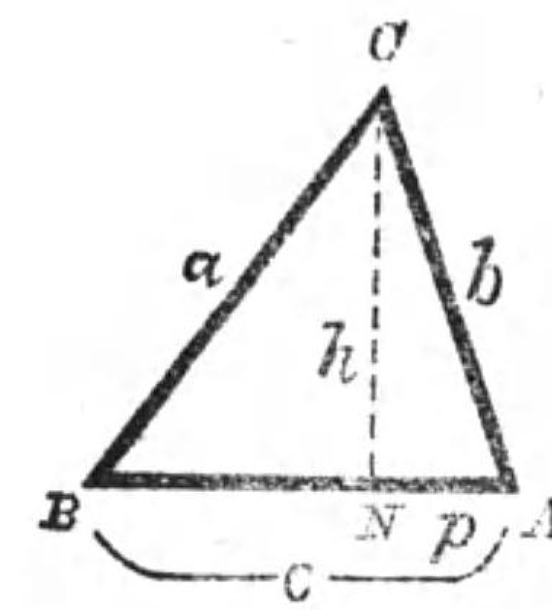
然ルニANCハ直角△ナリ.

$\therefore p^2+h^2=b^2,$ 〔ぴたごらす〕

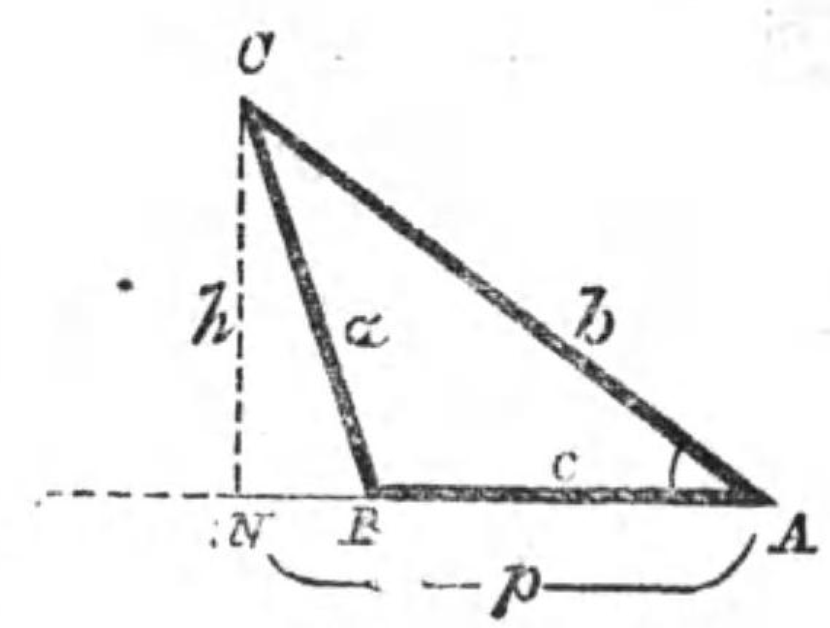
$\therefore a^2=c^2+2cp+b^2,$

即チ $BC^2=AB^2+2.AB.AN+AC^2.$

122. **定理47** 一つの三角形の鋭角に對する邊の上の正方形は,他の二邊上の正方形の和より小なること,此二邊の一方と其の上に於ける他の方の正射影との包む矩形の2倍だけなり.



(B鋭角)



(B鈍角)

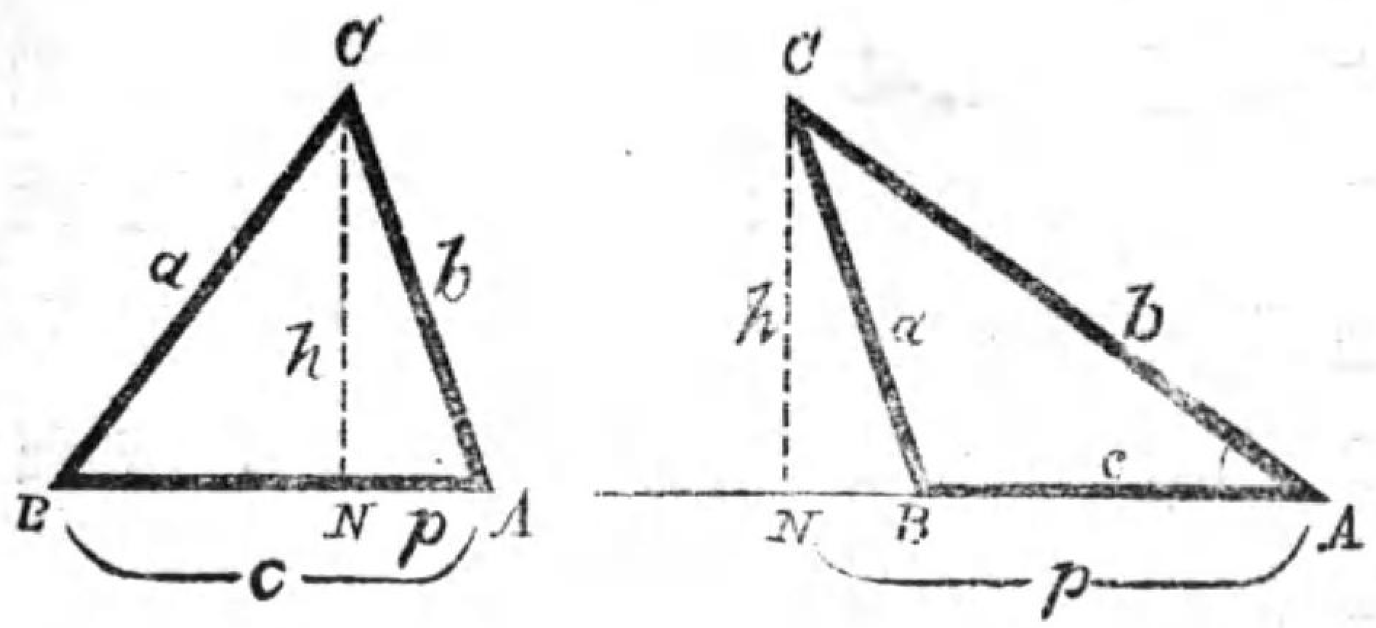
前提 △ABCニ於テ∠Aハ鋭角ナリ.

邊AB上ニ於ケル邊ACノ正射影ハANナリ.

即チ $CN\perp AB.$

又 $BC=a,\ CA=b,\ AB=c,$

$AN=p,\ CN=h$ トス.



求證 $BC^2=CA^2+AB^2-2.AB.AN.$

即チ $a^2=b^2+c^2-2cp.$

證明 BNC ハ直角△ナリ,

∴ $BC^2=BN^2+NC^2$, 〔ぴたごらす〕

即チ $a^2=(c-p)^2+h^2$ (B 鋭角ナル場合),

又ハ $a^2=(p-c)^2+h^2$ (B 鈍角ナル場合).

故ニ何レニシテモ,

$a^2=c^2-2cp+p^2+h^2.$

然ルニ ANC ハ直角△ナリ,

∴ $p^2+h^2=b^2$ 〔ぴたごらす〕

∴ $a^2=c^2-2cp+b^2,$

即チ $BC^2=AB^2-2.AB.AN+AC^2.$

〔問題〕

[1] AB, DC ヲ平行邊トスル梯形 ABCD ニ於テハ,

$AC^2+BD^2=AD^2+BC^2+2AB.CD.$

[2] 二等邊△ABC ノ底 BC 上ノ一點ヲ D トスレバ,

$AB^2=AD^2+BD.CD.$

[3] 二等邊△ABC (AB=AC) ニ於テ一ツノ高サ BN ヲ引ケバ,

$2.AC.CN=BC^2.$

[4] 三角形 ABC の二邊上の正方形の和は中線 AD 及び底の半分の上の正方形の和の 2 倍に等し.

[5] 二等邊△ABC ノ底 BC ヲ D マデ延長シテ, CD=BC トスレバ,

$AD^2=AC^2+2.BC^2.$

[6] △OAD ノ底 AD ヲ B ト C トニ於テ三等分スレバ, 即チ AB=BC=CD トスレバ,

$OA^2+2.OD^2=3.OC^2+6.CD^2.$

[7] 二定點A,Bヨリノ距離ノ平方ノ和ガ不變ナル樣ニ動ク點ノ軌跡ハ圓ナリ.

[8] 平行四邊形ノ邊上ノ正方形ノ和ハ對角線上の正方形ノ和ニ等シ.

[9] 四邊形ノ邊上ノ正方形ノ和ハ,對角線上ノ正方形ノ和ト,兩對角線ノ中點ヲ結ビ付クル直線上ノ正方形ノ四倍トノ和ニ等シ.

[10] 四邊形ノ對角線上ノ正方形ノ和ハ對邊ノ中點ヲ結ビ付クル直線上ノ正方形ノ和ノ2倍ナリ.

[11] 三角形ノ邊上ノ正方形ノ和ハ中線上ノ正方形ノ和ノ4倍ナリ.

第十章　圓

弦及び中心.

122. **圓**トハ一平面上ニ於テ一定點(**中心**)ヨリ一定距離(**半徑**)ニ在ル點ノ軌跡ナリ.（第57條參照.）

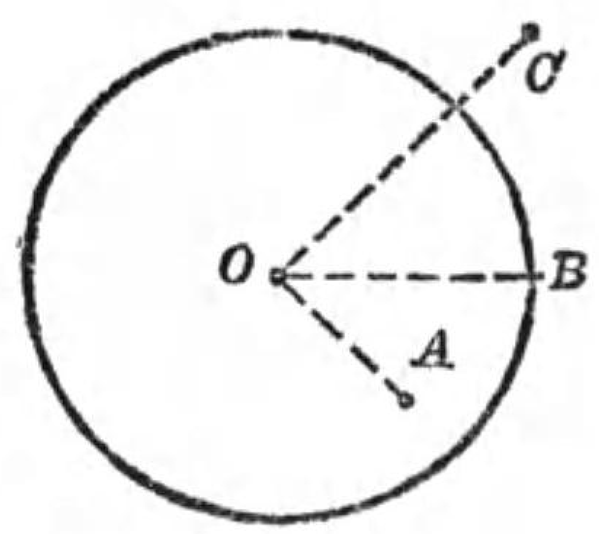
圓トハ一種ノ線ナリ,然レドモ,此線內ニ於ケル平面ノ部分ヲ圓ト稱スルコトモ多シ. 此兩義ヲ區別スル必要アルトキハ,線ノ方ヲ**圓周**(Circumference)ト稱ス.

123. [系] 相等しき半徑の圓は相等し.

[證明] 是レ,其ノ一方ヲ他ノ上ニ置キ,中心ト中心ト相合セシムルトキハ,兩圓周ハ全ク相合スルニ依ル.

124. 圓に對する點の位置

點ハ一ツノ圓ノ内部ニ在ルコトアリ,其ノ上ニ在ルコトアリ,又其ノ外部ニ在ルコトアリ. 是レ其點ノ中心ヨリノ距離ガ半徑ヨリ小ナルト,半徑ニ等シキト,半徑ヨリ大ナルトニ依ルナリ.

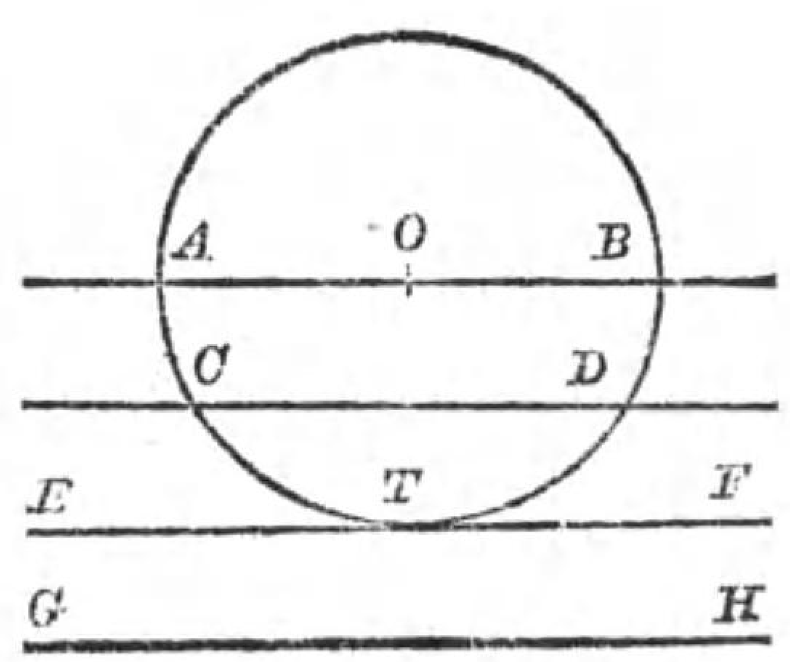


125. 圓に對する直線の位置.

一直線ガ一ツノ圓ト交ル點ハ二點ヨリ多キコトナシ.

實ニ限リナク延長セル直線ハ

(1) 二點ニ於テ圓ト交ルコトアリ. 此場合ニ於テ其ノ圓内ニ在ル部分ヲ圓ノ**弦**ト稱ス.



(2) 又,唯一點ニ於テ圓ト交ルコトアリ, 此ノ場合ニ於テ直線ハ其一點ニ於テ圓ニ**切ス**(touch)ト云ヒ,又此直線ヲ圓ノ**切線**(tangent)ト稱シ,其ノ切スル點ヲ切線ノ**切點**ト稱ス.

直線ガ圓ニ切スルトキハ,圓ガ直線ニ切ストモイフ,即チ直線ト圓ト相切ストモイフナリ.

(3) 又,全ク圓ノ外部ニ在リテ,圓ト共通ノ點ヲ一ツモ有セザルコトアリ.

127. 弦, 直徑.

弦(chord)トハ圓上ノ二點ヲ結ビ付クル直線ナリ.

中心ヲ過グル所ノ弦ヲ圓ノ**直徑**(diameter)ト稱ス.

直徑ノ長サハ半徑ノ二倍ナリ.

直徑ハ總テ相等シ.

128. 弧

圓周ノ一部分ヲ圓ノ**弧**(arc)ト稱ス.

一ツノ弦ハ圓周ヲ二ツノ弧ニ分ツ,而シテ此兩弧ニ大小アレバ,其ノ大ナル方ヲ**優弧**,小ナル方ヲ**劣弧**ト稱ス.

弧ハ,通例三字ヲ以テ示シ,弧 CTD, 弧 CBD ト云フ. 但シ不明ノ恐レナキトキニハ,兩端ノ二字ノミニテ,弧 AC, 弧 TD トモイフ.(前圖ヲ看ヨ.)

又,弧トイフ文字ノ代リニ記號⌒ヲ用ヒテ $\overparen{CTD}$, $\overparen{CD}$ ノ如ク書クコトアリ.

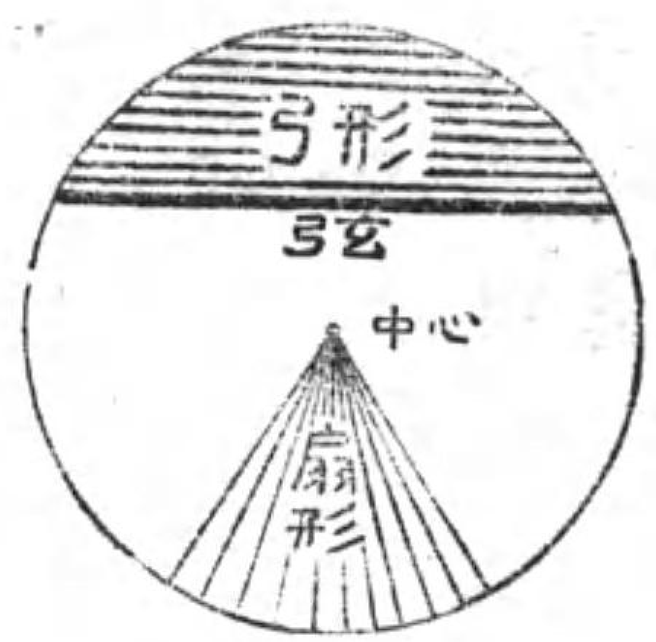
129. **半圓** 一ツノ直徑ハ圓周ヲ相等シキ兩弧ニ分ツ,其ノ各弧ヲ**半圓** (semicircle) ト稱ス.

半圓ト云フ語モ,圓ト云フ語ト同ジク,二樣ノ意義ニ使用セラル. 即チ,弧トイフ意義ノ外ニ,半圓周ト其ノ兩端ヲ過グル直徑トニテ圍メル平面ノ部分ヲ指スコトモアリ.

130. **弓形,扇形**

圓ノ**弓形** (segment) トハ,弧ト其ノ兩端ヲ結ビ付クル弦トノ圍メル平面ノ部分ナリ.

圓ノ**扇形**トハ一ツノ弧ト其ノ兩端ヘ引ケル半徑トニテ圍メル平面ノ部分ナリ,

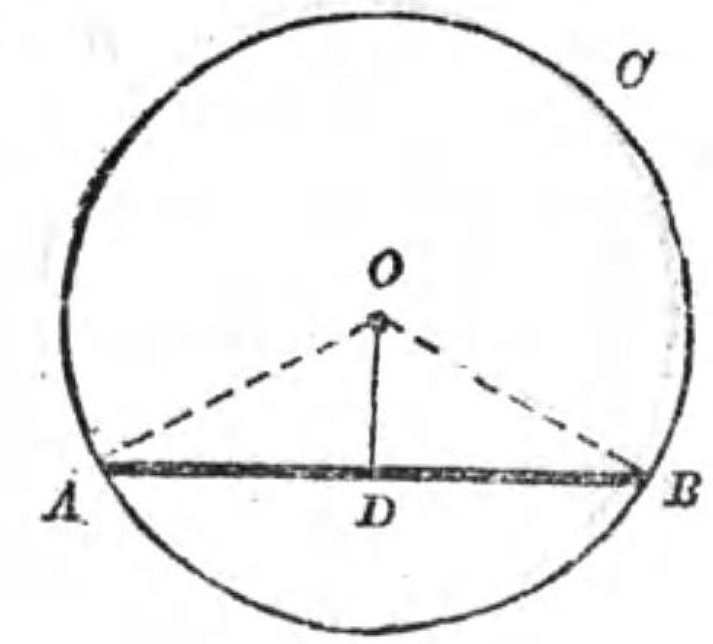


131. **圓の對稱.**

圓ハ其ノ何レノ直徑ニ付テモ對稱ナリ.

又圓ハ其ノ中心ニ付キテ對稱ナリ.

132. $\boxed{\text{定理48}}$ **圓の直徑にあらざる弦の中點へ其の中心より引ける直線は其弦に垂直なり.**



$\boxed{\text{前提}}$ 圓ノ弦ABノ中點ハD,中心ハOナリ.

$\boxed{\text{求證}}$ $OD \perp AB$.

$\boxed{\text{作圖}}$ OA, OBヲ結ビ付ク.

$\boxed{\text{證明}}$ △OAD, OBDニ於テ

$OA=OB$ (半徑)
OD ハ共通
$AD=BD$ 〔前提〕

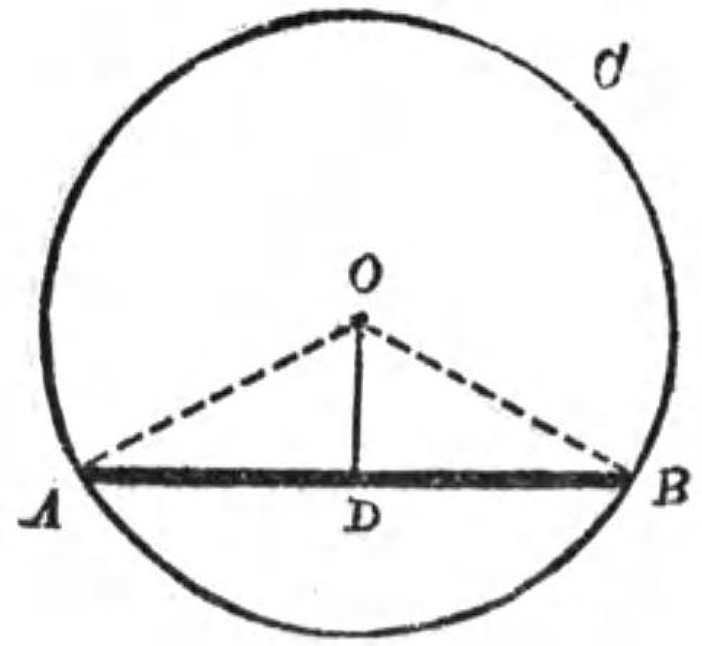
∴ $\triangle OAD \equiv \triangle OBD$, 〔定理18〕

∴ $\angle ODA=\angle ODB$,

∴ $OD \perp AB$.

133. 定理49 圓の中心より弦まで引ける垂線は其弦を二等分す.

(前定理の逆)



前提 圓ノ中心Oヨリ弦ABマデ引ケル垂線ノ足(即チ其垂線ガABニ會スル點)ハDナリ.

求證 AD=BD,

作圖 OA, OBヲ結ビ付ク.

證明 △OAD, OBDニ於テ,

$\angle ODA = \angle ODB$ (直角) 〔前提〕

OA=OB (半徑) 〃

ODハ共通

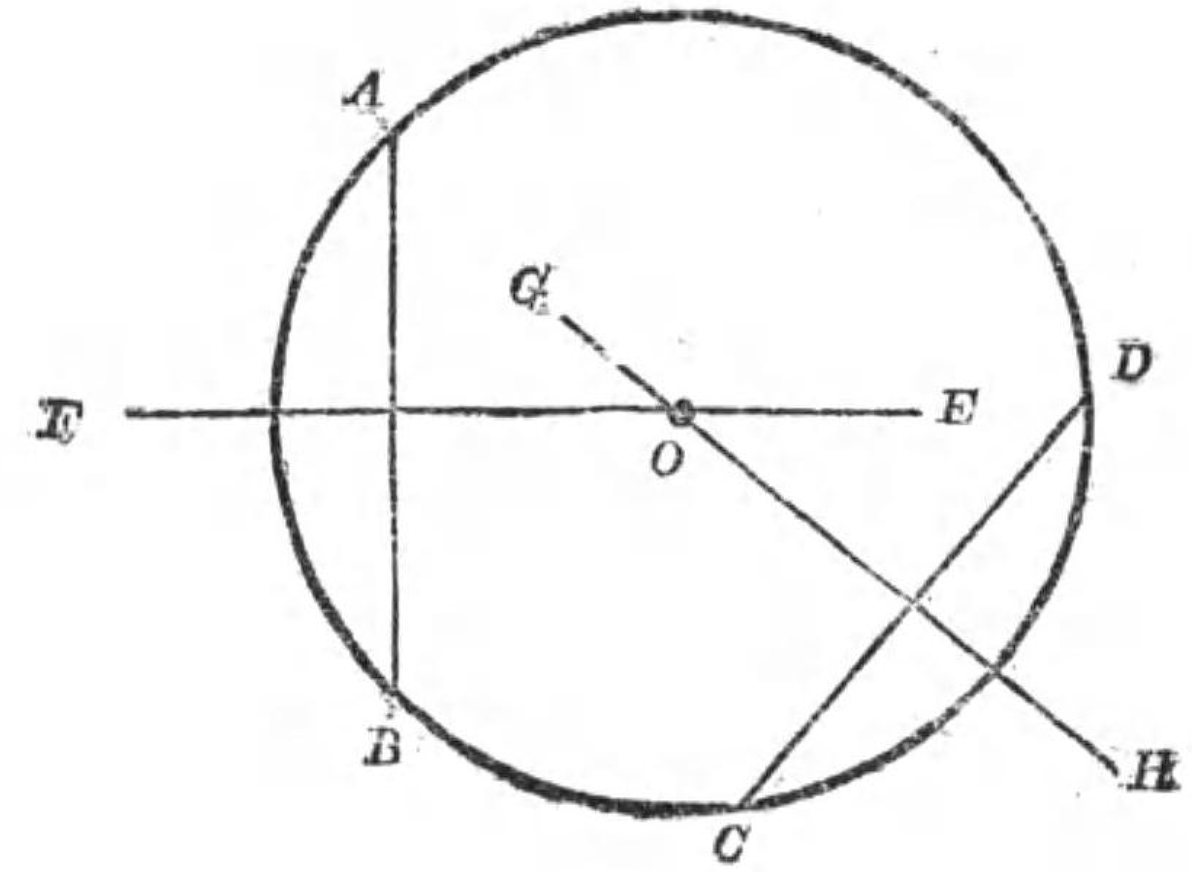
∴ △ODA≡△ODB, 〔定理19〕

∴ AD=BD

134. 系 圓の弦の中點に於ける垂線は中心を通る.

(定直線上ノ定點ニ於ケル垂線ハ唯一ツニ限ルガ故ナリ.)

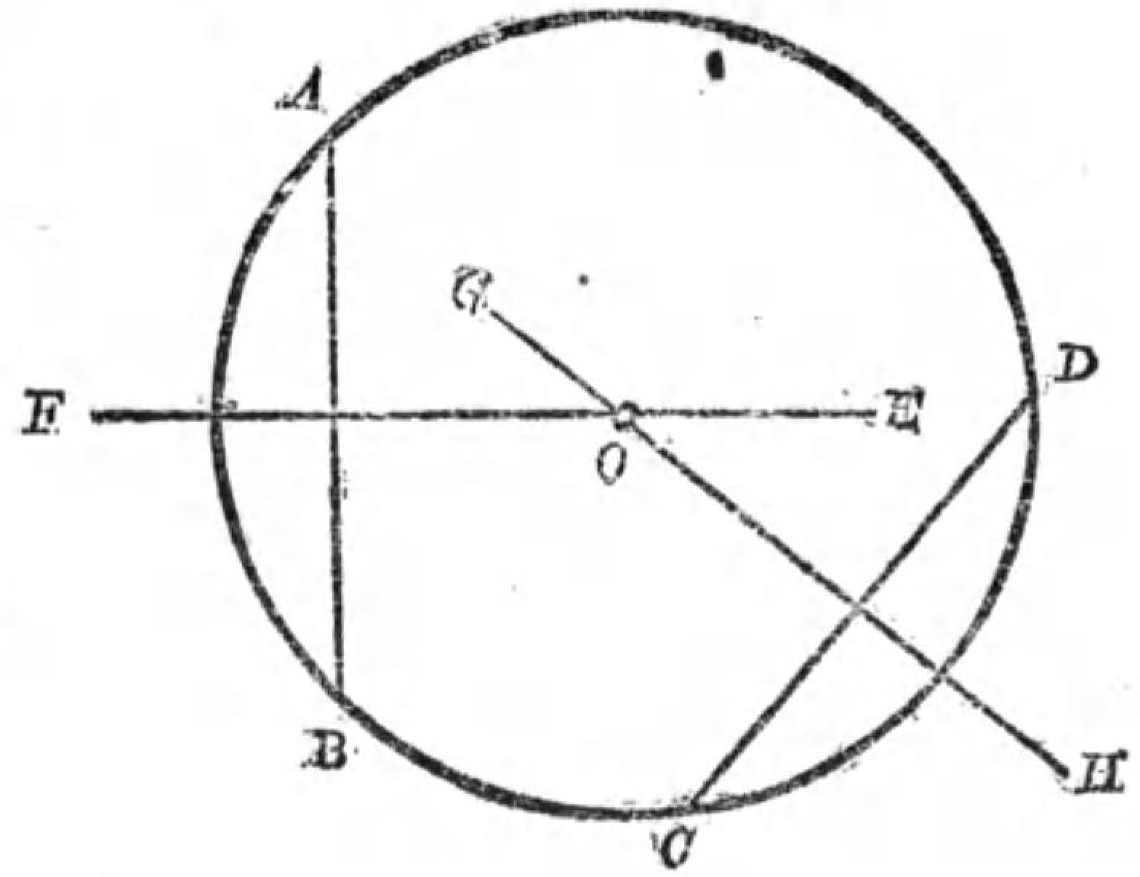
135. 作圖題11 與へられたる圓の中心を求むること.



作圖 平行ナラザル二弦AB, CDヲ引キ,之ヲ直角ニ二等分スル直線EF, GHヲ作ル,

EF, GHノ交點ヲOトス.

然ルトキハOハ求ムル所ノ中心ナリ.



證明 EF ハ弦ABヲ直角ニ二等分ス.

故ニ,中心ハ必ズEF上ニ在リ.

同理ニテ,中心ハ必ズGH上ニ在リ.

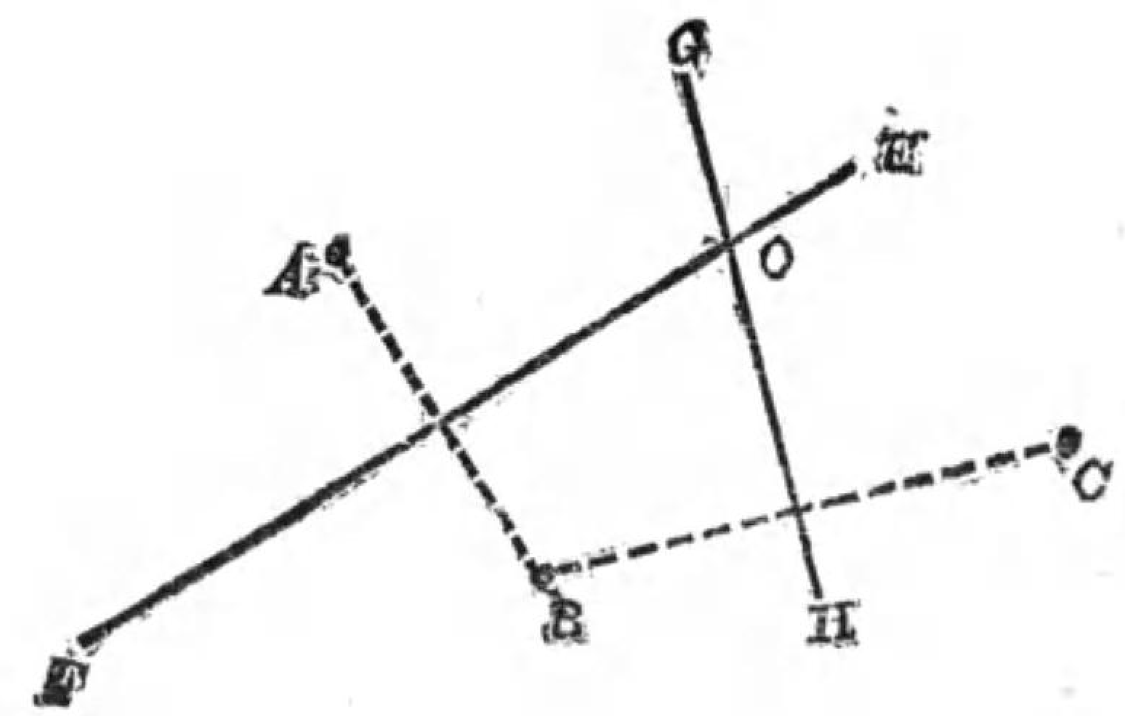
故ニ中心ハEF,GHノ交點Oナリ.

〔問　題〕

[1] 弧ヲ與ヘラレテ,全圓ヲ完成スルコト.

[2] 二定點ヲ過グル圓ノ中心ノ軌跡ヲ求ムルコト.

136. **定理50** 一直線上に在らざる三定點を過ぐる圓は必ずあり,但し唯一つなり.



前提 A,B,C ハ一直線上ニ在ラザル三點ナリ.

求證 A,B,C ヲ過グル圓ハ必ズアリ,但シ唯一ツアルノミ.

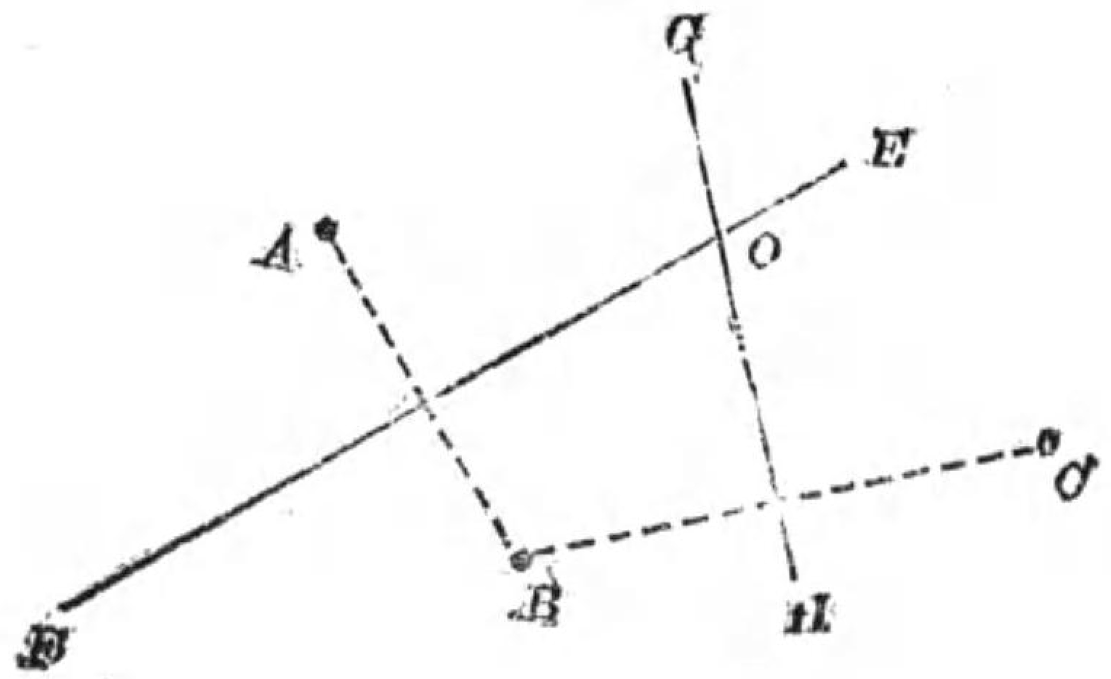
證明 A,B,C ヨリ等距離ナル點ハ必ズアリ,但シ二ツハナシトイフコトヲ證明スレバ足レリ.

サテ A,B ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ハ

AB ノ直角二等分線EFナリ.

マタ B,C ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ハ

BC ノ直角二等分線GHナリ.



此兩直線EF, GHハ平行ニアラズ;

故ニ唯一點ニ於テ相交ル;

其交點ヲOトス.

OハA, Bヨリ等距離ニ在リ,

且ツB, Cヨリモ等距離ナリ.

故ニOハA, B, Cヨリ等距離ニ在リ.

Oノ外ニハA, B, Cヨリ等距離ノ點ナシ.

故ニOヲ中心トナシ,半徑OAヲ以テ書ケル圓ハA, B, Cヲ通過ス.

又,O以外ノ點ヲ中心トスル圓ハ,同時ニA, B, C三點ヲ通過スルコトナシ.

故ニA, B, Cヲ通過スル第二ノ圓ナシ.

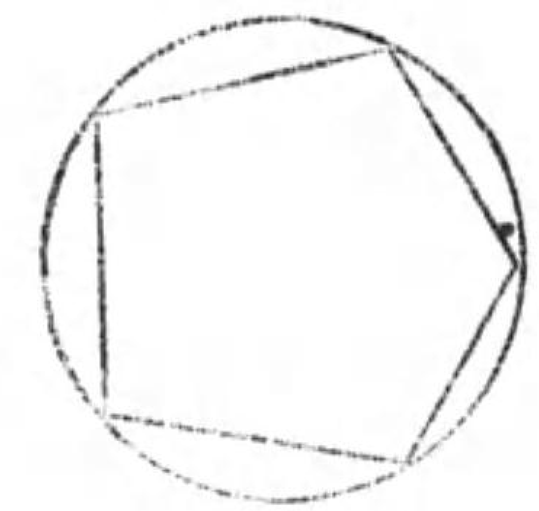
137, 系

1 二ッの圓は二ッより多くの交點を有せず.

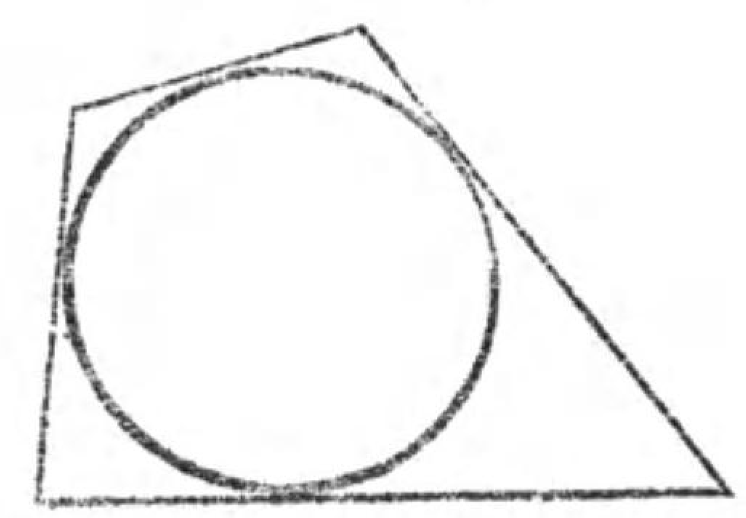
是レ,三ッノ共通點ヲ有スル圓ハ,全ク相合スベキニ依ル.

2 三直線AB, BC, CAの直角二等分線は一點に於て相會す.

138. 內接及び外接.



多角形ノ總テノ頂點ヲ通過スルーツノ圓ハ,此多角形ニ外接ス,又ハ其多角形ノ外接圓ナリト云ヒ,反對ニ多角形ハ圓ニ內接ス,マタハ圓ノ內接多角形ナリト云フ.



一ツノ圓ガ一ツノ多角形ノ總テノ邊ニ切スルトキハ,此圓ハ多角形ニ內接ス又ハ多角形ノ內接圓ナリト云ヒ,

反對ニ多角形ハ圓ニ外接ス,又ハ圓ノ外接多角形ナリト云フ.

〔問題〕

*1 與へられたる三角形に外接する圓を作ること.

是レ三點ヲ過グル圓ヲ畫ク問題ニ外ナラズ.

一ツノ三角形ニ外接スル圓ノ中心ヲ此三角形ノ外心ト稱ス.

2 矩形ニ外接圓アリヤ.

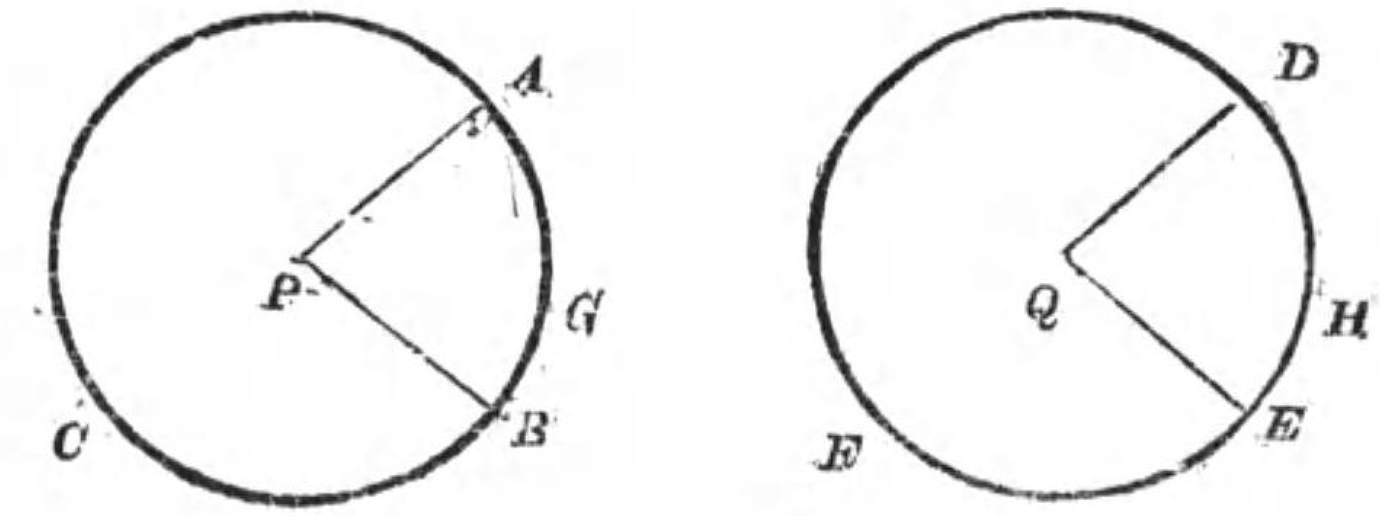
3 一ツノ直線ガ二ツノ同心圓(即チ同ジ中心ヲ有スル圓)ト夫々A,B及ビC,Dニ於テ相交ルトキハ,AC=BD

4 圓外ノ一點Oヨリ圓周上ヘ相等シキ線OP,OQヲ引クトキハ,∠POQノ二等分線ハ圓ノ中心ヲ通過ス.

5 多角形ノ邊ノ垂直二等分線ガ悉ク一點ニ會スレバ,其多角形ハ圓ニ內接スルコトヲ得.

第十一章 弧,角,弦.

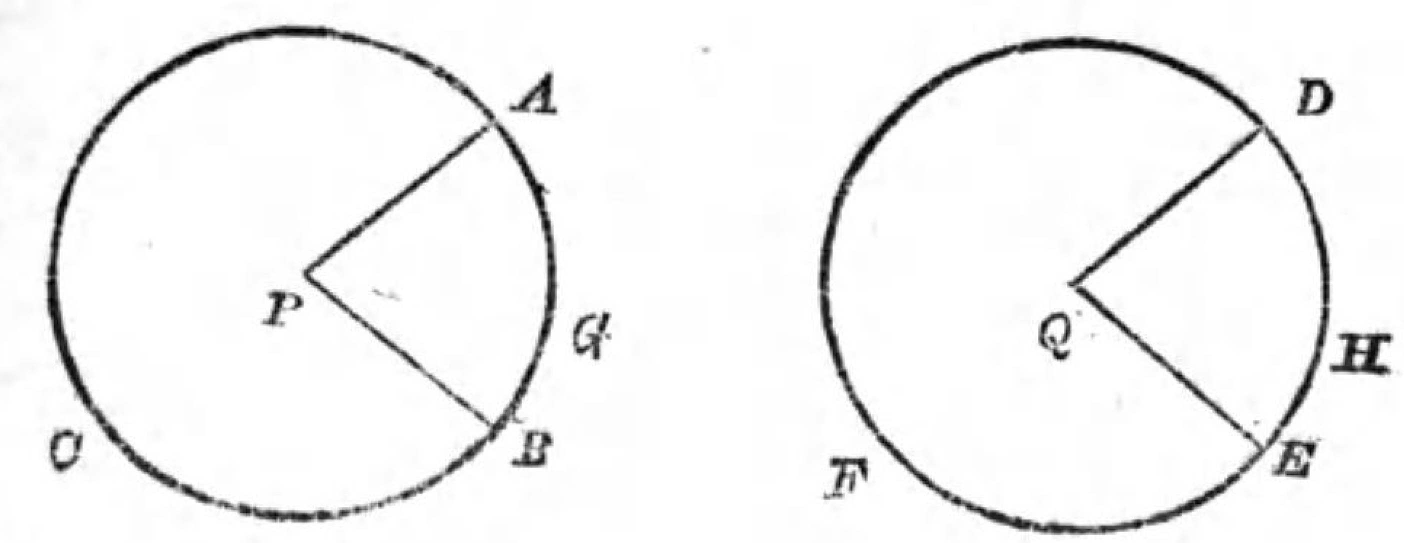
139. 定理51 相等しき圓(又は同一の圓)に於て,中心に於ける相等しき角に對する弧は相等し.



前提 ABCトDEFトハ相等シキ圓ナリ.

其ノ中心P及ビQニ於ケル相等シキ角APB,及ビDQEニ對スル弧ヲ夫々$\overset{\frown}{AGB}$, $\overset{\frown}{DHE}$ト名ヅク.

求證 $\overset{\frown}{AGB}=\overset{\frown}{DHE}$.



證明 圓DEF ヲ 圓ABC ノ 上 ニ 重ネテ,

中心Q ヲ 中心P ニ 合セシム.

兩圓ハ相等シ, 〔前提〕

故ニ DEF ノ 圓周 ハ ABC ノ 圓周 ニ 合ス.

圓DEF ヲ 其ノ中心ノ周リニ廻轉シ,

QD ト PA ト 合スルニ至ラシム.

然ルトキハ, $\angle DQE = \angle APB$ ナルガ故ニ,

QE ハ PB ニ 合シ,

且ツ兩圓ハ相等シキガ故ニ,

D ハ A ト 又 E ハ B ト 合ス.

故ニ $\overset{\frown}{DHE}$ ハ $\overset{\frown}{AGB}$ ト 相合ス.

$\therefore \overset{\frown}{DHE} = \overset{\frown}{AGB}.$

同一ノ圓ニ關スル場合ノ證明モ同樣ナリ.

140. **定理52** 相等しき圓(又は同一の圓)に於て,相等しき弧は中心に於ける相等しき角に對す. (前定理の逆)

〔前圖ヲ看ヨ.〕

前提 $\overset{\frown}{AGB} = \overset{\frown}{DHE}.$

求證 中心ニ於テ此兩弧ニ對スル,

$\angle APB, \angle DQE$ ハ 相等シ.

證明 圓DEF ヲ 圓ABC ノ 上 ニ 重ネ,

中心Q ヲ 中心P ニ 合セシム.

兩圓ハ相等シキガ故ニ,

DEF ノ 圓周 ハ ABC ノ 圓周 ト 合ス.

圓DEF ヲ 中心Q ノ周リニ廻轉シテ,

D ト A ト 合スルニ至ラシム.

然ルトキハ, $\overset{\frown}{DHE} = \overset{\frown}{AGB}$ ナルガ故ニ,

QD ハ PA ト 合シ,

QE ハ PB ト 合ス.

$\therefore \angle DQE = \angle APB,$

同一圓ニ關スル場合ノ證明モ同樣ナリ.

〔問題〕

[1] 一ツノ圓ノ中心ニ於ケル相等シキ角ノ定ムル扇形ハ相等シ.

[2] 與ヘラレタル弧ヲ二等分スルコト.

[3] A, P, B ガ圓周上ノ三點ニシテ,且ツ

PA=PB ナルトキハ,

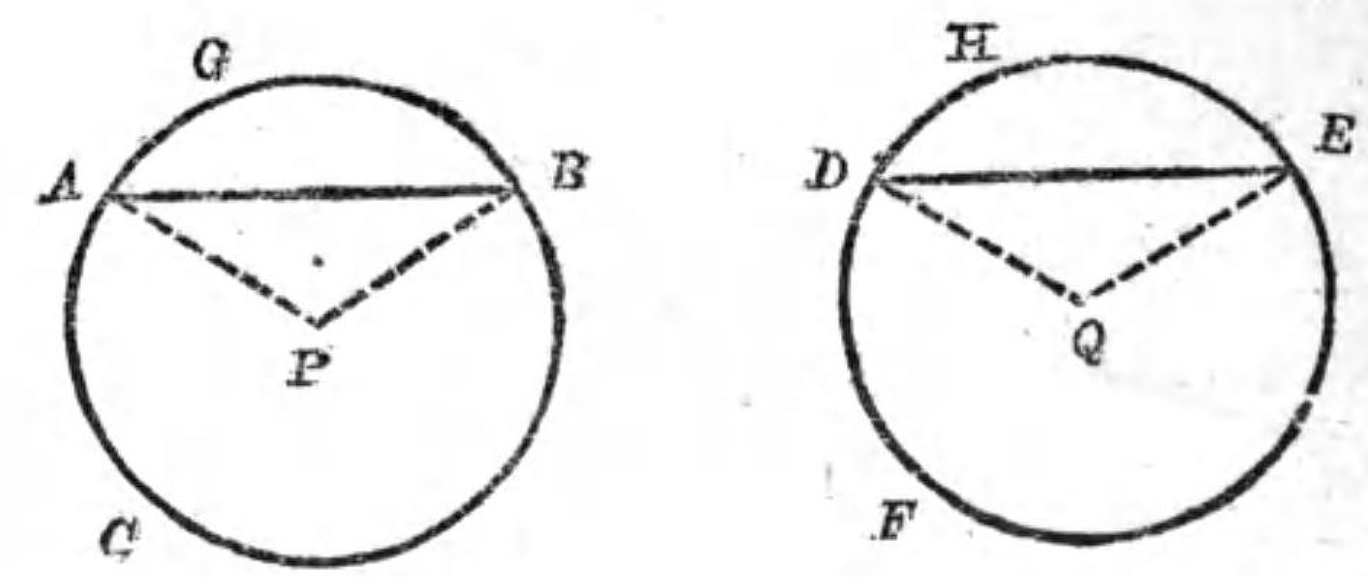
$\widehat{PA}=\widehat{PB}$.

[4] 圓周上ノ一點 P ヨリ弦 PQ ト直徑 PR トヲ引キ,又 PQ ニ平行ナル半徑ヲ引クトキハ,此ノ半徑ハ弧 QR ヲ二等分ス,

[5] 圓周上ノ一點 P ヨリ二ツノ半徑 OA, OB マデ引ケル垂線相等シキトキハ,

$\widehat{AP}=\widehat{BP}$.

141. 定理53 相等しき圓(又は同一の圓)に於ける弦が相等しければ,之に對する弧も相等し.



前提 ABC ト DEF トハ相等シキ圓ニシテ,

且ツ, 弦 AB=弦 DE.

求證 $\widehat{AGB}=\widehat{DHE}$, $\widehat{ACB}=\widehat{DFE}$.

作圖 PA, PB, QD, QE ヲ結ブ.

證明 $\triangle PAB \equiv \triangle QDE$, 〔何故ニカ〕

$\therefore \angle APB=\angle DQE$,

$\therefore \widehat{AGB}=\widehat{DHE}$. 〔定理51〕

又兩圓ノ全圓周ハ相等シ,

$\therefore \widehat{ACB}=\widehat{DFE}$,

(等弧ヲ取リタル殘リ).

〔問題〕

*1 上の定理の逆も正し.

[2] 圓ノ內接四邊形ABCDニ於テ,

$$AB=CD$$

ナルトキハ, $$AC=BD.$$

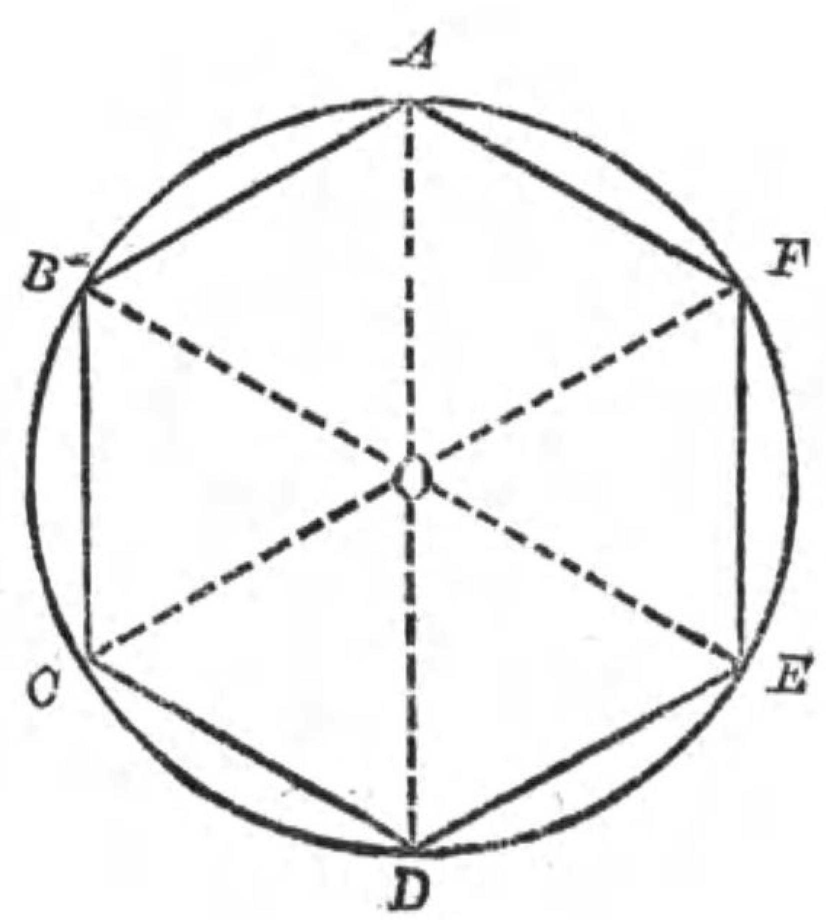
[3] 二等邊△ノ底ト,其ノ外接圓ノ半徑トヲ與ヘラレテ,其△ヲ作ルコト.

[4] 一ツノ圓ノ弦PQ, QR, RS ガ皆相等シケレバ,

$$PR=QS.$$

[5] 一ツノ圓周上ノ一點ヨリ其圓ノ定弧ニ等シキ弧ヲ切リ取ルコト.

142. 作圖題12 與へられたる圓に內接する正六邊形を作ること.



分析** 圓(O)ニ內接スル正六邊形ヲ ABCDEF トシ,

OA, OB, OC, OD・・・ヲ結ブ.

得ル所ノ二等邊三角形

OAB, OBC, OCD・・・ハ相等シク,

$$\therefore \angle AOB=\angle BOC$$
$$=\angle COD$$
$$=\cdots \qquad \text{(何故ニカ)},$$
$$\therefore \qquad =\frac{1}{3}\cdot 2 \text{直角}.$$

故ニ此等ノ△ハ何レモ正△ナリ.

故ニ正六邊形ノ一邊ハ外接圓ノ半徑ニ等シ.

是ニ由リテ作圖法ヲ悟リ得ベシ.

**分析 (analysis) トハ,既ニ問題ノ解ヲ得タルモノト假定シテ,逆ニ推理ヲ行ヒ,問題ヲ解クニ手懸リトナルベキ事項ヲ發見スルコトヲ目的トスルモノナリ.

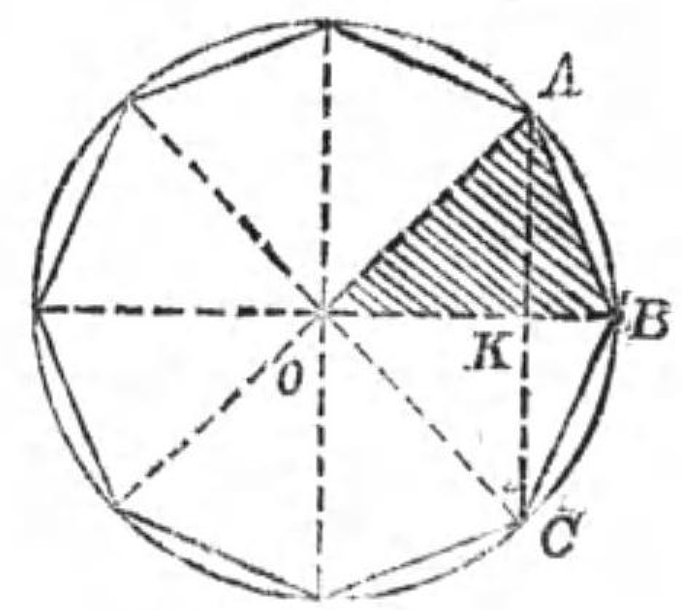
作圖題ニ於テ,作圖法ヲ求ムルニハ,此分析ノ方法ヲ用フルコト一般ニ便利ナリ.

―――〔問　題〕―――

[1] 半徑rナル圓ノ內接正六角形ノ面積ハ如何.

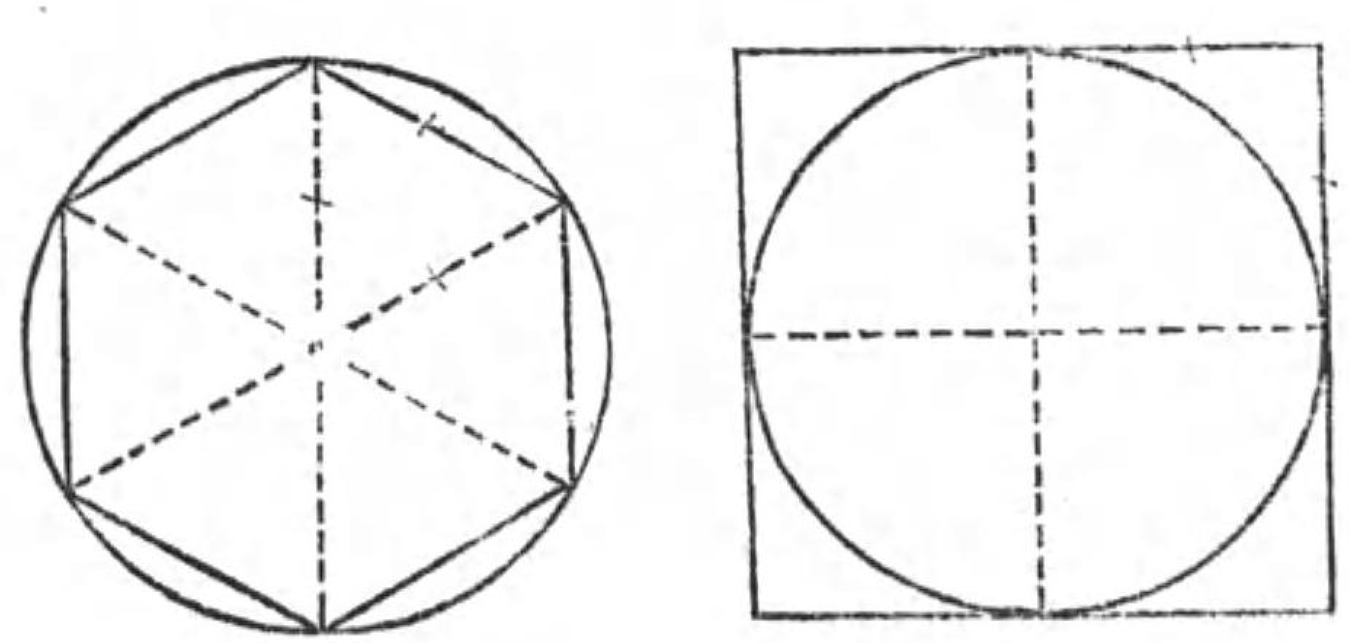
[2] 半徑rナル圓ノ內接正八角形ノ周(即チ諸邊ノ和)及ビ面積ヲ求メヨ.

〔△OAB ニ就キテ計算スベシ OK=AK ナルコトニ注意セヨ.〕



143. 圓周の長さ.

圓周は直徑の三倍強なり.



(內接多角形ノ周) < (圓周),

(外接多角形ノ周) > (圓周).

然ルニ (內接正六角形ノ周) = 3.直徑,

(外接正方形ノ周) = 4.直徑.

∴ 4.直徑 > 圓周 > 3.直徑.

144. 圓周率. (圓周) : (直徑) ハ一定セリ; 此比ヲ**圓周率**ト稱シ,通例πヲ以テ之ヲ表ハス. 即チ

$$\pi = 3.1415926535\cdots$$

$$\therefore\ (\text{圓周}) = (\text{直徑}) \times \pi$$
$$= (\text{半徑}) \times 2\pi$$
$$= 2\pi r\ (r\ \text{ハ半徑}).$$

注意 圓周率ハ實測ニテモ定メ得レドモ,其ノ精密ナル值ハ計算ニ依ラザレバ知ル可ラズ.

圓周率計算ノ一法ノ基ヅク所ハ次ノ如シ:

內接又は外接多角形の周の長さは,其の邊數の多くなるに從ひて,益々圓周の長さに近づく.

例ヘバ,此方法ニ依リテ實際ノ計算ヲ試ミルニハ,先ヅ圓ノ內接及ビ外接正方形ノ周ヲ計算

シ,次ニ邊數ヲ倍シタル內接及ビ外接正八角形ノ周ヲ計算シ,以下次第ニ邊數ノ二倍ナルモノノ周ヲ計算スベシ.

又ハ最初ニ內接及ビ外接正六角形ノ周ヲ計算シ以下次第ニ邊數ヲ倍シタル內接及ビ外接12角形,24角形,・・・ノ周ヲ計算スベシ.

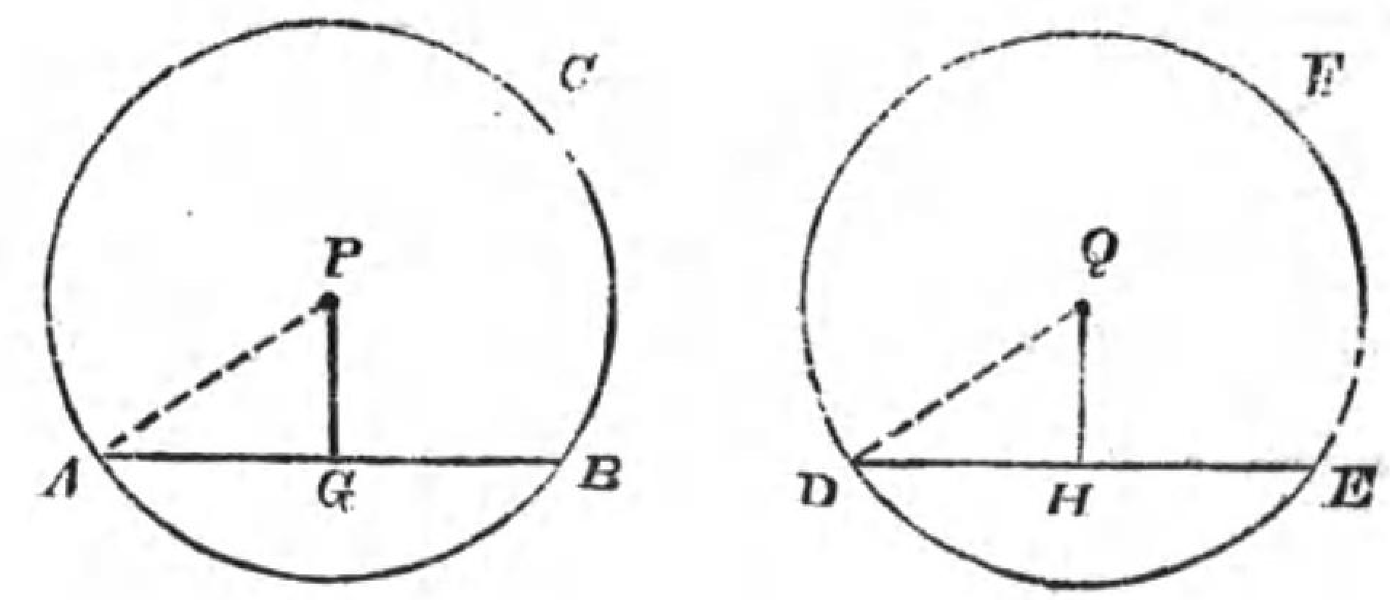
何レニシテモ,圓周ハ內接形及ビ外接形ノ周ノ間ニ在リ.**

**圓周率の値に關する來歷.

上古ハ圓周率ヲ3トシタリ. 埃及ノ古書ニハ $\pi=3.16$ トシタルモノアリ. 希臘人 Archimedes (西暦紀元前287年生,同212年死)ハπノ値ヲ $\frac{22}{7}$ トシ,印度人 Aryabhatta (476年生),亞剌伯人 Al Hovarezmi (九世紀初半)ハ3.1416トナセリ.

和蘭人 Adriaan Anthoniszoon ハ1585年ニ $\pi=\frac{355}{113}$ ヲ算出シ, Ludolf van Ceulen (1540年生, 1610年死)ハπノ値30位以上ヲ算出セリ. 其後πノ値ハ漸ク精密トナリ, Vega ハ140位マデ, Dase ハ200位マデ, Richter ハ500位マデ算出シ,1873年ニ至リ

145. $\boxed{\text{定理54}}$ 相等しき圓(又は同じ圓)に於て,相等しき弦は中心より等距離に在り.



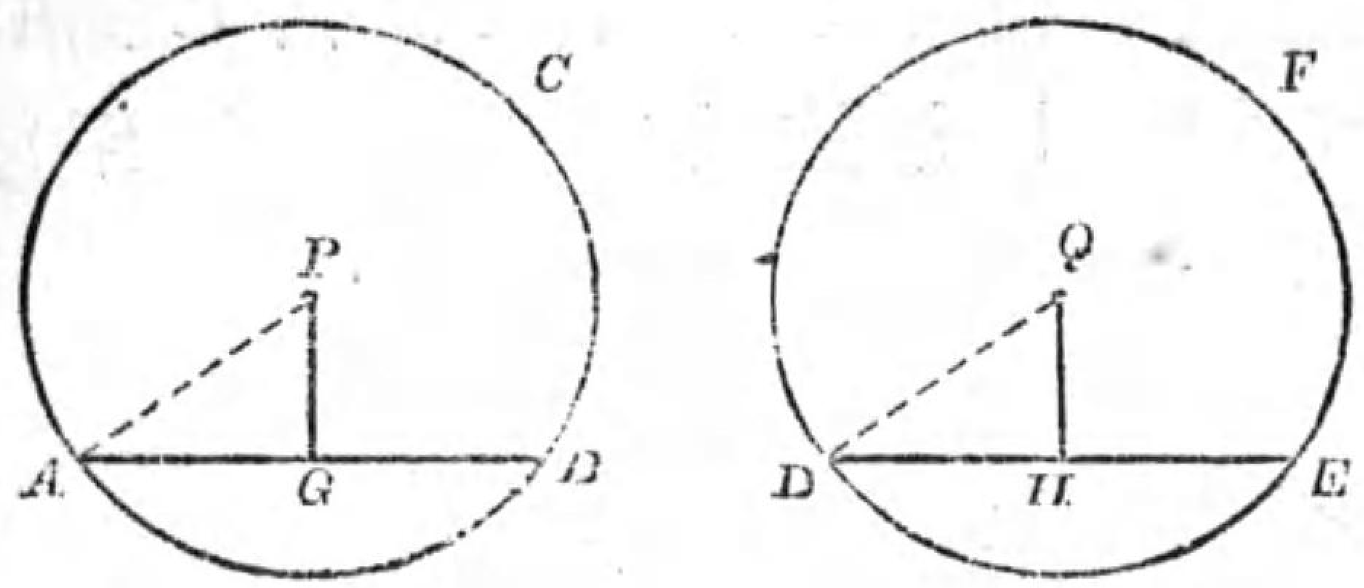
前提 圓ABC, DEF ニ於テ,

半徑AP=半徑DQ,

且ツ 弦AB=弦DE.

英人 Shanks ハ之ヲ707位マデ算出シタリ.

支那ニテハ,西暦三世紀ニ魏ノ劉徽 $\pi=\frac{157}{50}$ ヲ得,其後約二百年ヲ經テ劉宋(南北朝)ノ祖冲之 $\pi=\frac{355}{113}$ ヲ得タリ. 我ガ德川時代ノ和算家モ大ニ圓周率算定ノ問題ヲ研究セリ.



中心P, Qヨリ夫々弦AB, DEマデ引ケル垂線ヲPG, QHトス.

求證 $PG = QH$.

作圖 PA, QDヲ結ビ付ク.

證明 $PG \perp AB$,

$\therefore AG = \frac{1}{2}AB$. 〔定理49〕

同理ニテ $DH = \frac{1}{2}DE$.

然ルニ $AB = DE$, 〔前提〕

$\therefore AG = DH$.

又 $AP = DQ$. 〔前提〕

$\therefore$ 直角$\triangle PAG \equiv$ 直角$\triangle QDH$. 〔定理19〕

$\therefore PG = QH$.

146. **定理55** 相等しき圓(又は同じ圓)に於て,中心より等距離に在る弦は相等し(前定理の逆).

證明 如何.

〔問題〕

1 一ツノ圓ニ於ケル相等シキ弦ノ中點ノ軌跡ハ一ツノ同心圓ナリ.

2 一ツノ圓ノ弦ノ長サガ$2l$, 其ノ中心ヨリノ距離ガdナレバ,半徑ノ長サハ何程ナルカ,

3 一ツノ圓ニ於テ二ツノ弦ガ其ノ交點ヲ過グル直徑ト等角ヲ成セバ,其兩弦ハ相等シ.

4 相等シキ兩圓ノ中心ヲ結ビ付クル直線ニ平行ナル一直線ノ圓內ニ在ル部分ハ相等シ.

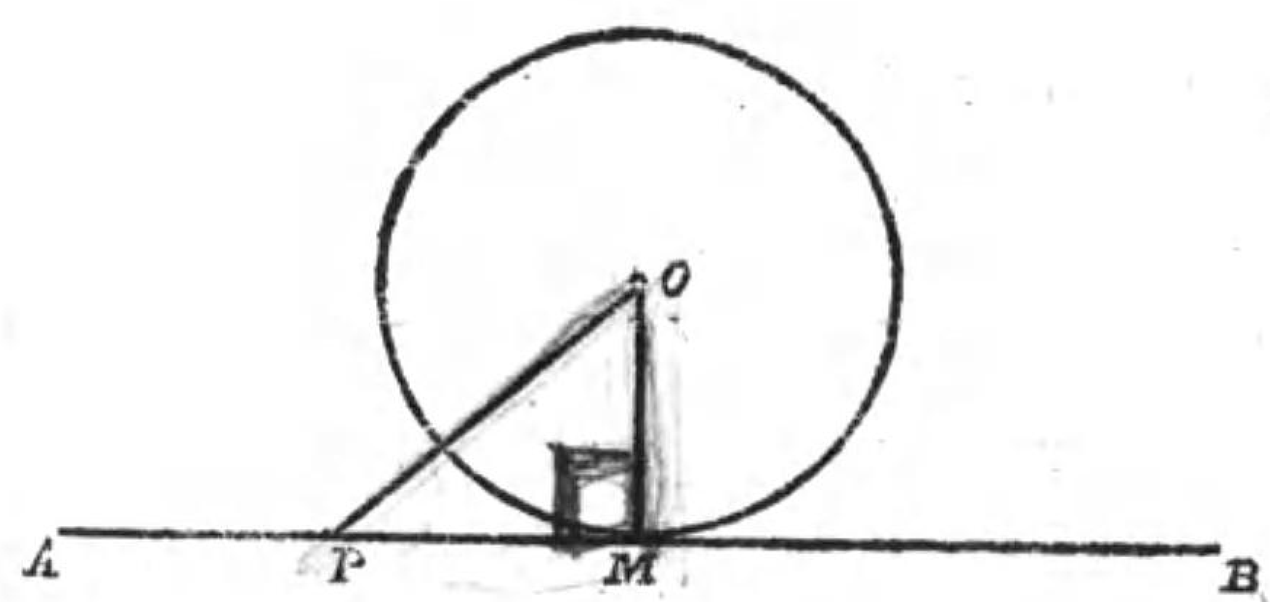
*5 中心より等しからざる距離に在る弦の中,中心より近き方は遠き方より大なり.

*6 前問の逆を述べ,且つ之を證明せよ.

7 圓內ノ一點ヲ過グル弦ノ中ニテ此點ヲ過グル直徑ニ垂直ナルモノハ,最短ナリ.

第十二章　切線

147. 定理56　圓の一つの半徑の端に於て之に垂直なる直線は圓と唯一點を共有す.



前提　半徑 OM ノ端 M ニ於テ之ニ垂直ナル直線ヲ AB トス.

求證　AB ト此圓トニ共通ナル點ハ M ニ限リ此ノ外ニハナシ.

明證　AB 上ノ M ノ外ノ任意ノ點 P ト O トヲ結ブ.

OP > OM.　〔定理35〕

故ニ P ハ圓ノ外部ニ在リ.

即チ AB 上ノ點ハ, (M ノ外ハ) 皆圓外ニアリ.

故ニ AB ト圓トニ共通ノ點ハ M ノ外ニ無シ.

148. 圓周上ノ一點 M ヲ過ギ,且ツ半徑 OM ト垂直ナル直線 AB ハ, M ニ於ケル其圓ノ切線ナリ.

(何故ニカ).

M ヲ過ギテ他ノ直線ヲ引ケバ,圓周ト必ズ他ノ一點ニ於テ相交ル.

故ニ M ヲ過グル AB 以外ノ直線ハ切線ニアラズ.

故ニ圓周上ノ一點ニ於ケル切線ハ唯一アルノミ.

故ニ前定理ヨリ

定理　圓の切線は切點に引ける半徑に垂直なり.

149. 系　切線の切點を過ぎて此切線に垂直に引ける直線は,延長すれば,必ず圓の中心を通過す.

150. [作圖題13] **圓周上の與へられたる點に於て圓に切線を引くこと.**

其點ト中心トヲ結ビ,此點ニ於テ此直線ニ垂直ナル直線ヲ引ケ.

是レ即チ求ムル所ノ切線ナリ.

——〔問　題〕——

[*1] 圓外の一點より引ける二ツの切線は相等し,而して此點を中心に結び付くる直線と等角を成す.

[2] 二ツノ同心圓ニ於テ,內圓ニ切スル外圓ノ弦ハ凡テ相等シ.

[*3] 一つの圓に外接する四邊形の對邊の和は相等し.

[4] 圓ニ外接スル▱ハ必ズ菱形ナリ.

[5] 一ツノ角ノ兩邊ニ切スル圓ノ中心ノ軌跡ヲ求ムルコト,

[6] 圓ニ外接スル不等邊六邊形ヲ ABCDEF トスレバ, AB+CD+EF=BC+DE+FA.

[7] 二ツノ平行ナル切線ガ第三切線ト A,B ニ於テ交レバ, AB ハ中心ニ於テ直角ヲ**張ル**.**

[8] 與ヘラレタル直線ニ切シ,且ツ與ヘラレタル長サノ半徑ヲ有スル圓ノ中心ノ軌跡ヲ求ムルコト.

[9] 一ツノ弦ハ其ノ兩端ニ於ケル切線ト等角ヲ成ス.

[10] 定圓ニ切シ,且ツ定直線ニ平行ナル直線ヲ引クコト.

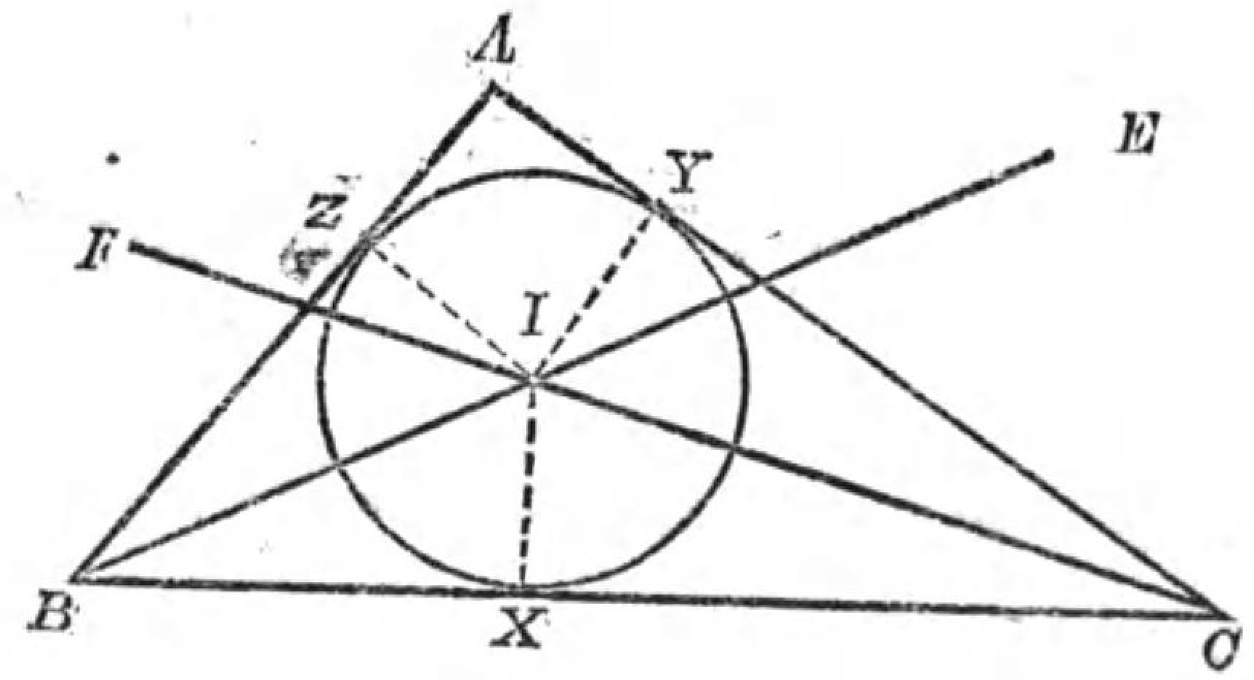
[11] 定圓ニ切シ且ツ定直線ニ垂直ナル直線ヲ作ルコト.

[12] 一ツノ圓ニ於テ互ニ垂直ナル二切線ヲ引クコト.

[13] 圓ノ外接四邊形ノ相對スル邊ガ中心ニ於テ張ル角ハ互ニ補角ナリ.

**一直線ガ一點ニ於テ張ル角トハ,其直線ノ兩端ヲ其點ト結ビ付クル直線ノ成ス角ナリ.

151. 作圖題14 與へられたる三角形の內接圓を書くこと.



三邊ヨリ等距離ナル一點ヲ求ムレバヨシ.

作圖 ∠B, ∠C ヲ二等分シテ, BE, CF ヲ引キ

其ノ交點ヲ I トス.

然ルトキハ I ハ內接圓ノ中心ナリ.

證明 BE 上ノ各點ハ AB, BC ヨリ等距離,

又 CF 上ノ各點ハ BC, AC ヨリ等距離ナリ.

故ニ I ハ AB, BC, CA ヨリ等距離ナリ,

故ニ I ヨリ BC, CA, AB ヘ夫々垂線 IX, IY, IZ, ヲ引ケバ,

$$IX = IY = IZ.$$

故ニ I ヲ中心トシ, IX ヲ半徑トシテ圓ヲ書ケバ, X, Y, Z ヲ通過シ, 且ツ BC, CA, AB ニ切ス.

即チ此圓ハ △ABC ノ內接圓ナリ.

152. 三角形の傍接圓.

三角形ノ二邊ノ延長及ビ第三邊ニ切スル圓ヲ, 其三角形ノ傍接圓ト稱ス,

注意 一ツノ三角形ノ傍接圓ハ三ツアリ.

圖ニ於テ △ABC ノ傍接圓ハ P, Q, R ナリ.