3
212363
-1

興初級中學教科書

代ㄉㄞˋ 數ㄕㄨˋ

(1)

下册

虞明禮編著
段育華校訂

商務印書館發行

MG
G634.62
72

復興初級中學教科書

代　　數

下　　冊

目　　錄

頁數

3 1774 0054 0

復興初級中學教科書

代　　數

下　冊

第十章

不盡根數　虛數　根式方程

I. 不盡根數

§99. 不盡根數之需要　[問題一] 設有方程 $x^2-2=0$, 試求其根. 依前第八章二次方程解法解之, 得

$$x=\pm\sqrt{2}$$

[問題二]　設有方程 $x^3-2=0$, 試求其根.

先用移次法, 得

$$x^3=2.$$

再將兩邊各開立方, 得

$$x=\sqrt[3]{2}.$$

由上二題觀之, 可見解二次以上之方程式, 所得之值, 有時非含有根號, (如 $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$ 之類) 不可.

然則 $\sqrt{2}$ 之值究為若干? 整數乎? 小數乎? 有限小數乎? 抑循環小數乎? 答曰 $\sqrt{2}$ 非整數, 非有限小數, 亦非循環小數 (理由詳見下節). 故若以小數表 $\sqrt{2}$ 之值, 則其位數必多至無窮而不

循環. 換言之, 卽將 $\sqrt{2}$ 依開方手續, 無論演至何年何月, 終無盡止之時. 故名此數 $\sqrt{2}$ 曰不盡根數.

同樣 $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{5}$, 之類皆爲不盡根數. (理由詳見下節).

§ 100. 不盡根數何以爲不盡? 不盡根數之性質 將任何整數開若干次方, 如 $\sqrt[m]{N}$ 之類, 若不能得整數, 則必爲不盡根數, 理由何在? 先看特例:

$$\sqrt{2} \neq \frac{a}{b} \quad (\tfrac{a}{b} \text{ 爲既約分數})$$

[證] 假定 $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$

則應有 $2 = \frac{a^2}{b^2}$

今 $\frac{a}{b}$ 爲既約分數, 則 b 不能整除 a, 自然亦不能整除 a^2, b 既不能整除 a^2, 則 b^2 更不能整除 a^2. b^2 既不能整除 a^2, 則以 b^2 除a^2, 當然不能得整數, 如何可得 2? 故

$$2 \neq \frac{a^2}{b^2}.$$

所以 $\sqrt{2} \neq \frac{a}{b}$.

再證通例: $\sqrt[m]{N} \neq \frac{a}{b}$ ($\frac{a}{b}$ 爲既約分數).

[證] 假定 $\sqrt[m]{N}=\frac{a}{b}$

則應有 $$N=\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}$$

因 b 不能整除 a, 故亦不能整除 a^m. b 既不能整除 a^m, 則 b^m 更不能整除 a^m. 故 $\frac{a^m}{b^m}$ 不等於任何整數, 自然亦不等於 N. 故上式 $N=\frac{a^m}{b^m}$ 爲不合理, 故

$$\sqrt[m]{N}\neq\frac{a}{b}.$$

既明 $\sqrt{2}\neq\frac{a}{b}$, $\sqrt[m]{N}\neq\frac{a}{b}$, 則對於 $\sqrt{2}$, $\sqrt[m]{N}$ 諸根式何以不盡之故, 不難一想而知. 蓋若 $\sqrt{2}$, $\sqrt[m]{N}$ 可化爲有限小數, 或循環小數, 則由算術上"任何有限小數, 任何循環小數, 均可化爲分數"之理, $\sqrt{2}$, $\sqrt[m]{N}$ 應可化爲分數, 此與上理矛盾矣.

是以總而言之 $\sqrt[m]{N}$ 如不能開得整數, 則其真值亦不能以小數表之. 任何小數所能表示者, 其近似值耳. 例如 1.4; 1.41; 1.414; 等等均爲

$\sqrt{2}$ 之近似值，而非真值．$\sqrt{2}$之真值即為$\sqrt{2}$，即為自乘可以得 2 之數．同樣 $\sqrt[m]{N}$ 即為 $\sqrt[m]{N}$，即為昇至 m 次冪可以得 N 之數．以式明之，$\sqrt[m]{N}$之性質如下：—

$$(\sqrt[m]{N})^m=N.$$

在不盡根數 $\sqrt[m]{N}$ 中，為便利計，吾人稱 m 為根之次數，N 為被開方數．

§ 101. 不盡根式化簡之原理 在算術 $\sqrt[m]{N}$ 只有一值，在代數 $\sqrt[m]{N}$ 可得 m 個值．但為便利計．通常只論其一值，即與算術中相同者．有此規定，可得化簡根式之原理如下：—

(A) $$\sqrt[m]{a}\ \sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{ab}.$$

[證] $$(\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b})^m=(\sqrt[m]{a})^m(\sqrt[m]{b})^m$$
$$=ab=(\sqrt[m]{ab})^m$$

兩邊各開 m 次方，得 $\sqrt[m]{a}\ \sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{ab}$

(B) $$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}=\sqrt[m]{\frac{a}{b}}.$$

[證] $\left(\dfrac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}\right)^m = \dfrac{(\sqrt[m]{a})^m}{(\sqrt[m]{b})^m} = \dfrac{a}{b} = \left(\sqrt[m]{\dfrac{a}{b}}\right)^m$

兩邊各開 m 次方，得 $\dfrac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\dfrac{a}{b}}$.

(C) $\sqrt[mp]{a^{np}} = \sqrt[m]{a^n}$.

[證] $(\sqrt[mp]{a^{np}})^{mp} = a^{np}$ (1)

$(\sqrt[m]{a^n})^{mp} = [(\sqrt[m]{a^n})^m]^p = (a^n)^p = a^{np}$ (2)

比較 (1), (2) 得 $(\sqrt[mp]{a^{np}})^{mp} = (\sqrt[m]{a^n})^{mp}$.

兩邊各開 mp 次方，得 $\sqrt[mp]{a^{np}} = \sqrt[m]{a^n}$

§ 102. **不盡根數化簡後之形狀** 依據上節 (A), (B), (C) 三條，對於任何不盡根數，均可化爲如下之形.

(1) 被開方數任何質因子之指數，不大於根之次數.

(2) 被開方數不含分母.

(3) 被開方數各個質因子之指數與根之次數，不再有相同因子.

例一. $\sqrt{8} = \sqrt{2^2 \times 2} = \sqrt{2^2}\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

例二. $\sqrt[3]{48} = \sqrt[3]{8 \times 6} = \sqrt[3]{8}\sqrt[3]{6} = 2\sqrt[3]{6}$

例三. $\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$

例四. $\sqrt[3]{\frac{1}{a^2b}}=\sqrt[3]{\frac{ab^2}{a^3b^3}}=\frac{\sqrt[3]{ab^2}}{ab}.$

例五. $\sqrt[6]{64\times 27}=\sqrt[6]{64}\sqrt[6]{27}=2\sqrt[6]{27}$

$=2\sqrt[6]{3^3}=2\sqrt{3}.$

例六. $\sqrt[4]{36}=\sqrt[4]{6^2}=\sqrt{6}.$

習題八十九

化簡各式爲最簡之形:

1. $\sqrt{288}$　2. $\sqrt{20}$　3. $\sqrt[3]{128}$

4. $\sqrt{250}$　5. $\sqrt[3]{250}$　6. $\sqrt[3]{5000}$

7. $\sqrt[3]{-2187}$　8. $\sqrt[5]{245}$　9. $\sqrt[3]{256}$

10. $\sqrt[4]{3125}$　11. $\sqrt[4]{800}$　12. $\sqrt[4]{125}$

13. $\sqrt[6]{216}$　14. $\sqrt[6]{1125}$　15. $\sqrt{\frac{2}{7}}$

16. $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$　17. $\sqrt{\frac{2a}{b}}$　18. $\sqrt[3]{\frac{14}{27}}$

19. $\sqrt[3]{-289a^4b^5c^6}$　20. $\sqrt[10]{(x+y)^5}$

21. $\sqrt{1849(a+b)^2(a-b)^3}$　22. $\sqrt{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$

23. $\sqrt{x^4y^6+x^6y^4}$　24. $\sqrt[3]{x^3y^6+x^6y^3}$

25. $\sqrt{a^3+2a^2b+ab^2}$

26. $\sqrt[3]{8x^4y-24x^3y^2+24x^2y^3-8xy^4}$

於下列各式內試將根號外之因數化入根號之內:

27. $11\sqrt{3}=\sqrt{11^2}\sqrt{3}=\sqrt{121}\sqrt{3}=\sqrt{363}$

28. $6\sqrt[3]{4}$ 29. $\frac{ab}{a-b}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2b^2}}$

30. $\frac{4}{11}\sqrt{\frac{77}{8}}$

§103. 不盡根式之加減 兩個不盡根式,除係數外,別無他處不同者,名曰同類根式. 幾個同類根式可以合併爲一個根式;幾個不同類根式,不能合併爲一項. (此與以前所述"同類項可以加減成一項;不同類項不能相加或相減,"其理相同. 學者可比較觀之.)

例一. $3\sqrt{5}+2\sqrt{5}-4\sqrt{5}$

$=(3+2-4)\sqrt{5}=\sqrt{5}$

例二. $3\sqrt{5}+3\sqrt{3}=6\sqrt{5}$ 對否? 何故?

$3\sqrt{5}+3\sqrt{3}=6\sqrt{3}$ 對否? 何故?

$3\sqrt{5}+3\sqrt{3}=6\sqrt{8}$ 對否? 何故?

例三. $3\sqrt{5}+2\sqrt[3]{5}=3\sqrt{5}+2\sqrt[3]{5}$.何故?

例四. $\sqrt{20}+\sqrt{45}=2\sqrt{5}+3\sqrt{5}$

$=(2+3)\sqrt{5}=5\sqrt{5}$

例五. $\sqrt{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{3}+\sqrt{75}$

$=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{3}+5\sqrt{3}$

$=\frac{3}{2}\sqrt{2}+6\sqrt{3}$

由上諸例觀之, 可得不盡根式之加減規則如下:

第一步. 化諸不盡根式爲最簡之形.

第二步. 將諸根式之係數, 依其原有之符號加減之, 以此所得結果置於公共根式之前, 作爲根式之係數.

習 題 九 十

下列各式內, 能加減者試加減之:

1. $5\sqrt{45}-2\sqrt{20}+8\sqrt{5}$
2. $5\sqrt{63}+6\sqrt{7}-8\sqrt{28}$
3. $\sqrt{44}+5\sqrt{176}-2\sqrt{99}$
4. $5\sqrt{363}-2\sqrt{243}+3\sqrt{192}$
5. $5\sqrt[3]{81}-7\sqrt[3]{192}+4\sqrt[3]{648}$
6. $\sqrt{2}+5\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{1}{8}}+\sqrt{50}$

7. $\sqrt[3]{2}+5\sqrt[3]{2}-6\sqrt[6]{4}$　　8. $\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$

9. $3\sqrt{147}-\frac{7}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}-\sqrt{\frac{1}{27}}$

10. $\sqrt[3]{-54}-4\sqrt[3]{-16}+5\sqrt{250}$

11. $3\sqrt{5}+\sqrt{90}+\sqrt{10}-\sqrt{90}$

12. $\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{8}}-\sqrt{\frac{1}{3}}+\sqrt{\frac{1}{75}}$

13. $\sqrt{6}+\sqrt{7}+\sqrt{8}$　　14. $\sqrt[3]{6}+\sqrt{6}+\sqrt[4]{6}$

15. $3\sqrt{x}+4\sqrt{y}-6\sqrt{x}+7\sqrt{y}$

16. $\sqrt{(a+b)^2c}+\sqrt{(a-b)^2c}-2a\sqrt{c}$

17. $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{ab}+2}+\sqrt{\frac{a^2+b^2}{ab}-2}+\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}$

18. $\sqrt{\frac{y}{x}}+\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{1}{xy}}+\sqrt{xy}+\sqrt{\frac{1521}{x^3y+2x^2y^2+xy^3}}$

§104. 不盡根式之乘法　依前 §101 (A) 可見兩個同次根可以相乘. 不同次根,如欲相乘,須先化為同次根,然後相乘.

例一. $\sqrt{2}\sqrt{84}\sqrt{6}=\sqrt{2\times 84\times 6}$

$$=\sqrt{2\times 2^2\times 3\times 7\times 2\times 3}$$

$$=2\times 2\times 3\sqrt{7}=12\sqrt{7}.$$

例二. $\sqrt[3]{2}\sqrt{3}=\sqrt[6]{2^2}\sqrt[6]{3^3}$

$=\sqrt[6]{2^2\times 3^3}=\sqrt[6]{108}$

例三. $\sqrt{2}(\sqrt{3}+\sqrt{24})=\sqrt{2}\sqrt{3}$

$+\sqrt{2}\sqrt{24}=\sqrt{2\times 3}+\sqrt{2\times 24}$

$=\sqrt{6}+4\sqrt{3}$

例四. $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{7})$

$=\sqrt{2}\sqrt{5}+\sqrt{3}\sqrt{5}$

$+\sqrt{2}\sqrt{7}+\sqrt{3}\sqrt{7}$

$=\sqrt{10}+\sqrt{15}+\sqrt{14}+\sqrt{21}$

例五. $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$

$=(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2=a-b.$

[註] 凡屬 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 與 $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ 之形之根名曰共軛根式. 共軛根式之積,恆爲不含根式之數. 此結果極爲重要,學者務宜注意

習題九十一

求下列各積:

1. $\sqrt{2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{10}$ 2. $\sqrt{3}\times\sqrt{24}\times\sqrt{5}$

3. $\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{324}$ 4. $\sqrt[3]{25}\times\sqrt[3]{\frac{1}{200}}$

5. $\sqrt[3]{2}\times\sqrt{5}$ 6. $\sqrt[3]{4}\times\sqrt[4]{3}$

7. $2\sqrt{3}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})$ 8. $3\sqrt{2}(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})$

9. $(2+\sqrt{3})(3+\sqrt{5})$ 10. $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{5})$

11. $(-\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})$

12. $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})$

13. $(-\sqrt{2}+\sqrt{3})(-\sqrt{2}-\sqrt{3})$

14. $(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{20}-\sqrt{12})$

15. $(\sqrt{x}+3\sqrt{y})(\sqrt{x}-3\sqrt{y})$

16. $(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y})(-\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y})$.

§105. 不盡根式之除法 不盡根式之除法,即將被除數與除數同乘以同一適當之根式,使除數(不是被除數)不含根式.

例一. $\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

[注意] 在$\frac{1}{\sqrt{3}}$與$\frac{\sqrt{3}}{3}$之中,二者同有$\sqrt{3}$;而原式之分子爲1,化得之式,分母爲3. 似乎$\frac{1}{\sqrt{3}}$比$\frac{\sqrt{3}}{3}$爲簡,然則吾人何必將$\frac{1}{\sqrt{3}}$化爲$\frac{\sqrt{3}}{3}$? 原因如下:

設$\sqrt{3}$之近似值爲1.73205. 由原式$\frac{1}{\sqrt{3}}$直接求其近似值,須演$\frac{1}{1.73205}$除算. 但若由所得之式$\frac{\sqrt{3}}{3}$,

求其近似值,則僅須演算 $\frac{1.73205}{3}$. 比較便利許多矣.

例二. $\frac{1}{\sqrt{8}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

例三. $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}=\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$.

例四. $$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}$$

$$=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3}\neq\sqrt{2}-\sqrt{3}$$

例五. $$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}$$

$$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2+3+2\sqrt{6}-5}$$

$$=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})\sqrt{6}}{2\sqrt{6}\sqrt{6}}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}$$

習題九十二

試求下列各式之結果:

1. $\sqrt{3}\div\sqrt{2}$ 　　2. $\sqrt{2}\div\sqrt{3}$

3. $3\div\sqrt{2}$ 　　4. $2\div\sqrt{3}$

5. $3\div\sqrt[3]{2}$ 　　6. $2\div\sqrt[3]{3}$

7. $\sqrt[4]{3}\div\sqrt[3]{2}$　　8. $\sqrt[3]{2}\div\sqrt[4]{3}$

9. $1\div(\sqrt{3}+\sqrt{5})$　　10. $(2-\sqrt{3})\div(1+\sqrt{3})$

11. $(\sqrt{2}+\sqrt{3})\div(\sqrt{2}-\sqrt{3})$

12. $(\sqrt{7}-\sqrt{19})\div(\sqrt{7}+\sqrt{19})$

13. $1\div(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})$

14. $(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})\div(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})$

15. $\sqrt{3}\div\sqrt{250}$

16. $(3+\sqrt{5})(\sqrt{5}-2)\div(5-\sqrt{6})$

17. $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\div\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$

18. $(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})\div(5+2\sqrt{6})$

設 $\sqrt{3}=1.73205$, $\sqrt{5}=2.23607$, 求下列各商至小數四位:

19. $\dfrac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2}$　　20. $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2-2\sqrt{15}}$

§ 106. 解方程式所得不盡根數,果爲原方程之眞根否? 此可依根式四則,將所得之値代入原方程,驗其是否適合.

例　解方程式　$x+\dfrac{1}{x}=5$

解之,得　　$x=\dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2}.$

[驗算] 以 x 之值代入方程式,則得

$$\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}+\frac{2}{5\pm\sqrt{21}}=5$$

卽 $$\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}+\frac{2(5\mp\sqrt{21})}{(5\pm\sqrt{21})(5\mp\sqrt{21})}=5,$$

卽 $$\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}+\frac{5\mp\sqrt{21}}{2}=5.$$

卽 $$\frac{10}{2}=5,$$ 右左相合.

$\therefore\quad x=\dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2}$ 確爲原方程之根.

習題九十三

解下列各方程式並驗算之.

1. $x+\dfrac{2}{x}=6$　　2. $x^2-5x-3=0$

3. $x-3+\dfrac{1}{x-3}=m$　　4. $x^2+9x-9=0$

5. $\begin{cases}x+y=3\\ xy=1\end{cases}$　　6. $\begin{cases}2x-y=1\\ x^2+y^2+x+y=2\end{cases}$

7. 二數之積爲6,其平方之和爲15,試求此二數.

8. 直角三角形之一邊爲5,斜邊與另一邊不知其長,但知此形之面積爲15,試求斜邊.

II. 虛 數

§ 107. 虛數之需要及其性質 [問題一] 設有方程 $x^2+1=0$, 試求其根, 依二次方程解法解之, 得 $x=\pm\sqrt{-1}$.

[問題二] 設有方程式 $x^2+x+1=0$ 試求其根.

依公式求解, 得 $x=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{-3}}{2}$

由上二例觀之, 可見解二次方程所得之值, 有時非含負數之平方根不可.

然則負數之平方根, 如 $\sqrt{-1}$ 之類, 果爲何值? $+1$乎? 抑 -1乎? 1)假定 $(\sqrt{-1})^2=(+1)^2$ 則將兩邊各自平方, 應得 $-1=+1$, 於理不通. 可見 $\sqrt{-1}\neq+1$. 2)假定 $(\sqrt{-1})^2=(-1)^2$ 則將兩邊各自平方, 應得 $-1=+1$, 於理不通. 可見 $\sqrt{-1}$ 亦非 -1. 然則 $\sqrt{-1}$ 究爲何值? 應之曰 "$\sqrt{-1}$ 究爲 $\sqrt{-1}$, 卽平方能得 -1 之數. 不但如此, 在通例, $\sqrt{-a}$ 卽爲 $\sqrt{-a}$, 卽爲平方能得 $-a$ 之數." 以式表之, $\sqrt{-a}$ 之性質如下:

$$(\sqrt{-a})^2 = -a$$

在以前，任何正負整數，分數或不盡根數，其平方恆爲正數. 而今 $\sqrt{-a}$ 之平方，卻爲負數. 則此 $\sqrt{-a}$ 之性質與以前所述正負整數分數或不盡根數等等，豈非大不同乎！的確！逈然不同，因其性質之不同，故各予以不同之專名. 依習慣，名 $\sqrt{-a}$ 爲虛數. 而名 $\sqrt{+a}$ 爲實數，(虛也者，非虛無杳茫胡說之謂也.)

[註一] 虛數實數二者非同類之數，猶之男女非同性之人，問 $\sqrt{-4}$，$\sqrt{-3}$，$\sqrt{-1}$，等各爲那個實數，猶之問阿哥，阿弟各爲父親之第幾女，自然不通.

[註二] 因求解二次方程 $x^2+a^2=0$ 必然產生一種新數 $\sqrt{-a^2}$. 此種事例並無若何可怪之處. 蓋在算學上每解一種新的問題，往往有一種新數之產生. 例如 (1) 求解 $3x-5=0$ 及其同類方程，乃有分數之產生；(2) 求解 $x+a^2=0$，乃有負數之產生，(3) 求解 $x^2-3=0$，及其同類方程，乃有不盡根數之產生. 此類事例，已數見不

餅,何獨至於虛數而異之. 所當注意者. 新數原非舊數,不能以舊數表之,例如分數不能以整數表之;負數不能以正數表之;不盡根數不能以整數或分數表之;當然,虛數亦不能以實數表之耳.

§ 108. 虛數之化簡 爲便利計, $\sqrt{-1}$ 常省寫爲 i. (即 $\sqrt{-1}=i)^2$ 於是任何虛數均可以 i^2 之倍數表之. 例如

$$\sqrt{-4}=\sqrt{4}\sqrt{-1}=2i$$

$$\sqrt{-9}=\sqrt{9}\sqrt{-1}=3i$$

$$\sqrt{-3}=\sqrt{3}\sqrt{-1}=\sqrt{3}\,i$$

$$\sqrt{-k^2}=\sqrt{k^2}\sqrt{-1}=ki$$

$$\sqrt{-m}=\sqrt{m}\sqrt{-1}=\sqrt{m}\,i$$

$$\sqrt{-12}=\sqrt{12}\sqrt{-1}=\sqrt{12}\,i=2\sqrt{3}\,i$$

§ 109. 虛數之加減 例如 $ai+bi=?$ 欲答此問題. 須知 ai 與 bi 各爲何義.

由上節知 $ai=i$ 之 a 倍

$bi=i$ 之 b 倍

故 $ai+bi=i$ 之 $(a+b)$ 倍.

$\therefore \qquad \underline{ai+bi=(a+b)\,i}$

同理 $\qquad \underline{ai-bi=(a-b)\,i.}$

例一. $\qquad 3i+4i=(3+4)i=7i$

例二. $\qquad 3i+4i-8i=(3+4-8)i=-i$

例三. $\qquad 2i+\sqrt{3}\,i=(2+\sqrt{3})i$

例四. $\qquad 3+2i+5-\sqrt{-36}=\overset{3}{\cancel{2}}+2i+5-6i$

$$=(\overset{3}{\cancel{2}}+5)+(2-6)i$$

$$=\overset{8}{\cancel{7}}-4i$$

例五. $\qquad \sqrt{-a^2}+\sqrt{-b^2}+\sqrt{-c}$

$$=ai+bi+\sqrt{c}\,i$$

$$=(a+b+\sqrt{c})i$$

習題九十四

求下列各式之結果:

1. $3i+4i-6i+i$ 2. $-i-2i-3i$

3. $xi+yi-zi$ 4. $\sqrt{-36}+\sqrt{-144}-\sqrt{81}i$

5. $\sqrt{-36}-\sqrt{144}$ 6. $\sqrt{-2}-\sqrt{-4}-\sqrt{9}$

7. $\sqrt{-a^2c^3+a^3c^2}+\sqrt{-(a-c)^3}$

8. $\sqrt{-\frac{1}{5}}+\sqrt{-\frac{1}{16}}$ 9. $\sqrt{-\frac{2}{3}}+\sqrt{-54}$

10. $\sqrt{-a^2-2ab-b^2}+\sqrt{-a^2+2ab-b^2}$

11. $\sqrt{-7}-\sqrt{-8}$ 12. $\sqrt{-3}+\sqrt{-243}+\sqrt{-363}$

13. $\sqrt[3]{-8}=2i$, 對否? 何故?

14. $\sqrt[5]{-32}=2i$, 對否? 何故?

15. $\sqrt[4]{-16}=2i$, 對否? 何故?

[提示] $\sqrt[4]{-16}=\sqrt[4]{16}\sqrt[4]{-1}=2\sqrt[4]{-1}$. 但$\sqrt[4]{-1}$等於$\sqrt{-1}$否?

§110. 虛數乘法 由§107知 $i^2=-1$, 故

$$i=i,\quad i^2=-1,\quad i^3=-i,\quad i^4=1.$$

$$i^5=i,\quad i^6=-1,\quad i^7=-i,\quad i^8=1,$$

推之, $i^{4n+1}=i,\ i^{4n+2}=-1,\ i^{4n+3}=-i,\ i^{4n+4}=1.$

由此得虛數相乘之法如下:

$$ai\times bi=abi^2=-ab,\ ai\times bi\times ci=abci^3=-abci$$

$$ai\times bi\times ci\times di=abcdi^4=abcd.$$

$$ai\times bi\times ci\times di\times ei=abcdei$$

例一. $-3i\times 4i=-12i^2=-12(-1)=12$

例二. $\sqrt{-2}\times\sqrt{-3}\times\sqrt{-49}$

$$=\sqrt{2}i\times\sqrt{3}i\times 7i$$

$$=7\sqrt{2}\sqrt{3}i^3=-7\sqrt{6}i$$

例三. $2i(3-4i)=2i\times 3-2i\times 4i$

$$=6i-8i^2=8+6i$$

例四. $(3+2i)(4-3i)=3\times 4-3\times 3i+4\times 2i$

$$-3i\times 2i=12-9i+8i-6i^2$$

$$=18-i$$

例五. $(a+bi)(a-bi)=a^2-b^2i^2=a^2+b^2.$

[註] $a+bi, a-bi$ 爲共軛虛數. 兩個共軛虛數之積恆爲實數. 此結果亦甚重要. 學者宜熟記之.

習題九十五

1. 求證 $-1=1$.

[證] $\sqrt{-3}\times\sqrt{-5}=\sqrt{3}\,i\times\sqrt{5}\,i=\sqrt{3\times5}\,i^2=-\sqrt{15}.$ (1)

依 §101 (A), $\sqrt{-3}\times\sqrt{-5}=\sqrt{(-3)\times(-5)}=\sqrt{15}.$ (2)

比較 (1), (2) 得 $-\sqrt{15}=\sqrt{15}.$

兩邊各除以 $\sqrt{15}$, 得 $-1=1.$

[注意] 上之證法, 錯在何處? 公式 $\sqrt{M}\times\sqrt{N}=\sqrt{MN}$, 在 M, N 俱爲負數之時, 仍能適用否? 然則 $\sqrt{-3}\times\sqrt{-5}$ 可化爲 $\sqrt{(-3)\times(-5)}$ 否? $\sqrt{-3}\times\sqrt{-5}$ 應如何乘法?

求下列各式之結果:

2. $2i\times 3i\times 4i\times 5i$

3. $\sqrt{-4}\times\sqrt{-9}\times\sqrt{-16}\times\sqrt{-25}$

4. $\sqrt{7}\times\sqrt{-6}\times\sqrt{-7}\times\sqrt{6}$

5. $\sqrt{-8}\times\sqrt{-2}\times\sqrt{-75}\times\sqrt{3}$

6. $(3+4i)(3-4i)$

7. $(7+8i)(8-7i)$

8. $(1+2i)(1-2i)(1-4i)$

9. $(3+5i)(3-5i)(3^2+5^2i)$

10. $(1+2i)(3+4i)(1-2i)(3-4i)$

11. $(7-\sqrt{-64})(7+\sqrt{-64})(1-i)^2$

12. $(\sqrt{2}-\sqrt{3}\,i)^2(\sqrt{2}+\sqrt{3}\,i)^2$

13. $(7+\sqrt{-24})(7+\sqrt{24})$

§ 111. 虛數除法 以虛數除實數或虛數,卽以適當之數同乘被除數與除數,使除數(不是被除數)化爲實數.

例一. $\dfrac{1}{i}=\dfrac{i}{i^2}=\dfrac{i}{-1}=-i$

例二. $\dfrac{1}{32i^3}=\dfrac{i}{32i^4}=\dfrac{i}{32}$

例三. $\dfrac{1}{1+2i}=\dfrac{1-2i}{(1+2i)(1-2i)}=\dfrac{1-2i}{1+4}=\dfrac{1}{5}-\dfrac{2}{5}i.$

例四. $$\frac{\sqrt{2}-3i}{\sqrt{2}+\sqrt{3}\,i}=\frac{(\sqrt{2}-3i)(\sqrt{2}-\sqrt{3}\,i)}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}\,i)(\sqrt{2}-\sqrt{3}\,i)}$$

$$=\frac{2-3\sqrt{3}-(3\sqrt{2}+\sqrt{6})i}{2+3}$$

$$=\frac{2-3\sqrt{3}-(3\sqrt{2}+\sqrt{6})i}{5}$$

習題九十六

試求下列各式之結果:

1. $1\div 5i^5\div 3i^3$ 2. $(3+2i)\div i^8\div i^{15}$

3. $(7+8i)\div(7-8i)$ 4. $(7-8i)\div(7+8i)$

5. $(1+\sqrt{3}\,i)(1-\sqrt{3}\,i)\div(1+4i)$

6. $(\sqrt{2}+\sqrt{3}\,i)\div(\sqrt{2}-\sqrt{3}\,i)$

7. $1\div(2+\sqrt{3}\,i)\div(2-\sqrt{3}\,i)$

8. $8\div(\sqrt{3}-\sqrt{5}\,i)\div(\sqrt{3}+\sqrt{5}\,i)$

9. $(3+\sqrt{2}\,i)^2\div(3-\sqrt{2}\,i)$

10. $1\div(\sqrt{3}+\sqrt{-315})^2\div(\sqrt{3}-\sqrt{-315})^2$

11. $\sqrt{-a+b}\div\sqrt{-a^2+2ab-b^2}$

12. $(a^2+b^2)\div(a+bi)$

13. $(a^2+2ab+b^2)\div(\sqrt{a}+\sqrt{b}\,i)$

14. $(c+di)\div(a+bi)$.

§ 112. 解二次方程所得之虛數,果否爲原方程之眞根? 此可將所得之虛數代入原方程之兩邊,依虛數四則,化簡方程之兩邊,驗其是否相等.

例. 解方程式 $x+\frac{4}{x}=3$.

依分式方程解法解之,得 $x=\frac{3\pm\sqrt{7}i}{2}$.

[驗算] 以此 x 之值代入原方程式,應得

$$\frac{3\pm\sqrt{7}i}{2}+\frac{8}{3\pm\sqrt{7}i}=3$$

卽應得 $\frac{3\pm\sqrt{7}i}{2}+\frac{8(3\mp\sqrt{7}i)}{(3\pm\sqrt{7}i)(3\mp\sqrt{7}i)}=3$

化簡之,應得 $\frac{3\pm\sqrt{7}i}{2}+\frac{8(3\mp\sqrt{7}i)}{9+7}=3$

卽 $\frac{3\pm\sqrt{7}i}{2}+\frac{3\mp\sqrt{7}i}{2}=3$ 左右相合.

故 $x=\frac{3\pm\sqrt{7}i}{2}$ 確爲原方程之真根.

習題九十七

解下列各方程,並驗所得之值果否爲眞根.

1. $x^2+2x+5=0$
2. $5x^2-8x=(x-1)(x-2)$
3. $x^3-1=0$
4. $x^3+27=0$
5. $x^4+13x^2+36=0$
6. $(x^2-5x)^2-(x^2-5x)-90=0$

7. $\begin{cases} 2x-y=-1 \\ x^2-y^2=3 \end{cases}$ 8. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=3 \\ xy+4=0 \end{cases}$

III. 根式方程

§113. 根式方程之解法及應用 求解應用問題, 有時常得根式方程. 玆舉例於下:

例一. 將某數與 36 之和開平方, 自此平方根減去該數, 其結果等於 6, 求該數.

[解法] 設 $x=$ 該數, 從題意應得方程式

$$\sqrt{x+36}-x=6 \tag{1}$$

由此方程式如何去求 x 之值, 非設法棄去根號不可. 如何可去根號, 非將兩邊各自平方不可. 但若由 (1) 式直接平方, 則其左邊將為

$x+36+x^2-2x\sqrt{x+36}$. 去了一個方根, 又來一個方根矣. 故必先移項, 使其一邊不含方根如下式:

$$\sqrt{x+36}=x+6 \tag{2}$$

兩邊平方, 得 $x+36=x^2+12x+36.$

解之, 得 $x_1=0,\ x_2=-11.$

[驗算] (1) 以 $x=0$ 代入 (1) 式, 則得方程

式 $\sqrt{0+36}-0=6$. 左右相合. 故 $x=0$ 爲 (1) 式之根. 又以 0 代入原題, 亦合題意, 故 0 爲所求之數.

(2) 以 $x=-11$ 代入 (1) 式, 則得方程式 $\sqrt{-11+36}-(-11)=6$, 左右不合, 故 $x=-11$ 非 (1) 式之根.

例二. 於某數與 5 之和之平方根加入該數本身之平方根, 其結果等於該數 4 倍與 9 之和之平方根, 求此數.

[解法] 設 $x=$ 某數, 從題意得方程式:

$$\sqrt{x+5}+\sqrt{x}=\sqrt{4x+9} \qquad (1)$$

平方, 得 $\quad x+5+x+2\sqrt{x(x+5)}=4x+9$

移項, 得 $\quad 2\sqrt{x(x+5)}=2x+4$

卽 $\quad \sqrt{x(x+5)}=x+2$

平方, 得 $\quad x(x+5)=x^2+4x+4$

化簡, 得 $\quad x=4$

[驗算] 以 $x=4$ 代入原方程式 (1), 左右相合, 故 4 爲 (1) 式之真根, 又以 4 代入原題, 亦無不合, 故 4 爲所求之數.

§ 114. 解根式方程有時可得僞根 求解根式方程，有時計算手續雖無錯誤，而所得之值不合原來方程，是爲原方程之僞根.

例一. 上節例一. $\sqrt{x+36}-x=6$. 解之，得二值 $x=0$ 及 $x=-11$. 但 0 爲原方程之根，-11 則非原方程之根.

例二. 解方程式 $x+1+3\sqrt{x-1}=0$. (1)

移項，平方得 $$(x+1)^2=9(x-1). \qquad (2)$$

即 $$x^2+2x+1=9x-9.$$

即 $$x^2-7x+10=0.$$

即 $$(x-2)(x-5)=0.$$

故得 $$x_1=2,\ x_2=5.$$

[驗算] 以 $x_1=2$ 代入 (1)，則應有 $2+1+3\sqrt{2-1}=0$，左右不合.

又以 $x_2=5$ 代入 (1)，則應有 $5+1+3\sqrt{5-1}=0$，左右不合.

故 2, 5 皆非原方程 (1) 之根.

[註] (1) 僞根何自而來? 此問題可就(1), (2)之關係解決之.

將(2)式移項,得 $$(x+1)^2-9(x-1)=0 \qquad (2')$$

實卽 $$[(x+1)+3\sqrt{x-1}][(x+1)-3\sqrt{x-1}]=0 \qquad (2'')$$

可見由(1)式變爲(2)式者,係將(1)式之兩邊同乘以 $x+1-3\sqrt{x-1}$ 而來. 當 $x=2$, 或 5 時, 此乘式之值皆爲零. 故由§97 (3), 知 $x=2$, 5 均爲(1)式之僞根.

(2) 有時何以不增僞根? 設有方程式

$$x+1-3\sqrt{x-1}=0. \qquad (1)$$

試求其根. 依法移項平方,得 $(x+1)^2=9(x-1)$. (2)

解之得 $x=2$ 或 5. 二者俱(1)式之眞根. 此何以不得僞根歟?

再就兩方程(1), (2)之關係研究之.

將(2)移項,得 $$(x+1)^2-9(x-1)=0 \qquad (2')$$

實卽 $$(x+1+3\sqrt{x-1})(x+1-3\sqrt{x-1})=0 \qquad (2'')$$

可見由(1)式變爲(2)式者,係將(1)式之兩邊同乘以 $x+1+3\sqrt{x-1}$ 而來. 今當 $x=2$ 或 5 時, 此乘式之值皆不爲零, 故 $x=2$, 或 5, 均非(1)之僞根, 而爲(1)式之眞根.

總之. 將方程式(A)兩邊各自平方,得方程式(B), 有時可增僞根有時不增僞根. 增不增之判定,原可依

本[註](1),(2)行之. 但最簡最易之法,莫如以解得之值代入原式驗算之.

習題九十八

解下列各方程并棄其僞根.

1. $3x+2-\sqrt{x(x+24)}=0$
2. $3x+2-\sqrt{9x(x+3)}=0$
3. $\sqrt{x}+\sqrt{x+5}=5$
4. $\sqrt{x+12}+\sqrt{x-12}=x-25$
5. $x^2-5+\sqrt{3x^2-5}=0$
6. $\sqrt{x+5}+\sqrt{x-4}=x-11.$
7. $\sqrt{x}+\sqrt{x+8}+\sqrt{x+3}=6$
8. $\sqrt{3x+3}+\sqrt{3x+10}+\sqrt{3x+30}=13$
9. $\sqrt{x+3}-\sqrt{x+6}=\sqrt{x+8}$
10. $\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}+\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}=10.$
11. $x^2+5x+2-3\sqrt{x^2+5x}=0.$

[解法] 將原式化爲 $(\sqrt{x^2+5x})^2-3\sqrt{x^2+5x}+2=0$ 依二次方程解法得 $\sqrt{x^2+5x}=1$, $\sqrt{x^2+5x}=2$. 由此再求 x 之值.

[注意] 若依常法,將原方程移項平方,則得四次方程式,求解之手續甚繁矣.

12. $2x^2+3x-5\sqrt{2x^2+3x}=-6$
13. $x^2+x+3-2\sqrt{x^2+2x+3}=35-x$

14. $\sqrt[3]{x+8}=3$

15. $\sqrt[4]{x+9}+\sqrt{x+9}=6$

16. $-\sqrt[3]{x-37}+\sqrt[3]{x}=1$

17. 矩形之對角線比闊多1市尺. 其周圍為14市尺. 試求面積. 11.

18. 二數之差為19. 其平方根之差為1. 求此二數.

19. 以二數之和除此二數之差,得$\frac{3}{5}$. 以此二數平方根之和除此二數平方根之差,得$\frac{1}{3}$. 求此二數.

第十一章

級數

§115. **級數之需要** [問題一] 自1起若干個連續奇數之和爲400? 設 x 爲所求之個數,則因第1個奇數爲 $2-1$; 第2個奇數爲 $2\times2-1$; 第3個奇數爲 $2\times3-1$, ……… 故第 x 個奇數爲 $2x-1$, 於是從題意得方程式:

$$1+3+5+7+9+\cdots\cdots+(2x-1)=400$$

如何由此方程式求 x, 非先求出左邊之和不可, 如何求出左邊之和, 此級數之問題也.

[問題二] 某國因國難當頭, 力求緊縮, 軍政費支出逐年減少 $\frac{1}{10}$, 十年後共計節省 $10^{10}+9^{11}$ 元, 問原來預算每年若干元?

設 x 爲原來預算之元數, 從題意得方程式:

$$10x-\left(\frac{9}{10}x+\frac{9^2}{10^2}x+\frac{9^3}{10^3}x+\frac{9^4}{10^4}x+\cdots\cdots+\frac{9^{10}}{10^{10}}x\right)=10^{10}+9^{11}$$

如何解此方程式, 非先求出括號內之結果不可, 此又級數之問題也.

§ 116. **何謂級數?** 凡依一定規則構成諸數而得一數羣, 此數羣名曰級數. 級數中之第幾數名曰級數之第幾項.

例一. 1, 3, 5, 7, 9, ……… 成一級數, (其規則爲第 n 項 $=2n-1$)

例二. 1, 2, 4, 8, 16, ……… 成一級數, (其規則爲第 n 項 $=2^{n-1}$)

例三. $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2$, ……… 成一級數, (其規則爲第 n 項 $=n^2$)

例四. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$, ………亦成一級數. (其規則爲第 n 項 $=\frac{n}{n+1}$).

例五. $1\times2\times3, 2\times3\times4, 3\times4\times5, 4\times5\times6, 5\times6\times7$, ………… 亦成一級數.

[其規則爲第 n 項 $=n(n+1)(n+2)$.]

由上諸例觀之, 可見級數之種類繁多, 其全部理論, 非初等代數所能盡述, 本章所論及者, 等差級數, 等比級數二種而已.

I. 等差級數。

§117. 等差級數。 凡級數之各項可以化爲下形者，統名曰等差級數:

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ a+4d,\ a+5d,\ \cdots\cdots,\ a+(n-1)d.$$

等差級數中相鄰兩項之差，恆爲定數 d，此定數 d 名曰公差.

例如上節例一之級數卽爲等差級數，其公差爲 2.

又如 10, 5, 0, −5, −10, −15, ……… 亦成等差級數，其公差爲 −5.

又如 $1,\ \frac{3}{2},\ 2,\ \frac{5}{2},\ 3,\ \frac{7}{2},\ 4,\ \frac{9}{2},\ 5,$ 亦成等差級數，其公差爲 $\frac{1}{2}$.

§118. 等差級數之公項 (由上節等差級數之形式觀之) 可見任何一項必爲 $a+?\,d$ 之形，d 之係數比該項所在之項數少 1. 公差

故第 k 項應爲 $a+(k-1)d$，以式表之如下:

$$t_k=a+(k-1)d. \qquad (A)$$

首項 和

公差

末項＝第k項　m = membra media 中項

t_k 名曰等差級數之公項. 已知等差級數之第1項 a 及其公差 d, 任何其他一項, 均可由此公式 (A) 求得其值.

例一. 求 1, 4, 7, 10,……之第 20 項.

[解法] 本題 $a=1$, $d=4-1=3$, $k=20$.

故所求之項為 $t_{20}=1+(20-1)\times 3$

$$=1+19\times 3=58.$$

例二. 等差級數第 2 項為 3, 第 6 項為 -5, 試求其第十項.

[解法] 倘能求出第一項 a 及公差 d, 則可求得第十項. 求 a 及 d 之法, 卽利用 (A) 式列出聯立方程以求其根可矣.

由題意, 得聯立方程 $\begin{cases} 3=t_2=a+(2-1)d & (1) \\ -5=t_6=a+(6-1)d & (2) \end{cases}$

卽 $\begin{cases} a+d=3 & (1') \\ a+5d=-5 & (2') \end{cases}$

解之得 $a=5$, $d=-2$.

$$\therefore\ t_{10}=5+(10-1)(-2)=5-18=-13.$$

§ 119. 如何插入等差中項? 在等差級數 $a, x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots x_m, b$ 中; $x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots x_m$ 諸數統稱曰 a, b 之等差中項.

已知 a, b 二數, 如何於 a, b 之間插入 m 個等差中項? 此問題亦可由上節公式 (A) 解決之.

蓋

$$x_1 = a + d$$

$$x_2 = a + 2d$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_m = a + md$$

如能求得 d, 則此問題全部解決矣. 因 a 為第一項, b 為等差級數之第 $m+2$ 項. 故用 (A) 得 $b = a + (m+1)d$. 由此求得 $d = \frac{b-a}{m+1}$.

例. 於 3 與 18 之間插入 4 個等差中項.

[解法] 因 3 為等差級數之第一項, 18 為等差級數之第 6 項, 故用 (A) 式, 得

$$18 = 3 + 5d$$

即 $$d = \frac{18-3}{5} = 3$$

∴ 所求之等差中項為 6, 9, 12, 15.

習題九十九

求下列各級數之第 n 項.

1. $3, 6, 9, 12, \cdots\cdots\cdots$

2. $9, 1, -7, -15, \cdots\cdots\cdots$

寫出下列各級數之前十項.

3. $a=100, d=-15.$

4. $a=8, d=1\frac{1}{3}.$

補足下列二級數至第八項.

5. $5, 3\frac{1}{2}, 2,$

6. $a, a+2b, a+4b,$

7. 等差級數之第 5 項爲 10, 第 16 項爲 32. 求其第 10 項.

8. 等差級數之第 3 項爲 50, 第 11 項爲 10. 求其第 20 項.

9. 於 3 與 30 之間插入 9 個等差中項.

10. 於 $100a$ 與 $-100a$ 之間插入 20 個等差中項.

§120. 求等差級數 n 項之和. 設有 n 項等差級數如下形, 如何可求其和?

$$a, a+d, a+2d, a+3d, \cdots\cdots\cdots, t-2d, t-d, t.$$

Graphical Part: 354.

[求法] 設以 S 表其和, 則

$$S=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots\cdots+(l-2d)+(l-d)+l$$

$$S=l+(l-d)+(l-2d)+\cdots\cdots+(a+2d)+(a+d)+a$$

相加得 $2S=(a+l)+(a+l)+(a+l)+\cdots+(a+l)+(a+l)+(a+l)$

$$=n(a+l)$$

$$\therefore\quad S=\frac{n(a+l)}{2}\qquad (B)$$

又因 $l=a+(n-1)d$,

$$\therefore\quad S=\frac{n[a+a+(n-1)d]}{2}=\frac{n[2a+(n-1)d]}{2}\qquad (C)$$

例一. 求 $S=1+2+3+4+\cdots\cdots+100$.

[解法] 本題 $a=1$, $l=100$, $n=100$. 用 (B)

$$\therefore\quad S=\frac{100}{2}(1+100)=5050$$

例二. 求 $3+1\frac{1}{2}+0+\cdots\cdots+$第 1000 項.

[解法] 本題 $a=3$, $d=1\frac{1}{2}-3=-1\frac{1}{2}$, $n=1000$.

用 (C).

$$\therefore\quad S=\frac{1000}{2}\left[2\times3+999\times\left(-\frac{3}{2}\right)\right]$$

$$=-746250$$

習題一百

試求下列各級數之和: (1−4)

1. 2+4+6+8+…………+到第100項.

2. 1+3+5+7+…………+231.

3. 5+10+15+20+…………+2000.

4. 求100與2000之間所有6之倍數之和

5. 自1至1000間,所有4之倍數之和,比所有3之倍數之和大幾何或小幾何?

6. 等差級數之第4項爲12,第30項爲64,求其首100項之和.

$12 = a + (4-1)d$

$64 = a + (30-1)d$

$d = $ [illegible]

$S = \frac{100[2\cdot 6 + (100-1)\ldots]}{2}$

7. 等差級數之100項之和爲5000,其公差爲2,求第一項,第十項,第一百項.

8. 等差級數之第一項爲1,公差爲3,n項之和爲590,求項數n.

9. 等差級數之總和爲1000,項數爲50,第一項爲10,求最後一項及公差.

10. 等差級數9項之和爲126,其最後二項之和爲42,求其首二項之和.

11. 解§115問題一.

12. 自−5起,連續幾個5之倍數之和爲3700.

13. 解方程式 $x+4x+7x+10x+\cdots\cdots\cdots+34x=21630$.

14. 物體從空中自由下墜,據實驗結果,知第一秒內降下16呎;以後每秒所降之距離永比前秒內所降距離多32呎,今自飛機上投一炸彈經12秒鐘而達地面,問此機距地面若干呎?

15. 石子一粒,自由墮入井中,3秒鐘後聽到石子擊水之聲,問井之水面,距地面若干呎.(假定音之速度爲每秒1000呎.)

II. 等比級數

§ 121. **等比級數** 凡級數之可化爲下形者,統稱曰等比級數: (n-1). n.

$$a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ ar^{n-2}\cdots,\ ar^{n-1}\cdots,\ ar.$$

等比級數中相鄰兩項之比恆爲定値 r, 此定値名曰公比.

例一. 1, 2, 4, 8, 16, ······ 成等比級數, 其公比爲 2.

例二. $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \cdots\cdots\cdots$ 成等比級數. 其公比爲 $-\frac{1}{3}$

例三. $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81}, \cdots\cdots\cdots$ 成等比級數. 其公比爲 $\frac{2}{3}$.

§ 122. 等比級數之公項　由上節等比級數之形式觀之, 可見任何一項必爲 ar^{x} 之形, r 之指數比該項所在之項數少 1, 故第 n 項應爲 ar^{n-1}, 以式表之如下:

$$t_n = aq^{n-1} \qquad t_n = aq^{n-1} \qquad (A)$$

t_n 名曰等比級數之公項. 已知等比級數之第一項 a 及其公比 r, 任何其他一項, 均可由此公式 (A) 求得其值.

例一. 求 1, 2, 4, 8,…之第 20 項.

[解法]　本題 $a=1, q=2, n=20$

$$\therefore \quad t_{20} = 1 \times 2^{20-1} = 2^{19}.$$

[註]　求等比級數之第 n 項所得之值 ar^{n-1}, 常爲位數很多之數, 不必乘出, 本題結果 2^{19} 亦不必乘出.

例二. 等比級數第 2 項爲 2, 第 6 項爲 32, 求其第十項.

[解法]　本題 $t_2=2$, $t_6=32$, 由題意, 應用公式 (A) 得聯立方程
$$\begin{cases} ar=2 & (1) \\ ar^5=32 & (2) \end{cases}$$

解之, 得
$$r=2,\ a=1.$$

$$\therefore\qquad t_{10}=1\times 2^{10-1}=2^9.$$

§ 123.　如何插入等比中項?　在等比級數 a, x_1, x_2, x_3, x_4, ……… x_n; b 中, x_1, x_2, x_3, ………, x_n 統稱曰 a, b 之等比中項.

已知 a, b 二數, 如何於 a, b 之間插入 m 個等比中項, 此問題亦可由前節公式 (A) 解決之.

$q = \sqrt[n-1]{\frac{b}{a}}$ direkt aus [illegible]

蓋
$$x_1=ar$$
$$x_2=ar^2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n=ar^n$$

如能求得 r, 則此問題可全部解決矣. 因 a 爲等比級數第一項, b 爲第 $n+2$ 項, 故用 (A) 式得 $b=ar^{n+1}$ ($n+2-1$), 由此求得 $r=\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}$.　　A'

例一.　於 2 與 64 之間插入 4 個等比中項.

[解法]　因 $a=2,\ b=64,\ m=4$, 卽 64 爲等比級數之第 6 項.

故用 (A) 式得　　$2r^5=64$

卽　　$r=2$

$\therefore$　所求之等比中項爲 $2\times 2,\ 2\times 2^2,\ 2\times 2^3,\ 2\times 2^4$.

而級數之全部爲 2, 4, 8, 16, 32, 64.

習題一百一

求下列各級數之第 n 項:

1. $3,\ 6,\ 12,\ 24,\ \cdots\cdots$.

2. $-7,\ -2,\ -\frac{4}{7},\ -\frac{8}{49},\ \cdots\cdots$.

3. $9,\ 1,\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{81},\ \cdots\cdots$.

寫出下列各級數之前五項:

4. $a=-10,\quad r=-3$.

5. $a=100,\quad r=\frac{1}{2}$.

6. $a=10,\quad t_{10}=5120$.

補足下列各級數至第六項.

7. $\frac{2}{3},\ 1,\ \frac{3}{2},\ \cdots\cdots$.　$\frac{3}{2}$:

8. $2,\ \sqrt{2},\ 1$.

9. 等比級數之第 5 項爲 50, 第 8 項爲 400, 求其第三項, 第十一項.

10. 等比級數之第 4 項爲 4, 第 8 項爲 16. 求其第 5 項, 第 16 項, 第 20 項.

11. 於 1 與 243 之間插入四個等比中項.

12. 於 5 與 320 之間插入五個等比中項, 插入十一個等比中項.

§ 124. 求等比級數 n 項之和. 級數之種類不一, 已如前 § 116 所述, 各種級數求和之方法, 通常亦各自不同. 例如, 若仿 § 120 求等差級數 n 項之和之方法, 以求等比級數 n 項之和, 其法全然無效, 學者試自行之, 再看下之解法.

[求法] 以 S_n 表等比級數 $a, ar, ar^2, \cdots\cdots ar^{n-1}$ 之和, 則

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots\cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1}$$

兩邊各乘以 r, 得

$$rS_n = \quad ar + ar^2 + ar^3 + \cdots\cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} + ar^n$$

兩式相減, 得 $S_n - rS_n = a - ar^n$

$$\therefore \quad S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \qquad (B)$$

又因 $t_n = ar^{n-1}$,

$$\therefore \quad S_n = \frac{a - rt_n}{1-r} \qquad (C)$$

例一. 求 1, 2, 4, 8, 16, ······· 前十項之和.

[解法] 本題 $a=1$, $r=2$, $n=10$. 用公式 (B).

$$\therefore \qquad S_{10}=\frac{1-2^{10}}{1-2}=2^{10}-1.$$

例二. 求 $1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\cdots\cdots+\frac{32}{243}=?$

[解法] 本題 $a=1$, $r=+\frac{2}{3}$, $t_n=\frac{32}{243}$, 故用(C)式, 得

$$S=\frac{1-\frac{2}{3}\cdot\frac{32}{243}}{1-\frac{2}{3}}=\frac{665}{243}=2\frac{179}{243}.$$

習題一百二

求下列各級數之和. (1−4)

1. $3+\frac{3}{5}+\frac{3}{25}+\cdots\cdots+$第10項.

2. $1+3+9+27+\cdots\cdots+$第20項.

3. $1-2+4-8+16-\cdots+(-1)^{n-1}2^{n-1}+\cdots\cdots+$第20項.

4. $1+\sqrt{2}+2+2\sqrt{2}+4\cdots\cdots+$第50項. $8\cdots$
   $\sqrt{2}+\sqrt{2}^2+\sqrt{2}^3+\sqrt{2}^4\cdots$

5. 求1與1500間所有2之羃數(即2^k)之和. $2^{10}=1024$

6. 求1與1500間所有3之羃數(即3^k)之和.

7. 等比級數之第 4 項爲 24, 第 7 項爲 192, 求其前十項之和, 前二十項之和, 前五十項之和.

8. 等比級數之首 98 項之和爲 $2^{100}-4$, 公比爲 2. 求其第十項.

9. 等比級數首 9 項之積爲 512, 第 9 項爲 4. 求其首 9 項之和, 首十八項之和.

10. 求級數 $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \cdots\cdots$ 中第十項至第 20 項之和.

11. 解 § 115 問題二.

12. 俗說"臭蟲一隻每夜共生七子, 次夜七子又各生七子, 以後繁殖悉依此法,"今若有臭蟲一隻, 問一星期後共有老小臭蟲若干隻? 二星期後如何?

13. 皮球從 100 市尺高的地方下落至地, 每次返躍的高度, 等於下落距離之 $\frac{1}{3}$. 問當第十次落地時, 該球已經過若干市尺.

§ 125. 無限遞減等比級數之和 在等比級數中, 公比 r 之絕對值, 若比 1 小, 則其各項之絕對值依次減小, 最後至零而止. 例如在級數

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots\cdots.$$

中, $r=\frac{1}{2}<1$, 其各項依次減小. 最後以 o 爲限, 故若用上節公式(C), 以求 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\cdots\cdots$ 無限項之和. 則 (C) 式變爲

$$S=\frac{a}{1-r}-r\cdot\frac{t_n}{1-r}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{o}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2.$$

此理不獨在本例爲然. 在任何等比級數中, 若其 (1) 公比之絕對值小於 1 且 (2) 其項數無限. 則其求和公式, 由上節

公式 (C), $\cancel{S=\frac{a}{1-r}-r\cdot\frac{t_n}{1-r}}$, 變爲公式

$$S=\frac{a}{1-r}. \tag{D}$$

因此時 $t_n=0$ 故也.

習題一百三

1. 在等比級數中, (a) 若項數無限, 而公比 r 之絕對值不小於1, 欲求此無限等比級數之和, 可用(D)式否?

(b) 若公比 r 之絕對值小於1, 而項數不爲無限, 欲求此遞減等比級數之和, 可用(D)式否?

2. 然則欲求等比級數之和,何時應用(B)式? 何時應用(C)? 何時應用(D)式?

3. 求 $1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\cdots\cdots+$無限項之和.

4. 求無限級數 $1+\frac{4}{5}+\frac{16}{25}+\frac{64}{125}+\cdots\cdots$之和.

5. 求無限級數 $1-\frac{4}{5}+\frac{16}{25}-\frac{64}{125}+\cdots\cdots$之和.

6. 求等比級數 $1+\frac{4}{5}+\frac{16}{25}+\cdots\cdots$前1000項之和.

7. 某人由甲地至乙地. 第一日行全路之半,以後每日所行距離依次為上一日所行距離之半. (*a*)問此人行至1000日後行了全路幾分之幾? (*b*)設此人長生不老,如此繼續進行,行至何時可行完全路?

8. 以8市尺,4市尺,2市尺,1市尺,$\frac{1}{2}$市尺,…… 為半徑,依次作圓,證此無數小圓圓周之和,不比大圓圓周長. (已知圓周之長$=2\pi\times$半徑.)

9. 化 $.\dot{3}\dot{4}$ 為分數.

[解法] $.\dot{3}\dot{4}=.34+.0034+.000034+.00000034+\cdots\cdots$

$$=.34+\frac{.34}{100}+\frac{.34}{100^2}+\frac{.34}{100^3}+\frac{.34}{100^4}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{.34}{1-\frac{1}{100}}=\frac{34}{99}$$

10. 化(*a*) $.\dot{1}2\dot{3}$, (*b*) $.12\dot{3}\dot{5}$, (*c*) $.036\dot{7}$ 為分數.

習題一百四 (雜題)

1. 於4,12間插入二數,使前三數成等比級數,後三數成等差級數.

2. (a)在等差級數a, A, b中A=? (用a, b表之.)

(b)在等比級數a, G, b中G=? (用a, b表之.)

3. 求$\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+0-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}-\cdots\cdots$至第20項之和.

4. 求$\frac{2}{3}-\frac{4}{9}+\frac{8}{27}-\frac{64}{81}+\cdots\cdots$至第20項之和.

5. 求上題級數無限項之和.

6. 求第3題級數無限之和,有定值否? 何故?

7. 求$1-2+4-8+16-32+\cdots\cdots$無限之和.

[解法] $r=-2$ 1, n=無限.

$$\therefore \quad S=\frac{a}{1-r}=\frac{1}{1-(-2)}=\frac{1}{3}$$ 對否? 何故?

8. 求$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots$至100000000項之和.

[解法] $S=\frac{a}{1-r}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2.$ 對否? 何故?

9. 因1, 3, 5, 7, 9, ⋯⋯成等差級數, $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\cdots\cdots+$第20項,能用等差級數求和否?

10. 因 1, 2, 3, 4, …… 成等差級數; 2, 3, 4, 5, 6, …… 亦成等差級數,欲求 $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+4\cdot5+\cdots\cdots$ 前 20 項之和,能用等差級數求和公式,抑能用等比級數求和公式?

第十二章

比 比例 變數法

I. 比.

§ 126. 關於比之重要名詞 為便於說明計, 先述下列幾個重要名詞:

(1) 比. 在算術, 同類二數量之商, 如以 7 除 9 之商, 原可寫為 $9 \div 7$ 或 $\frac{9}{7}$. 但為便利計, 又常寫為 $9:7$, 而名 $9:7$ 曰 9 與 7 之比.

同樣, 在代數, 同類二數量之商如以 a 除 b, 原可寫為 $b \div a$ 或 $\frac{b}{a}$. 但為便利計, 又常寫為 $b:a$ 而名 $b:a$ 曰 b 與 a 之比. 故 b 與 a 之比者, 卽 b 為 a 之幾倍, 或幾分之幾也.

(2) 比之兩項, 在 $a:b$ 中 a 名曰比之前項, b 名曰比之後項, a 與 b 統稱比之兩項.

若與除法及分數比較觀之, 則有下之關係:

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{被除數}}{\text{除數}} = \frac{\text{分子}}{\text{分母}} = \frac{\text{前項}}{\text{後項}}.$$

(3)　優比，劣比，比之絕對值大於 1 者名曰優比，比之絕對值小於 1 者名曰劣比.

例如 4:5 爲劣比，5:4 爲優比，$-\frac{3}{2}$ 爲優比 $-\frac{2}{3}$ 爲劣比，然則比中之優比，劣比與分數中之真分數，假分數有關係否?

§ 127.　比之重要定理　關於比之定理最簡而最要者有下列三種:

(1)　比之兩項，若各以相同之數(或正或負但不爲零.)　乘之或除之，則比值不變.

[證]　$$a:b=\frac{a}{b}=\frac{ma}{mb}=ma:mb.$$

(2)　比之兩項，若各以相同之數 (或正或負) 加之，則比值恆變 (原比之值爲 1 者除外).

[證]　以 $\frac{a}{b}$ 表原比之值，$\frac{a+n}{b+n}$ 表新比之值. 則原比與新比之差爲

$$\frac{a+n}{b+n}-\frac{a}{b}=\frac{ab+bn-ab-an}{b(b+n)}=\frac{(b-a)n}{b(b+n)}\neq 0\ (\because b\neq a)$$

$$\therefore\qquad \frac{a+n}{b+n}\neq\frac{a}{b}.$$

(3) 連比定理：諸比相等時，若以所有諸比前項之和比所有諸比後項之和，則此比值亦與原有諸比相等. 此定理若以算式表之，其形如下：

若 $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}=\cdots\cdots.$$

則 $$\frac{a+c+e+g+\cdots\cdots}{b+d+f+h+\cdots\cdots}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{b}{f}=\frac{g}{h}=\cdots\cdots$$

[證] 設以 r 表原有諸比之值，則

$$a=br,\ c=dr,\ e=fr,\ g=hr,\ \cdots\cdots$$

$$\therefore\quad \frac{a+c+e+g+\cdots\cdots}{b+d+f+h+\cdots\cdots}=\frac{br+dr+fr+hr+\cdots\cdots}{b+d+f+h+\cdots\cdots}$$

$$=\frac{(b+d+f+h)r}{b+d+f+h}=r=\text{各比}.$$

例一. $\because\quad \frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{6}{9}=\frac{10}{15}$

$$\therefore\quad \frac{2+4+6+10}{3+6+9+15}=\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{6}{9}=\frac{10}{15}.$$

例二. 若 $a:b=b:c=c:d$，則 $\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+cd}=\frac{ab+bc+cd}{b^2+c^2+d^2}$ 試證明之.

[證法] 原設各比 $=\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$. (A)

故用定理 (1), 得 $\text{各比}=\frac{a\cdot a}{b\cdot a}=\frac{b\cdot b}{c\cdot b}=\frac{c\cdot c}{d\cdot c}$

再用定理 (3), 得 $\text{各比}=\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+cd}$. (B)

又由原設 (A), 用定理 (1), 得

$$\text{各比}=\frac{ab}{b\cdot b}=\frac{bc}{c\cdot c}=\frac{cd}{d\cdot d}$$

再用定理 (3), 得 $\text{各比}=\frac{ab+bc+cd}{b^2+c^2+d^2}$. (C)

比較 (B), (C), 卽得 $\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+cd}=\frac{ab+bc+cd}{b^2+c^2+d^2}$.

習題一百五

1. 試以最簡分數表下列各比之値:

(a) $49:56$ (b) $32:40$

(c) $3\frac{1}{2}:2\frac{1}{3}$ (d) $x^2-y^2:x^2+2xy+y^2$

(e) $x-y:\sqrt{x}+\sqrt{y}$ (f) $a^3-b^3:a^2-b^2$.

2. 化簡下列各比:

(a) $\frac{1}{x^4+x^2y^2+y^4}:\frac{1}{x^2-xy+y^2}$

(b) $\frac{1}{x-y}:\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

(c) $\frac{1}{64+x^4}:\frac{1}{x^2+4x+8}$

3. 求下列各式中x與y之比:

(a) $8x+2y=7x+8y$ (b) $ax+by=cx+dy$

(c) $x^2+5xy=y^2-2xy$ (d) $3x^2+4xy+y^2=0$

4. 分36爲3份使其比爲3:4:5.

[解法] 設a, b, c爲所求之三份,則由題意得

$$\frac{a}{3}=\frac{b}{4}=\frac{c}{5}$$

用連比定理,得 $\frac{a}{3}=\frac{b}{4}=\frac{c}{5}=\frac{a+b+c}{3+4+5}=\frac{36}{12}=3$

$$\therefore \quad \begin{cases} a=3\times3=9 \\ b=4\times3=12 \\ c=5\times3=15 \end{cases}$$

5. 求分105爲四份,使此四份之比爲2:3:4:5.

6. 解聯立方程 $\begin{cases} x+y+z=18 \\ \frac{x+y}{5}=\frac{y+z}{7}=\frac{z+x}{6} \end{cases}$

7. 仿證連比定理之法,以證本節例二.

[提示] 設 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=r$, 則 $a=br, b=cr, c=dr, c=dr$,

代入求證之式之兩邊,各自化簡,視其結果是否相同?

[注意] 此法在比及比例問題中應用極廣,學者務宜留意,能將此法應用純熟,則於比及比例之問題,可以什解其九矣.

8. 設 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$ 求證 $\frac{3a^4b^2+2a^2e^2-5e^4f}{3b^6+2b^2f^2-5f^5}=\frac{a^4}{b^4}$. $=\frac{e^4}{f^4}=$

9. 設 $\frac{a}{l}=\frac{b}{m}=\frac{c}{n}$, 求證

$$\frac{l^2+a^2}{l+a}+\frac{m^2+b^2}{m+b}+\frac{n^2+c^2}{n+c}=\frac{(l+m+n)^2+(a+b+c)^2}{(l+m+n)+(a+b+c)}$$

10. 設 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$ 求證

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\sqrt[5]{\frac{la^5+mc^5+ne^5}{lb^5+md^5+nf^5}}$$

II. 比 例.

§128. **比例之重要名詞.** 爲說明便利計, 先釋下列諸名詞:

(1) 比例. 有 a, b, c, d 四數, 如 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 則謂 a, b, c, d 四數成比例.

例如 $4:6=10:15$, 則謂 4, 6, 10, 15 成比例.

又如 4, 10, 15, 4 不成比例, 以 $4:10\neq 15:4$ 故也.

(2) 外項, 內項, 在比例 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 中 (即 $a:b=c:d$), b, c 二數名曰內項; a, d 二數名曰外項.

(3) 前項, 後項. 在 $a:b=c:d$ 中, a, c 名曰比例之前項; b, d 名曰比例之後項.

(4) 比例第四項. 在 $a:b=c:d$ 中, d 名曰 a, b, c 之比例第四項.

例如 4, 6, 10 之比例第四項爲 15; 而 6, 4, 10 之比例第四項則爲 $6\frac{2}{3}$, 而非 15. 何故?

(5) 比例中項. 在 $a:b=b:c$ 中, b 名曰 a, c 之比例中項.

例如 $4:6=6:9$, 故 6 爲 4 與 9 之比例中項.

例如 $4:5\neq5:6$, 故 5 非 4 與 6 之比例中項.

(6) 比例第三項. 在 $a:b=b:c$ 中, c 名曰 a, b 之比例第三項.

例如 $4:6=6:9$, 故 9 爲 4 與 6 之比例第三項.

又如 $2:3=10:15$, 而 10 非 2 與 3 之比例第三項, 何則? $2:3\neq3:10$ 故也.

§ 129. **比例之重要性質.** 關於比例之定理極多, 不能盡述, 茲舉其最簡而最要者於下:

$$(1)\qquad 若\ ad=bc,\ 則\ a:b=c:d.$$

若 $a:b=c:d$, 則

(2) $$ad=bc.$$

(3) $$b:a=d:c$$

(4) $$a:c=b:d$$

(5) $$a+b:b=c+d:d$$

(6) $$a-b:b=c-d:d$$

(7) $$a+b:a-b=c+d:c-d.$$

[證] (1) 原設 $ad=bc$

兩邊各除以 bd, 則得 $\frac{ad}{bd}=\frac{bc}{bd}$

$$\therefore \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

[證] (2) 原設 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

兩邊各乘以 bd, 則得 $bd\times\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\times bd$

$$\therefore \quad ad=bc$$

[證] (3) 原設 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

由 (2) 得, $ad=bc$

兩邊各除以 ac, 得 $\frac{ad}{ac}=\frac{bc}{ac}$.

$$\therefore \quad \frac{b}{a}=\frac{d}{c}.$$

[證] (4) 原設 $a:b=c:d$

由 (2) 得 $ad=bc.$

兩邊各除以 cd 得 $\frac{ad}{cd}=\frac{bc}{cd}$

$$\therefore\quad a:c=b:d$$

[證] (5) 原設 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

兩邊各加以 1, 得 $\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$

$$\therefore\quad \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

[證] (6) 原設 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

兩邊各減以 1, 得 $\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$

$$\therefore\quad \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$$

[證] (7) 原設 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

由 (5) 得 $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ (A)

由 (6) 得 $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ (B)

$(A)\div(B)$, 即得 $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$.

§ 130. **前節定理之應用.** 前節諸定理，在幾何方面應用極廣，學者能於此時多加訓練，將來在幾何方面，定能收事半功倍之效，反之，此時對於上述諸理，若不能應用自如，則他日學習幾何自然分外叫苦，此就幾何上言其應用也.

再就代數本身言，前節諸理亦極重要，倘能應用純熟，將見出化入神，對於甚難之問題，略施妙計，便得其解，茲舉數例於下：

第一. 關於證明等式者：

例一. 若$a:b=c:d$ 求證

$$(a+b+c+d)(a-b-c+d)$$
$$=(a-b+c-d)(a+b-c-d).$$

[證法] $\because$ $a:b=c:d$

$\therefore$ $a+b:a-b=c+d:c-d.$ [由上節 (7)]

$\therefore$ $a+b:c+d=a-b:c-d$ [由上節 (4)]

$\therefore$ $a+b+c+d:a+b-c-d$

$=a-b+c-d:a-b-c+d$ [由上節 (7)]

$\therefore$ $(a+b+c+d)(a-b-c+d)$

$=(a-b+c-d)(a+b-c-d)$ [由上節 (2)]

例二. 若 $a:b=c:d$

求證 $ab+cd:ab-cd=a^2+c^2:a^2-c^2$.

[證法] $\because$ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ $\therefore$ $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ 何故?

$\therefore$ $\frac{a}{c}\cdot\frac{a}{c}=\frac{b}{d}\cdot\frac{a}{c}$ 何故?

$\therefore$ $a^2:c^2=ab:cd$ 何故?

$\therefore$ $a^2+c^2:a^2-c^2=ab+cd:ab-cd.$ 何故?

第二. 關於解方程式者:

例三. 解方程式 $\frac{2x^2+3x+\sqrt{x-1}}{2x^2+3x-\sqrt{x-1}}=\frac{\sqrt{x-1}+2}{\sqrt{x-1}-2}$

[解法] 由 § 129, (7) 得

$$\frac{2x^2+3x+\sqrt{x-1}+2x^2+3x-\sqrt{x-1}}{2x^2+3x+\sqrt{x-1}-2x^2-3x+\sqrt{x-1}}$$

$$=\frac{\sqrt{x-1}+2+\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{x-1}+2-\sqrt{x-1}+2}$$

即 $\frac{\cancel{2}(2x^2+3x)}{\cancel{2}\sqrt{x-1}}=\frac{\cancel{2}\sqrt{x-1}}{\cancel{2}\cdot 2}$

$\therefore$ $2(2x^2+3x)=(\sqrt{x-1})^2=x-1$

$\therefore$ $4x^2+6x-x+1=0$

解之, 得 $x_1=-1,\ x_2=-\frac{1}{4}$

例四. 解聯立方程 $\begin{cases} \dfrac{x+y+xy}{x+y-xy}=5 & (A) \\ \dfrac{x-y+xy}{x-y-xy}=-\dfrac{1}{3} & (B) \end{cases}$

[解法] 用 § 129, (7) 將 (A), (B)二式變爲

$$\begin{cases} \dfrac{2(x+y)}{2xy}=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{2(x-y)}{2xy}=-\dfrac{2}{4}=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

卽 $\begin{cases} \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{2} & (A') \\ \dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}=-\dfrac{1}{2} & (B') \end{cases}$

解之, 得 $\begin{cases} \dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{x}=1 \end{cases}$ $\therefore$ $\begin{cases} y=2 \\ x=1 \end{cases}$

習題一百六

1. 求下列各組數之比例第四項:

(a) 3, 9, 5. (b) 7, 8, 9. (c) $a+b, a-b, a^2+2ab+b^2$.

2. 求下列各組數之比例中項:

(a) 4, 9. (b) 5, 3. (c) $x+y, x-y$. (d) A, B.

[註] A, B 之比例中項與前述 A, B 之等比中項相同否?

3. 求下列各組數之比例第三項:

(*a*) 4, 9. (*b*) 5, 3. (*c*) $x+y, x-y$. (*d*) A, B.

4. 求下列各比例式中之缺項:

(*a*) $3:6=7:?$ (*b*) $3:?=15:10$ (*c*) $9a:8b=?:7c$.

5. 下列各組比例式中,何者爲眞?

(*a*) $36:39=72:79$ (*b*) $126:168=99:133$.

(*c*) $347:199=1736:999$ (*c*) $1:\sqrt{7}=\sqrt{7}:7$.

6. 仿 §127 證 (3) 連比定理之方法, 能證 §129 中 (2)–(7) 諸定理否? 試用此法證明該節中之 (5), (6), (7) 三條.

7. 仿前題證法, 證明 §130 例一, 例二.

[注意] 此法與 §130 所用證法, 二者孰爲簡而巧? 孰爲較有法度可循?

8. 若 $a:b=c:d$, 試用 §129 所述諸定理, 證明:

(A) $a+b:a+b+c+d=a:a+c$.

(B) $a^2+c^2:b^2+d^2=a^2:b^2$.

(C) $la^2+mc^2:pab+qcd=lab+mcd:pb^2+qd^2$.

9. 利用 §129 所述諸定理, 證明下列二定理:

若 (1) $a+b-3c-3d:a-b-3c+3d$

$$=2a+2b-c-d:2a-2b-c+d,$$

或 (2)　$ab+cd:ab-cd=a^2+c^2:a^2-c^2$.

則各有下之結果:　$a:b=c:d$.

10. (a) 若 $a:b=c:d$ 求證 $a^2+b^2+c^2+d^2:b^2+d^2$

$$=c^2+d^2:d^2.$$

(b) 若 $a^2+b^2+c^2+d^2:b^2+d^2=c^2+d^2:d^2$, 求證 $a:b=c:d$

或　$a:b=-c:d$.

11. 解下列各方程式:

(a)
$$\frac{x^3+2x^2+3x+4}{x^3-2x^2+3x-4}=\frac{x+2}{x-2}.$$

(b)
$$\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}}=\frac{\sqrt{5x+1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{5x+1}-\sqrt{x+1}}.$$

12. 解聯立方程式:

(a)
$$\begin{cases} \dfrac{x+y+xy}{x+y-xy}=-11 \\ \dfrac{2x-y-xy}{2x-y+xy}=-\dfrac{1}{5} \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} \dfrac{x+y+xy}{x+y-xy}=-11 \\ \dfrac{y+z+yz}{y+z-yz}=-\dfrac{19}{5} \\ \dfrac{x+z+xz}{x+z-xz}=-\dfrac{17}{3} \end{cases}$$

III. 變數法.

§ **131. 常數. 變數.** [問題] 某人現有銀 5 元. 以後每日收入 3 元. 問 x 日後, 此人應有若干元.

設所求之元數為 y, 則由題意應得下之等式:

$$y=3x+5.$$

在此等式中, x, y 之值有下之關係:

若 $x=$	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	....
則 $y=$	8,	11,	14,	17,	20,	23,	26,	29,	....

可見 x, y 二者之值俱為可變之數, 故 x, y 名曰變數, 對於變數而言, 不變之數如 3, 5 等名曰常數.

在通例, 凡在一個問題中, 某量 (或數) 之值可為種種不同之數者, 則此量 (或數) 名曰變量 (或變數). 反之, 其值固定而無可變易之量, (或數) 對於變量 (或變數) 而言, 名曰常量 (或常數).

例一. 每人每日吃飯四碗, x 人於 y 日內共吃飯 $4xy$ 碗, 在此問題中, 人數 (x), 日數 (y), 碗數 $(4xy)$ 俱爲變數, 而 4 則爲常數.

例二. 在 $3x-2y=8$ 中, 何者爲變數, 何者爲常數?

例三. 在 $3x+5=6x-7$ 中, 3, 5, 6, 7 等固爲常數, x 亦爲常數而非變數. 何則? x 只有一值, 無可變易故也.

§ 132. 函數 (應變數), 自變數. 在前節問題中, 當 x 之値改變時, y 亦隨之而變. 如此吾人稱 y 爲 x 之函數. 又當 y 値改變時, x 之値亦隨之而變. 故亦稱 x 爲 y 之函數. 推之,

(A) 在任何甲乙兩個變量中, 當乙量之値改變時, 甲量若亦隨之而變, 則甲量名曰乙量之函數, 或曰乙量之應變數, 而乙量, 對於應變數而言, 名曰自變數.

當甲量爲乙量之函數時, 甲乙二量之間, 必有固定關係. 此關係究爲如何之情形, 則有時已知, 有時未知.

例一. 據幾何定理"圓周$=2\pi\times$半徑". 在圓周, 半徑二者之中, 當半徑改變時, 圓周亦隨之而變, 故圓周爲半徑之函數, 又當圓周改變時, 半徑亦隨之而變, 故半徑又爲圓周之函數.

例二. 當每人食量一定時, 若干人所需食品之總量, 隨人數而改變, 故爲人數之函數. 又人數亦爲所需食品總量之函數.

例三. 在 (a) $3x+5y-8=0$,

(b) $x^2-y^2+9=0$

中 x 恆爲 y 之函數, y 亦恆爲 x 之函數.

例四. 小兒體重與其年齡有關, 故體重爲年齡之函數. 又年齡亦與體重有關, 故年齡亦爲體重之函數, (不過此種函數關係, 究爲如何之情形, 不似前三例之易於推求耳.)

(B) 在三個以上變量中, 當乙, 丙 (或乙, 丙, 丁, ...) 之值改變時, 甲量若亦隨之而變, 則甲量名曰乙, 丙 (或乙, 丙, 丁 ....) 諸量之函數, 或曰乙, 丙,

…諸量之應變數. 而乙,丙,… 諸量, 名曰自變數.

當甲量爲乙丙丁諸量之函數時, 甲,乙,丙,丁,諸量之間必有固定關係, 此關係之實在情形或爲已知或爲未知.

例五. 據幾何定理"矩形之面積 = 長 × 闊."在此等式中, 長, 闊二者或二者之一改變時, 面積隨之而變, 故面積爲長闊二者之函數.

例六. 設 y 爲每人每日之食量, 則 x 人於 t 日內, 所需食品之總量爲 $S=xyt$. 此處食品總量 (S) 爲人數 (x), 日數 (t), 每人每日食量 (y) 三者之函數.

例七. 利息爲本金, 利率, 期數三者之函數.

[註] 函數觀念乃近世科學上最重要觀念之一. 無數科學家終日所從事者; 第一步, 量與量之間有無關係? 第二步, 量與量之間究有若何關係, 可否以函數關係之算式表之耳.

§ 133. **函數之種類.** 函數之範圍既廣, 函數之種類斯多, 函數之形式, 有已知者, 有未知者(如上節例四). 僅就已知者言, 有爲代數函數, 有

非代數函數 (如 $y=\sin x$, $y=a^x$ 之類). 僅就代數函數言, 有一元函數, (卽含一個自變量者, 如上節 A 所述). 有多元函數 (卽含多個自變量者, 如上節 B 所述). 僅就一元者言, 有無理函數 (如 $y=\sqrt{x^2+1}$ 之類) 有有理函數, 僅就有理者言, 又有一次與高次之分. 詳而論之, 幾爲全部算學之事, 豈本書範圍所能及哉? 茲所述者, 函數中之最簡三類而已, (正變, 倒變, 聯變)

§134. 正變. 有理函數之一. 二變量 x, y 之間, 如有 $\frac{y}{x}=k$ 二常數之關係, 則謂"y 隨 x 而正變". 此關係亦常用 $y\propto x$ 之形式表之. 實卽 $y=kx$ 也.

例一. 在各人食量相同情形之下, 若干人 (x) 所需食品之總量 (y), 隨人數而正變. 因 $y=kx$ 故也.

例二. 速度一定時, 所行里數 (d), 隨所經時數 (t) 而正變. 因 $d=kt$ 故也.

例三. 若 $y=3x$, 則 y 隨 x 而正變.

例四. 若 $y=3x+1$, 則 y 不隨 x 而正變. 因 $\frac{y}{x}\neq$ 常數故也.

關於正變 $y=kx$ 之問題通常有二類:

(A) 已知 k, x (或 y), 求 y (或 x). 求法甚易, 玆不贅述.

(B) 已知 x, y 之一組對應值 x_1, y_1 及另一值 x_2 (或 y_2), 欲求 x_2 之對應值 y_2, (或 y_2 之對應值 x_2).

[解法] 先由 $y_1=kx_1$ 求出 k, 則此問題與 (A) 相同矣.

例如, 已知 $y\propto x$ 且當 $x_1=3$ 時, $y_1=5$, 間 $x_2=7$ 時, $y_2=?$

[解] 以 $x_1=3, y_1=5$ 代入 $y=kx$ 中, 得

$$5=k\times 3,\ 卽\ k=\frac{5}{3}.$$

故此正變關係爲 $y=\frac{5}{3}x$.

今 $x_2=7$, 故 $y_2=\frac{5}{3}\times 7=\frac{35}{3}=11\frac{2}{3}$.

[註] 正變與比例之關係. 設 $x_1\ y_1$ 爲 x, y 之相應數值; x_2, y_2 亦然. 依次代入 $y=kx$ 中, 應得

$$\begin{cases} y_1 = kx_1 \\ y_2 = kx_2 \end{cases}$$

相除,得 $$\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1}{x_2}$$

卽謂 y 之各值與 x 之對應值成正比例也. 根據此種關係亦能解上例.

習題一百七

1. 依 § 133 所述函數之種類,試將函數分類,作一簡表以明之.

2. 任舉一元函數之事例五條, 二元函數之事例五條.

3. 學生學習成績,為教師教法之函數否? 此函數關係能以簡明算式表之否?

4. 物體下降之距離 (s) 為其所經時間 (t) 之函數否? 此函數能以簡明算式表之否 (在物理學中有公式 $s = \frac{1}{2}gt.^2$)?

5. 利息為本金之函數否? 為利率之函數否? 為期數之函數否? 依單利計,其函數關係為如何之式? 依複利計,其函數關係又為如何之式?

6. 代數式 x^2+5x, $\sqrt{x+5}$, $\frac{x^2}{x+1}$, 各爲 x 之函數否?

7. 代數式 x^2+xy, $3x+5y$, $8x-7y+9$ 各爲幾元函數?

8. 代數式 $3x+6$ 爲 x 之函數否? 設 x 表 $1, 2, 3, 4, \cdots 50$ 何者能使 $3x+6$ 之值爲零? 當 $x=-2$ 時, 函數 $3x+6$ 之值如何?

9. x^2+5x-6 爲 x 之函數否? 設 $x=1$, 函數 x^2+5x-6 之值如何? $x=-6$, 此函數之值如何? 設 $x=$ 任何其他數值, 此函數之值如何?

10. 由題9觀之, -2 爲方程式 $3x+6=0$ 之根否? 又由題10觀之, $1, -6$ 各爲 $x^2+5x-6=0$ 之根否? 然則解方程式 $AX+B=0$ (或 $AX^2+BX+C=0$) 者, 即求 x 之值, 能使函數 $AX+B$ (或 AX^2+BX+C) 之值爲零也. 此說對否?

11. 已知 $y \propto x$, 當 $x=5$ 時, $y=6$ 問 $x=7$ 時, $y=$?

12. 已知 $y^2 \propto x^3$, 當 $x=4$ 時, $y=8$, 問 $y=729$ 時, $x=$?

13. 已知 $y \propto \sqrt{x}$, 當 $x=25$ 時, $y=15$ 問 $x=$? 時, $y=6$.

14. 已知 $x \propto y$, 求證 $x+y \propto x-y$.

[解法] 原設 $x \propto y$ $\therefore$ $\frac{x}{y}=k$

$$\therefore \frac{x+y}{x-y}=\frac{k+1}{k-1}=k' \qquad \text{(何故?)}$$

即 $x+y \propto x-y$.

15. 已知 $x\propto y$. 求證 $lx+my\propto lx-my$.

16. 已知 $x\propto y$, 求證 $x^2+xy+y^2\propto x^2-xy+y^2$.

17. 已知 $ax^2+bxy+cy^2=0$, 求證 $x\propto y$.

18. 已知 $x^2+xy+y^2\propto x^2-xy+y^2$ 求證 (1) $x\propto y$, (2) $x+y\propto x-y$.

19. 當甲數增大時, 乙數亦隨之增大, 則甲數隨乙數而正變否? 試就下例驗明答案有錯誤否

(a) $y=3x+5$　　(b) $y=x^2$　　(c) $y=\sqrt{x}$

§135. 倒變. 有理函數之二. 二變量 x, y 之間, 如有 $xy=k=$常數之關係, 則謂 "y 隨 x 而倒變". 倒變之關係亦常以 $y\propto\frac{1}{x}$ 之形式表之, 其實亦卽 $y=\frac{k}{x}$ 也.

例一. 若干人分食定量食品 k, 每人應得之分量 (y), 隨人數 (x) 而倒變. 人數 (x) 亦隨每人所得之分量 (y) 而倒變. 因 $xy=k$ 故也.

例二. 欲行一定距離 d, 所需之時數 t 隨速度 s 而倒變, 速度亦隨所需之時數而倒變, 因 $st=d=$定量故也.

例三. 當 x^2y^3＝常量時, 則 y^3 隨 x^2 而倒變, x^2 亦隨 y^3 而倒變.

例四. 當甲量變大時, 乙量減小; 甲量減小時, 乙量增大, 如此則甲量未必隨乙量而倒變. 何則? 甲量×乙量未必等於常數也. 例如在 $y=\frac{1}{x+2}$ 中, x 增大, 則 y 減小; x 減小, 則 y 增大. 但 xy 不爲常數. 故 y 不隨 x 而倒變.

關於倒變 $xy=k$ 之問題, 通常亦有二類:

(A) 已知 k, x (或 y), 求 y (或 x). 求法甚易, 茲不贅述.

(B) 已知 x, y 之一組對應值 x_1, y_1 及另一值 x_2 (或 y_2), 求 x_2 之對應值 y_2, (或 y_2 之對應值 x_2).

例. 已知 $y\propto\frac{1}{x}$, 當 $x_1=3$ 時, $y_1=5$, 問 $x_2=7$ 時, $y_2=$?

[解] 以 x_1, y_1 之值代入 $xy=k$ 得 $k=3\times5=15$

故本題之倒變關係爲 $xy=15$

今 $x_2=7$, 故 $y_2=\frac{15}{x_2}=\frac{15}{7}=2\frac{1}{7}$.

[註] 倒變與比例之關係. 設 x, y 之對應值爲 x_1, y_1 及 x_2, y_2. 代入倒變公式 $xy=k$ 中,得下列二式

$$\begin{cases} x_1 y_1 = k \\ x_2 y_2 = k \end{cases}$$

即 $$x_1 y_1 = x_2 y_2$$

$\therefore$ $$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_2}{y_1}$$

即謂 x 之各值與 y 之對應值成反比例也,據此關係亦能解上例,

§ 136. **聯變.** 當 y 隨 x, z 之積而正變時,則謂 y 隨 x, z 而聯變. 聯變之定理如下:

當 x 爲常數時, y 若隨 z 而正變; 又當 z 爲常數時, y 亦隨 x 而正變; 如此則當 x, z 俱變時, y 必隨 x, z 而聯變.

[證] 第一步, x_1 不變, 當 z 由 z_1 變爲 z_2 時, y 由 y_1 變爲 y',

故 $$\frac{y_1}{y'}=\frac{z_1}{z_2} \qquad (A)$$

第二步. z_2 不變, 當 x 由 x_1 變為 x_2 時, y 由 y' 變為 y_2.

故 $$\frac{y'}{y_2}=\frac{x_1}{x_2} \qquad (B)$$

(A), (B) 相乘得 $$\frac{y_1}{y'}\cdot\frac{y'}{y_2}=\frac{x_1z_1}{x_2z_2}$$

$$\therefore \qquad \frac{y_1}{x_1z_1}=\frac{y_2}{x_2z_2}=\text{常數}.$$

$$\therefore \qquad \frac{y}{xz}=k$$

例一. 時數一定, 所行距離隨速度而正變, 速度一定, 所行距離隨所經時數而正變, 故時數, 速度二者俱變時, 所行距離隨時數, 速度而聯變.

例二. 當 s 不變時, $y\propto\frac{1}{t}$; 當 t 不變時, $y\propto s$ 今當 $s_1=4$, $t_1=1$ 時, $y_1=8$. 問 $s_2=3$, $t_2=6$ 時, $y_2=?$

[解法] 由上述定理, 知 $y\propto s\cdot\frac{1}{t}$, 卽 $y=\frac{ks}{t}$.

以 s_1, t_1, y_1 之值代入上式, 得 $8=\frac{k\cdot 4}{1}$, 卽 $k=2$.

故此聯變關係為 $$y=\frac{2s}{t}$$

再以 s_2, t_2 之值代入上式, 得 $y_2=\frac{2\times3}{6}=1$

[又法] 由 $y=\frac{ks}{t}$, 得 $\frac{yt}{s}=k$.

故 $$\frac{y_1t_1}{s_1}=k=\frac{y_2t_2}{s_2}$$

即 $$\frac{8\times1}{4}=\frac{y_2\times6}{3}$$

∴ $$y_2=1$$

習題一百八

1. 已知 $y\propto\frac{1}{x}$, 當 $x=1$ 時, $y=2$, 問 $x=3$, $y=?$

2. 已知 $y\propto\frac{1}{x^3}$, 當 $x=2$ 時, $y=1$, 問 $x=1$, $y=?$

3. 已知 $y^2\propto\frac{1}{t^3}$, 當 $y=1$ 時, $t=1$, 問 $y=64$, $t=?$

4. 已知 $x+y\propto\frac{1}{x-y}$, 當 $x=5$ 時, $y=4$ 當 $x=4$, $y=?$

5. 已知 $x\propto y$, $y\propto\frac{1}{z}$, $z\propto\frac{1}{t}$, 則 $x\propto t$ 抑 $\frac{1}{t}$?

6. 已知 y 隨 x, z 而聯變, 又隨 $\frac{1}{t}$, $\frac{1}{u^2}$ 而聯變, 試求 y 與 x, z, t, u 之關係. 其中含未定之量否? 此量為常量抑為變量?

7. 已知 V 隨 r^3 而正變, A 隨 r^2 而正變, 問 (a) V^2 隨 A^3 而正變抑倒變? A 隨 V 之何種函數而正變?

8. 當甲量隨乙量而倒變時，甲量亦能隨乙量而倒變否？試以算式證明之.

9. 工廠對於工友每日發給工資；當做工人數不變時，所發工資隨每日工作時數而正變. 當每日工作時數一定時，所發工資隨做工人數而正變. 某日工友100人，各做工10小時，共得工資125元. 次日工人95名，各做工11小時，問應得工資共若干元？

10. x人於y日內所需食物之總量爲t. 當x一定時，t隨y而正變；當y一定時，t隨x而正變. 當$x=100$, $y=5$時，$t=1000$. 問當$x=150$, $y=15$時，$t=?$

第十三章

指數 對數

I. 指數

§ 137. 指數意義之推廣. 在指數爲正整數時，指數之意義已於前第五章述之. 由是易得指數之重要定律：

$$1. \quad a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$2. \quad a^m \div a^n = a^{m-n}$$

$$3. \quad (a^m)^n = a^{mn}$$

$$4. \quad (ab)^m = a^m b^m$$

據此諸律乃能演算關於正整指數之一切問題. 然而算學家猶嫌其範圍太狹，應用不宏，於是乃將指數之範圍推廣，使指數之意義不限於指數爲正整數者，即爲分數，負數，零等等，亦均各有其意義，而上列四定律不僅適用於正整指數，即在指數非正整數時亦無不可用. 能如是，指數之用不更宏乎？ 以下三節，略論指數意義推廣之方法.

§ 138. 分指數之意義. 例 $a^{\frac{1}{2}}=?$ 欲答此問題,須知推廣指數意義之目的何在? 如上節所述,推廣指數意義,其目的卽在使上列四條定律,不僅在整指數時適用,卽在指數爲分數亦能適用.今欲上舉第三律可以適用,必有下式.

$$(a^{\frac{1}{2}})^2=a^{\frac{1}{2}\cdot 2}=a$$

然則 $$a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}.$$

推之,欲知 $a^{\frac{p}{q}}=?$, 可先將 $(a^{\frac{p}{q}})^q$ 化簡,視其結果如何. 因欲使第三律可以適用,故必有

$$(a^{\frac{p}{q}})^q=a^{\frac{p}{q}\times q}=a^p$$

然則兩邊各開 q 次方,不應有 $a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}$ 乎?

由是得分指數與根式之關係如下:

$$\underline{a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}.}$$

例一. $64^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{64}=4.$

例二. $64^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{64^2}=(\sqrt[3]{64})^2=16.$

例三. $64^{.5}=64^{\frac{1}{2}}=\sqrt[2]{64}=8.$

§ 139. 零指數之意義. 欲令指數第一律適用於零指數, 應有

$$a^m \cdot a^0 = a^{m+0} = a^m$$

兩邊各以 a^m 除之, 應得

$$\underline{a^0 = 1.}$$

例一. $1^0=1,\ 2^0=1,\ 3^0=1,\ 4^0=1,\ n^0=1$

例二. 設 $x=100,\ y=90,\ z=50$, 求 $(x^3+x^2y-xy^2+x-y)^0 \div (x+y+z)$ 之值.

因 $(x^3+x^2y-xy^2+x-y)^0$ 之值恆爲 1, 故所求之值爲 $1\div(100+90+50)=\frac{1}{240}$.

例三. 設 $x \neq 1$ 求 $x^n=1$ 之 n.

因 $x^0=1$ 而 $x^m \neq 1$ 故 $n=1$.

§ 140. 負指數之意義. 欲令指數第一律能適用於負指數, 應有　$a^m \cdot a^{-m} = a^{m+(-m)} = a^0 = 1$

兩邊各除以 a^m, 應得　$\underline{a^{-m} = \frac{1}{a^m}}$.

例一. $4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$

例二. $64^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{64^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{64^2}} = \frac{1}{16}$

[註] 由上三節觀之,可見欲令指數定律在指數爲分數,爲零,或爲負數時無不適用,則 $a^{\frac{p}{q}}$ 非等於 $\sqrt[q]{a^p}$ 不可, a^{-m} 非等於 $\frac{1}{a^m}$ 不可, a^0 非等於1不可. 至於既令 $a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}$, $a^{-m}=\frac{1}{a^m}$, $a^0=1$ 之後,指數諸定律是否便能全部適合? 此爲又一問題. 詳而論之,非篇幅所許. 學者於此,卽假定其爲眞確可也.

習題一百九

1. 求下列各式之結果:

(a) $144^{\frac{1}{2}}$ (b) $81^{\frac{3}{4}}$ (c) $125^{\frac{4}{3}}$ (d) $216^{\frac{5}{3}}$

2. 求下列各式之結果(以分數表之).

(a) $144^{-\frac{1}{2}}$ (b) $81^{-\frac{3}{4}}$ (c) $125^{-\frac{4}{3}}$ (d) $-216^{-\frac{5}{3}}$

3. 化簡下式·

(a) $\left(\sqrt[4]{\sqrt[5]{a^2}}\right)^5=\left(a^{\frac{2}{5}}\right)^{\frac{5}{4}}=a^{\frac{2}{5}\times\frac{5}{4}}=a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}$

[注意] 由§138公式 $a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}$,可將分指數問題化爲根式問題,又可將根式問題化爲分指數問題,然後依指數定律化簡之.

(b) $\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^p}}\right)^q$ (c) $\sqrt[4]{(x\sqrt{x})^8}\cdot\sqrt[3]{(x\sqrt{x})}$

(d) $\left(\sqrt[3]{x^3\sqrt{y}}\right)^2\left(\sqrt{y\sqrt{x^3}}\right)^3$

4. 化下列諸式使其結果各含一個根號:

(a) $x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$ (b) $x\sqrt{x\sqrt{x}}\div\left(x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\right)$

5. 計算下列各式:

(a) $125^{\frac{2}{3}}\times 625^{\frac{1}{2}}$ (b) $\left(\frac{1}{64}\right)^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{3}{2}}$

(c) $16^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{1}{2}}$

6. 化簡下式:

(a) $\sqrt[5]{\frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt[3]{a^2}}}=\left(a^{\frac{3}{2}}\times a^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{5}}=\left(a^{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{5}}=\left(a^{\frac{5}{6}}\right)^{\frac{1}{5}}=a^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{a}$

(b) $\sqrt[5]{\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt{a^3}}}$ (c) $\sqrt[17]{(\sqrt[3]{a^4}\div\sqrt[4]{a^3})^{12}}$

7. 演乘除法:

(a) $\left(x^{\frac{1}{2}}+3\right)\left(x^{\frac{1}{2}}-5\right)=x-2x^{\frac{1}{2}}-15$

(b) $\left(x-1\right)\div\left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)=\left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)\left(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1\right)\div\left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)$

$$=x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1$$

8. 演乘除法:

(a) $\left(3x^{\frac{1}{2}}+5\right)\left(5x^{\frac{1}{2}}-3\right)$

(b) $\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{2}}\right)$

(c) $\left(x+y\right)\div\left(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}\right)$ (d) $\left(x-y\right)\div\left(x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}}\right)$

9. 解方程式 $3x-4x^{\frac{1}{2}}+1=0$

10. 解方程式 $2x^{\frac{1}{2}}-13x^{\frac{1}{4}}+15=0$

11. 解方程式 $x+x^{-1}=3\frac{1}{3}$

12. 解方程式 $x^{\frac{1}{3}}+3x^{-\frac{1}{3}}=4$

II. 對 數.

§141. 對數之需要 欲知對數之功用, 先看下列問題:

[問題一] $\sqrt[100]{2}=?$ 求此數之首三位數字, 如何解此問題, 學者有下手之處否?

[問題二] 解方程 $2^x=7$. 求 x 之首三位數字. 學者對此問題, 又有下手之處否?

可見欲解此類問題, 非另有新法不可. 新法維何, 卽利用對數是也.

§142. 何謂對數? 先就等式 $8^2=64$ 論之此等式中共有三數 8, 2, 64. 已知其二可求其他詳而分之, 共有三類:

(1)　已知 8, 2 求 $8^2=?$　此乘法問題也．在乘法 2名曰 8 之指數．

(2)　已知 64, 2 求 $?^2=64$．此開方問題也．因 $?^2=64$ 寫法不便，故另以 $\sqrt[2]{64}=?$　之形式代之．

(3)　已知 8, 64 求 $8^?=64$．此則對數問題也．在此等式中，"?" 名曰 64 之對數 (底 8)，"8" 名曰底．亦因 $8^?=64$ 寫法不便．故另創新式表之，新式爲何？即 $log_8 64=?$　是也．故以下列二式　　(a) $log_8 64=?$　　(b) $8^?=64$

表示 8, 64, ? 三數之關係，二者完全相同．不過 (a) 式較便耳．

推之，在通例 $a^x=M$ 中，a 名曰底，x 名曰 M 之對數 (底 a)．因原式 $a^x=M$ 之寫法不便，故另以新式 $log_a M=x$ 表之．然則下列二式

$$(甲)\quad log_a M=x. \qquad (乙)\quad a^x=M.$$

所表 a, x, M 三數之關係完全相同，不過在對數問題 (甲) 式較便耳．

例一. $log_8 64=?$

[解法] $\because\ 8^2=64\quad\therefore\ log_8 64=2.$

例二. $log_4 64=?$

[解法] $\because\ 4^3=64\quad\therefore\ log_4 64=3.$

由上三例觀之, 又可見同一之數, 因其所取之底不同, 則其對數亦各不同.

[註] 對數與指數是否相同? 學者或將自創一說曰"然則對數非卽指數乎?" 應之曰"此語意不完, 似是而非之說也." 蓋在 $a^x=M$ 中, x 對於 a 稱曰指數, 對於 M 稱曰對數. 謂"a 之指數卽爲 M 之對數 (底 a)" 可; 謂"指數卽爲對數," 則大不可!

習題一百十

1. $log_5 25=?$ $log_5 125=?$ $log_5\frac{1}{25}=?$ $log_5\frac{1}{125}=?$
2. $log_3 27=?$ $log_9 27=?$ $log_3 27^2=?$ $log_9\frac{1}{27}=?$
3. $log_{10}10=?$ $log_{10}100=?$ $log_{10}1000=?$ $log_{10}10000=?$
   $log_{10}1=?$ $log_{10}{\cdot}1=?$ $log_{10}{\cdot}01=?$ $log_{10}{\cdot}001=?$

143. 對數之三大定律 對數之變化, 全以下列三律爲根據:

(1) $\log_a MN = \log_a M + \log_a N.$

(2) $\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N.$

(3) $\log_a M^n = n \log_a M$　　4. $\log_a \sqrt[n]{M} = \dfrac{\log_a M}{n}$

[證) (1) 設 $\begin{cases} a^x = M & (I) \\ a^y = N & (II) \end{cases}$ 則 $\begin{cases} \log_a M = x \\ \log_a N = y \end{cases}$

$(I) \times (II)$, 得 $a^{x+y} = MN.$

$\therefore \quad \log_a MN = x + y = \log_a M + \log_a N.$

[證] (2) $(I) \div (II)$, 得 $a^{x-y} = \dfrac{M}{N}.$

$\therefore \quad \log_a \dfrac{M}{N} = x - y = \log_a M - \log_a N.$

[證] (3) 由 $(I)^n$, 得 $a^{nx} = M^n.$

$\therefore \quad \log_a M^n = nx = n \log_a M.$

例. 已知 $\log_{10} 2 = .3010$, $\log_{10} 3 = .4771.$

求 (a). $\log_{10} 6 = ?$　　(b). $\log_{10} \dfrac{3}{2} = ?$

(c). $\log_{10} 3^{20} = ?$　　(d). $\log_{10} \sqrt[20]{2} = ?$

[解法] (a). $\log_{10} 6 = \log_{10}(2 \times 3)$

$= \log_{10} 2 + \log_{10} 3$

$= .3010 + .4771 = .7781.$

$$(b).\quad log_{10}\frac{3}{2}=log_{10}3-log_{10}2=.4771-.3010$$
$$=.1761.$$

$$(c)\quad log_{20}3^{20}=20\ log_{10}3=20\times .4771=9.542$$

$$(d)\quad log_{10}\sqrt[20]{2}=log_{10}2^{\frac{1}{20}}=\frac{1}{20}log_{10}2=\frac{1}{20}\times .3010$$
$$=.01505.$$

§ 144. 對數之定値部份，定位部份. 如上兩節所述，任何數 a 均可爲對數之底，但在普通計算上，恆以 10 爲底，此種以 10 爲底之對數名曰常用對數，(常用對數之底 10 恆略而不寫，例如 $log_{10}34$ 恆省寫爲 $log34$；反之，$log56$ 卽爲 $log_{10}56$ 之意.)

在常用對數中，任何一數 N，不能化爲 10 之整次冪者，其對數必非整數 (因 $N\neq 10^{整數}$，則 $N=10^{分數}$，卽 $logN=$ 分數) 而爲整數與小數之和．此整數名曰對數之定位部，小數名曰對數之定値部．

§ 145. 如何求定位部? 先就含有一位整數之任何一數 x 論之：

因　$1<x<10$, 故 $\log 1<\log x<\log 10$,

卽　$0<\log x<1$.

$\therefore \quad \log x=0+$小數

爲說明便利計，再將 x 取爲任何確定之數字，例如 3.56, 於是

(A) 1. $\log 3.56 \quad =0.5514$ (檢表得來.)

2. $\log 35.6 \quad =\log(3.56\times 10)$

$=\log 3.56+\log 10=.5514+1$

$=1.5514$

3. $\log 356 \quad =2.5514$

4. $\log 3560 \quad =3.5514$

5. $\log 35600=4.5514$

可見，凡數有 1 位整數者，其對數之定位部爲 0.

凡數有 2 位整數者，其對數之定位部爲 1.

凡數有 3 位整數者，其對數之定位部爲 2.

凡數有 4 位整數者，其對數之定位部爲 3.

凡數有 5 位整數者，其對數之定位部爲 4.

推之，凡數有 n 位整數者，其對數之定位部爲 $n-1$.

(*B*) 7. $log\ .365 = log\frac{3.56}{10} = log\ 3.56 - log\ 10$

$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0.1 \therefore log\ 0.1 = -1$

$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = 0.01 \therefore log\ 0.01 = -2$

$= .5514 - 1 = -1 + .5514$

$= \overline{1}.5514$ (簡寫法)

8. $log\ .0356 = \overline{2}.5514$

9. $log\ .00356 = \overline{3}.5514$

10. $log\ .000356 = \overline{4}.5514$

11. $log\ .0000356 = \overline{5}.5514$

由此觀之，凡小數之第一位有效數字與小數點之間，

有 0 個 0 者，其對數之定位部為 $\overline{1}$

有 1 個 0 者，其對數之定位部為 $\overline{2}$

有 2 個 0 者，其對數之定位部為 $\overline{3}$

有 3 個 0 者，其對數之定位部為 $\overline{4}$

有 4 個 0 者，其對數之定位部為 $\overline{5}$

推之，凡小數之第一位有效數字與小數點之間有 n 個 0 者，其定位部為 $-(n+1)$，簡寫為 $\overline{n+1}$.

(此處 $n+1$ 上之記號 $-$ 非作括線用.)

例一. 求 $\log 87500$ 之定位部.

[解法] 因 87500 有五位整數,

故 $$\log 87500=4.\cdots\cdots$$

例二. 求 $\log .000875$ 之定位部.

[解法] 因 .000875 中; 小數點與 8 之間有三個 0

故 $$\log .000875=\overline{4}\cdots\cdots.$$

例三. 已知 $\log 2=.3010$ 求 2^{20}, 2^{40} 各有幾位?

[解法] (1) $\log 2^{20}=20\log 2=20\times.3010$

$$=6.020$$

因 $\log 2^{20}$ 之定位部爲 6, 故知 2^{20} 有七位整數.

(2) $\log 2^{40}=40\log 2=40\times.3010=12.04$

因 $\log 2^{40}$ 之定位部爲 12, 故知 2^{40} 有 13 位整數.

[註] 由本節 (B) 觀之, 可見 $\log .356=-1+.5514$, 此值原爲 $-.4486$; 所以寫爲 $\overline{1}.5514$ 之形者. 特爲便利之故。便利何在? 卽 (1) 任何數之定値部俱爲正數, (2)

任何數之定值部與其小數點所在之位置無關。例如在 $\log 356$, $\log 35.6$, $\log 3.56$, $\log .356$, $\log .0356$, $\log .000356$ 中,定值部統爲 .5514. 於是造表檢查,可省許多手續矣.

§ 146. 如何求定值部? 此問題原爲極難之問題,直接求解,勢必勞而無功. 好在算界先賢,早有不辭勞苦,求出結果造成表册者,我輩後生,但能坐享其成,按表檢數可也.

例一. 求 $\log 84.6$ 之定值部分.

[解法] 因定值部分與 84.6 中小數點之位置無關,故卽求 $\log 846$ 之定值部可矣.

在下頁所附對數表中,先由最左一行 (卽 N 下之縱行)查出 84, 再在最上一行(卽 N 右之横行)查出 6, 由 84 向右看, 同時由 6 向下看, 其交叉之處有一數 9274, 卽爲 846 對數之定值部.

故 $\log 84.6$ 之定值部爲 .9274.

[註] 表中所載定值部,小數點一律省而不書,用時須補加之.

例二. 求 $\log 95600$ 之定值部.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5890
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7390

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

仿例一在N下之縱行內查出95，又在N右之橫行內查出6. 由95向右看，由6向下看，其交叉處得一數 .9805，是爲 $log\ 956$ 之定値部，亦卽 $log\ 95600$ 之定値部也.

習題一百十一 (口答1–2)

1. 求下列各數之定位部:

(a) $log\ 387$　　(b) $log\ 38700$

(c) $log\ .00387$　　(d) $log\ (3.12\times10^8)$

(e) $log\ (.781\times10^{-8})$　　(f) $log\ \frac{359}{751}$

2. 求下列各數之定値部:

(a) $log\ 878000$　　(b) $log\ 45600$

(c) $log\ .000456$　　(d) $log\ 7590000$

(e) $log\ 579000$　　(f) $log\ .0000796$

3. 已知 $log\ 2=.3010$, $log\ 3=.4771$ 求下列各對數:

(a) $log\ 2^5=?$　　(b) $log\ 3^5=?$

(c) $log\ 6^5=?$　　(d) $log\ 1.5^5=?$

(e) $log\ \sqrt[3]{3}=?$　　(f) $log\ \sqrt[5]{3}=?$

4. 已知 $log\ 3=.4771$, $log\ 5=.6990$ 求下列諸數各有幾位?

(a) 3^{10}　　(b) 5^{10}　　(c) $\frac{3^5}{5^3}$

5. (a) 5.67^{10} 爲幾位數? (b) 7.65^{10} 爲幾位數?

(c) 5.76^{10} 爲幾位數? (d) 7.56^{10} 爲幾位數?

§ 147. **求對數** 已知一數, 如欲求其對數, 卽求其定位定値兩部, 再取其和可矣.

例一. 求 $\log 386 = ?$

[解法] 先依求定位部之法得其定位部爲 2. 次依法檢表得其定値部爲 .5866.

$$\therefore \qquad \log 386 = 2.5866$$

例二. 求 $\log .000379 = ?$

定位部爲 -4; 定値部檢得 .5786

$$\therefore \qquad \log .000379 = \overline{4}.5786$$

習題一百十二 (口答1–2)

1. 求下列各對數:

(a) $\log 34 = ?$ (b) $\log .34 = ?$

(c) $\log 3400 = ?$ (d) $\log .358 = ?$

(e) $\log .00358 = ?$ (f) $\log 358000 = ?$

2. 求下列各對數:

(a) $log\ 81^{10}=?$ (b) $log\ .92^{10}=?$

(c) $log\ 75.6^{10}=?$ (d) $log\ 28.6^{\frac{1}{2}}=?$

(e) $log\ 38.7^{5}=?$ (f) $log\ 98800^{\frac{1}{2}}=?$

3. 求下列各式之結果:

(a) $log\ (3^2\times4^3\times5^4)$ (b) $log\ (518^2\div815^3)$

(c) $log\ (98^2\div\sqrt{89})$

§ 148. 求反對數 在等式 $log\ y=x$ 中, x 名曰 y 之對數, y 名曰 x 之反對數, 已知 y 求 x, 是爲求對數. 已知 x 求 y, 卽求反對數矣.

求反對數之法: 先由對數之定値部求出反對數各位之數字, 再由定位部定反對數中小數點之位置.

例一. 已知 $log\ x=2.5514$, 求 x.

[解法] 先在對數表中查出定値部 .5514. 再由 .5514 向左看,得 N 下之縱行內相應數字爲 35; 同時由 .5514 向上看, 得 N 右之橫行內相應數字爲 6. 故知 .5514 爲 356 之定値部.

又因 $log\ x$ 之定位部爲 2, 故知 x 有三位整數.

$$\therefore \qquad x=356.$$

例二. 已知 $log\ x=\overline{2}.6857$, 求 x.

[解法] 先在對數表中查出定值部 .6857. 再由 .6857 向右看, 得 N 下三縱行內相應數字 48, 又由 .6857 向上看, 得 N 右之橫行內相應數字爲 5. 故知 .6857 爲 485 之定值部.

又因 $log\ x$ 之定位部爲 $\overline{2}$, 故知反對數 x 之第一位有效數字與小數點之間有一個 0.

$$\therefore \qquad x=.0485.$$

例三. 已知 $log\ x=\overline{5}.5933$, 求 x.

檢表得反對數之數字爲 392.

又因定位爲 $\overline{5}$, 故 $x=.0000392.$

習題一百十三

1. 已知 $log\ x=2.279$ 求 x.

[解法] 先在對數表中查出 2279. 由 2279 向左看, 得 N 下之縱行內相應數字爲 16. 再由 2279 向上看, 得 N 右之橫行內相應數字 9, 故知反對數之各位數字爲 169.

又因定位部爲 2, 故反對數有三位整數.

$$\therefore \qquad x=169.$$

[注意] 上之解法有錯誤否? 錯誤在何處? 然則欲求反對數之各位數字,應在對數中查出對數之全部,抑僅查出定值部?

此種錯誤,初學者往往不能盡免. 務宜隨時留心!

2. 已知 $\log x=1.8169$ 求 x. 已知 $\log y=2.8169$ 求 y.

已知 $\log z=\overline{2}.8169$ 求 z. 已知 $\log u=\overline{3}.8169$ 求 u.

3. 已知 $\log a=5.7868$ 求 a. 已知 $\log b=5.7875$ 求 b.

已知 $\log c=5.7882$ 求 c. 已知 $\log d=5.8774$ 求 d.

4. 求下列各式中之 x:

(a) $\log x=1.9657$　　(b) $\log x=2.9763$

(c) $\log x=3.9680$　　(d) $\log x=\overline{2}.8971$

(e) $\log x=\overline{5}.8686$　　(f) $\log x=20.6263$

5. 求下列各式中之 x:

(a) $\log x=2.8459$　　(b) $\log x=4.8346$

(c) $\log x=4.444$　　(d) $\log x=9.999$

(e) $\log x=\overline{3}.333$　　(f) $\log x=\overline{5}.555$

§ 149. **利用對數來計算** 已知如何求對數,如何求反對數, 則在計算乘, 除, 乘冪, 方根等問題, 可以利用對數縮短演算手續, 而 § 141 所舉諸問題, 亦可完全解決矣.

例一.　求 2^{100} 之首三位數.

[解法]　先求 $log\ 2^{100}$ 爲何值, 再由該值求其反對數, 卽得所求之值, 算式如下:

$$log\ 2^{100}=100\ log\ 2=100\times .3010=30.10$$

$$\therefore\qquad 2^{100}=1.26\times 10^{30}=126\times 10^{28}$$

例二.　求 $\sqrt[100]{2}$ 之首三位數.

[解法]　$log\sqrt[100]{2}=\frac{1}{100}\,log\,2=\frac{1}{100}\times .3010$

$$=.0030$$

$$\therefore\qquad \sqrt[100]{2}=1.01$$

例三.　求 $\sqrt[5]{.002}=$?

[解法]　$log\sqrt[5]{.002}=\frac{1}{5}\,log\ .002$

$$=\frac{1}{5}\,(\bar{3}.3010)\qquad (A)$$

$$=\frac{1}{5}\,(\bar{5}+2.3010)\qquad (B)$$

$$=\bar{1}.4602.\qquad (C)$$

$\therefore\quad \sqrt[5]{.002}=.289$　　(算到首三位數.)

[註]　學者注意由 (A) 何以不直接化爲 (C)?　由 (A) 如何化爲 (B)?　由 (B) 化爲 (C), 是否比由 (A) 直接求 (C) 來得方便?

例四．求 $\dfrac{325^2\times532^3\times235^{\frac{1}{4}}}{879\times789\sqrt{897}}=?$

[解法]　為寫式便利計，設 $x=\dfrac{325^2\times532^3\times235^{\frac{1}{4}}}{879\times789\times\sqrt{897}}$，

則 $$\log x=2\log 325+3\log 532+\frac{1}{4}\log 235$$
$$-(\log 879+\log 789+\frac{1}{2}\log 897)$$
$$=2\times2.5119+3\times2.7259+\frac{1}{4}\times2.3711$$
$$-(2.9440+2.8971+\frac{1}{2}\times2.9528)$$
$$=6.4768$$

$\therefore$　　$x=2998000.$　(算到首四位數.)

習題一百十四

用對數計算:

1. 367^{100}　　2. $\sqrt[100]{367}$　　3. 759^3

4. $\sqrt[3]{75900}$　　5. $.00367^{100}$　　6. $\sqrt[100]{.00367}$

7. $.00758^3$　　8. $\sqrt[3]{.00758}$　　9. $-567^2\div765^3$

10. $-\sqrt{567}\div\sqrt[3]{765}$　　11 $\sqrt{567}\times\sqrt[3]{765}$

12. $\dfrac{765}{\sqrt[3]{.0567}}$

13. $12.3\div45.6\times.00789\div.789\times9.78$

14. $\sqrt[10]{\dfrac{2\sqrt[12]{2}}{\sqrt{10}}}$

15. 直角三角形之斜邊為897市尺,其一腰為456市尺,求他腰之長為幾市尺?

16. 已知圓半徑為125.6市尺,求其面積(圓面積$=3.1416\times$半徑^2).

§ 150. 指數方程式 凡方程式中指數含有未知數者,稱曰指數方程式.

指數方程有時無法求得,但若可化為 $a^x=b$ 之形者,則恆可利用對數以解之.

例一. 解 § 141 所舉之方程式 $2^x=7$.

[解法] 指數方程之所以不能依尋常方程解法求解者,即因未知數含在指數之內. 倘能用正確方法,將此未知數移在指數以外,則不難求解矣. 今將原方程之兩邊各取對數,如

$$log\ 2^x=log\ 7,$$

則得 $$x\ log\ 2=log\ 7.$$

由是 $$x=\frac{log\ 7}{log\ 2}=\frac{.8451}{.3010}=2.808$$

例二. 解方程式: $9^x-13(3^x)+36=0.$

[解法] 將原方程化爲 $3^{2x}-13(3^x)+36=0.$

卽 $$(3^x-4)(3^x-9)=0$$

由是得 $$3^x=4 \text{ 及 } 3^x=9$$

由 $3^x=4$ 得 $x_1=\dfrac{log\,4}{log\,3}=\dfrac{.6021}{.4771}=1.26$ (用對數求商)

由 $3^x=9$ 得 $x_2=\dfrac{log\,9}{log\,3}=\dfrac{2\,log\,3}{log\,3}=2$

習題一百十五

[題 4-6 與指數方程無關]

1. 解下列諸方程式:

(a) $63^x=7$ (b) $343^x=7$ (c) $125^x=250$

2. 解下列各方程式:

(a) $2^{2x}-15(2^x)+56=0$ (b) $16^x+4^x-56=0$

3. $log_3 80=?$ $log_{32} 164=?$ $log_5 40=?$

4. 求 $1+2+4+8+16+\cdots\cdots+$ 第 20 項. (算到首四位數.)

5. 某生第一次考試算學得 40 分. 以後每次考試比上一次進步 $\dfrac{1}{10}$. 一學期內共考六次. 問該生平均成績得幾分?

6. 某人每月儲蓄五元,連續十年. 設依年利 8 厘,一年一結,照複利息計. 問共有本利若干元?

7. 解方程式 $2^m\times3^{m-1}=8.$

8. 解方程式 $2^m\times3^{m-1}=8^{m+1}.$

附錄一 乘方及開方

§ 151. $(x+y)^n$ 之開展. 二項式 $(x+y)^n$ 之展開爲如何之形式? 此問題可用組合法或算學歸納法證之, 但此不屬初等代數範圍, 故不能盡述於此, 惟在尋常實用上可用下法展開之:

(I)

$$(x+y) = x+y$$
$$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$$
$$(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$
$$(x+y)^4 = x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$$
$$(x+y)^5 = x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$$
$$(x+y)^6 = x^6+6x^5y+15x^4y^2+20x^3y^3+15x^2y^4+6xy^5+y^6$$

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

(II)

表中，各排數字依次表 $(x+y)$，$(x+y)^2$，$(x+y)^3$，……$(x+y)^6$，展開式中各項之係數，細察此表，可得如下之關係：

第 k 排中，任何第 r 項與其前一項之和，等於第 $(k+1)$ 排中之第 r 項，換言之，在 $(x+y)^k$ 展開式中，第 r 項係數與其前一項係數之和，等於 $(x+y)^{k+1}$ 展開式中第 r 項之係數．例如在 $(x+y)^3$ 之展開式中，

第一項係數與其前一項係數之和 $=1+0=1$
$=(x+y)^4$ 展開式中第一項之係數．

第二項係數與其前一項係數之和 $=3+1=4$
$=(x+y)^4$ 展開式中第二項之係數．

第三項係數與其前一項係數之和 $=3+3=6$
$=(x+y)^4$ 展開式中第三項之係數．

第四項係數與其前一項係數之和 $=1+3=4$
$=(x+y)^4$ 展開式中第四項之係數．

第五項係數與其前一項係數之和 $=0+1=1$
$=(x+y)^4$ 展開式中第五項之係數．

此決定展開式中各項係數之法也. 至於各項中之文字及指數, 則極易推知.

即 x 之指數, 自第一項起, 依次爲 $n, n-1, n-2, \cdots\cdots, 2, 1, 0$; y 之指數, 自第一項起, 依次爲 $0, 1, 2, 3, \cdots\cdots, n-1, n$.

例. 展開 $(a+b)^7$.

[解法] 由上表知 $(a+b)^6$ 展開式中各項之係數如下:

$$1,\ 6,\ 15,\ 20,\ 15,\ 6,\ 1.$$

故 $(a+b)^7$ 展開式中各項之係數應爲:

$$1,\ 7,\ 21,\ 35,\ 35,\ 21,\ 7,\ 1$$

$$\therefore\quad (a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7.$$

§ 152. **開平方.** 已知 $(a+b)$, 求 $(a+b)^2 = ?$ 此手續名曰乘二次方. 已知 $a^2+2ab+b^2$, 求 $a^2+2ab+b^2 = ?^2$, 此手續名曰開平方. 而所得之結果($?$) 名曰 $a^2+2ab+b^2$ 之平方根, 以 $\sqrt{a^2+2ab+b^2} = ?$ 表之.

開平方旣爲乘方(二次)之逆算,故開平方之方法,完全自乘方公式推得之.在乘方旣有$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$;故在開平方卽應有

$$\sqrt{a^2+2ab+b^2}=a+b.$$

一切開平方之手續,完全以此式爲依據.又因在實際運算上,上式之寫法不甚方便.故又更改爲$\sqrt{a^2+b(2a+b)}=a+b$,於是乃有如下之算式:

$$
\begin{array}{r|l}
(\text{被開方數})\quad & a^2+2ab+b^2 \quad \big| \; a+b \quad (\text{平方根}) \\
 & a^2 \\
\hline
2a & 2ab+b^2 \\
+b & \\
\hline
b(2a+b) & 2ab+b^2 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

此算法若以語言表之,則有如下之步驟:

I. 將被開方數依某文字之昇冪(或降冪)排列之.

II. 求根之第一項.將被開方數第一項開平方,卽得根之第一項.

自被開方數減去根之第一項之平方,得第一

III. 求根之第二項. 以根之第一項之 2 倍, 除第一餘式, 所得之商, 即爲根之第二項.

乃以根之第一項之二倍與此第二項相加, 再以根之第二項乘此所得之和.

最後自第二餘式減去此乘得之積, 得第二餘式.

IV. 求根之第三項. 將已得之第一第二兩項之和, 視爲一項而將欲求之第三項視爲第二項, 仿 III 繼續行之.

[註] 此法只適用於開方可以開盡之情形. 不能開盡之被開式, 根本無平方根. 依此法所得之諸項, 不能視之爲根.

例一.

$$
\begin{array}{r|l|l}
 & 16x^4+40x^2+25 & 4x^2+5 \\
\cline{3-3}
 & 16x^4 & \\
\cline{2-2}
2(4x^2)=8x^2 & 40x^2+25 & \\
+5 & & \\
\cline{1-1}
5(8x^2+5) & 40x^2+25 & \\
\cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}
$$

例二. 求 $\sqrt{x^4+4x^3-2x^2-12x+9}=?$

[解法]

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^4+4x^3-2x^2-12x+9 \quad \big|\ x^2+2x-3 \\
 & x^4 \\ \hline
2x^2 & 4x^3-2x^2-12x+9 \\
+2x & \\ \hline
2x(2x^2+2x) & 4x^3+4x^2 \\ \hline
2x^2+4x & -6x^2-12x+9 \\
-3 & \\ \hline
-3(2x^2+4x-3) & -6x^2-12x+9 \\ \hline
 & \qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

[illegible] I 334,

§ **153. 開立方.** 已知 $(a+b)$, 求 $(a+b)^3=?$ 此手續名曰乘三次方, 已知 $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, 求 $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=?^3$, 此手續名曰開立方, 開立方所得之結果 $(?)$, 名曰 $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ 之立方根.

開立方之原理亦以乘方公式爲根據. 蓋在乘方, 既有 $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

在開方, 自應有 $\sqrt[3]{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}=a+b.$

一切開立方運算, 完全仿此公式演之. 爲布式便利計, 又將此公式改寫爲 $\sqrt[3]{a^3+b(3a^2+3ab+b^2)}=a+b.$ 而在實際運算乃有下之算式:

$$
\begin{array}{r|l}
\text{(被開方數)}\quad a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 & a+b\ \text{(立方根.)} \\
a^3 & \\
\hline
3a^2 \qquad & +3a^2b+3ab^2+b^3 \\
+3ab \quad & \\
+b^2 & \\
\hline
b(3a^2+3ab+b^2) & +3a^2b+3ab^2+b^3 \\
\hline
 & \qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

[說明] 先將被開方數依 a 之降冪排列之,由第一項 a^3 得根之第一項爲 a, 自被開方數減去 a^3, 得第一餘式 $3a^2b+3ab^2+b^3$, 乃以第一項平方之三倍 $3a^2$ 除第一餘式之首項得 b, 是爲根之第二項,於是將$3a^2$ 及第一第二兩項之積之三倍 $3ab$,與第二項平方 b^2, 三者相加, 而以 b 乘此所得之和, 最後自第一餘式減去此所得之積, 得第二餘式, 結果爲 0, 故 $a+b$ 爲所求之立方根.

例一. 求 $\sqrt[3]{27x^3+27x^2+9x+1} \quad =?$

[解法]

$$
\begin{array}{r|l}
27x^3+27x^2+9x+1 & 3x+1=\text{所之立方根.} \\
27x^3 & \\
\hline
3(3x)^2=27x^2 & 27x^2+9x+1 \\
3(3x)\cdot 1=\ \ 9x & \\
1^2=\ \ 1 & \\
\hline
1\times(27x^2+9x+1) & 27x^2+9x+1 \\
\hline
 & \qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$[(a+b)+c]^3=$

[註] 本例中之 $a=3x$, $b=1$. 將本例解法與上式相比較,當見其逐步相同. 無若何困難之處也.

例二. 求 $\sqrt[3]{x^6+6x^4+7x^3+3x^5+3x+6x^2+1}=?$

[解法]

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^6+3x^5+6x^4+7x^3+6x^2+3x+1 \quad \underline{| \; x^2+x+1} \\
 & x^6 \\ \hline
3x^4 & 3x^5+6x^4+7x^3+6x^2+3x+1 \\
3x^3 & \\
x^2 & \\ \hline
x(3x^4+3x^3+x^2) & 3x^5+3x^4+x^3 \\ \hline
3(x^2+x)^2=3x^4+6x^3+3x^2 & 3x^4+6x^3+6x^2+3x+1 \\
3(x^2+x)\cdot 1= \quad +3x^2+3x & \\
1^2= \quad +1 & \\ \hline
1\cdot(3x^4+6x^3+6x^2+3x+1) & 3x^4+6x^3+6x^2+3x+1 \\ \hline
 & 0
\end{array}
$$

[註] 得根之第二項 x 後,視 x^2+x 爲第一項,所求之第三項視爲第二項,依求第二項之法求之.

習題一百十六

1. 求下列各式之結果:

(a) $(x-2y)^5=?$ (b) $(3x-2y)^6=?$

(c) $(x^2+2y)^5=?$ (d) $(2x+3y)^5=?$

(e) $(2x-3y)^7=?$ (f) $98^5=?$

2. 求下列各式之平方根:

(a) $25x^6-40x^4+16x^2$　　(b) $x^4+6x^3+5x^2-6x+4$

(c) $x^4+8x^3-64x+64$

(d) $x^2+4y^2+9z^2-4xy-6xz+12yz$

3. 求下列各式之立方根:

(a) $27x^9-54x^7+36x^5-8x^3$　$3x^3-2x$

(b) $1-9a+33a^2-63a^3+66a^4-36a^5+8a^6$　$1-3a+2a^2$

(c) $27x^6-27x^5y-18x^4y^2+17x^3y^3+6x^2y^4-3xy^5-y^6$　$3x^2-3xy-y^2$

(d) $\dfrac{27x^3}{64y^3}-\dfrac{27x^2}{8y^2}+\dfrac{9x}{y}-8$　$\dfrac{3x}{4y}-2$

附錄二　圖解

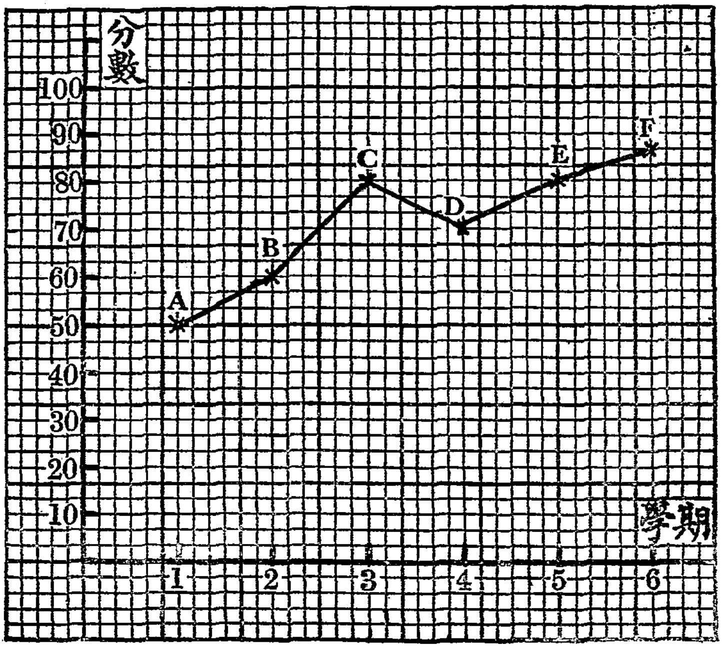
§ 154. **幾個簡單的例.** 欲明圖解之意義,先自下列諸例看起:

例一. 某生在校三年, 各學期成績如下表, 試以圖表其升降之情狀.

學期	I	II	III	IV	V	VI
成績	50	60	80	70	80	86.6

[解法] 於方格紙上取縱橫兩相交直線, 以橫線表示學期之次第, 以縱線表示成績之分數, 在橫線上取每 6 格代表一學期, 在縱線上每取 3 格

代表十分，乃由橫線上 1 處，向上數 50 分得 A 點，作記號"×"表之；又由橫線上 2 處，向上數 60 分得 B 點，作記號"×"表之；同樣得 C, D, E, F 諸點．最後以直線依次聯結其兩點得下圖



［註］由圖觀之，該生歷年成績之升降情形，可以一目了然，不似原來數表，必須經仔細觀察，方能得其意義．圖解之用，即此一端，已可得其梗概矣．

例二. 某人緩步慢行, 每小時行 $1\frac{1}{2}$ 里, 共行 8 小時而止, 試作圖以明所行距離與所經時間之關係.

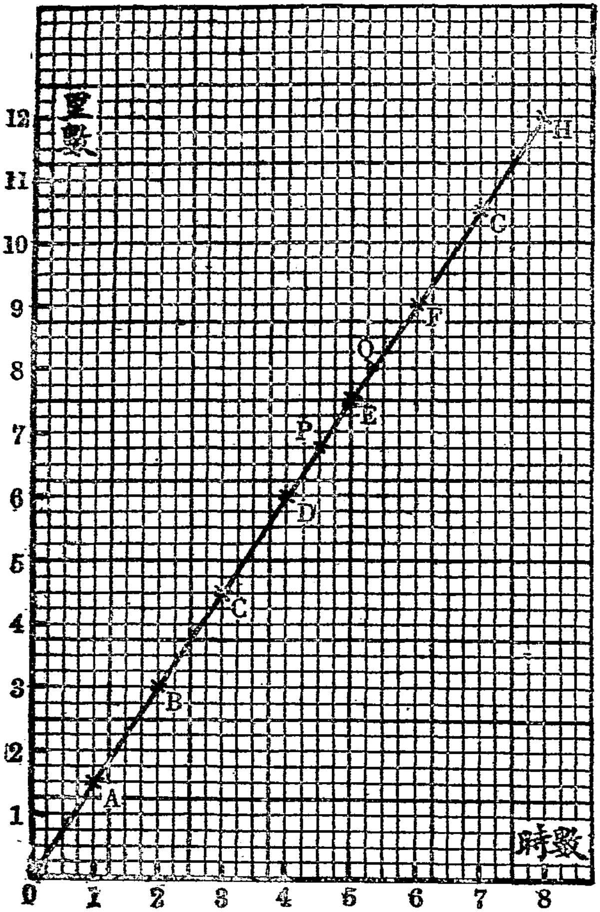
[解法] 先將所行里數與所經時數, 作一相應數值表:

所經時數	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,
所行里數	0,	$1\frac{1}{2}$,	3,	$4\frac{1}{2}$,	6,	$7\frac{1}{2}$,	9,	$10\frac{1}{2}$,	12,

(A)

再取縱橫二相交直線, 在橫線取 4 格表 1 小時, 在縱線上取 4 格表 1 里, 於是由橫線 1 時處向上數 $1\frac{1}{2}$ 里得 A 點; 再由橫線上 2 時處向上數 3 里得 B 點; 同樣, 得 C, D, E, F, G, H 諸點, 過諸點聯成一直線如下圖, 是卽所求之時間距離相互變化之關係也.

[註] 本例與前例有一重要不同之點. 蓋在前例中, $A, B, C, D, E,$ …… 諸點, 原爲孤立之點. 過 A, B; B, C; C, D; …… 諸點聯以直線者, 不過便於觀察; 直線 AB, BC, …… 上之其他諸點, 初無若何意義也. 至於本例



中,則 $A, B, C, D,$ …… 諸點不為孤立. 因所行里數與所經時數,二者俱為連續變遷之數. 非必從0時一跳

而至1時,從1時一跳而至2時;在0時與1時,1時與2時之間,更有無數個刹那.在此無數個刹那中,此人所行距離各有確定之里數.由此無數個時數里數之對應值亦得無數個點.此無數個點均在直線AB, BC, ……之中.今在作圖手續中,所以只取整時數0, 1, 2, ……等等者,特為便利之故耳.

學者再就上圖觀之,不特A表中已載之事實,可以由圖一目了然.即表中未載之事實,亦可由圖推得之.例如欲$4\frac{1}{2}$小時共行幾里,可由橫線上$4\frac{1}{2}$處,向上數到圖中P點,約得6.75里,即為所求之里數.欲知幾時內可得8里,可由縱線上8處向右數到圖上之Q點,約得$5\frac{3}{8}$小時,即為所求之時數.同樣,可解其他類似問題.然則圖解之用,不亦偉乎?

例三. 在方程式$y=2x+5$中,x, y俱為可變之數,試作圖以明其變遷之情狀.

[註] 本題性質與上例(例二)性質略有不同.在上例,時數里數俱為正量.本題之x, y則均可正可負矣.如何作圖?其法不難.但為便於說明計,應先述位標制.

§ 155. **位標制.** 位標之用，在於決定點之位置，原則如下：

1. 如下圖，在平面上取縱橫二相交直線 XX', YY' 命其交點爲 0，此 0 點名曰原點，縱線 YY' 名曰縱軸或曰 y 軸；橫線 XX' 名曰橫軸或曰 x 軸.

2. 由是平面上之任何一點，可定兩個數量，其一爲該點與 x 軸之距離，名曰該點之縱標，其二爲該點與 y 軸之距離，名曰該點之橫標，縱標橫標統稱位標.

3. 又因兩點之位置雖不同，其與兩軸之距猶可相同，(例如下圖中之 p_1, p_2)，如此不免混淆，乃更爲之區別曰：點在 y 軸之右者，其橫標爲正值；點在 y 軸之左者，其橫標爲負值，點在 x 軸之上者，其縱標爲正；點在 x 軸之下者，其縱標爲負.

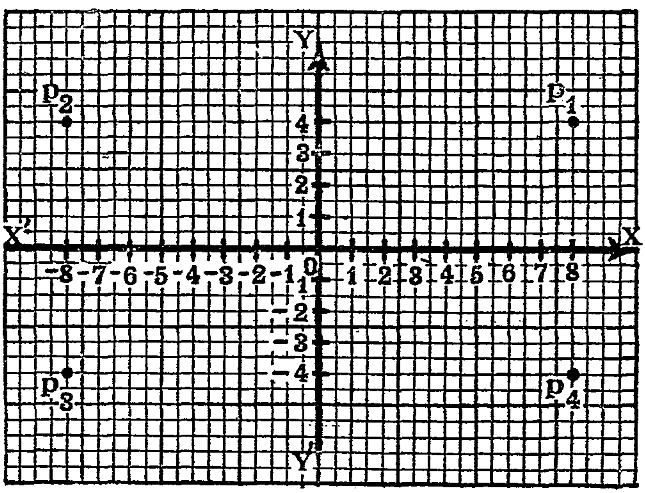
如此則平面上每有一點，卽定一組位標；反之，每有一組位標，卽可在平面上定出一點，並只

定一點；點與位標二者乃有一對一之關係矣．例如下圖 p_1 之位標爲 $(8, 4)$；p_2 之位標爲 $(-8, 4)$；p_3 之位標爲 $(-8, -4)$；p_4 之位標爲 $(8, -4)$．反之，位標爲 $(8, -4)$ 之點爲 p_4，而非 p_3, p_2, p_1.

［註］(1) 舉一點之位標時，依習慣，務將位標置於括號之內，橫標寫於縱標之前，如上例．

(2) XOX', YOY' 相交，分平面爲四部，其在 OX, OY 之間者，名曰第一象限；在 OY, OX' 之間者名曰第二象限；在 OX', OY' 之間者名曰第三象限；最後一部名曰第四象限．

各象限位標之符號如何？學者試自定之．



§ 156. 兩元一次方程之圖線. 再討論前 § 154 例三之作圖法.

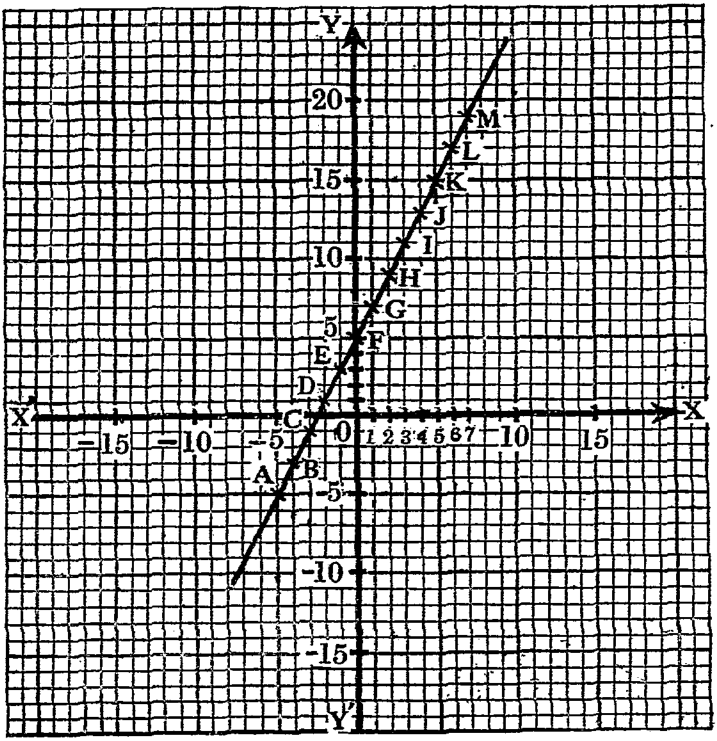
由原方程 $y=2x+5$, 設 x 爲種種適當之值, 可得 y 之對應值如下表:

設 $x=$	-5,	-4,	-3,	-2,	-1,	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	……
則 $y=$	-5,	-3,	-1,	1,	3,	5,	7,	9,	11,	13,	15,	17,	……

乃以 x 之各值爲橫標, 以 y 之對應值爲縱標, 定出 $A, B, C,$……M 諸點. 最後過此諸點, 聯成最自然最平滑之線, 其形式爲一直線, 是卽方程式 $y=2x+5$ 之圖線.

〔註〕 在上例, y, x 之關係成爲一次方程 $y=2x+5$; 在 §154 例二中, 所行里數 (y) 與所經時數 (x) 之關係亦爲一次方程 $y=\frac{3}{2}x$. 此二方程之圖線俱爲無限長之直線, 學者已知之矣. 其實不特如此, 任何兩元一次方程, 如 $Ax+By+C=0$, 其圖線恆爲直線. 此理之證明, 屬於解析幾何範圍, 在此不能詳述. 但有應加注意者;

(1) 兩元一次方程之圖線旣恆爲直線, 則欲定該圖線, 只須定其中兩點卽可. 不必如上述之法, 求其許多點, 徒增無謂麻煩也.



(2) 在此圖線上之各點,其位標俱合原設方程,反之,不在該線上之各點,其位標未有能合原方程者.

§157. 用圖線解聯立方程(一次). 兩元聯立一次方程,恆可用圖解法以求其根,手續甚簡,

今以下例明之.

例一. 用圖解法解 $\begin{cases} x+2y=7 & (1) \\ 3x-5y=-1 & (2) \end{cases}$

[解法] 由 (1), (2) 依次得 x, y 之對應數值表如下:

(1′)

x	$-3, 7$
y	$5, 0$

(2′)

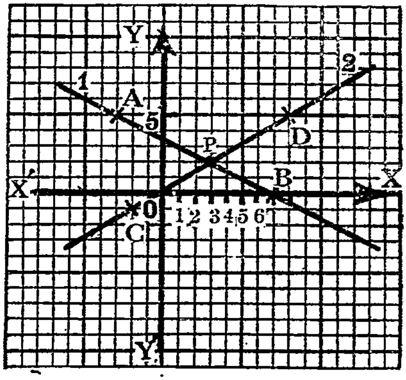
x	$-2, 8$
y	$-1, 5$

將 (1′) 表中對應值作爲位標, 定 A, B 兩點, 由此畫得直線 (1), 再將 (2′) 表中對應值作爲位標, 定 C, D 兩點, 由此畫得直線 (2).

直線 (1), (2) 之交點 P, 其位標則爲 3, 2 是卽原聯立方程中 x, y 之值, 亦卽所求之根, [因 P 點既在直線 (1) 上, 故合方程式 (1); 又在直線 (2) 上, 故亦合方程式 (2).]

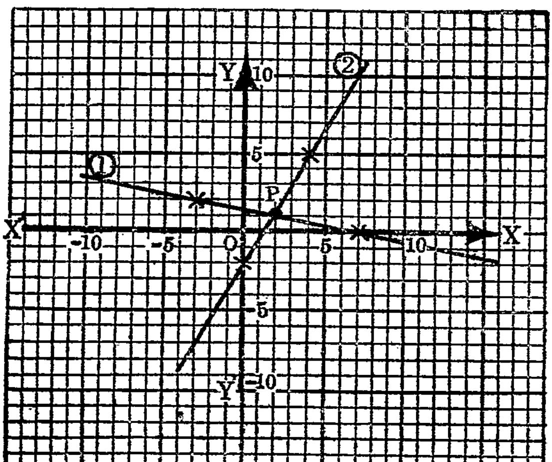
例二. 用圖解法解 $\begin{cases} x+5y=7 & (1) \\ 3x-2y=4 & (2) \end{cases}$

[解法] 作 (1) 式之圖解得直線 (1), 又作 (2)



式之圖線得直線 (2). 二直線之交點 P, 其位標

則爲 2, 1 故 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$



習題一百十七

1. 用圖解法解下列各聯立方程:

(a) $\begin{cases} 3x+2y=5 \\ 8x-7y=1 \end{cases}$　　(b) $\begin{cases} 3x+2y=25 \\ x-3y=-10 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=2 \\ 3x-2y=0 \end{cases}$　　(d) $\begin{cases} \frac{x}{3}+\frac{y}{4}=0 \\ 5x-4y=31 \end{cases}$

2. 試用圖解法解下列各聯立方程式:

(a) $\begin{cases} 3x-4y=1 \\ 6x+1=8y+3 \end{cases}$　　(b) $\begin{cases} x+y=8 \\ 7x-5y=5x-7y+16 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x+2y=5 \\ 3x-1=14-6y \end{cases}$　　(d) $\begin{cases} 3x-2y=0 \\ 6x+5m=4y+5m \end{cases}$

3. 試用代數解法解上題(題二)各聯立方程. 此種結果如何解釋?

4. 解下列各聯立方程(用圖解法):

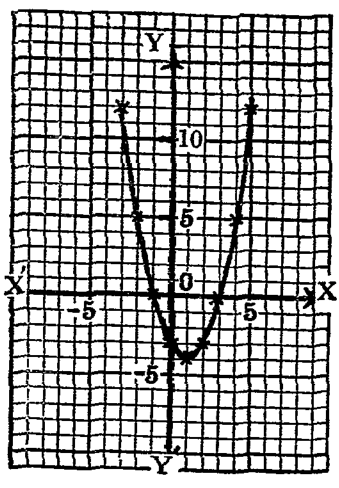
(a) $\begin{cases} x+2y=5 \\ 3x-2y=-1 \\ 8x+8y=24 \end{cases}$　　(b) $\begin{cases} x+2y=5 \\ 3x-2y=-1 \\ 8x+8y=25 \end{cases}$

§ 158. **兩元二次方程之圖線.** 兩元二次方程之圖線, 詳細理論, 亦屬解析幾何範圍, 在此無法詳述, 茲所舉者其特例耳.

例一. 試作一元二次函數 $y=x^2-2x-3$ 之圖解.

[解法] 由原方程 $y=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$, 先求 x, y 之對應數值表如下:

設 $x=$	$\cdots$	$-3,$	$-2,$	$-1,$	$0,$	$1,$	$2,$	$3,$	$4,$	$5,$	$\cdots$
則 $y=$	$\cdots$	$12,$	$5,$	$0,$	$-3,$	$-4,$	$-3,$	$0,$	$5,$	$12,$	$\cdots$



以 x, y 之對應值作爲位標得上圖. 此曲線名曰拋物線.

在此所應注意者蓋有二端:

(1) 求 x, y 之對應數值時, 只宜設 x 之值以求 y, 不能設 y 之值再求 x. 何則? 計算手續繁簡大有不同也.

(2) 畫圖時, 點與點之間不能聯以直線. 何則? x, y 變遷之形跡不成直線故也.

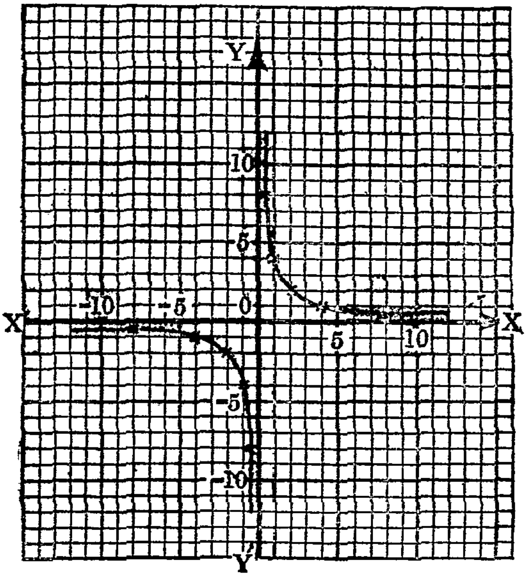
例二. 試作倒變關係 $xy=4$ 之圖線.

[解法] 先求 x, y 之對應數值如下表:

x	-8	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16		
y	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	-8	-16	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$		

以此各組對應值作爲位標, 得若干點, 過此諸點聯以最自然曲線乃得下圖, 此圖線名曰雙曲線.

[註] 二次方程可化爲 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 之形者其圖線亦爲雙曲線.

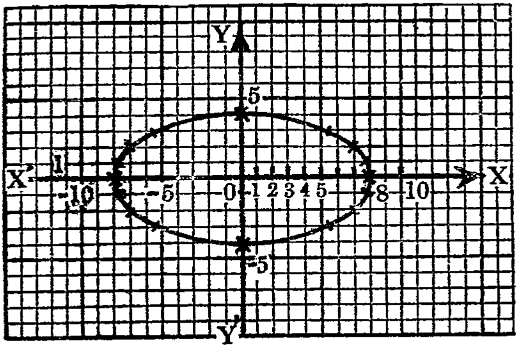


例三.　設作 $\frac{x^2}{4}+y^2=16$ 之圖線

[解法]　由原式得　$x=\pm 2\sqrt{16-y^2}$.　於是得下表:

設 $y=$	0	± 1	± 2	± 3	± 4
則 $x=$	± 8	$\pm 2\sqrt{15}$	$\pm 4\sqrt{3}$	$\pm 2\sqrt{7}$	0
		$(=\pm 7.7)$	$(=\pm 6.9)$	$(=\pm 5.3)$	

由此二十組對應值, 乃在平面上定出二十點. 過此二十點, 聯以最自然之曲線得下圖.　此圖線名曰橢圓.

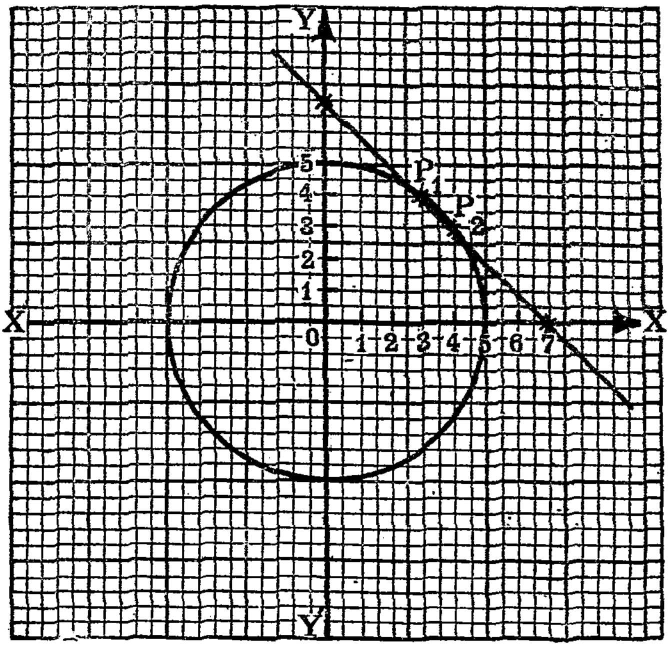


〔註〕 由上三例觀之,可見兩元二次方程之圖線,有時爲抛物線,有時爲雙曲線,有時爲橢圓.（正圓爲橢圓之一種.） 其實不但如此,任何兩元二次方程(能分爲兩個一次方程者除外),其圖線不出此三類曲線之外,必爲三者之一. 此理之所以然,亦解析幾何之事. 學者所宜注意者,當作兩元二次方程之圖線時,所得曲線,若不屬此三類之一,則必有錯誤無疑耳.

§ 159. 聯立兩元二次方程之圖解法. 先取二例論之.

例一. 用圖解法解聯立方程 $\begin{cases} x+y=7 & (1) \\ x^2+y^2=25 & (2) \end{cases}$

[解法] 將 (1) 式作圖得直線，又將 (2) 作圖得圓，此直線與圓相交於 P_1, P_2. 其位標則為 $x_1=3$, $y_1=4$ 及 $x_2=4$, $y_2=3$, 卽為所求之二根.



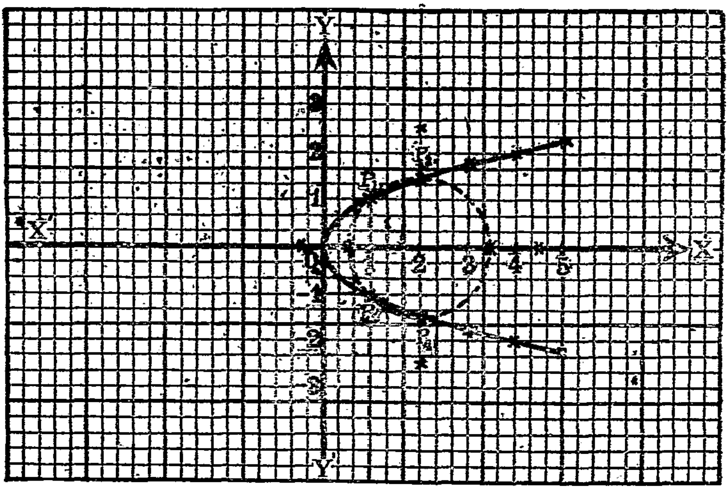
例二. 用解圖法解 $\begin{cases} y^2=x & (1) \\ (x-2)^2+y^2=2 & (2) \end{cases}$

[解法] 作 (1) 式之圖線得拋物線. 又作

(2) 式之圖線得圓. 此圓與抛物線之交點爲 P_1, P_2, P_3, P_4, 其位標則爲

$$\begin{cases}x_1=1\\y_1=1\end{cases}\quad\begin{cases}x_2=1\\y_2=-1\end{cases}\quad\begin{cases}x_3=2\\y_3=1.4\end{cases}\quad\begin{cases}x_4=2\\y_4=-1.4\end{cases}$$

以上四組值卽爲聯立方程 (1), (2) 之根.



習題一百十八

1. 用圖解法說明一次方程與二次方程聯立,何以至多只有兩根? 有時何以僅有一根? 有時何以無

根？ 兩個二次聯立者,何以至多只有四根？ 何以有時僅有三,二,一或0個根？

2. 用圖解法解:

(a) $\begin{cases} x+y=14 \\ x^2+y^2=50 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 3x+2y=11 \\ xy=3 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 3x+2y=11 \\ x^2-y^2=8 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x^2+y^2=50 \\ y^2=x+8 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=16 \\ x^2+y^2=81 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=16 \\ x^2+y^2=81 \end{cases}$