中學活用課本

# 基本數學

陸高誼主編
駱師曾編著

世界書局印行

中華民國三十六年十月四版

基本數學（全一冊）

實價國幣

外埠酌加運費匯費

編著者 駱師曾

主編者 陸高誼

發行人 李煜瀛

印刷者 世界書局

發行所 上海及各省 世界書局

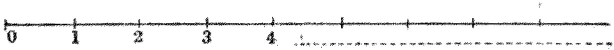
# 目 次

# 第一章　數與代數式

**引言**　算術與代數，都是論數的學科．不過範圍有大小．現在要講代數上的數，故將小學算術上的數，先來整理一下，再從此做出發點，引入代數之門．

**數**　小學算術上所學過的數，不出整數小數分數三種．整數如 1，2，3，4，……等，小數如 0.1，0.2，0.3，0.4，……等，分數如 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，……等，都是讀者所熟知的．此三種數，都可換一種方法用直線表示：

如下圖，畫一條直線，從左至右，依一定單位分作數段，記出各分點．設左邊的一點是 0，則從此點至第一點的長表整數 1，至第二點的長表整數 2，……簡單些可說左邊的一點是 0，第一點是 1，第二點是 2，……




次將從 0 至 1 的一段，分成十等分，如下圖，則從 0 至各分點所表的數，是小數 0.1，0.2，0.3，0.4，……


如將 1 與 2 的一段，再分成十等分，則從 0 至各分點所表的

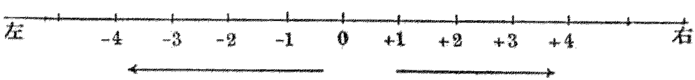
數，是小數 1.1，1.2，1.3，1.4，……

又按小學算術上有小數與分數的關係如下：

$$\frac{1}{2}=0.5,\quad \frac{1}{3}=0.33\cdots,\quad \frac{1}{4}=0.25,\quad \frac{1}{5}=0.2,\cdots\cdots$$

故無論如何的分數，都可化成小數，與上述同法表示．

**代數數**　算術上的數，既如上述可在直線上從 0 起向右方表示，因此有一疑問，從 0 向左方依同法分段記點，應表示如何之數？吾人設想左與右反對，恰如上與下，前與後，損與益，收與付的反對相同，亦如加與減的反對相同．故爲區別計，在右方所表數字前面，記一「＋」號，如 $+1, +2, +3, +4, \cdots\cdots$ 叫做正數，在左方所表數字前面記一「－」號，如 $-1, -2, -3, -4, \cdots\cdots$，叫做負數，見下圖。正數負數前面的記號，叫做正號負號，總稱性質符號，與表加減的演算符號，形同而義不同．如略去數的性質符號單講數字．叫做數的絕對値，如 $+2$ 與 $-2$ 的絕對値都是 2．




由上圖可知正數與負數從 0 分界，故 0 不是正數，亦不是負數。0 與正數負數是代數上常用的數，總稱代數數．既有負數的名詞，則如 $3-5$ 不足 2，在算術上無法表示者，在代數上可寫作 $3-5=-2$．玆將算術數與代數數列表於下，以示區別：

$$\text{算術數}\begin{cases}\text{整數}\\ \text{小數}\\ \text{分數}\end{cases}\qquad \text{代數數}\begin{cases}\text{正數(包括整數小數分數)}\\ \text{零}\\ \text{負數(包括整數小數分數)}\end{cases}$$

**代數數加減法**　代數上數的範圍,既比算術推廣,則代數上數的四則,亦有依算術增補的必要.增補的方法如何?就是代數上數的四則,應依性質符號的規則計算.玆分述於下,但其中宜注意的,所謂同號異號,都指正號負號而言,變號即正號變負號,負號變正號.

今先述代數數的加法,由上圖可得下列各式:

$$\left.\begin{array}{l}(+3)+(+5)=+8=8,\\ (-3)+(+5)=+2=2,\end{array}\right\}\begin{cases}\text{注意正數前正號,}\\ \text{非必要時可省.}\end{cases}$$

$$(-3)+(-5)=-8,$$

$$(+3)+(-5)=-2.$$

綜合以上四式,再加引申,得加法規則如下:

(1)　同號二數的和,等於絕對值的和附同符號.

(2)　異號二數的和,等於絕對值的差,附絕對值大者的符號.

(3)　同值異號二數的和,等於 0.

(4)　任何數與 0 的和,等於本身.

依上述規則求得的和,叫做代數和.

次述代數數的減法,因減與加相反,故從上述加法四式反求,即得

$$(+8)-(+5)=+3=(+8)+(-5),$$

$$(-8)-(-5)=-3=(-8)+(+5),$$

$(+2)-(+5)=-3=(+2)+(-5)$,

$(-2)-(-5)=+3=(-2)+(+5)$.

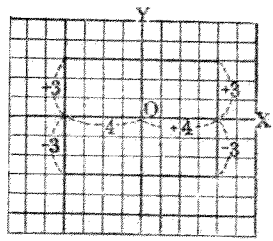
綜合以上四式,再加引申,得減法規則如下:

(1) 求二數的差,可將減數變號,加於被減數.

(2) 從 0 減任何數,等於此數變號.

由減法規則,可見減正數等於加負數,減負數等於加正數,卽減法可歸屬於加法.又如 $5-7+8=5-(+7)+(+8)=5+(-7)+(+8)$,故加法減法的演算符號,可與性質符號相通.因此求諸數的代數和,只須依其正負號連寫,不必再寫加號,便利不少.

**代數數乘除法** 今要講代數數的乘法,先如右畫圖,假定在右在上的是正數,在左在下的是負數.則




$$(+4)\times(+3)=(+4)+(+4)+(+4)$$
$$=+12.$$

而 $(+4)\times(-3)$ 恰與 $(+4)\times(+3)=+12$ 依 OX 線上下反對,故 $(+4)\times(-3)=-12$.

又 $(-4)\times(+3)$ 恰與 $(+4)\times(+3)=+12$ 依 OY 線左右反對,故 $(-4)\times(+3)=-12$.

又 $(-4)\times(-3)$ 恰與 $(+4)\times(-3)=-12$ 左右反對,或與 $(-4)\times(+3)=-12$ 上下反對,故 $(-4)\times(-3)=+12$.卽

$$\left.\begin{array}{l}(+4)\times(+3)=+12\\(-4)\times(-3)=+12\end{array}\right\}\text{同號得正.}$$

$$\left.\begin{array}{l}(+4)\times(-3)=-12\\(-4)\times(+3)=-12\end{array}\right\}\text{異號得負.}$$

綜合以上四式,再加引申,得乘法規則如下:

(1)　同號二數的積,等於絕對值的積附正號.

(2)　異號二數的積,等於絕對值的積附負號.

(3)　任何數與 0 的積等於 0.

(4)　負數自乘偶次數的積是正數,奇次數的積是負數.

(5)　多數連乘積的符號,有偶數個負數的是正,有奇數個負數的是負.

講到代數數的除法,依乘與除相反原理,由上例四式,可得

$$\left.\begin{array}{l}(+12)\div(+3)=+4\\(-12)\div(-3)=+4\end{array}\right\}\text{同號得正.}$$

$$\left.\begin{array}{l}(+12)\div(-3)=-4\\(-12)\div(+3)=-4\end{array}\right\}\text{異號得負.}$$

綜合以上四式,再加引申,得除法規則如下:

(1)　同號二數的商,等於絕對值的商附正號.

(2)　異號二數的商,等於絕對值的商附負號.

(3)　任何數除 0 的商,等於 0.

(4)　0 不能除任何數.

**代數式**　代數數的範圍及四則,既比算術擴充增補,而代數與算術表數的方法,亦有廣狹不同. 算術只能用數字表數,而代數則除數字外,尚可用文字 $a, b, c, \cdots\cdots x, y, z$ 表數,此即代數命名

的由來.此等文字既可表任何數,故是一般數,而應用較爲普遍.

將數字及表數的文字,用演算符號$+$,$-$,$\times$,$\div$連結,叫做代數式.寫代數式時,應注意下列二點:

(1)關於乘的 數字與文字間,文字與文字間,及括號前後的乘號,都可省略不寫.而數字與文字的積,通常都先寫數字,再依字母順序接寫文字,如 $3\times x$, $a\times b\times c$, $x\times(a+b)$ 應寫作 $3x$, $abc$, $(a+b)x$.

$a$ 的二倍卽 $a\times 2$, 三倍卽 $a\times 3$, 四倍卽 $a\times 4$,……順次寫作 $2a$, $3a$, $4a$,……但 1a 則省寫作 $a$. 如此左邊的數字 2,3,4,……,叫做係數.

$a$ 的二乘方卽 $a\times a$,三乘方卽 $a\times a\times a$,四乘方卽 $a\times a\times a\times a$,……順次寫作 $a^2$,$a^3$,$a^4$,……,但 $a^1$ 則省寫作 $a$.如此右角的小號數字 2,3,4,…… 叫做指數.

(2)關於除的 除法的記號$\div$,通常可取橫線代用,而寫作分數的形狀.如 $a\div b$, $(a+2b)\div c$, $(m+n)\div(x+y)$ 應寫作$\frac{a}{b}$, $\frac{a+2b}{c}$, $\frac{m+n}{x+y}$.

代數用文字表數,在同一演算之中,同文字必表同一數.將代數式中的文字,用數字代入,依式中所示運算順序計算所得的數,叫做代數式的數值.

【例 1】設 $a=3, b=2, c=5$, 則 $a-b+c=3-2+5=6$.

【例 2】設 $a=-2, b=5$，則

$$3a+2b=3(-2)+2\times5=-6+10=4.$$

【例 3】設 $a=-1, b=2, c=-3$，則

$$a^2+b^2+c^2=(-1)^2+2^2+(-3)^2=1+4+9=14.$$

【例 4】設 $x=-3$，則

$$\begin{aligned}5x^3-4x^2+6x-4&=5(-3)^3-4(-3)^2+6(-3)-4\\&=5(-27)-4\times9-18-4\\&=-135-36-18-4=-193.\end{aligned}$$

**重要定律**　代數上所用的數，雖有正負二種，但下列的幾種定律，仍可與算術同樣成立，如設任何數代 $a$，$b$，$c$，即可證明：

加法交換律：如 $a+b=b+a$.

加法結合律：如 $(a+b)+c=(a+c)+b=\cdots\cdots$

乘法交換律：如 $ab=ba$.

乘法結合律：如 $ab(c)=(ac)b=\cdots\cdots$

乘法分配律：如 $(a+b)c=ac+bc$.

**文字使用法**　代數式的寫法及數值，既已明瞭，則文字應如何使用，亦是列式時最重要的事，今再設例以明之：

【例 1】陳王二工人每日的工錢，陳是 $a$ 角，王是 $b$ 角，則二人一日的工錢共是 $(a+b)$ 角；又 $x$ 日的工錢共是 $(a+b)x$ 角.如設 $a=5$，$b=4$，$x=7$，則 $(a+b)x=7(5+4)=63$ 角.

【例 2】設鉛筆 $m$ 枝的價是 $a$ 分，則 1 枝的價是 $\frac{a}{m}$ 分，$n$

枝的價是 $\frac{a}{m}\times n$ 分.如設 $m=12$, $a=36$, $n=5$, 則 $\frac{a}{m}\times n$ $=36\div12\times5=15$ 分.

【例 3】設父年 $a$ 歲,子年 $b$ 歲,則 $t$ 年後,父是 $(a+t)$ 歲,子是 $(b+t)$ 歲,此時父年是子年的 $\frac{a+t}{b+t}$ 倍.如 $a=38$, $b=5$, $t=6$, 則 $\frac{a+t}{b+t}=(38+6)\div(5+6)=44\div11=4$.

【例 4】設本金是 $a$ 元,年利率是 $r$, $n$ 年的利息是 $b$ 元, $n$ 年的本利和是 $S$ 元, 則 $b=anr$, $S=(1+nr)a$. 如設 $a=100$, $r=0.04, n=2$, 則 $b=100\times2\times0.04=8, S=(1+2\times0.04)\times100$ $=1.08\times100=108$.

如上例 1 的 $(a+b)x=63$, 是將代數式及數字用等號連結的,叫做等式.如上例 4 的 $S=(1+nr)a$, 是表明計算法則可以處處通用的等式,叫做公式.

## 本章練習題

(1) 負數的絕對值愈大,數值是愈大呢還是愈小?(答)愈小.

(2) 寒暑表上升 $-3$ 度與下降 $-3$ 度,各有如何意義?

(答)下降 3 度,上升 3 度.

(3) 下列各語,是如何意義?

利益 $-500$元, 損失 $-20$元, 收入 $-40$元,

支出 $-50$元，　　前進 $-5$里，　　後退 $-8$里.

(答)　損失 500元，利益 20元，支出 40元，收入 50元，後退 5里，前進 8里.

(4)　比 $-5$ 小 2 是何數?　又大 3 是何數?　(答) $-7$, $-2$.

(5)　試求下列各題的結果:

(a) $8-(+15)$　(答) $-7$.

(b) $68+(-132)$　(答) $-64$.

(c) $(-85)+76$　(答) $-9$.

(d) $(-27)+115+(-85)$　(答) 3.

(e) $15+(-9)+(-8)+25+(-27)+12$　(答) 8.

(f) $0-(-5)$　(答) 5.

(g) $18+(-25)-(-8)+37-(-35)-28$　(答) 45.

(h) $(-3)(-15)\times(-8)$　(答) $-360$.

(i) $5\times(-8)\times(-3)\times 6$　(答) 720.

(j) $2\times 0\times(-8)$　(答) 0.

(k) $(-25)\div(-5)$　(答) 5.

(l) $8\div(-4)$　(答) $-2$.

(m) $(-56)\div 8$　(答) $-7$.

(n) $(-45)\div 3\div(-5)$　(答) 3.

(6)　一人從某處出發，先向東行 15 里，再向西行 20 里. 此時在原地東幾里?　又西幾里?　(答) 東 $-5$ 里，西 5 里.

(7)　甲乙二球隊賽球，甲組勝 9 球，負 5 球，乙組勝 6 球，

負 8 球,那一組勝?　　　　(答)　甲組勝 4 球,乙組負 2 球.

(8)　一大商店在三年中的利益:第一年 $+500$ 元,第二年 $-650$ 元,第三年 $+420$ 元,問三年總算,結果如何?

(答)　$+270$ 元.

(9)　張君每年收入 640 元,支出 720 元,問每年財產增加多少? 5 年共增加多少?　　　(答)　減少 80 元,減少 400 元.

(10)　$(-a)^2$ 與 $-a^2$ 的意義是否相同?　設 $a=2$,則數值各如何?　　　　(答)　不同,$4, -4$.

(11)　試用代數式表示 $a$ 與 $b$ 之和的 2 倍,減去 $c$ 的 3 倍.　　　　(答)　$2(a+b)-3c$.

(12)　張君先收王君 $a$ 元,後付王君 $b$ 元,又收王君 $c$ 元,後又付王君 $d$ 元,結算後張君共收王君存款多少?　如 $a=200$,$b=50$,$c=100$,$d=180$,則結果如何?

(答)　$a-b+c-d$,結算存款 70 元。

(13)　從 $a$ 的二乘方,減去 $a,b$ 乘積的 2 倍,再加 $b$ 的二乘方,等於 $a$ 與 $b$ 之差的二乘方,試用等式表示.　如設 $a=2, b=3$,試證明此等式.　　　　(答)　$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$.

(14)　設 $a=4$,$b=5$,試證等式 $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.

(15)　汽車每時行 $v$ 里,$t$ 時所行的路是 $s$ 里,試用公式表示.設 $v=45$,$t=2$,則 $s$ 是多少?　　　　(答)　$s=tv$,90 里.

(16)　長方形的面積,等於底乘高.設底是 $a$ 公尺,高是 $b$ 公尺,面積是 $S$ 方公尺,試作此公式.　如 $a=6$,$b=7$,求 $S$.

（答）　$S=ab$, 42 方公尺.

（17）　設 $C$ 代攝氏寒暑表的度數，$F$ 代華氏寒暑表的度數，則可用下列二公式換算：

$$F=32+\frac{9}{5}C, \qquad C=\frac{5}{9}(F-32).$$

設 $C=15$, $C=-10$, 則 $F$ 各是幾度？又設 $F=68$, $F=-40$, 則 $C$ 各是幾度？　（答）　$F=59$, $F=14$, $C=20$, $C=-40$.

（18）　設圓半徑長 $r$ 尺，則圓周長是 $2\pi r$ 尺，面積是 $\pi r^2$ 方尺，設 $r=5$, $\pi=3.1416$, 求圓周及圓面積.

（答）　圓周 31.416 尺，面積 78.54 尺，

# 第二章　整　式

**引言**　讀過前章，已知道代數上數的四則及用文字表數作代數式的方法.譬如軍事上已攻破代數的第一道防線,現在要用此作據點,進攻代數的第二道防線就是整式.代數上有整式，猶如算術上有整數.整式的四則是代數的基本運算，學習之前，須明瞭整式中所用名詞的意義.

**整式**　表數字與文字之積的代數式，叫做單項式，二以上單項式的代數和，叫做多項式.組成多項式的各單項式,叫做多項式的項.多項式又依項數分類,稱爲二項式,三項式等.單項式與多項式中,無文字作除數者,總稱整式.例如 $-5$，$a$，$x$，$-3xy$，$+y^2$ 等都是單項式.又如 $3bc-2d$，$\frac{2}{5}x^2-3xy+y^2$ 等都是多項式，其中 $3bc$，$-2d$，$\frac{2}{5}x^2$，$-3xy$，$+y^2$ 都是項;而 $3bc$，$\frac{2}{5}x^2$，$+y^2$ 都是正項；$-2d$，$-3xy$ 都是負項.以上都是整式.

**因數,係數**　單項式中的數字叫做因數，各文字叫做因式。如取一因式爲主,則此因式叫做元,其餘的因數因式，叫做此元的係數。例如 $3xy$ 中，3 是因數，$x$，$y$，$3x$，$3y$，$xy$ 都是因式.如取 $x$ 爲元,則 $3y$ 是係數;若取 $xy$ 爲元,則 3 是係數.

**次數**　單項式的次數，是其中所含文字的個數.多項式的次

數，依其中所含各項的最大次數而定；有時亦從特別文字着目，依此文字的個數而定．多項式的各項次數相等者，叫做同次式．例如 $2abx$，$-x^3$，$3xy^2$ 都是三次單項式，又如 $a+b-3c$ 是一次式，$x^2-3x+5$ 是二次式．又如 $ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3$ 是四次同次式；如從 $x,y$ 着目，則是三次同次式；如單從 $x$ 着目，則是三次式．

多項式的各項，從左至右，依照某文字的次數大小排列，叫做整頓；次數遞大的，叫做昇冪；次數遞小的，叫做降冪．例如 $x^3-x^2y+xy^2-y^3$ 是 $x$ 的降冪，亦是 $y$ 的昇冪．演算時先將多項式整頓，可以減少錯誤．

**同類項**　完全相同或僅有係數不同的諸單項式，叫做同類項，否則叫做異類項．如 $2ax^2$，$-5ax^2$，$-\frac{1}{2}ax^2$ 是同類項，又如 $my^3$，$-2ny^3$，$ly^3$ 對於 $y^3$ 亦是同類項．至如 $3a^2x$，$2ax^2$，$5ax$ 則是異類項．

一多項式中的若干同類項，可歸併爲一項．如 $5xy+3xy$ 及 $5xy-3xy$ 可照 5 尺 $+3$ 尺 $=8$ 尺及 5 尺 $-3$ 尺 $=2$ 尺着想，歸併爲 $8xy$ 及 $2xy$．故同類項的加減法，只須求係數的代數和，附在文字前面．

**整式加法**　整式既分單項式與多項式二種，故整式加法亦分單項式加法與多項式加法二種．因代數用文字表數，故一項可當作一個代數數看待，加一單項式猶如加一個代數數，加一多項式猶如加幾個代數數．因此整式加法，可應用代數數加法規則．

例如　求 $7ax-5by+3cz$，$2by-ax$ 及 $3by-5cz$ 的和.

$$\begin{aligned}&7ax-5by+3cz+2by-ax+3by-5cz\\&\quad=7ax-ax-5by+2by+3by+3cz-5cz\\&\quad=(7-1)ax+(-5+2+3)by+(3-5)cz\\&\quad=6ax-2cz.\end{aligned}$$

爲便利計，亦可如算術的各位上下對齊，將同類項寫在同一縱行，再行演算如下：

$$\begin{array}{rrr}&7ax-5by&+3cz\\&-ax+2by&\\+)&+3by&-5cz\\\hline&6ax\qquad&-2cz\end{array}$$

$ax$ 的係數：$7-1=6$

$by$ 的係數：$-5+2+3=0$

$cz$ 的係數：$3-5=-2$.

從上例得整式加法規則如下：

整式相加，可依各項原有的性質符號連寫，再歸併同類項.

**整式減法**　整式減法，亦分單項式減法與多項式減法二種.減一單項式猶如減一個代數數，減一多項式猶如減幾個代數數，故亦可應用代數數減法規則.

例如　從 $6xy-4ax-7cz$ 減 $3ax-7cz+8xy-by$.

$$\begin{aligned}&6xy-4ax-7cz+(-3ax)+7cz+(-8xy)+by\\&\quad=6xy-4ax-7cz-3ax+7cz-8xy+by\\&\quad=6xy-8xy-4ax-3ax-7cz+7cz+by\\&\quad=(6-8)xy+(-4-3)ax+(7-7)cz+by\\&\quad=-2xy-7ax+by.\end{aligned}$$

為便利計，亦可寫被減式在上，減式在下，使同類項列在同一縱行，再行演算如下：

$$\begin{array}{rrrr|l}
6xy & -4ax & -7cz & & xy\ \text{的係數：}\ 6-8=-2 \\
-)\ 8xy & +3ax & -7cz & -by & ax\ \text{的係數：}\ -4-3=-7 \\
\hline
-2xy & -7ax & & +by & cz\ \text{的係數：}\ 7-7=0
\end{array}$$

從上例得整式減法規則如下：

整式減法，可將減式的各項變號，加於被減式.

**括號**　算術上要將幾個數當作一個數看待，常用括號包括，代數上要將多項式當作單項式看待，亦用括號包括，此是二者相同之點。但算術上將括號內的數算成一數，括號便可取去，而代數上因異類項不能歸併，卽不能將多項式併成單項式，故關於括號的方法，不能與算術盡同．今分為去括號法與增括號法敍述，但括號前的「＋」「－」號，須特別注意．

依上述整式加法減法，可有下列四式：

$a+(b-c+d)=a+b-c+d$,

$a+(-b+c-d)=a-b+c-d$;

$a-(b-c+d)=a-b+c-d$,

$a-(-b+c-d)=a+b-c+d$.

從以上四式順推，可得去括號的方法如下：

去括號法一　取去前有＋號的括號，可不變括號內各項的符號，並將括號前的＋號同時取去．

去括號法二　取去前有－號的括號，必須變括號內各項的符

號，並將括號前的一號同時取去．

如有數重括號時，宜由內至外逐漸取去較便．

又從以上四式反推，可得增括號的方法如下：

增括號法一　增添前有 $+$ 號的括號，可以不變所括各項的符號．

增括號法二　增添前有 $-$ 號的括號，必須變所括各項的符號．

例如 $2a-b-[3a+\{4a-(5a+b)\}]$

$$=2a-b-[3a+\{4a-5a-b\}]$$

$$=2a-b-[3a+4a-5a-b]$$

$$=2a-b-3a-4a+5a+b=0.$$

此例從上而下指示去括號，從下而上則指示增括號．

**整式乘法**　既知整式加減法及括號用法，即可進習整式乘法，但須用乘法指數律做基礎．如設 $a$ 表任何數，$m,n$ 表正整數，則依指數意義，可定乘法指數律如下：

因 $a^3\times a^2=aaa\times aa=a^5=a^{3+2}$，　可定 $a^m\times a^n=a^{m+n}$

因 $(abc)^3=abc\times abc\times abc=a^3b^3c^3$，　可定 $(abc)^m=a^mb^mc^m$。

因 $(a^5)^3=a^5\times a^5\times a^5=a^{5\times3}$，　可定 $(a^m)^n=a^{mn}$.

整式乘法可分三種：(1) 單項式乘單項式．(2) 單項式乘多項式．(3) 多項式乘多項式．此三種可依乘法意義及分配律，用簡單形式表示如下：

$$a\times b=ab,\qquad\qquad (a+b)x=ax+bx,$$

$$(a+b)(x+y)=(a+b)x+(a+b)y=ax+bx+ay+by.$$

以上三種乘法，是用單項式乘單項式做基礎，要注意的有二點：一須依代數數乘法決定積的係數，二須依乘法指數律決定積中文字的指數.

【例 1】$5abc\times(-a^3)=5\times(-1)a^{1+3}bc=-5a^4bc.$

【例 2】$(2a^2-3ab+b^2)(-5ab)$

$$=2a^2(-5ab)-3ab(-5ab)+b^2(-5ab)$$
$$=-10a^3b+15a^2b^2-5ab^3.$$

【例 3】$(x-2x^2+x^3-1)(x+2)$

$$=(x-2x^2+x^3-1)x+2(x-2x^2+x^3-1)$$
$$=x^2-2x^3+x^4-x+2x-4x^2+2x^3-2$$
$$=x^4-3x^2+x-2.$$

為便利計，可先依 $x$ 的降冪排列，再依下列左式計算：

$$\begin{array}{rrrrr|rrrrr}
 & x^3 & -2x^2 & +x & -1 & & 1 & -2 & +1 & -1 \\
\times) & & & x & +2 & & & & 1 & +2 \\
\hline
x^4 & -2x^3 & +x^2 & -x & & 1 & -2 & +1 & -1 & \\
 & 2x^3 & -4x^2 & +2x & -2 & & 2 & -4 & +2 & -2 \\
\hline
x^4 & & -3x^2 & +x & -2 & 1 & & -3 & +1 & -2
\end{array}$$

（答）　$x^4-3x^2+x-2.$

將上列右式與左式對照，即省寫各項的文字，專取係數演算，至求得結果後，補入合宜的文字，如此算法更便，叫做乘法的分離係數法.

綜合以上各例，得整式乘法規則如下：

(1)求單項式乘單項式的積，先求係數的積，再將文字的積附後．但遇同文字的乘方，則依乘法指數律化簡．

(2)求單項式乘多項式的積，即用單項式乘多項式的各項，再求各積的代數和．

(3)求多項式乘多項式的積，即用乘式各項分別乘被乘式各項，再求各積的代數和．

**整式除法** 整式除法，亦要用指數律，依乘除相反原理，從乘法指數律反推，並依指數意義，可定除法指數律如下：

從 $a^3\times a^2=a^5$，得 $a^5\div a^2=a^3=a^{5-2}$，故如 $m>n$，

可定 $a^m\div a^n=a^{m-n}$.

從 $1\times a^5=a^5$，得 $a^5\div a^5=1=a^{5-5}=a^0$，故 $a^m\div a^m=a^0=1$.

又因 $a^2\div a^4=aa\div aaaa=1\div aa=1\div a^2=\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{1}{a^{4-2}}$，

故如 $m<n$，可定 $a^m\div a^n=\dfrac{1}{a^{n-m}}$.

整式除法，亦可分三種：(1)單項式除單項式．(2)單項式除多項式．(3)多項式除多項式．此三種可從乘法反推，用簡單形式表示如下：

$ab\div b=a$，　　$(ax+bx)\div x=a+b=(ax\div x)+(bx\div x)$，

$$(ax+ay+bx+by)\div(x+y)=a+b$$
$$=(ax+ay)\div(x+y)+(bx+by)\div(x+y).$$

以上三種.亦用第一種做基礎，要注意的有二點：一須依代數數除法決定商的係數，二須依除法指數律決定商中文字的指數.

【例 1】$18m^2x^4\ \div(-6mx^2)=\dfrac{18}{-6}m^{2-1}x^{4-2}=-3mx^2.$

【例 2】$(15x^4y^3-6x^3y^4-9x^2y^5)\div 3x^2y^3=\dfrac{15x^4y^3}{3x^2y^3}-\dfrac{6x^3y^4}{3x^2y^3}$

$$-\frac{9x^2y^5}{3x^2y^3}=5x^2-2xy-3y^2.$$

【例 3】由$(x+3)(x-4)=x^2-x-12$反推，可得$(x^2-x-12)\div x+3=x-4$，今將乘除演算之次序對照如下：(左是乘法，右是除法)

$$\begin{array}{lr}
 & x+3 \\
 & x-4 \\ \hline
(x+3)x\cdots\cdots & x^2+3x \\
-4(x+3)\cdots\cdots & -4x-12 \\ \hline
\text{相加} & x^2-x-12
\end{array}$$

$$\begin{array}{lr}
 & x-4 \\ \hline
x+3) & x^2-x-12 \\
(x+3)x\cdots\cdots & x^2+3x \\ \hline
\text{相減} & -4x-12 \\
-4(x+3)\cdots\cdots & -4x-12 \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

(答) 商 $x-4$.

如此例的除法，亦可省寫文字，專取係數計算，再將結果中補入合宜的文字，如右式較便.此名除數的分離係數法.

$$\begin{array}{r|l}
 & 1-4 \\ \hline
1+3) & 1-1-12 \\
 & 1+3 \\ \hline
 & \ \ -4-12 \\
 & \ \ -4-12 \\ \hline
 & \qquad 0
\end{array}$$

【例 4】求 $1-2x+3x^2$ 除 $2x-5x^3+3x^4+1$ 的商.

先將二式各依 $x$ 的降冪排列，並將缺項留一空位，如下演算，左式是常法，右式是分離係數法：

$$
\begin{array}{r|l}
\begin{array}{rl}
 & x^2-x-1 \\ \cline{2-2}
3x^2-2x+1\big) & 3x^4-5x^3\qquad\qquad+2x+1 \\
 & \underline{3x^4-2x^3+x^2} \\
 & \qquad -3x^3-x^2+2x \\
 & \qquad \underline{-3x^3+2x^2-x} \\
 & \qquad\qquad -3x^2+3x+1 \\
 & \qquad\qquad \underline{-3x^2+2x-1} \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad x+2
\end{array}
&
\begin{array}{rl}
 & 1-1-1 \\ \cline{2-2}
3-2+1\big) & 3-5+0+2+1 \\
 & \underline{3-2+1} \\
 & \quad -3-1+2 \\
 & \quad \underline{-3+2-1} \\
 & \qquad -3+3+1 \\
 & \qquad \underline{-3+2-1} \\
 & \qquad\qquad\quad 1+2
\end{array}
\end{array}
$$

（答） 商 $x^2-x-1$，餘式 $x+2$.

綜合以上各例，得整式除法規則如下：

(1) 求單項式除單項式的商，先求係數的商，再將文字的商附後．但遇同文字的乘方，則依除法指數律化簡．

(2) 求單項式除多項式的商，即用單項式除多項式的各項，再求各積的代數和．

(3) 求多項式除多項式的商：

(a) 先將除式與被除式依同文字的降冪排列．

(b) 用除式首項除被除式首項，得商的首項．

(c) 用商的首項乘除式各項，從被除式減去，得第一餘式．

(d) 用第一餘式作新被除式，依上法繼續求商的第二項以下．

**餘式定理**　整式除法，除至餘式比除式的次數較低，即可不必再除，便是不能除盡，如上例 4. 在不能除盡的除法中，如文字的昇羃降羃排列不同，則商及餘式便不同. 例如 $(4x+6y)\div(x+y)$ 是依 $x$ 的降羃排列，此時得商 4，餘式 $2y$；若改依 $x$ 的昇羃排列，即如 $(6y+4x)\div(y+x)$，則得商 6，餘式 $-2x$.

又在不能除盡的除法中，設 $P$ 是關於 $x$ 的整式，用 $x-a$ 去除，設商是 $Q$，餘式是 $R$，則有如下的關係.

$$P=(x-a)Q+R.$$

此式中若用 $a$ 代 $x$，則 $x-a=0$，即 $(x-a)Q=0$. 故此時 $P$ 式中用 $a$ 代 $x$ 所得的值是 $R$，因此得一定理如下：

餘式定理　關於 $x$ 的整式，用 $x-a$ 除得的餘式，必等於此式中用 $a$ 代 $x$ 所得的值.

【例 1】求 $(4x+6y)\div(x+y)$ 的餘式.

設餘式是 $R$，用 $-y$ 代入被除式中的 $x$，得

$$R=4(-y)+6y=2y.$$

【例 2】求 $(x^4-3x^3+4x^2-6x+7)\div(x-1)$ 的餘式.

設餘式是 $R$，用 1 代入被除式中的 $x$，得

$$R=1^4-3\times1^3+4\times1^2-6\times1+7=1-3+4-6+7=3.$$

## 本　章　練　習　題

(1)　化簡下列各式：

(a)　$5x^2-4x^2+8x^2-x^2-3x^2$　　（答）$5x^2$.

(b)　$9x^2y-xy^2-x^2y+7xy^2$　　(答) $8x^2y+6xy^2$.

(c)　$4x-2y+x+3y-y+1-3x-3$　　(答) $2x-2$.

(d)　$-7y+3x+3z-2y+2x-z$　　(答) $5x-9y+2z$.

(2)　求下列多項式的和

(a)　$x^2-x+1$，$-x^2-1$，$x^2+x+1$.　　(答) $x^2+1$.

(b)　$3a-4b+5c-6d$，$-4a+5b-6c+7d$

(答) $-a+b-c+d$.

(c)　$x^2-2ax+3a^2$，$2x^2-3ax+a^2$，$-5x^2+4ax-3a^2$

(答) $-2x^2-ax+a^2$.

(d)　$3(a+b)+2(x-y)$，$4(a+b)-5(x-y)$

(答) $7(a+b)-3(x-y)$.

(3)　有 $a$,$b$ 二數，$a$ 的 7 倍與 $b$ 的 3 倍的和，加上 $a$ 的 4 倍減 $b$ 的 5 倍的差，試用式表示結果.　　(答) $11a-2b$.

(4)　有 $a$，$b$，$c$ 三數，$a$ 減 $b$ 的差加上 $b$ 減 $c$ 的差，用式表示結果.　　(答) $a-c$.

(5)　化簡下列各式：

(a)　$a^2-2ab+b^2-(a^2-b^2)$　　(答) $-2ab+2b^2$.

(b)　$a-2ab+b-(a^2+2ab+b^2)$　　(答) $-4ab$.

(6)　以下各題，從第一式減第二式：

(a)　$7x^3+6x^2-4x-3$，$5x^3+8x^2-6x-1$.

(答)　$2x^3-2x^2+2x-2$.

(b)　$4a^2-2a+3$，$-3a+10a^2-10$.　(答) $-6a^2+a-13$.

(c)　$5ax+3xy-2by+4cz$，$3xy-7ax+5cz-4by$.

(答)　$12ax+2by-cz$.

(7)　在 $ab-b^2$ 上加何式,則得 $a^2-b^2$?　(答)　$a^2-ab$.

(8)　從 $5x^3+2x^2-3x+1$ 與 $2x^3-x^2+x-2$ 的和，減去 $3x^3-4x^2+x-3$.　(答)　$4x^3-5x^2-3x+2$.

(9)　用式表示 $a$，$b$ 二數的和減差,並化簡.

(答)　$2b$.

(10)　從 $a$ 的 8 倍與 $b$ 的 5 倍的和，減去 $a$ 的 3 倍與 $b$ 的 4 倍的差,試用式表示並化簡.　(答)　$5a+9b$.

(11)　去下列各式的括號並化簡:

(a)　$2x-[x-\{y-(2x-y)+(x-y)\}-(y-x)]$

(答)$-x+2y$

(b)　$8x-[2x^2-\{-3x+(4x^2-6)-5\}+3]+1$.

(答)　$2x^2+5x-13$.

(12)　在下列各式的括號中,記入合宜的代數式:

(a)　$x-y+3z-11=x-y+(\qquad)$　(答)　$(3z-11)$.

(b)　$a-b+c-d=a-(\qquad)-d$.　(答)$-(b-c)$.

(c)　$2a^2+3ab-b^2-a-b+3=2a^2-\{\qquad-(b-3)\}$

(答)$-\{-3ab+b^2+a-(b-3)\}$.

(13)　甲有款 $a$ 元，乙有款 $b$ 元，甲先給乙比乙所有的少 $c$ 元;次乙還甲比甲當時所有的少 $c$ 元,試用式表示最後甲乙二人所有的款.　(答)　甲$(2a-2b+c)$元,$(3b-a-c)$元.

(14) 化簡下列各式:

(a) $(x+4)(x-5)-(x-2)(x-3)$ (答) $5x-26$.

(b) $(a+4b)(a-3b)+(a-2b)(5a-4b)$.

(答) $6a^2-13ab-4b^2$.

(15) 實行乘法,證明下列各公式:

(a) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.

(b) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3-b^3$.

(c) $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$.

(d) $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=a^4+a^2b^2+b^4$.

(16) 演算以下的除法,並用乘法的分離係數法還原:

(a) $\{2(a-b)^3-4a(a-b)^4-6(a-b)^5\}\div 2(a-b)^2$.

(答) $(a-b)-2a(a-b)^2-3(a-b)^3$.

(b) $(x^2+7x+12)\div(x+4)$. (答) $x+3$.

(c) $(5x^4-6x^2+2x^3-7+3x)\div(x^2+4x+2)$.

(答) 商 $5x^2-18x+56$, 餘式 $-185x-119$.

(d) $(5x^3+1-6x^4)\div(-2x^2+x+1)$

(答) $3x^2-x+1$.

(e) $(x^6-y^6)\div(x-y)$

(答) $x^5+x^4y+x^3y^2+x^2y^3+xy^4+y^5$.

(f) $(a^2-2ab+b^2-c^2)\div(a-b+c)$.

(答) $a-b-c$.

(17) 有一矩形地,闊是 $a$ 丈,長比闊多 $b$ 丈,求此地的周圍

與面積。　　　　　　(答)　周圍$(4a+2b)$丈，面積 $a(a+b)$方丈.

(18)　有甲乙丙三數，甲是丙的 $m$ 倍，乙是丙的 $n$ 倍.用丙除甲乙的積，商是何數?　　　　　　(答)　$m+n$.

(19)　有甲乙丙三數，甲乙的積與乙丙的積相乘，再用甲丙的積去除，商是何數?　　　　　　(答)　乙的平方.

(20)　三位整數與顚倒次序所成整數的差，必可用 99 除盡，試用式證明，並舉例實驗.

(21)　相傳有一個猜年齡生月法；一人暗寫生月，用 2 乘，次加 5，再用 50 乘，又在所得乘積上加歲數，再減 365，末加 115，算完說出結果，使別人猜.猜的人便可依結果的右邊兩位數猜出年齡，剩下的數，猜出生月.試用 $a$ 代年齡，$b$ 代生月，用式證明，並舉例實驗.　　　　　　(答)　$100b+a$.

(22)　用餘式定理求下列各題的餘式，並用分離係數法覆驗：

(a)　$(2x^3+3x^2-2x-6)\div(x-1)$.　　　　(答)$-3$.

(b)　$(x^5-2x^3+7x^2-1)\div(x+3)$.　　　　(答)$-127$.

# 第三章　整數與整式的性質

**引言**　算術從整數到分數，代數從整式到分式，中間必須將整數或整式的性質，下一番研究工夫，方能達到．設一個譬喻，整數整式好像是一間平房，分數分式好像是一座樓屋，所謂整數與整式的性質，便是樓梯，倘無樓梯，便覺無法登樓．整數與整式的性質，都從乘法除法而來，與加法減法關係較少．欲研究此種性質，先須明瞭與此相關各種名詞的定義．

**定義**　如整數(或整式) $A$ 可用整數(或整式) $B$ 除盡的，則此 $A$ 叫做 $B$ 的倍數(或倍式)，$B$ 叫做 $A$ 的因數(或因式)．二個以上整數(或整式)的公共倍數(或倍式)，叫做此諸數(或諸式)的公倍數(或公倍式)．二個以上整數(或整式)的公共因數(或因式)，叫做此諸數(或諸式)的公因數(或公因式)．公倍數中最小的一個，叫做最小公倍數．公因數中最大的一個，叫做最大公因數．公倍式中次數最低的一個，叫做最低公倍式．公因式中次數最高的一個，叫做最高公因式．因算術中所論的是數，故名詞中都用數，代數中所論的是用文字表數的代數式，故名詞中都用式．又因代數用文字表任何數，正負大小並無限制，次數高的代數式，數值未必大，次數低的代數式，數值未必小，故算術中稱最大最小，在代數中則改稱最高最低。上述名詞，在算術與代數中彼此相應；此外在算術中，尚

有整數除 1 與本身外無因數的，叫做質數；諸整數不論本身有無因數，而諸數間無因數的，叫做互質數；用質數爲因數的，叫做質因數；在代數中則無此種相應名詞.

**析因數** 上述名詞的意義，都與因數(或因式)有關係，故研究整數(或整式)的性質，當用因數(或因式)做基礎，再由此出發，將整數的質因數，或整式的因式，分析開來，變成乘式的形狀，叫做析因數或析因式.代數中一單項式的因式，一望而知，算術中一數的因數，則不能如此便當，所以有因數檢驗法如下：

(1) 個位數字是 0, 2, 4, 6, 8 的數，必有因數 2.

(2) 個位數字是 0 或 5 的數，必有因數 5.

(3) 末二位數是 0 或是可用 4 除盡的數，必有因數 4.

(4) 各位數字和可用 3 除盡的數，必有因數 3.

(5) 各位數字和可用 9 除盡的數，必有因數 9.

算術中將諸數各析因數後，即可求得諸數的最大公因數及最小公倍數，與代數中求諸單項式的最高公因式及最低公倍式，有相同之點，今各舉例於下以明之：

求 36, 60, 84 的最大公因數.

$$\begin{array}{r|rrr}
2 & 36 & 60 & 84 \\ \hline
2 & 18 & 30 & 42 \\ \hline
3 & 9 & 15 & 21 \\ \hline
 & 3 & 5 & 7
\end{array}
\qquad
\begin{aligned}
36 &= 2^2\times 3^2\\
60 &= 2^2\times 3\times 5\\
84 &= 2^2\times 3\times 7
\end{aligned}$$

$\therefore$ 最大公因數 $=2^2\times 3$

求 $x^2y^2$, $5x^2y$ $7x^2y$ 的最高公因式.

係數 5 與 7 無公因數.

公共文字中指數最小的是 $x^2$, $y$.

$\therefore$ 最高公因式 $=x^2y$.

[法則]取公共質因數中指數最小的連乘便得.

求 72，102，120 的最小公倍數

$$\begin{array}{r|rrr}
2 & 72 & 102 & 120 \\ \hline
2 & 36 & 51 & 60 \\ \hline
2 & 18 & 51 & 30 \\ \hline
3 & 9 & 51 & 15 \\ \hline
 & 3 & 17 & 5
\end{array}$$

$72^2=2^3\times3^2$

$102=2\times3\times17$

$120=2^3\times3\times5$

$\therefore$　最小公倍數 $=2^3\times3^2\times17\times5$。

[法則]取各異質因數中指數最大的連乘便得。

[法則]取公共文字中指數最小的連乘，再附各式係數的最大公因數便得.

求 $x^3y^2$，$17xy$，$5x^3y$ 的最低公倍式.

係數 17 與 5 的最小公倍數是 $17\times5$.

各異文字中指數最大的是 $x^3, y^2$.

$\therefore$ 最低公倍式 $=17\times5x^3y^2$.

[法則]取各異文字中指數最大的連乘，再附各式係數的最小公倍數便得.

從上各例，左右對照，可看出算術與代數相同之點，上下對照，又可看出算術求最大公因數與最小公倍數不同之點，及代數求最高公因式與最低公倍式不同之點，並且由此可得算術與代數公有的重要性質如下：

(1)　$a$ 的 $m$ 倍與 $n$ 倍的和或差，仍舊是 $a$ 的倍數.

(2)　$a$ 的倍數之倍數(或因數之因數)，仍舊是 $a$ 的倍數(或因數).

**析因式**　代數中多項式的因式，亦不能如單項式的一望而知，故另有析因式法，可分爲三種如下：

(I)各項括出法　各項有公因式的，將公因式括出便得．

例如 $a^2b^2+3a^3b^3=a^2b^2(1+3ab)$

及 $(a-b)x-(a-b)y+(a-b)z=(a-b)(x-y+z)$．

(II)分組括出法　若干項有公因式的，可分若干項爲一組，再求各組的公因式便得．例如 $bx-cx+by-cy=(bx-cx)+(by-cy)$ $=(b-c)x+(b-c)y=(b-c)(x+y)$．

(III)應用公式法　熟記乘法中特殊積的公式，則正用之可立卽寫出代數乘法的結果，反用之可析多項式的因式，此種公式列下：

(1)　$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$．

(2)　$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$．

(3)　$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$．

(4)　$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$．

(5)　$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$．

(6)　$(ax+b)(cx+d)=\underset{1}{ac}x^2+(\underset{2}{ad}+\underset{3}{bc})x+\underset{4}{bd}$（注意1，2，3，4）．

(7)　$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$．

(8)　$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$．

$$\left.\begin{array}{ll}(9) & \overset{\text{異號}}{\phantom{x}}\\ & (a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3\\ & \underset{\text{同號}}{\phantom{x}}\\ (10) & \overset{\text{異號}}{\phantom{x}}\\ & (a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3\\ & \underset{\text{同號}}{\phantom{x}}\end{array}\right\}\text{注意同號異號．}$$

依上列公式,用於求多項式乘法的積,只須將每一項當作一文字,依左邊寫出右邊;若用於析多項式的因式,則可將每一項當作文字的積,依右邊寫出左邊.故用於乘法,比較的尙覺容易,若反用於析因式,便覺稍難,而尤以反用公式(5)(6)爲最難,因其中包括正數負數在內的緣故.今單就應用公式(5)(6)的析因式法探討如下:

應用(5)式 $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$ 析因式,可當作如 $x^2+Ax+B$ 的二次式析因式,有三種情形如下:

(i)　如 $A,B$ 都是正數,則 $B$ 可析爲二因數 $a$, $b$, 都是正數,其積是 $B$, 其和是 $A$.

(ii)　如 $A$ 是負數, $B$ 是正數,則 $B$ 可析爲二因數 $a$, $b$, 都是負數,其積是 $B$, 其和是 $A$.

(iii)　如 $B$ 是負數,則 $B$ 可析爲二因數 $a$, $b$, 一正一負,其積是 $B$, 其和是 $A$, 卽較大的因數與 $A$ 同號.

再依上述情形,各設一例以明之:

(i)　$x^2+13x+36=(x+4)(x+9)$.

(ii)　$x^2-13x+12=(x-1)(x-12)$.

$$\text{(iii)}\quad\left\{\begin{aligned}&x^2+x-20=(x-4)(x+5).\\&(m-n)^2-2(m-n)-15=\{(m-n)+3\}\{(m-n)-5\}\\&\qquad\qquad=(m-n+3)(m-n-5).\end{aligned}\right.$$

應用(6)式 $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$ 析因式,可當作如 $Px^2+Qx+R$ 的二次式析因式,其中 $P=ac$, $Q=ad$

$+bc$，$R=bd$，故 $P$ 可析爲二因數 $a,c$，而 $R$ 可析爲二因數 $b$，$d$，再如右圖試驗，依矢向乘積的和等於 $Q$，以定 $a$，$b$，$c$，$d$.

$$\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \\ \hline \multicolumn{2}{c}{ad+bc=Q} \end{array}$$

假定 $P$ 是正數（若是負數，可將全式各項變號使成正數），則 $P$ 可析爲二因數 $a$，$c$，都是正數，而 $b$，$d$ 是正或負，亦有三種情形如下：

(iv) 如 $Q,R$ 都是正數，則 $b,d$ 亦是正數.

(v) 如 $Q$ 是負數，$R$ 是正數，則 $b,d$ 都是負數.

(iv) 如 $R$ 是負數，則 $b,d$ 一正一負.

再依上述情形，各設一例以明之：

(iv) $5x^2+17x+6=(x+3)(5x+2)$.
[因 $5=1\times5$，$6=1\times6=2\times3$]

$$\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 5 & 2 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{2+15=17} \end{array}$$

(v) $6x^2-11x+4=(3x-4)(2x-1)$.
[因 $6=1\times6=2\times3$，
$4=(-1)(-4)=(-2)(-2)$]

$$\begin{array}{cc} 3 & -4 \\ 2 & -1 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{-3-8=-11} \end{array}$$

(vi) $6x^2+x-15=(2x-3)(3x+5)$.
[因 $6=1\times6=2\times3$，$-15=-3\times5$
$=-5\times3=-1\times15=-15\times1$]

$$\begin{array}{cc} 2 & -3 \\ 3 & 5 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{10-9=1} \end{array}$$

$12x^2-13x-4=(3x-4)(4x+1)$
[因 $12=1\times12=2\times6=3\times4$，
$-4=-1\times4=-4\times1=-2\times2$]

$$\begin{array}{cc} 3 & -4 \\ 4 & 1 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{3-16=-13} \end{array}$$

析因式佔代數中重要部分，亦是多數學生最感困難的一事，以前且有另出專書詳論此法的．但方法過多，記憶固難，時間亦太不經濟，實則只須將上列公式及探討各條，牢記心中，隨機活用，便可迎刃而解．今再將較難的析因式法，略舉數例於下：

【例 1】析 $x^4+x^2+1$ 的因式．

【解】　細察原式與公式 (1) 比較，若加 $x^2$ 便成完全平方．因此一面加 $x^2$，一面減 $x^2$，仍與原式相等．如是可應用公式(3)分析．

$$\begin{aligned} x^4+x^2+1&=x^4+2x^2-1-x^2=(x^2+1)^2-x^2\\ &=\{(x^2+1)+x\}\{(x^2+1)-x\}\\ &=(x^2+\quad+x)(x^2+1-x)\\ &=(x^2+x+1)(x^2-x+1). \end{aligned}$$

【例 2】將 $(x+2)(x+3)(x-4)(x-5)-44$ 析因式．

【解】　細察原式與公式(5)比較，可知第一第三括號內兩式的積，與第二第四括號內兩式的積，都含 $x^2-2x$ 項，如將此 $x^2-2x$ 當作一文字，則原式可當作三項式，卽易分析．

$$\begin{aligned} &(x+2)(x+3)(x-4)(x-5)-44\\ &\quad=(x+2)(x-4)(x+3)(x-5)-44\\ &\quad=(x^2-2x-8)(x^2-2x-15)-44\\ &\quad=(x^2-2x)-23(x^2-2x)+76\\ &\quad=(x^2-2x-4)(x^2-2x-19). \end{aligned}$$

【例 3】將 $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ 析因式．

【解】　將原式依 $a$ 的降冪排列，再看有無公因式 $(b-c)$？

$$
\begin{aligned}
a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)
&=a^2(b-c)+b^2c-ab^2+ac^2-bc^2\\
&=a^2(b-c)-ab^2+ac^2+b^2c-bc^2\\
&=a^2(b-c)-(b^2-c^2)a+bc(b-c)\\
&=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}=(b-c)(a-b)(a-c).
\end{aligned}
$$

**因式定理** 因式中尚有一個極重要的定理,順便說明如下:

因式定理 關於 $x$ 的整式中,如用 $a$ 代 $x$ 而此式的值是 0,則此式必可用 $x-a$ 除盡.反之,關於 $x$ 的整式,如可用 $x-a$ 除盡,則用 $a$ 代 $x$ 而此式的值必是 0.

此因式定理,是從除法中的餘式定理(見第二章)導出,粗看似乎平淡無奇,實則用處很大,且可爲視察因式之助,略舉一二於下:

【例 1】設 $x^n-a^n$ 中,$n$ 是正整數,試證此式有因式 $x-a$.應用此理,再證 $7^5-1$ 是 6 的倍數.

【解】 用 $x=a$ 代入 $x^n-a^n$,則 $a^n-a^n=0$,故 $x^n-a^n$ 可用 $x-a$ 除盡,卽有因式 $x-a$. 又設 $x=7$,則 $7^5-1=x^5-1$,$6=x-1$,故 $7^5-1$ 可用 6 除盡,便是 6 的倍數.

【例 2】將 $x^3-2x^2-5x+6$ 析因式.

【解】從視察易知用 $x=1$ 代入原式,而此式的值是 0,故此式可用 $x-1$ 除盡.實行除法,得商是 $x^2-x-6$,故

$$x^3-2x^2-5x+6=(x-1)(x^2-x-6)=(x-1)(x+2)(x-3).$$

如此例假定 $x^3-2x^2-5x+6$ 的因式是 $x-a$,則 $a$ 必可除盡 6.故發現因式時代入的數卽 $a$ 的值,必不出於 $\pm1$,$\pm2$,

$\pm 3$，$\pm 6$ 之外.

【例 3】如 $x^n+y^n$ 有因式 $x+y$，則 $n$ 是如何之數?

【解】 用 $x=-y$ 代入原式,則得 $(-y)^n+y^n$， 如 $(-y)^n+y^n=0$，則非 $n$ 是奇數不可.

從此例可知 $x^3+y^3$, $x^5+y^5$,……能用 $x+y$ 除盡,而 $x^2+y^2$, $x^4+y^4$,…… 則不能用 $x+y$ 除盡,此理在代數中亦頗重要.

**最高公因式及最低公倍式求法** 如上所述,代數的析因式,並不甚難。如果熟練之後,則代數中求諸多項式的最高公因式及最低公倍式時,可與單項式同樣看待，便利不少，並且仍與算術中求諸數的最大公因數及最小公倍數相彷,今將法則列下:

求諸多項式的最高公因式及最低公倍式,可將各式析因式,化成單項式形狀,視各因式當作一文字,與單項式同法求得.

例如 求 $2x^2-5x-3$，$3x^2-10x+3$，$2x^3-x^2-15x$ 的最高公因式及最低公倍式.

先將各式析因式:

$2x^2-5x-3=(2x+1)(x-3)$.

$3x^2-10x+3=(3x-1)(x-3)$.

$2x^3-x^2-15x=x(2x^2-x-15)=x(2x+5)(x-3)$.

$\therefore$ 最高公因式 $=x-3$.

最低公倍式 $=x(2x+1)(3x-1)(2x+5)(x-3)$.

上例中 $2x^2-5x-3$ 與 $2x^3-x^2-15x$ 的最高公因式， 亦可如下求得:

$$\begin{array}{r|l} 2x^2-5x-3 & \underline{\quad x+2 \quad} \\ & 2x^3-x^2-15x \\ & \underline{2x^3-5x^2-3x} \\ & \quad\;\; 4x^2-12x \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} \underline{4x^2-10x-6} & \underline{-x \qquad\qquad} \\ -2x+6 & 2x^2-5x-3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} \underline{2x^2-6x \qquad} & \underline{-2 \qquad} \\ x-3 & -2x+6 \\ & \underline{-2x+6} \\ & \qquad 0 \end{array}$$

最高公因式 $=x-3$.

如上演算，是先將二式各依同文字的降冪排列，次用低次式除高次式，若有餘式，再用餘式除原來除式；若又有餘式，則用此餘式再除前次餘式；如此輾轉相除，至除盡爲止；則最後的除式，便是原來二式的最高公因式．如此方法，叫做互除法．凡不易析因式的多項式，可用此法先求最高公因式，再從此求最低公倍式．又算術中不易析因數的大數，亦可用互除法求最大公因數．例如求 1253 與 6802 的最大公因數，算法如下：

$$\begin{array}{r} 5 \\ 1253\overline{)6802} \\ \underline{6265} \\ 537 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} 2 \\ 537\overline{)1253} \\ \underline{1074} \\ 179 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} 3 \\ 179\overline{)537} \\ \underline{537} \\ 0 \end{array}$$

$\therefore$ 最大公因數 $=179$.

## 本章練習題

(1)　設下列各數都能用 3 除盡，試在括號中填一個合宜的數字(答不止一個)：

$$573(\;)2,\qquad 30(\;)1.$$

(2)　求下列各組數的最大公因數及最小公倍數：

$$35,\ 70,\ 105;\qquad 54,\ 90,\ 126;\qquad 144,\ 180,\ 324.$$

(答)　$5\times7$，$2\times3\times57$；　$2\times3^2$，$2\times3^3\times5\times7$；

$2^2\times3^2$，$2^4\times3^4\times5$.

(3)　鉛筆 180 枝，拍紙簿 100 册，紙 240 張. 使多數學生公平分配，恰無餘剩，問最多有幾人？　(答) 20 人.

(4)　銅元 150 個，饅頭 90 個，使一羣難民等分，沒有餘剩，問難民最多有幾人？　每人分得銅元饅頭各幾個？

(答) 30 人；5 個，3 個.

(5)　有兵 100 人，排隊點數，4 人一排，6 人一排，8 人一排，都無餘剩，問缺少幾人？　(答) 少 4 人.

(6)　用長 18 公分闊 15 公分的長方磚，鋪成最小正方形，共要用磚幾塊？　(答) 30 塊.

(7)　一號二號三號汽車，環行一條圓路；每行一周，一號車要 6 分鐘，二號車要 8 分鐘，三號車要 9 分鐘. 今三車在同時同處開出，問再至出發處相會，各要行過幾周.

(答) 12 周，9 周，8 周.

(8)　將下列各式析因式：

(a)　$2x^2yz-6xy^2z+8xyz^2$.　　(答)　$2xyz(x-3y+4z)$.

(b)　$m(x-y)-n(x-y)$.　　(答)　$(x-y)(m-n)$.

(c)　$ax-ay-bx+by$.　　(答)　$(x-y)(a-b)$.

(d)　$6a^3+14ab-15a^2y-35by^2$.

(答)　$(3a^2+7b)(2a-5y)$.

(e)　$ab(x^2+y^2)+xy(a^2+b^2)$　　(答)　$(ax+by)(bx+ay)$.

(f)　$9x^2-12x+4$.　　(答)　$(3x-2)^2$.

(g)　$x^3-6x^2y+9xy^2$.　　(答)　$x(x-3y)^2$.

(h)　$x^2+4y^2+9z^2-4xy+12yz-6xz$.

(答)　$(x-2y-3z)^2$.

(i)　$4x^2+9y^2+12xy-4x-6y+1$.

(答)　$(2x+3y-1)^2$.

(j)　$x^4+8x^2-33$.　　(答)　$(x^2+11)(x^2-3)$.

(k)　$a^2x^2-2ax-15$.　　(答)　$(ax-5)(ax+3)$.

(l)　$(x^2+x)^2-6(x^2+x)-40$.

(答)　$(x^2+x+4)(x^2+x-10)$.

(m)　$x^4-13x^2y^2+36y^4$.

(答)　$(x+2y)(x-2y)(x+3y)(x-3y)$.

(n)　$6x^2-19x+15$.　　(答)　$(2x-3)(3x-5)$

(o)　$6x^2y^2+7xy-5$.　　(答)　$(2xy-1)(3xy+5)$.

(p)　$12x^2-(20a-21b)x-35ab$.

（答）$(3x-5a)(4x+7b)$.

(q)　$4ax^2+8ax+3a$.　（答）$a(2x+1)(2x+3)$.

(r)　$a^3-9a^2+27a-27$.　（答）$(a-3)^3$.

(s)　$2x^3+30x^2+150x+250$.　（答）$2(x+5)^3$.

(t)　$a^3x^3-b^3y^3$.　（答）$(ax-by)(a^2x^2+abxy+b^2y^2)$.

(u)　$(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$.

（答）$(x^2+8x+12)(x^2+8x+10)$.

(v)　$(x^2+11x+24)(x^2+14x+24)-4x^2$.

（答）$(x+4)(x+6)(x^2+15x+24)$.

(w)　$ab(a-b)+bc(b-c)+ac(c-a)$.

（答）$(a-b)(b-c)(a-c)$.

（9）　求下列各題的最高公因式及最低公倍式：

(a)　$x^2+9x+20$，$x^2-x-30$，$x^2-2x-24$.

（答）無，$(x+4)(x+5)(x-6)$.

(b)　$x^2-2xy-3y^2$，$x^2-5xy+6y^2$，$x^2-4xy+3y^2$.

（答）$x-3y$，$(x+y)(x-y)(x-2y)(x-3y)$.

(10)　試證 $10^8-1$ 是 9 或 11 的倍數.

(11)　試證 $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ 中有因式 $a-b$，$b-c$，$c-a$.

(12)　將下列各式析因式（用因式定理）：

(a)　$x^3-6x^2+11x-6$.　（答）$(x-1)(x-2)(x-3)$.

(b)　$2x^3-5x^2-4x+3$.　（答）$(x+1)(x-3)(2x-1)$.

# 第四章　分數與分式

**引言**　算術上分數與代數上分式的一切計算方法，大致相同，習過上章，已有了從整數到分數及從整式到分式的階梯，由此再研究分數與分式的性質做基礎，經過約分通分，便可進分數與分式的四則之門.

**分數與分式**　一整數(或整式) $B$ 除他整數(或整式) $A$ 的結果，用 $\dfrac{A}{B}$ 形狀表示的，叫做分數 (或分式)；$B$ 叫做分母，$A$ 叫做分子；分母分子總稱分數(或分式)的兩項.

算術中的分數分三種：分子小於分母的，叫做眞分數；分子等於或大於分母的，叫做假分數；整數與分數的和，叫做帶分數．如 $\dfrac{3}{5}$ 是眞分數，$\dfrac{5}{3}$，$\dfrac{3}{3}$ 都是假分數，$2\dfrac{3}{5}$ 是帶分數．若設 $a$，$b$，$n$ 表正整數，而 $a<b$，則可得普遍式，$\dfrac{a}{b}$ 是眞分數，$\dfrac{nb+a}{b}$，$\dfrac{b}{b}$ 都是假分數，$n+\dfrac{a}{b}$ 是帶分數．依乘除相反的原理，$\dfrac{nb+a}{b}=n+\dfrac{a}{b}$，故假分數與帶分數可以互化.

代數中必須分母是整式，才是分式；若分母是整數不是整式，便不是分式，仍舊是整式．如 $\dfrac{1}{x-2}$，$\dfrac{a-b}{a+b}$，$\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+5}$，$\dfrac{y-3}{x}$ 等是

分式，$\frac{2a+3b}{13}$，$\frac{x}{5}$等是整式．

但整數(或整式)亦可視作分母是 1 的假分數(或假分式)．

**性質** 依定義，分數與分式既然是一個除法，故有公共的基本性質(可設數自證)如下：

(1) 分數(或分式)的分母分子，用不等於 0 的同數(或同式)去除，其值不變．

(2) 分數(或分式)的分母分子，用不等於 0 的同數(或同式)去乘，其值不變．

此二種性質，即如設 $M$ 表不等於 0 的數或式，則

(1) $\frac{A}{B}=\frac{MA}{MB}$, (2) $\frac{MA}{MB}=\frac{A}{B}$.

如設 $M=-1$，則$\frac{A}{B}=\frac{-A}{-B}$，故分式的分母分子同時變號，其值不變．

又依代數數除法的符號規則，有

$$\frac{-A}{B}=-\frac{A}{B}, \qquad \frac{A}{-B}=-\frac{A}{B}.$$

故分式的分母分子單獨變號，則分式亦變號；反之，分式變號，則分母分子須有一變號．

上述性質，是分數(或分式)變形的基礎，依 (1) 可使分母分子簡約，依 (2) 可使分母分子擴張，二者恰相反．今再應用此性質進習約分與通分．

**約分**　分數（或分式）的兩項，同用最大公因數（或最高公因式）去除，使兩項化簡，叫做約分．約分後的分數（或分式），叫做最簡分數（或最簡分式），又名既約分數（或既約分式）．凡不是最簡的分數（或分式），必須化爲最簡．

【例 1】將分數$\frac{105}{140}$約分．

【解】將分母分子各析因數，即可約分．

$$\frac{105}{140}=\frac{3\times5\times7}{2^2\times5\times7}=\frac{3}{2^2}=\frac{3}{4}.$$

【例 2】將分式$\frac{x^2+10x+21}{x^2-2x-15}$約分．

【解】將分母分子各析因式，即可約分．

$$\frac{x^2+10x+21}{x^2-2x-15}=\frac{(x+3)(x+7)}{(x+3)(x-5)}=\frac{x+7}{x-5}.$$

**通分**　將分母不同的諸分數（或分式），化作同分母而不變其值，叫做通分．故通分的法則，可先依性質(1)約分，再依性質(2)通分，即用諸分母的最小公倍數（或最低公倍式）作公分母，用各分母除公分母所得的商分別乘各分子作新分子

【例 1】將分數$\frac{4}{15}$，$\frac{14}{24}$，$\frac{5}{8}$，$\frac{12}{25}$通分．

【解】將各分數的分母分子析因數：

$$\frac{4}{15}=\frac{2^2}{3\times5},\qquad \frac{14}{24}=\frac{7}{12}=\frac{7}{2^2\times3},$$

$$\frac{5}{8}=\frac{5}{2^3},\qquad \frac{12}{25}=\frac{2^2\times3}{5^2}.$$

故諸分母的最小公倍數是 $2^3\times3\times5^2=600$，而通分所得的新分數是：

$$\frac{2^2}{3\times5}=\frac{2^2\times2^3\times5}{2^3\times3\times5^2}=\frac{160}{600},\quad \frac{7}{2^2\times3}=\frac{7\times2\times5^2}{2^3\times3\times5^2}=\frac{350}{600}.$$

$$\frac{5}{2^3}=\frac{5\times3\times5^2}{2^3\times3\times5^2}=\frac{375}{600},$$

$$\frac{2^2\times3}{5^2}=\frac{2^2\times3\times2^3\times3}{2^3\times3\times5^2}=\frac{288}{600}.$$

【例 2】將分式 $\frac{x-2}{x^2-3x+2}, \frac{x-5}{x^2-7x+10}, \frac{x-1}{x^2-6x+5}$ 通分.

【解】 將各式的分母分子析因式

$$\frac{x-2}{x^2-3x+2}=\frac{x-2}{(x-2)(x-1)}=\frac{1}{x-1},$$

$$\frac{x-5}{x^2-7x+10}=\frac{x-5}{(x-2)(x-5)}=\frac{1}{x-2},$$

$$\frac{x-1}{x^2-6x+5}=\frac{x-1}{(x-1)(x-5)}=\frac{1}{x-5}.$$

故諸分母的最低公倍式是 $(x-1)(x-2)(x-5)$，而通分所得的新分式是

$$\frac{1}{x-1}=\frac{(x-2)(x-5)}{(x-1)(x-2)(x-5)},\quad \frac{1}{x-2}=\frac{(x-1)(x-5)}{(x-1)(x-2)(x-5)},$$

$$\frac{1}{x-5}=\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-5)}.$$

明瞭約分與通分的方法，即可進習分數（或分式）的四則.在加減法中，通分的應用最廣，在乘除法中，約分的功用最大.

**加減法**　分數(或分式)的加減法，可分同分母與異分母二種．設有二分數(或分式)$\frac{B}{A}$與$\frac{C}{A}$，則依分數(或分式)定義及除法原理，可得下列二式：

$$\frac{B}{A}+\frac{C}{A}=B\div A+C\div A=(B+C)\div A=\frac{B+C}{A}.$$

$$\frac{B}{A}-\frac{C}{A}=B\div A-C\div A=(B-C)\div A=\frac{B-C}{A}.$$

上式是同分母分數(或分式)的加減，至於異分母的分數(或分式)，可先依通分法化爲同分母，故得分數(或分式)加減法的規則如下：

(1)　同分母諸分數(或分式)相加減，只須依各分子相加減作分子，用原分母作分母，再將結果化簡．

(2)　異分母諸分數(或分式)相加減，先通分再依上法演算．

【例 1】$2\frac{12}{25}+3\frac{14}{25}-1\frac{16}{25}=(2+3-1)+\frac{12+14-16}{25}$

$$=4\frac{10}{25}=4\frac{2}{5}.$$

【例 2】$\frac{2m+n}{mn}-\frac{3m-2n}{mn}+\frac{m+3n}{mn}$

$$=\frac{2m+n-3m+2n+m+3n}{mn}$$

$$=\frac{6n}{mn}=\frac{6}{m}.$$

【例 3】$1\frac{5}{11}-1\frac{7}{33}+\frac{17}{88}=1\frac{120}{264}-1\frac{56}{264}+\frac{51}{264}$

$$=(1-1)+\frac{120-56+51}{264}=\frac{115}{264}.$$

【例 4】$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}-\frac{x}{x^2-1}=\frac{x+1}{x^2-1}+\frac{x-1}{x^2-1}-\frac{x}{x^2-1}$

$$=\frac{x+1+x-1-x}{x^2-1}=\frac{x}{x^2-1}.$$

【例 5】$\frac{b}{a^2-ab}+\frac{a}{b^2-ab}=\frac{b}{a(a-b)}+\frac{a}{b(b-a)}$

$$=\frac{b}{a(a-b)}-\frac{a}{b(a-b)}$$

$$=\frac{b^2-a^2}{ab(a-b)}=\frac{-(a^2-b^2)}{ab(a-b)}$$

$$=\frac{-(a+b)(a-b)}{ab(a-b)}=\frac{-(a+b)}{ab}$$

$$=-\frac{a+b}{ab}.$$

[注意]帶分數須將整數部與分數部分别加減，如上例1，3. 若分數部不夠減，可從整數部減 1，化作假分數，加入分數部再減.

**乘法** 設有二分數(或分式)$\frac{A}{B}$與$\frac{C}{D}$的値各是 $P$ 與 $Q$，即

$$\frac{A}{B}=P,\ \frac{C}{D}=Q,\quad \text{則}\ A=BP,\ C=DQ,$$

$$\therefore\ AC=BP\times DQ=BD\times PQ\quad \text{或}\ PQ=\frac{AC}{BD}.$$

故　$PQ=\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD}$，　同理，$\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}\times\frac{E}{F}=\frac{ACE}{BDF}$.

從此可得分數(或分式)乘法的規則如下：

諸分數(或分式)相乘，只須用諸分子相乘作分子，諸分母相乘作分母，再將結果化簡.

【例 1】$\frac{3}{7}\times\frac{5}{6}\times\frac{7}{10}=\frac{3\times5\times7}{7\times6\times10}=\frac{1}{2\times2}=\frac{1}{4}$.

【例 2】$\frac{7}{22}\times6\frac{3}{5}\times2=\frac{7}{22}\times\frac{33}{5}\times\frac{2}{1}=\frac{7\times33\times2}{22\times5\times1}$

$$=\frac{7\times3}{5}=\frac{21}{5}=4\frac{1}{5}.$$

【例 3】$\frac{2x}{3y}\times\frac{5y}{4x}\times6x=\frac{2x\times5y\times6x}{3y\times4x\times1}=5x$.

【例 4】$\frac{x^2+2x}{x^2-9}\times\frac{x^2-3x}{x^2-4}\times\frac{x-2}{x^3}$

$$=\frac{x(x+2)\times x(x-3)\times(x-2)}{(x+3)(x-3)\times(x-2)(x+2)\times x^3}$$

$$=\frac{1}{x(x+3)}.$$

[注意]帶分數須先化作假分數再乘，如例 2.

**除法**　設$\frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=P$，則依乘除相反原理，　$P\times\frac{C}{D}=\frac{A}{B}$.

兩邊各用$\frac{D}{C}$乘，　$P\times\frac{C}{D}\times\frac{D}{C}=\frac{A}{B}\times\frac{D}{C}$，　$\therefore$　$P=\frac{A}{B}\times\frac{D}{C}$.

從此可得分數(或分式)除法的規則如下：

用一分數(或分式)除他分數（或分式），只須將除數(或除式)

的分母與分子交換，去乘被除數(或被除式)，再將結果化簡.

【例 1】$5\div\frac{5}{7}=\frac{5}{1}\div\frac{5}{7}=\frac{5}{1}\times\frac{7}{5}=7.$

【例 2】$2\frac{2}{7}\div3\frac{1}{13}=\frac{16}{7}\div\frac{40}{13}=\frac{16}{7}\times\frac{13}{40}=\frac{2\times13}{7\times5}=\frac{26}{35}.$

【例 3】$\frac{x^2-(y+z)^2}{x^2+y^2}\div(x-y-z)$

$$=\frac{\{x-(y+z)\}\{x+y+z)\}}{x^2+y^2}\times\frac{1}{x-y-z}=\frac{x+y+z}{x^2+y^2}.$$

【例 4】$\frac{3a(a-b)}{b(a+b)}\div\frac{3(a^2-b^2)}{2ab}$

$$=\frac{3a(a-b)}{b(a+b)}\times\frac{2ab}{3(a-b)(a+b)}=\frac{2a^2}{(a+b)^2}.$$

**繁分數與繁分式** 以上所述分數(或分式)$\frac{A}{B}$的分子 $A$ 及分母 $B$，都是整數(或整式)，但 $A$，$B$ 亦可為分數(或分式)，如此者叫做繁分數（或繁分式）.因分數（或分數）的意義，是用分母除分子，故要將繁分數(或繁分式)化簡，可依分數(或分式)除法演算.

【例 1】$\dfrac{3\frac{3}{5}-\frac{1}{6}}{3\frac{3}{5}+\frac{1}{6}}=(3\frac{3}{5}-\frac{1}{6})\div(3\frac{3}{5}+\frac{1}{6})=(3\frac{18}{30}-\frac{5}{30})$

$$\div(3\frac{18}{30}+\frac{5}{30})=3\frac{13}{30}\div3\frac{23}{30}=\frac{103}{30}\times\frac{30}{113}=\frac{103}{113}.$$

【例 2】$3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{15}}}=3+1\div\left(7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{15}}\right)$

$$=3+1\div\left\{7+1\div\left(1+\frac{1}{15}\right)\right\}$$

$$=3+1\div\left\{7+1\div\frac{16}{15}\right\}$$

$$=3+1\div 7\frac{15}{16}$$

$$=3+1\div\frac{127}{16}=3\frac{16}{127}.$$

【例 3】$\dfrac{a}{\dfrac{a+b}{b}}=a\div\dfrac{a+b}{b}=a\times\dfrac{b}{a+b}=\dfrac{ab}{a+b}.$

【例 4】$\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}}{1-\dfrac{y^2}{x^2}}=\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}\right)\div\left(1-\dfrac{y^2}{x^2}\right)=\dfrac{y-x}{xy}\div\dfrac{x^2-y^2}{x^2}$

$$=\frac{-(x-y)}{xy}\times\frac{x^2}{x^2-y^2}$$

$$=\frac{-(x-y)x^2}{xy(x+y)(x-y)}$$

$$=-\frac{x}{y(x+y)}.$$

## 本 章 練 習 題

(1) 將右列各分數約分　$\frac{72}{140}$, $\frac{144}{176}$, $\frac{79}{237}$.

(答) $\frac{18}{35}$, $\frac{9}{11}$, $\frac{1}{3}$.

(2) 將下列各式約分:

(a) $\frac{3x^2}{6ax^2-3x^3}$.　　(答) $\frac{x}{2a-x}$.

(b) $\frac{x^2-y^2}{(x-y)^2}$.　　(答) $\frac{x+y}{x-y}$.

(c) $\frac{(x-y)^2-1}{(x+1)^2-y^2}$.　　(答) $\frac{x-y-1}{x+y+1}$.

(d) $\frac{(b-a)(c-a)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$.　　(答) $\frac{1}{b-c}$.

(e) $\frac{x^2+4x-45}{3x^2-14x-5}$.　　(答) $\frac{x+9}{3x+1}$.

(f) $\frac{x^2+6xy+5y^2}{x^2-2xy-3y^2}$.　　(答) $\frac{x+5y}{x-3y}$.

(3) 將下列各組分數通分:

(a) $\frac{3}{8}$, $\frac{11}{25}$, $\frac{31}{40}$.　　(答) $\frac{75}{200}$, $\frac{88}{200}$, $\frac{155}{200}$.

(b) $\frac{1}{10}, \frac{5}{6}, \frac{1}{4}, \frac{7}{12}.$　(答) $\frac{6}{60}, \frac{50}{60}, \frac{15}{60}, \frac{35}{60}.$

(c) $\frac{3}{4}, \frac{11}{20}, 0.3.$　(答) $\frac{15}{20}, \frac{11}{20}, \frac{6}{20}.$

(d) $\frac{13}{14}, \frac{5}{21}, \frac{15}{28}.$　(答) $\frac{78}{84}, \frac{20}{84}, \frac{45}{84}.$

(4) 將下列各組分式通分:

(a) $\frac{b}{2ax}, \frac{a}{3cx^2}, \frac{bx}{6ac}.$

(答) $\frac{3bcx}{6acx^2}, \frac{2a^2}{6acx^2}, \frac{bx^3}{6acx^2}.$

(b) $\frac{a^2}{x^2-xy}, \frac{ab}{x^2+xy}, \frac{b^2}{4(x^2-y^2)}.$

(答) $\frac{4a^2(x+y)}{4x(x+y)(x-y)}, \frac{4ab(x-y)}{4x(x+y)(x-y)},$

$\frac{b^2x}{4x(x+y)(x-y)}.$

(c) $x-y, \frac{1}{x-y}, \frac{3}{x^2-xy}.$

(答) $\frac{x(x-y)^2}{x(x-y)}, \frac{x}{x(x-y)}, \frac{3}{x(x-y)}.$

(d) $\frac{a}{x^2-9}, \frac{b}{x^2-5x+6}, \frac{c}{x^2+2x-15}.$

(答) $\frac{a(x-2)(x+5)}{(x-2)(x-3)(x+3)(x+5)}.$

$$\frac{b(x+3)(x+5)}{(x-2)(x-3)(x+3)(x+5)},$$

$$\frac{c(x-2)(x+3)}{(x-2)(x-3)(x+3)(x+5)}.$$

(e) $\frac{5}{2x^2+3x-2}$, $\frac{1}{2x^2-3x+1}$, $\frac{3}{2x^2+2x-4}$.

(答) $\frac{10(x-1)}{2(x-1)(x+2)(2x-1)}$,

$$\frac{2(x+2)}{2(x-1)(x+2)(2x-1)},$$

$$\frac{3(2x-1)}{2(x-1)(x+2)(2x-1)}.$$

(f) $\frac{bc}{(a-b)(a-c)}$, $\frac{ca}{(b-c)(b-a)}$, $\frac{ab}{(c-a)(c-b)}$.

(答) $\frac{bc(b-c)}{(a-b)(b-c)(a-c)}$,

$$\frac{ac(a-c)}{(a-b)(b-c)(a-c)},$$

$$\frac{ab(a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)}.$$

(5) 計算下列各式:

(a) $40\frac{4}{7}-14\frac{5}{21}-(6\frac{5}{11}+1\frac{8}{21}+8)$. (答) $10\frac{115}{231}$.

(b) $8+5\frac{2}{7}+3\frac{1}{5}-2\frac{5}{6}$. (答) $13\frac{137}{210}$.

(c)　$5\frac{6}{25}+\frac{7}{15}-2\frac{5}{6}$.　(答)　$2\frac{131}{150}$.

(6)　計算下列各式:

(a)　$\frac{2x}{a-b}-\frac{5x}{a-b}+\frac{6x}{a+b}$.　(答)　$\frac{3x}{a-b}$.

(b)　$\frac{x^2+y^2}{x+y}-\frac{y^2-x^2}{x+y}$.　(答)　$\frac{2x^2}{x+y}$.

(c)　$\frac{x+2}{17x}-\frac{x-5}{34x}+\frac{x+2}{51x}$.　(答)　$\frac{5x+31}{102x}$.

(d)　$\frac{1}{x-y}-\frac{2x}{x^2-y^2}$.　(答)　$\frac{y-x}{x^2-y^2}$.

(e)　$a-b-\frac{a^2-ab-b^2}{a+b}$.　(答)　$\frac{ab}{a+b}$.

(f)　$\frac{5}{x^2-2x-3}-\frac{4}{x^2-9}-\frac{7}{x^2+4x+3}$.

(答)　$\frac{-6x+32}{(x+1)(x+3)(x-3)}$.

(g)　$\frac{6y}{x^2+6xy+9y^2}-\frac{x-y}{x^2-xy-12y^2}+\frac{1}{3x-12y}$.

(答)　$\frac{-2x^2+6xy-6y^2}{3(x+3y)^2(x-4y)}$.

(h)　$\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-c)(b-a)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)}$.

(答)　0。

(7) 計算下列各式:

(a) $120\times\frac{1}{2}\times3\frac{11}{15}\div2\frac{1}{3}$. (答) 96

(b) $(6\frac{2}{3}-5\frac{1}{4}\div3\frac{1}{2}+4\frac{5}{6})\div(3\frac{2}{3}\times5\frac{1}{4}-3\frac{1}{2}\times4\frac{5}{6})$

(答) 3.

(c) $(\frac{7}{9}+2\frac{2}{3})\times\frac{3}{4}\div\frac{5}{8}-(\frac{5}{12}-\frac{7}{18})\div1\frac{1}{3}$.

(答) $40\frac{9}{80}$.

(d) $$\cfrac{9}{2+\cfrac{5}{7+\cfrac{1}{7}}}$$ (答) $3\frac{1}{3}$.

(e) $$\frac{1\frac{3}{4}-\frac{1}{12}}{1\frac{1}{8}+\frac{13}{24}}+\frac{9}{14}\times\frac{7}{8}-\frac{22\frac{1}{2}}{30}.$$ (答) $\frac{13}{16}$.

(8) 計算下列各式:

(a) $1+(-\frac{1}{2})-\frac{1}{3}\times(-\frac{1}{2})+\frac{1}{6}\div(-\frac{1}{5})$.

(答) $-\frac{1}{6}$.

(b) $\frac{1}{2}-8\times\frac{2}{3}+(-\frac{1}{4})\times0\div5$. (答) $-4\frac{5}{6}$.

(9)　設 $a=5$，$b=-3$，$c=-1$，求下列各式的值：

(a)　$\dfrac{bc+ac+ab}{a+b+c}$.　　(答)　$-17$.

(b)　$\dfrac{c}{a-b}-\dfrac{c}{a+b}$.　　(答)　$\dfrac{3}{8}$.

(10)　計算下列各式：

(a)　$\dfrac{x+y}{6x-12y}\times\dfrac{x^2-4y^2}{(x+y)^2}$.　　(答)　$\dfrac{x+2y}{6(x+y)}$.

(b)　$\dfrac{(a+2b)^2}{a-b}\div\dfrac{ab+2b}{a^2-ab}$.　　(答)　$\dfrac{a(a+2b)}{b}$.

(c)　$\dfrac{x^4-y^4}{(x+y)^3}\times\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\div\dfrac{(x-y)^2}{x+y}$.　　(答)　1.

(d)　$\left(1+\dfrac{x+2}{x^2-x-2}\right)\div\dfrac{x}{x-2}$　　(答)　$\dfrac{1}{x+1}$.

(e)　$\dfrac{2x^2(x+y)}{x^3+y^3}\times\dfrac{x^2-y^2}{3xy}\div\left(1+\dfrac{3xy}{x^2-xy+y^2}\right)$.

(答)　$\dfrac{2x(x-y)}{3y(x+y)}$.

(f)　$\dfrac{\dfrac{x}{1+x}+\dfrac{1-x}{x}}{\dfrac{x}{1+x}-\dfrac{1-x}{x}}$　　(答)　$\dfrac{1}{2x^2-1}$.

(g)　$\dfrac{\dfrac{a}{x^2}+\dfrac{x}{a^2}}{\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{ax}+\dfrac{1}{x^2}}$　　(答)　$a+x$

(h) $$\frac{9x^2-64}{x-1-\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{4+x}}}$$ (答) $4(3x+8)$

# 第五章　一次方程

**引言**　代數中應用最廣的是方程,方程就是一種等式,一次方程是方程的第一階級.今從整數與整式,分數與分式的四則立脚,進此階級,並在應用題中,示算術與代數二樣的解法,使知代數能包括算術,而代數解法尤爲簡單明顯.

**等式種類**　第一章中所講的等式,又可分類如下:

等式
- 恆等式:　是等式中文字無論用任何數值代入都能相等的.如 $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$, $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.
- 方程:　是等式中文字須用特別數值代入,方能相等的.如 $2x-3=5$, $5x+3=8x-6$.

方程中常用 $x, y, z$ 等表未知數,數字及 $a$, $b$, $c$ 等表已知數;含未知數的項,叫做未知項;含已知數的項,叫做已知項或常數項.

**等式性質**　等式有如下的性質:

(1)　等式兩邊各加同數,和仍相等.

(2)　等式兩邊各減同數,差仍相等.

(3)　等式兩邊各用不等於 0 的同數去乘,積仍相等.

(4)　等式兩邊各用不等於 0 的同數去除,商仍相等.

例如 $A=B$,則

(1) $A+m=B+m$。 (2) $A-m=B-m$。

(3) $nA=nB$。 (4) $\frac{A}{n}=\frac{B}{n}$（但 $n$ 不等於0）

以上四種性質，是方程解法的原則，非常重要。

**移項** 依上述性質(1)，(2)，可將等式中任一邊的項，變號移到他一邊，此法叫做移項。

例如 $5x+3=15-x$，兩邊各加 $x$，得 $5x+3+x=15-x+x$ 即 $5x+3+x=15$。再從此式兩邊各減 3，得 $5x+3+x-3=15-3$。即 $5x+x=15-3$。此便是原式右邊的 $-x$ 變作 $+x$ 移到左邊，及原式左邊的 $+3$ 變作 $-3$ 移到右邊。

**方程種類** 方程中的未知數，亦叫做元。有一種未知數的方程，叫做一元方程，有二種三種等未知數的，叫做二元方程，三元方程等。

將方程右邊的各項都移到左邊，再化簡成一整式，則此整式中未知數的次數，便是方程的次數。方程依元數及次數分類，例如：

$5x+3=15-x$ 是一元一次方程，

$2x^2-3x+1=0$ 是一元二次方程，

$2x^2-xy+3y^2=5$ 是二元二次方程。

至如 $x^3+2x^2-3x=1+x^3$，外貌雖是三次方程，但移項後三次項即消去，故仍是二次方程。

**一元一次方程** 求方程中未知數的值，叫做解方程，而此值叫做此方程的根，或適合於此方程。一元一次方程的解法，舉例於下：

【例 1】解 $3x-2\{x-(1-x)\}=5x$。

【解】去括號，$3x-2\{x-1+x\}=5x$，$3x-2x+2-2x=5x$。

將未知項移到左邊，已知項移到右邊，

$$3x-2x-2x-5x=-2.$$

歸併同類項，$-6x=-2$　$\therefore$　$x=\frac{-2}{-6}=\frac{1}{3}$.

（答）$\frac{1}{3}$.

【例 2】解 $\frac{7x}{5}-\frac{1}{14}(x-11)=\frac{3}{7}(x-25)+34$.

【解】用分母的最小公倍數 70 乘各項而去分母：

$$14\times7x-5(x-11)=10\times3(x-25)+34\times70.$$

去括號，　$98x-5x+55=30x-750+2380$.

移項，　$98x-5x-30x=-750+2380-55$.

化簡，　$63x=1575$.　$\therefore$　$x=\frac{1575}{63}=25$.（答）25.

【例 3】解 $(x+1)^2+2(x+3)^2=3x(x+2)+35$.

【解】兩邊實行乘法而去括號：

$$x^2+2x+1+2x^2+12x+18=3x^2+6x+35.$$

移項，　$x^2+2x+2x^2+12x-3x^2-6x=35-1-18$.

化簡，　$8x=16$.　$\therefore$　$x=\frac{16}{8}=2$.　（答）2.

從上各例，得一元一次方程解法如下：

(1)　式中有括號的，先去括號；有分數的，用分母的最小公倍數乘各項，化成整數(卽去分母)。

(2) 將未知項移到左邊，已知項移到右邊(卽移項)。

(3) 兩邊歸併同類項(卽化簡)，使成標準式 $ax=b$ 的形狀。

(4) 用未知數的係數除兩邊。

從一元一次方程標準式 $ax=b$，得 $x=\dfrac{b}{a}$ 是方程的根，就 $a,b$ 的值來討論，有下列各種情形：

(i) 設 $a\neq0$，$b\neq0$，則 $x=\dfrac{b}{a}$，卽有一解答。

(ii) 設 $a\neq0$，$b=0$，則 $x=\dfrac{0}{a}$，卽解答是0。

(iii) 設 $a=0$，$b\neq0$，則 $x=\dfrac{b}{0}=\infty$，卽解答是無窮大，在有限範圍內是不可能。

(iv) 設 $a=0$，$b=0$，則 $x=\dfrac{0}{0}$，卽解答無定，用任何數代 $x$ 都能適合。

**應用題** 解應用問題，須從未知數與已知數的關係，推求未知數，在算術與代數都是如此。今將應用問題分類舉例於下，每例中各有算術與代數二樣解法，以示算術中四則雜題與代數中一次方程應用題相通，互相比較，獲益不淺。

**和差題** 【例 1】一部書有上下二册。今2部的價是4.8元，上册比下册賤0.4元。求上下各一册的價。

[算術解法]上下二册的價是 $4.8元 \div 2 = 2.4元$.

上册的價是 $(2.4元 - 0.4元) \div 2 = 1元$.

下册的價是 $2.4元 - 1元 = 1.4元$.

[代數解法]設下册的價是 $x$ 元，則上册的價是 $(x-0.4)$元，故依題意得方程如下： $2\{x+(x-0.4)\}=4.8$.

去括號， $2x+2x-0.8=4.8$.

移項化簡， $4x=5.6$. $\therefore x=1.4$. $x-0.4=1$.

(答) 上册價 1 元，下册價 1 元 4 角.

[驗算] $2(1元+1.4元)=4.8元$.

分配題 【例 2】 獎勵金 90 元，分給甲乙丙三人，乙比甲少得 7 元，丙比乙少得 10 元. 問各得幾元？

[算術解法]甲比丙多得 $7元+10元=17元$，

故甲乙二人比丙多得 $17元+10元=27元$.

丙所得的 3 倍是 $90元-27元=63元$.

故丙所得是 $63元 \div 3=21元$.

乙所得是 $21元+10元=31元$.

甲所得是 $31元+7元=38元$.

[代數解法]設乙所得是 $x$ 元，則甲所得是 $(x+7)$ 元，丙所得是$(x-10)$元. 故得方程： $x+(x+7)+(x-10)=90$.

去括號移項， $x+x+x=90-7+10$.

化簡， $3x=93$. $\therefore x=31$，

$x+7=38$，$x-10=21$.

（答）　甲 38 元，乙 31 元，丙 21 元。

[驗算]　38元＋31元＋21元＝90元。

年齡題　【例 3】今年父 34 歲，子10歲；問在何時，父年是子年的 5 倍？

[算術解法]現在父子年齡的差是　34歲－10歲＝24歲。

此差永不變動，故父年是子年 5 倍時，父子年齡的差仍舊是24歲.故當時子年是　24歲÷(5－1)＝6 歲。

即所求年數是　10－6＝4，　即在 4 年前。

[代數解法]設所求年數是 $x$ 年前，則當時父年是 $(34-x)$歲，子年是$(10-x)$歲，故得方程如下：

$$34-x=5(10-x)$$

去括號移項，$5x-x=50-34$.　化簡 $4x=16$.　$\therefore x=4$.

（答）　4 年前。

[驗算]　34歲－4歲＝30歲，　5×(10歲－4歲)＝30歲。

[注意]此例若設所求年數是$x$年後，則得$(34+x)=5(10+x)$，解此式得 $x=-4$，即是 4 年前，故照負數根解釋亦合理。

餘不足題　【例 4】布若干匹裝若干箱；如每箱裝 60 匹，則剩 90 匹；如每箱裝 65 匹，則剩一空箱.求匹數及箱數。

[算術解法]依題意，每箱裝 60 匹，則剩 90 匹；每箱裝 65 匹，則不足 65 匹。因每箱多裝(65－60)匹，而發生(90＋65)匹的差，故箱數是：

$$(90+65)\div(65-60)=155\div5=31.$$

匹數是　　$60匹\times31+90匹=1950匹$.

[代數解法]設箱數是 $x$，則匹數是$(60x+90)$或 $65(x-1)$，但此二式相等，故　　$60x+90=65(x-1)$.

去括號移項，　$60x-65x=-65-90$.　化簡，$-5x=-155$，

$$\therefore\quad x=31,\qquad 60x+90=1950.$$

（答）　31 箱，布 1950 匹.

[驗算]　$1950匹\div(31-1)=65匹$.

雞兔題　【例 5】有拾分與廿分鎳幣共 100 個，共值 12 元．問各有幾個？

[算術解法]假使都是拾分幣，則共值是 $10分\times100=1000分$，比題意共值 12 元少 $1200分-1000分=200分$，此即將廿分幣當作拾分幣而來．但將拾分幣與廿分幣交換一個，價值可多 10 分，故廿分幣有 $200分\div10分=20$ 個，而拾分幣有$100個-20個=80個$.

[代數解法]設廿分幣是 $x$ 個，則拾分幣是 $(100-x)$ 個，故得

$$20x+10(100-x)=1200.$$

去括號移項，　　$20x-10x=1200-1000$.

化簡，　　$10x=200$.　$\therefore\ x=20$，$100-x=80$.

（答）　廿分幣 20 個，拾分幣 80 個.

[驗算]　共值是 $20分\times20+10分\times80$

$$=400分+800分=1200分=12元.$$

【例 6】雞鴨每隻的價，雞是 6 角，鴨是 4 角．共買 10 隻，共價 4 元 5 角，問雞鴨各有幾隻？

[算術解法]假使 10 隻都是雞，則共價是 6角×10=60角=6元，比題中多 15 角．將雞鴨交換一隻，價可少 2 角，故鴨數是 15角÷2角$=7\frac{1}{2}$隻，雞數是 10 隻 $-7\frac{1}{2}$隻 $=2\frac{1}{2}$ 隻．但雞鴨是整隻的，不能爲分數，故此題是不可能。

[代數解法]設雞是 $x$ 隻，則鴨是 $(10-x)$ 隻，故得

$$6x+4(10-x)=45.$$

去括號移項， $6x-4x=45-40.$ 化簡， $2x=5.$

$$\therefore\quad x=2\frac{1}{2},\qquad 10-x=7\frac{1}{2}.$$

因雞鴨數不能爲分數，故此題不成立．

工作題 【例 7 】甲乙二人合作一工程，8 日可成．乙一人獨作，12 日可成．求甲一人獨作，要幾日可成？

[算術解法]甲乙合作一日的工程，是全工程的 $\frac{1}{8}$；乙一人獨作一日的工程，是全工程的$\frac{1}{12}$．故甲一人獨作一日的工程，是全工程的$\frac{1}{8}-\frac{1}{12}=\frac{3-2}{24}=\frac{1}{24}$，即甲一人作成的日數是 $1\div\frac{1}{24}=24.$

[代數解法]設甲作成此工程要 $x$ 日，則甲每日所作是$\frac{1}{x}$，乙每日所作是$\frac{1}{12}$，二人每日共作是$\frac{1}{8}$．故得方程如下：

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{12}=\frac{1}{8}.$$

去分母， $24+2x=3x$， 移項化簡， $x=24$.

【答】 甲要 24 日可成.

[驗算] 二人合作完成的日數是 $1\div\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{24}\right)=1\div\frac{3}{24}$ $=1\div\frac{1}{8}=8$.

<u>時鐘題</u> 【例 8 】從三時至四時間，時鐘上兩針相重在何時?

[算術解法]鐘面一周分 60 格，每時中長針走鐘面一周即 60 格，短針走 5 格；故每分鐘長針走 1 格，短針走 $\frac{5}{60}=\frac{1}{12}$ 格，即長針比短針多走 $1-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}$ 格.今在三時，短針在長針前 15 格，故長針要與短針相重的分數是 $15\div\frac{11}{12}=\frac{180}{11}=16\frac{4}{11}$ 分.

[代數解法]設所求時刻是三時後 $x$ 分，則得方程如下:

$$x=\frac{x}{12}+15.$$

去分母， $12x=x+180$.

移項化簡， $11x=180$. $\therefore\ x=\frac{180}{11}=16\frac{4}{11}$.

(答) 在 3 時 $16\frac{4}{11}$ 分.

[驗算] $\dfrac{16\frac{4}{11}}{12}+15=\dfrac{\frac{180}{11}}{12}+15=\dfrac{15}{11}+15=16\dfrac{4}{11}$.

圓運動題 【例 9】$A$, $B$ 二車環行圓湖的周圍, $A$ 車 2 時 45 分鐘行一周, $B$ 車 3 時 30 分鐘行一周. 今同時同處出發, 依同方向而行, 問幾時後再相會?

[算術解法] 行一周的時間, $A$ 車要 $\dfrac{1}{2\frac{45}{60}}$ 時, $B$ 車要 $\dfrac{1}{3\frac{30}{60}}$ 時.

故行一周, $A$ 車比 $B$ 車少費 $\dfrac{1}{2\frac{45}{60}}-\dfrac{1}{3\frac{30}{60}}$ 時, 因此所求的時數是:

$$1\div\left(\frac{1}{2\frac{45}{60}}-\frac{1}{3\frac{30}{60}}\right)=1\div\left(\frac{1}{2\frac{3}{4}}-\frac{1}{3\frac{1}{2}}\right)=1\div\left(\frac{4}{11}-\frac{2}{7}\right)$$

$$=1\div\frac{6}{77}=\frac{77}{6}=12\frac{5}{6}(\text{時}).$$

[代數解法] 設二車行 $x$ 時而相會, 則 $A$ 車行 $\dfrac{x}{2\frac{45}{60}}$ 周, $B$ 車行 $\dfrac{x}{3\frac{30}{60}}$ 周, 而 $A$ 比 $B$ 多行 1 周, 故得方程如下:

$$\frac{x}{2\frac{45}{60}}-\frac{x}{3\frac{30}{60}}=1. \quad \therefore \frac{x}{2\frac{3}{4}}-\frac{x}{3\frac{1}{2}}=1, \quad \frac{4x}{11}-\frac{2x}{7}=1.$$

去分母化簡, $6x=77$. $\therefore$ $x=\dfrac{77}{6}=12\dfrac{5}{6}$.

(答)　要　$12\frac{5}{6}$時即 12時50分。

［驗算］　A 車行 $\dfrac{12\frac{5}{6}}{2\frac{45}{60}}=\dfrac{\frac{77}{6}}{\frac{11}{4}}=\dfrac{4\times77}{6\times11}=\dfrac{14}{3}=4\dfrac{2}{3}$(周)

B 車行 $\dfrac{12\frac{5}{6}}{3\frac{30}{60}}=\dfrac{\frac{77}{6}}{\frac{7}{2}}=\dfrac{2\times77}{6\times7}=\dfrac{11}{3}=3\dfrac{2}{3}$(周)

即 $A$ 車比 $B$ 車多行 $4\frac{2}{3}-3\frac{2}{3}=1$ (周)

從上諸例,得一元一次方程應用題的解法如下:

(1)　十分了解問題的意義.

(2)　決定何者是未知數,而用 $x$ 表示.

(3)　從題中看出有相等關係的二式而作方程.

(4)　解此方程.

(5)　驗算所得的根是否與題意相合?

以上所講的方程,都是一元一次.今用此做基礎,研究二元一次方程,再進習聯立方程.

**聯立方程**　如有方程 $x+y=5$,設 $x$ 是種種的值,可得 $y$ 的種種對應值如下表,故在此方程中,$x$ 與 $y$ 無定值:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x=0$, | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | …… |
| $y=5$, | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | $-1$ | …… |

如再有方程 $x-y=1$，設 $x$ 是種種的值，可得 $y$ 的種種對應值如下表，故在此方程中，$x$ 與 $y$ 亦無定值.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x=$ 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | …… |
| $y=$ 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | …… |

總觀以上二表，$x=3$ 與 $y=2$ 是二表所公有，其餘都非公有.故聯合上列二方程，$x$ 與 $y$ 就有定值，即 $x=3$ 與 $y=2$ 是此二方程的公根.如此二方程中所含未知數有定值的，則此二方程叫做聯立方程.聯立方程亦依元數次數分類.但在一般情形中，要確定 $n$ 個未知數的值，一定要有 $n$ 個方程表此 $n$ 個未知數的關係.

二元一次聯立方程解法

【例 1】解 $7x-3y=-2\cdots\cdots(1)$ $3x-4y=10\cdots\cdots(2)$

【解】 $(1)\times4$， $28x-12y=-8\cdots\cdots(3)$

$(2)\times3$， $9x-12y=30\cdots\cdots(4)$

$(3)-(4)$， $19x=-38$. $\therefore$ $x=-2$.

用 $x=-2$ 代入(1)， $-14-3y=-2$， $\therefore$ $y=-4$.

(答) $x=-2$， $y=-4$.

【例 2】解 $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=1\cdots\cdots(1)$ $\dfrac{x}{4}-\dfrac{2y}{3}=3\cdots\cdots(2)$

【解】 $(1)\times2$， $x+\dfrac{2y}{3}=2\cdots\cdots(3)$

$(3)+(2)$， $\dfrac{5x}{4}=5$， $\therefore$ $x=4$.

用　$x=4$ 代入 (1)，　$2+\frac{y}{3}=1$，　$\therefore\ y=-3$.

(答)　$x=4$，　$y=-3$.

如上二例的解法，叫做加減法，演算的次序如下：

(1)　將各方程化成標準式 $ax+by=c$ 的形狀.

(2)　用合宜的數乘各方程，使 $x$ (或 $y$ )的係數絕對值相等.

(3)　將兩方程的各邊相加或相減（看絕對值相等的係數，異號則相加，同號則相減），化成一個一元一次方程.

(4)　解此一元一次方程，卽得一未知數的值.

(5)　將求得未知數的值，代入原方程任一式，可得他未知數的值.

【例 3】解 $2x+7y=30\cdots\cdots(1)$　$3x-y=-2\cdots\cdots(2)$

【解】 從(1)式，　$y=\frac{30-2x}{7}\cdots\cdots(3)$

從(2)式，　$y=3x+2\cdots\cdots\cdots(4)$

因(3)，(4)的右邊相等，　$\frac{30-2x}{7}=3x+2$.

去分母，　$30-2x=21x+14$.

移項化簡，　$23x=16$.　　$\therefore\ x=\frac{16}{23}$.

將　$x=\frac{16}{23}$ 代入(4)，　$y=\frac{3\times16}{23}+2=4\frac{2}{23}$.

如例 3 的解法，叫做比較法或等置法，演算的次序如下：

(1) 用各方程中一未知數表他未知數的值．

(2) 聯結此相等的二式，作含一未知數的一元一次方程．

(3) 解此方程求得一未知數的值，再從此求他未知數的值。

【例 4】解 $3x-2y=5\cdots\cdots(1)$ $4x+5y+1=0\cdots\cdots(2)$

【解】從(1)式， $y=\dfrac{3x-5}{2}\cdots\cdots(3)$

代入(2)， $4x+\dfrac{5}{2}(3x-5)+1=0.$

去分母， $8x+15x-25+2=0.$

化簡， $23x=23.$ $\therefore$ $x=1.$

將 $x=1$ 代入 (3)， $y=\dfrac{1}{2}(3-5)=-1.$

(答) $x=1,$ $y=-1.$

如例 4 的解法，叫做代入法或替代法，演算的次序如下：

(1) 從一方程中用一未知數表他未知數的值．

(2) 用此式代入他方程中，作含一未知數的一元一次方程。

(3) 解此方程求得一未知數的值，再從此求他未知數的值。

以上三法，解二元一次聯立方程時，可擇便應用。

多元一次聯立方程解法

【例 1】解 $x+2y+z=12\cdots\cdots(1)$

$4x+3y-2z=27\cdots\cdots(2)$

$2x-4y+3z=1\cdots\cdots(3)$

【解】 先從(1)(2)消去 $z$，$(1)\times2+(2)$，$6x+7y=51\cdots(4)$

次從(1)(3)消去 $z$，$(1)\times3-(3)$，　$x+10y=35\cdots\cdots\cdots(5)$

從(5)式，　$x=35-10y,\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$

代入(4)，$6(35-10y)+7y=51$.

去括號化簡，　$53y=159$.　　$\therefore\quad y=3$.

將 $y=3$ 代入 (6)，　$x=35-10\times3=5$.

將 $x=5$，$y=3$，代入 (1)，　$5+2\times3+z=12$，　$\therefore\ z=1$.

(答)　$x=5$，$y=3$，$z=1$.

如上例的解法是一般解法，與前相仿，不過要逐次消去一元，故手續較繁.

【例 2】解　$x+y=7\cdots\cdots(1)$　　$y+z=8\cdots\cdots(2)$

$z+x=9\cdots\cdots(3)$

【解】 將三式各邊相加，　$2x+2y+2z=24$，

$\therefore\quad x+y+z=12\cdots\cdots(4)$

$(4)-(2)$，　$x=4$，　$(4)-(3)$，　$y=3$.　$(4)-(1)$，　$z=5$.

(答)　$x=4$，　$y=3$，　$z=5$.

如例 2 的解法是特殊解法，並無一定的法則，只能隨機應變，應用於特殊情形.

**聯立一次方程應用題**　以前所舉一元一次方程應用題的各例中，可以設二元代表二未知數作聯立方程的很多，讀者可自行試驗. 今另舉數例於下，但此種應用題中，未知數與已知數的關係複雜，用算術解法，較爲曲折繁瑣，故只用代數解法示範：

【例 1】從$A$港到$B$港，有一定速度航行的輪船。若每時速度增2公里，則可早到3時。若每時速度減2公里，則要遲到6時。求兩港距離及原定速度。

【解】 設原定每時速度是$x$公里，預定時間是$y$時。則每時速度是$(x+2)$公里，所要時間是$(y-3)$時；每時速度是$(x-2)$公里，所要時間是$(y+6)$時；故得方程如下：

$$(x+2)(y-3)=xy\cdots\cdots(1)$$

$$(x-2)(y+6)=xy\cdots\cdots(2)$$

(1)化簡，　$-3x+2y=6\ \cdots\cdots(3)$

(2)化簡，　$3x-y=6\ \cdots\cdots(4)$

(3)+(4)，　$y=12.$

將 $y=12$ 代入 (4)，　$3x-12=6.\quad\therefore x=6.$

又　$xy=6\times12=72.$

(答) 兩港間距離72公里，原定每時速度6公里。

[驗算] 72公里$\div(6+2)$公里$=9$(時)$=(12-3)$時。

【例 2】有金銀銅合金三種：甲種含金2份，銀3份，銅4份；乙種含金3份，銀4份，銅5份；丙種含金4份，銀3份，銅5份。今要熔成另一種合金，含金15公分，銀18公分，銅24公分。問三種應各取幾公分？

【解】 設甲種取$x$公分，乙種取$y$公分，丙種取$z$公分，則得

$$\frac{2}{2+3+4}x+\frac{3}{3+4+5}y+\frac{4}{4+3+5}z=15,$$

$$\therefore\quad \frac{2}{9}x+\frac{1}{4}y+\frac{1}{3}z=15\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{3}{2+3+4}x+\frac{4}{3+4+5}y+\frac{3}{4+3+5}z=18,$$

$$\therefore\quad \frac{1}{3}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{4}z=18\cdots\cdots(2)$$

$$\frac{4}{2+3+4}x+\frac{5}{3+4+5}y+\frac{5}{4+3+5}z=24,$$

$$\therefore\quad \frac{4}{9}x+\frac{5}{12}y+\frac{5}{12}z=24\cdots\cdots(3)$$

去分母，　$8x+9y+12z=540\cdots\cdots(4)$

$4x+4y+3z=216\cdots\cdots(5)$

$16x+15y+15z=864\cdots\cdots(6)$

$(5)\times4-(4)$，　$8x+7y=324\cdots\cdots(7)$

$(5)\times5-(6)$，　$4x+5y=216\cdots\cdots(8)$

$(8)\times2-(7)$，　$3y=108$，　$\therefore\quad y=36.$

將 $y=36$ 代入 (8)，　$4x+5\times36=216$，　$\therefore\quad x=9.$

將 $x=9$，$y=36$ 代入 (5)，　$4\times9+4\times36+3z=216$，

$\therefore\quad z=12.$

(答)　甲種 9 公分，乙種 36 公分，丙種 12 公分。

[驗算]所求合金中，金是

$$\left(\frac{2}{9}\times9+\frac{1}{4}\times36+\frac{1}{3}\times12\right)\text{公分}=15\ \text{公分}.$$

[注意]此例亦可只設二元來解，即設 $x$，$y$ 同前，則丙種取 $(15+18+24-x-y)$ 即 $(57-x-y)$ 公分，請讀者自解.

【例 3】甲乙二人共有款 46 元，乙丙二人共有款 40 元，甲丙二人共有款 32 元. 問各人有款若干?

【解】 設甲乙丙三人各有款 $x$ 元，$y$ 元，$z$ 元，則得

$x+y=46$，……(1)　$y+z=40$……(2)　$x+z=32$……(3)

仿前多元一次方程例 2 的解法，得 $x=19$，$y=27$，$z=13$.

(答) 甲 19 元，乙 27 元，丙 13 元.

[驗算]甲乙共 19元+27元=46元.

## 本 章 練 習 題

(1) 將下列等式，依恆等式方程分類，並將方程再分種類：

(a) $2+3x=38$.　　(b) $2a+1=3a$.

(c) $x^2+2x+1=(x+1)^2$.

(d) $a^2+2a+1=(2a-1)^2-a^2$.

(e) $x^2+xy+y^2=x+y$.

(f) $3x-5=1-x^2$.

(2) 將下列等式的各項都移至左邊，並化簡：

(a) $7x-7=5x-12$.　　(答) $2x+5=0$.

(b) $4(4x-9)=8(x-1)+8$.　　(答) $8x-31=0$.

(c) $2x+15=27-4x$.　　(答) $6x-12=0$.

(d) $7(25-x)-2x=2(3x-25)$　(答) $-15x-225=0$.

(e)　$3(x-1)^2-3(x^2-1)=x-15.$　(答)　$-7x+21=0.$

(f)　$(x-1)(x+4)=x^2-3x+6.$　(答)　$6x-10=0.$

(3) 解下列各方程:

(a)　$25+6x=10x-15.$　(答)　10.

(b)　$5x-2\{x+4(1+2x)\}=0.$　(答)　$-\frac{8}{11}.$

(c)　$7(4x-3)=5(4x+17)-50.$　(答)　7.

(d)　$5y+6(y-5)=2(y+5)+5(y-4).$　(答)　5.

(e)　$2\{3x-2(x+1)\}=10.$　(答)　7.

(f)　$2y+1-\{y-1-(2-y)\}=4.$　(答)　2.

(g)　$\frac{1}{5}(x+5)=5-\frac{1}{10}(x-5)$　(答)　15.

(h)　$\frac{3x}{4}-\frac{x}{2}=\frac{1}{8}+\frac{9x}{10}-\frac{7x}{16}.$　(答)　1.

(i)　$\frac{x}{4}+3=\frac{1}{2}\left(4-\frac{x}{3}\right)-\frac{5}{6}+\frac{1}{3}\left(11-\frac{x}{2}\right)$　(答)　$3\frac{1}{7}.$

(j)　$\frac{3x+4}{3}-\frac{5x-4}{5}=2x+1.$　(答)　$\frac{17}{30}.$

(k)　$(x+1)^2=x\{6-(1-x)\}-2.$　(答)　1.

(4)　甲有款 15 元,乙有款 18 元,問甲給乙幾元,則甲所有恰是乙所有的一半?　(答)甲給乙 4 元.

(5)　王君往返於某地,往時每時行 4 里,返時每時行 3 里.今

往返共費 7 時，求某地的距離. (答) 12 里.

(6) 男工 10 人女工 15 人每日共發工錢 31 元 5 角. 已知男工每人的工錢是女工的 2 倍. 求男女工每人每日的工錢.

(答) 男工 1 元 8 角，女工 9 角.

(7) 獎勵金 1000 元，分給甲乙丙丁四職工. 甲比乙多 25 元，丙比甲乙的和多 5 元，丁比甲多 45 元，問四人各得幾元?

(答) 甲 200 元，乙 175 元，丙 380 元，丁 245 元.

(8) 有人將現款分給災民，每人 5 元，尚餘 7 元. 若每人 5 元 5 角，則恰好分完. 求現款及災民數. (答) 14 人，77 元.

(9) 有矩形地，長比寬多 9 尺. 若長寬各增 3 尺，則面積增 144 方尺，求原面積. (答) 486方尺.

(10) 有人將款買茶葉，可買上茶 24 斤，或次茶 36 斤. 但知上茶每斤價比次茶貴 6 角 4 分，問二種每斤價各若干?

(答) 上茶 1.92 元，次茶 1.28 元.

(11) 甲有現款 210 元，乙有現款 50 元；今甲用去的款恰是乙用去的 3 倍，結果甲所餘是乙所餘的 4 倍. 問甲乙各用去多少?

(答) 不可能.

(12) 王君有現款 1000 元，預算分作兩部分放出，一部分年利 6 厘，他部分年利 5 厘，則一年可得利息共 55.5 元. 問兩部分各是幾元? (答) 年利 6 厘的 550 元，5 厘的 450 元.

(13) 甲乙丙三人合資辦貨，甲出全額的 $\frac{1}{2}$ 少 5 元，乙出全

額的$\frac{1}{3}$多 12 元，丙出 40 元．問甲乙各出幾元?

（答）　甲 136 元，乙 106 元．

(14)　五角票與一角票共 50 張，共值 15 元4角，問各有幾張?

（答）　一角票 24 張，五角票 26 張．

(15)　有人販賣棉花與棉紗，買價共計800元．後來賣出棉花得利$\frac{1}{10}$，棉紗得利$\frac{2}{10}$，統算共得利$\frac{18}{100}$，問二種買價各是多少?

（答）　棉花 160 元，棉紗 640 元．

(16)　甲每月儲蓄 20 元，乙每月儲蓄 10 元．現在甲共儲 100 元，乙共儲 40 元．問何時甲的儲金是乙的 3 倍?　（答）　二月前．

(17)　有水池用甲管注水，5 時水滿．用乙管流出，7 時流乾．今空池並用二管，問要幾時水滿?　（答）　17 時 30 分．

(18)　$A$, $B$ 二車繞行圓路一周，$A$ 要 16 分鐘，$B$ 要 24 分鐘，而方向相反．問每隔多少時可以相會?

(19)　解下列各組聯合方程(各用三種方法)：

(a)　$8x+3y=24$, $2x+y=6$.　（答）　$x=3, y=0$.

(b)　$\frac{x}{4}-\frac{y}{3}=1$, $\frac{x}{7}+\frac{y}{6}=7$.　（答）　$x=28$, $y=18$.

(c)　$(x+5)(y+5)=xy$, $(x+3)(y+6)=xy$.

（答）　$x=-1$, $y=-4$.

(d)　$(x+1)(y+5)=(x+5)(y+1)$,

$xy+x+y=(x+2)(y+2)$.　（答）　$x=y=-2$.

(e) $3x-2y=-8$, $6x+5y=2$. (答 $x=-\frac{4}{3}$; $y=2$.

(f) $3x-4y=-5$, $4x-5y=1$ (答) $x=29$, $y=23$.

(g) $x-y=1, xy-(x-1)(y-1)=6(y-1)$

(答) $x=2\frac{1}{2}, y=1\frac{1}{2}$.

(h) $y=9-\frac{3}{2}x$, $2y-5=\frac{x}{4}$. (答) $x=4$, $y=3$.

(i) $\frac{3y}{7}+\frac{2x}{5}=13$, $y+\frac{3x}{5}=27$. (答) $x=10, y=21$.

(20) 解下列各組聯立方程:

(a) $x+y+z=28$, $x+y-z=2$, $x-y+z=14$.

(答) $x=8$, $y=7$, $z=13$.

(b) $x+y-z=17$, $y+z-x=7$, $z+x-y=13$.

(答) $x=15$, $y=12$, $z=10$.

(c) $x+y+z=6$, $x+y+u=7$, $x+z+u=8$,

$y+z+u=9$. (答) $x=1$, $y=2$, $z=3$, $u=4$.

(d) $x+2y=5$, $y+2z=8$, $z+2u=11$, $u+2x=6$.

(答) $x=1$, $y=2$, $z=3$, $u=4$.

(21) 甲茶3斤與乙茶2斤,共價 11 元2角.又甲茶6斤與乙茶5斤,共價24元4角.求各種茶每斤的價.

(答) 甲茶 2 元 4 角,乙茶 2 元.

(22) 長 39 尺的布,裁成長短二段.長段的對折,恰是短段 3 折的 5 倍.求二段各長幾尺? (答) 30 尺, 9 尺.

(23) 張君有存款二種,甲種的年利率 5 厘,乙種的年利率 4 厘 5 毫,一年共得利息 568.8 元.若二種的利率交換,則一年可多得利息 6.2 元.問二種存款各是多少?

(答) 甲種 5400 元,乙種 6600 元.

(24) 十年前成本 125 元的貨物,現在要 425 元.已知現在比十年前,材料漲貴 2.5 倍,工錢漲貴 2 倍.問十年前此貨物的材料及工錢各要幾元? (答) 材料 100 元,工錢 25 元.

(25) 有甲乙二架印刷機,甲機 14 時的工作,恰等於乙機 6 時的工作.今有一宗印刷品,用甲機若干時後改用乙機,共計 8 時印成.問二機各用幾時? (答) 甲 $3\frac{1}{2}$時, 乙 $4\frac{1}{2}$時.

(26) 有一事,甲作 10 日及乙作 12 日可完.今甲乙合作 8 日後,乙輟業甲再續作 7 日完工.問二人獨作,各要幾日可完?

(答) 甲 25 日,乙 20 日.

(27) 在 1500 公尺賽跑,甲勝乙 25 秒.若甲退後 80 公尺出發,則甲後到 10 公尺.求甲乙每分鐘的速度.

(答) 甲 168 公尺, 乙 $160\frac{80}{157}$公尺.

(28) 有矩形地,若長增 5 尺,寬減 6 尺,或長減 5 尺,寬增9 尺,面積都相等.求此地的長及寬. (答) 長 25 尺,寬36尺.

(29) 一種格子紙，若增 3 行，每行多寫 4 字，共可多寫 224 字.若減 2 行，每行少寫 3 字，共要少寫 145 字.問原有幾行，每行幾字？ (答) 29行，每行 32 字.

(30) 某處開遊藝會，入場券分 2 元，1 元，5 角三種.共售券 520 張，共得款 559.5 元.只知 1 元券比 5 角券多售出 103 張.求三種券各售出幾張？

(答) 2 元券 115 張，1 元券 254 張，5 角券 151 張.

(31) 有一工程，甲 8 日乙 5 日可成，或甲 6 日丙 9 日亦可成，又乙 10 日丙 6 日亦可成.問各人獨作，各要幾日？

(答) 甲 12 日，乙 15 日，丙 18 日.

(32) 水池上有甲乙丙三管注水；開甲乙二管，要 12 分鐘注滿.開乙丙二管，要 20 分鐘注滿.開甲丙二管，要 15 分鐘注滿.問三管齊開，要幾分鐘注滿？ (答) 10 分鐘.

# 第六章　開方及根數根式

**引言**　習過一次方程，本可進習二次方程．但解一次方程，只須四則計算，而解二次方程，則須用到開方．所謂開方者，就是乘法中自乘的反求．因開方常有開不盡的時候，所以又發生根數根式的名詞．本章從開方講起，連帶講到根數根式，以作進至二次方程的津梁．

**方根**　設有 $x^n=a$ 的關係式，則 $a$ 叫做 $x$ 的 $n$ 乘方，而 $x$ 叫做 $a$ 的 $n$ 乘根或 $n$ 方根，常用 $x=\sqrt[n]{a}$ 表示；此$\sqrt{\phantom{a}}$ 叫做根號，$n$ 叫做根指數．但二乘根特稱平方根（記平方根可不必寫出根指數，如 $\sqrt[2]{a}$ 可省寫作$\sqrt{a}$），三乘根特稱立方根；而某數的一乘根，便是他的本身．

**方根性質**　因 $3^2=9$，$(-3)^2=9$，故 $\sqrt{9}=3$ 或 $-3$（3或 $-3$ 可合寫爲 $\pm3$，此$\pm$叫做複號），就一般數依乘法符號規則考察，卽有：

(1)　正數 $a$ 的偶數方根有二，絕對值相同而符號相反．如設 $n$ 是偶數，則可用$\sqrt[n]{a}$與$-\sqrt[n]{a}$ 表此二根，但常用正根．

又因 $2^3=8$，$5^3=125$，故 $\sqrt[3]{8}=2$，$\sqrt[3]{125}=5$；而負數的三乘方決不是正數，故正數的立方根也必不是負數．又因$(-2)^3=-8$，$(-5)^3=-125$，故$\sqrt[3]{-8}=-2$，$\sqrt[3]{-125}=-5$；而正數的

三乘方決不是負數，故負數的立方根必不是正數。再就一般數依乘法符號規則考察，卽有：

(2) 正數 $a$ 的奇數方根必有一正數，負數 $a$ 的奇數方根必有一負數。

又因無論何數的平方，決不能得負數，故負數無平方根，再依乘法符號規則考察，卽有：

(3) 負數的偶數方根，是沒有的。

**根指數律** 依方根的意義，得根指數律如下，但式中 $a, b, c$ 都是正數，$m, n$ 都是正整數：

(1) $\sqrt[n]{a^n}=a$，$(\sqrt[n]{a})^n=a$.

(2) $\sqrt[n]{abc}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}$.

(3) $\sqrt[n]{a^{mn}}=a^m$. (4) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

【例 1】 $-\sqrt{16}=-4$. $-\sqrt[3]{-27}=-(-3)=3$

$\sqrt{(-5)^2}=\sqrt{25}=5$.

$\sqrt{(-3)(-12)}=\sqrt{36}=6$.

【例 2】 $\sqrt{9a^4}=\sqrt{9}\sqrt{a^4}=3a^2$.

$$\sqrt[3]{\frac{8a^9b^6}{27x^3y^6}}=\frac{\sqrt[3]{8a^9b^6}}{\sqrt[3]{27x^3y^6}}=\frac{\sqrt[3]{8}\sqrt[3]{a^9}\sqrt[3]{b^6}}{\sqrt[3]{27}\sqrt[3]{x^3}\sqrt[3]{y^6}}=\frac{2a^3b^2}{3xy^2}.$$

**開方** 求一數或一式的方根的方法，叫做開方。但求平方根特稱開平方，求立方根特稱開立方。記憶下表中簡單整數的平方及立方，在開方時較爲便利：

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 平方 | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | 64 | 81 | 100 |
| 立方 | 1 | 8 | 27 | 64 | 125 | 216 | 343 | 512 | 729 | 1000 |

從上表立卽可得下列諸式：

$\sqrt{1}=1$,　$\sqrt{4}=2$,　$\sqrt{9}=3$,　$\sqrt{16}=4$,

$\sqrt{25}=5$,　$\sqrt{36}=6$,　$\sqrt{49}=7$,　$\sqrt{64}=8$,

$\sqrt{81}=9$,　$\sqrt{100}=10$,　$\sqrt[3]{1}=1$,　$\sqrt[3]{8}=2$,

$\sqrt[3]{27}=3$,　$\sqrt[3]{64}=4$,　$\sqrt[3]{125}=5$,　$\sqrt[3]{216}=6$,

$\sqrt[3]{343}=7$,　$\sqrt[3]{512}=8$,　$\sqrt[3]{729}=9$,　$\sqrt[3]{1000}=10$.

**整式開平方**　單項式開平方，已見上例。多項式開平方，舉例於下：

【例 1】求 $a^2+2ab+b^2$ 的平方根。

【解】　因 $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$，　故 $\sqrt{a^2+2ab+b^2}=a+b$.

上式是依析因式法開方，亦可如下演算：

$$
\begin{array}{r|l}
 & \underline{a+b} \\
 & \underline{a^2+2ab+b^2} \\
 & \underline{a^2} \\
2a+b & 2ab+b^2 \\
 & \underline{2ab+b^2} \\
 & \qquad 0
\end{array}
$$

（答）　$a+b$.

【例 2】求 $9x^2-30xy+25y^2$ 的平方根。

【解】 與上例比較:

$$
\begin{array}{r|l}
 & a \qquad b \\
 & 3x-5y \\ \hline
 & 9x^2-30xy+25y^2 \\
 & 9x^2 \qquad\qquad\quad =a^2 \\ \hline
 & -30xy+25y^2 \\
2a=6x & \\
-b=-5y & \\ \hline
2a-b=6x-5y & -30xy+25y^2=(2a-b)(-b) \\ \hline
 & \qquad\qquad 0
\end{array}
$$

普 通 寫 法

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x-5y \\ \hline
 & 9x^2-30xy+25y^2 \\
 & 9x^2 \\ \hline
6x-5y & -30xy+25y^2 \\
 & -30xy+25y^2 \\ \hline
 & \qquad\quad 0
\end{array}
$$

（答） $3x-5y$.

【例 3 】求 $4x^4+y^4-12x^3y-6xy^3+13x^2y^2$ 的平方根.

【解】 先將原式依 $x$ 的降冪排列,再依上例演算如下:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2-3xy+y^2 \\ \hline
 & 4x^4-12x^3y+13x^2y^2-6xy^3+y^4 \\
 & 4x^4 \\ \hline
4x^2-3xy & -12x^3y+13x^2y^2 \\
 & -12x^3y+\ \ 9x^2y^2 \\ \hline
4x^2-6xy+y^2 & \qquad\qquad 4x^2y^2-6xy^3+y^4 \\
 & \qquad\qquad 4x^2y^2-6xy^3+y^4 \\ \hline
 & \qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

（答） $2x^2-3xy+y^2$.

如上例 2, 3, 是整式開平方的普通法則,演算的次序如下:

(1) 將整式依某文字的降冪排列.

(2) 求第一項的平方根,是根的第一項.

(3) 從原式減已得根的平方,所餘是第一餘積.

(4) 用二倍已得根做第一試除式, 去除第一餘積的第一項,

得商是根的後一項。

(5)　用新得根乘第一試除式與新得根的和，從第一餘積減去，得第二餘積。

(6)　以後照(4)(5)的方法繼續進行。

數目開平方　數目開平方，可從小數點起，向左向右每二位分作一段，每段當作一項，仿照整式開平方法演算。

【例 1】求 576081 的平方根。

【解】　與整式開平方對照

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad a \qquad b \qquad c \\
 & 700+50+9 \\
\hline
 & 57|60|81 \\
 & 49\;00\;00 \;=\; a^2 \\
\hline
2a=1400 & 86081 \\
b=\;\;\;50 & \\
\hline
2a+b=1450 & 72500 \;=(2a+b)b \\
\hline
2(a+b)=1500 & 13581 \\
c=\;\;\;\;9 & \\
\hline
2(a+b)+c=1509 & 13581=\{2(a+b)+c\}c \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

普通寫法

$$
\begin{array}{r|l}
 & 7\;5\;9 \\
\hline
 & 576081 \\
 & 49 \\
\hline
145 & 860 \\
 & 725 \\
\hline
1509 & 13581 \\
 & 13581 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

(答)　759.

【例 2】求 547.56 的平方根。

【解】　與整式開平方對照

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad a \qquad b \qquad c \\
 & 20+3+0.4 \\
\hline
 & 547.56 \\
 & 400 \;=\; a^2 \\
\hline
2a=40 & 147 \\
b=\;\;3 & \\
\hline
2a+b=43 & 129 \;=(2a+b)b \\
\hline
2(a+b)=46 & 18\;56 \\
c=0.4 & \\
\hline
2(a+b)+c=46.4 & 18\;56=\{2(a+b)+c\}c \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

普通寫法

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2\;3.\;4 \\
\hline
 & 547.56 \\
 & 4 \\
\hline
43 & 147. \\
 & 129 \\
\hline
464 & 18\;56 \\
 & 18\;56 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

(答)　23.4.

整式開立方　單項式開立方，例見前根指數律中。多項式開立方，舉例如下：

【例 1】求 $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ 的立方根。

【解】 因 $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$.

故 $\sqrt[3]{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}=a+b$.

上例是依析因式法開立方，亦可如下演算：

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad a+b \\
\hline
 & a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\
 & a^3 \\
\hline
3a^2 \qquad\qquad & \quad 3a^2b+3ab^2+b^3 \\
(3a+b)b & \\
\hline
3a^2+3ab+b^2 & \quad 3a^2b+3ab^2+b^3 \\
\hline
 & \qquad\qquad 0
\end{array}
$$

（答） $a+b$.

【例 2】求 $8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3$ 的立方根。

【解】

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad a \qquad b \\
 & \quad 2x-3y \\
\hline
 & 8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3 \\
 & 8x^3 \quad =a^3 \\
\hline
3a^2=12x^2 \qquad\qquad\qquad\qquad & -36x^2y+54xy^2-27y^3 \\
(3a+b)b=(6x-3y)(-3y) & \\
\hline
3a^2+(3a+b)b=12x^2-18xy+9y^2 & -36x^2y+54xy^2-27y^3 \\
 & \quad =\{3a^2+(3a+b)b\}b \\
\hline
 & \qquad\qquad 0
\end{array}
$$

（答） $2x-3y$.

上式中的 $a$, $b$ 等字，是指明與上例對照。

【例 3】求 $x^6-3x^5+9x^4-13x^3+18x^2-12x+8$ 的立方根。

【解】

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2-x+2 \\
\hline
 & x^6-3x^5+9x^4-13x^3+18x^2-12x+8 \\
 & x^6 \\
\hline
3x^4 & -3x^5+9x^4-13x^3 \\
(3x^2-x)(-x) & \\
\hline
3x^4-3x^3+x^2 & -3x^5+3x^4-\quad x^3 \\
\hline
3(x^2-x)^2 & 6x^4-12x^3+18x^2-12x+8 \\
\{3(x^2-x)+2\}\times 2 & \\
\hline
3x^4-6x^3+9x^2-6x+4 & 6x^4-12x^3+18x^2-12x+8 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

答) $x^2-x+2$.

如上例 2, 3, 是整式開立方的普通方法,演算的次序如下:

(1) 將原式依某文字的降冪排列.

(2) 求第一項的立方根,是根的第一項.

(3) 從原式減已得根的立方,所餘是第一餘積.

(4) 用已得根平方的三倍做第一試除式,去除第一餘積的第一項,得商是根的後一項.

(5) 將第一項根三倍與新得根相加,再用新得根去乘,得積加於第一試除式,作第一全除式.

(6) 用新得根乘第一全除式,從第一餘積減去,所餘是第二餘積.

(7) 以後照(4)(5)(6)方法繼續進行.

數目開立方 數目開立方,可從小數點起,向左向右每三位分作一段,每段當作一項,仿照整式開立方的方法演算.

【例】 求 100544.625 的立方根.

【解】

$$\begin{array}{r|l}
 & \ \ 4\quad 6.\quad 5 \\ \cline{2-2}
 & 100544.625 \\
 & \ \ 64 \\ \hline
3\times 40^2=4800 & \ \ 36544 \\
(3\times 40+6)\times 6=\ \ 756 & \\ \cline{1-1}
5556 & \ \ 33336 \\ \cline{2-2}
 & \quad 3208\ 625 \\
3\times 460^2=634800 & \\
(3\times 460+5)\times 5=6925 & \quad 3208\ 625 \\ \cline{1-2}
641725 & \qquad\ 0
\end{array}$$

(答)　46.5.

分式與分數開方　依方根的指數律，分式與分數開方，只須將分母分子分別開方便得，不再舉例.

以上已講過開方的法則，今再講開不盡的方根.

**根數，根式**　用開方法求$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$等，無論算到多少位，終不能開盡，而所得的是無限小數，決不是循環小數，即不能化作分數.如此之數，既不是整數，又不是分數，叫做無理數.但如$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$等開不盡的方根，特稱為不盡根或根數.故根數不過是無理數的一種，在無理數中，除根數外，尚有許多種，如圓周率 $\pi=3.1415\cdots\cdots$便是一例.對於無理數而言，稱尋常的整數分數及 0，叫做有理數.故數的種類，可列表如下:

$$\text{數}\begin{cases}\text{有理數}\begin{cases}\text{整數(正，負)及 0}\\ \text{分數(正，負)}\quad\begin{cases}\text{有限小數}\\ \text{循環小數}\end{cases}\end{cases}\\ \\ \text{無理數}\begin{cases}\text{根數(正，負)}\\ \pi\text{ 及其他}\end{cases}\end{cases}$$

代數式的方根不能開盡時，叫做根式或無理式．對於無理式而言，稱尋常的整式分式，叫做有理式．例如$\sqrt{a+2b}$，$\sqrt[3]{x^2+2x+3}$等是無理式．但無理式並不一定表無理數．如$\sqrt{a+2b}$，設 $a=2$，$b=1$，則 $\sqrt{a+2b}=\sqrt{4}=2$ 表有理數；又設 $a=1$，$b=2$，則$\sqrt{a+2b}=\sqrt{5}$表無理數．故代數式可分類列表如下：

$$\text{代數式}\begin{cases}\text{有理式}\begin{cases}\text{整式}\begin{cases}\text{單項式}\\ \text{多項式}\end{cases}\\ \text{分式}\end{cases}\\ \text{無理式}\end{cases}$$

根數或根式的根指數，便是他的次數．根指數相同的根數或根式，叫做同次根數或同次根式．根指數相同，而根號內的數或式亦相同的根數或根式，叫做同類根數或同類根式．如 $3\sqrt{2}$，$5\sqrt{2}$是同類根數，$m\sqrt{a}$，$n\sqrt{a}$ 是同類根式．

根數．根式的變形　依前述根指數律，可將根數根式變形，有下列各種方法：

(i)　根號內如有能開盡的因數因式，可提出至根號外，使根數根式化簡．

【例 1】$\sqrt{8}=\sqrt{4\times2}=2\sqrt{2}$，　$\sqrt{75}=\sqrt{25\times3}=5\sqrt{3}$，

$$\sqrt[3]{24}=\sqrt[3]{8\times3}=2\sqrt[3]{3}.$$

【例 2】$\sqrt{180x^3y^4z^5}=\sqrt{36x^2y^4z^4\times5xz}=6xy^2z^2\sqrt{5xz}$．

$$\sqrt{8a^3(x+y)^5}=\sqrt{4a^2(x+y)^4\times2a(x+y)}$$

$$=2a(x+y)^2\sqrt{2a(x+y)}.$$

(ii)　將有理數有理式依根指數乘方，移入括號內．

【例 1】 $3\sqrt{5}=\sqrt{3^2\times 5}=\sqrt{45}$．

$$\frac{1}{2}\sqrt[3]{128}=\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^3\times 128}=\sqrt[3]{\frac{128}{8}}=\sqrt[3]{16}.$$

【例 2】 $3a\sqrt{5x}=\sqrt{(3a)^2\times 5x}=\sqrt{45a^2x}$．

$$2xy^2\sqrt[3]{3x^2y}=\sqrt[3]{(2xy^2)^3\times 3x^2y}=\sqrt[3]{24x^5y^7}.$$

(iii)　變化根指數　依公式 $\sqrt[m]{a}=\sqrt[mn]{a^n}$，用同數乘根指數及根號內指數，可將根指數變化，故不同次數的諸根數或根式，可化爲同次，卽用各根指數的最小公倍數作公共根指數．

【例 1】將 $\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{3}$，$\sqrt[4]{5}$ 化成同次根數．

【解】 各根數中，根指數 2, 3, 4 的最小公倍數是 12，而 $12=2\times 6=3\times 4$．故

$$\sqrt{2}=\sqrt[12]{2^6}=\sqrt[12]{64},\quad \sqrt[3]{3}=\sqrt[12]{3^4}=\sqrt[12]{81},$$
$$\sqrt[4]{5}=\sqrt[12]{5^3}=\sqrt[12]{125}.$$

【例 2】將 $\sqrt[m]{a}$，$\sqrt[n]{b^2}$，$\sqrt[p]{c^3}$ 化成同次根數．

【解】 用 $m, n, p$ 的最小公倍數 $mnp$ 做公共根指數，得

$$\sqrt[m]{a}=\sqrt[mnp]{a^{np}},\quad \sqrt[n]{b^2}=\sqrt[mnp]{b^{2mp}},\quad \sqrt[p]{c^3}=\sqrt[mnp]{c^{3mn}}.$$

【例 3】比較 $\sqrt{5}$，$\sqrt[3]{4}$，$\sqrt[4]{9}$ 的大小．

【解】 $\sqrt[4]{9}=\sqrt[4]{3^2}=\sqrt{3}$，故可用 2, 3 的最小公倍數 6 做公共根指數，化作同次根數．

$$\sqrt{5}=\sqrt[6]{5^3}=\sqrt[6]{125},\qquad \sqrt[3]{4}=\sqrt[6]{4^2}=\sqrt[6]{16},$$

$\sqrt[4]{9}=\sqrt{3}=\sqrt[6]{3^3}=\sqrt[6]{27}$. 故 $\sqrt{5}>\sqrt[4]{9}>\sqrt[3]{4}$.

(iv)　分母有理化　分數或分式的分母是根數或根式時，可依公式 $\dfrac{m}{\sqrt{a}}=\dfrac{m\sqrt{a}}{(\sqrt{a})^2}=\dfrac{m\sqrt{a}}{a}$，不變分數或分式的值，而取去分母的根號，此種方法，叫做分母有理化。

【例 1】$\dfrac{3}{\sqrt{5}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$,

$$\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{\frac{2\times3}{3\times3}}=\sqrt{\frac{6}{9}}=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

【例 2】$\dfrac{36}{\sqrt{5a}}=\dfrac{36\sqrt{5a}}{(\sqrt{5a})^2}=\dfrac{36\sqrt{5a}}{5a}$,

$$\sqrt[3]{\frac{3x}{4y^2z}}=\sqrt[3]{\frac{6xyz^2}{8y^3z^3}}=\frac{\sqrt[3]{6xyz^2}}{\sqrt[3]{8y^3z^3}}=\frac{\sqrt[3]{6xyz^2}}{2yz}.$$

既知根數或根式變形的方法，即可進習根數或根式的四則.

根數根式的加減　同類根數或根式的加法及減法，可依下列公式計算，但在實行加減之前，須先化簡：

$$m\sqrt[k]{a}+n\sqrt[k]{a}-p\sqrt[k]{a}=(m+n-p)\sqrt[k]{a}.$$

【例 1】化簡　$2\sqrt{8}+5\sqrt{72}-7\sqrt{18}$.

【解】$2\sqrt{8}+5\sqrt{72}-7\sqrt{18}$

$$=2\sqrt{4\times2}+5\sqrt{36\times2}-7\sqrt{9\times2}$$

$$=4\sqrt{2}+30\sqrt{2}-21\sqrt{2}$$

$$=(4+30-21)\sqrt{2}=13\sqrt{2}.$$

【例 2】化簡 $\sqrt{a^2b}+2a\sqrt{b}-5\sqrt{a^2b}$.

【解】 $\sqrt{a^2b}+2a\sqrt{b}-5\sqrt{a^2b}$

$$=a\sqrt{b}+2a\sqrt{b}-5a\sqrt{b}$$

$$=(a+2a-5a)\sqrt{b}=-2a\sqrt{b}.$$

根數根式的乘除 同次根數或根式的乘法及除法，可依下列公式計算：

$$\sqrt[m]{a}\ \sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{ab},\qquad \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}=\sqrt[m]{\frac{a}{b}}.$$

若次數不同，則可先化爲同次，然後計算．若分母是多項的根數或根式，則可依下列公式使分母有理化：

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b.$$

【例 1】化簡 $(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{18})\sqrt{2}$.

【解】 $(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{18})\sqrt{2}$

$$=(\sqrt{2})^2-\sqrt{3}\sqrt{2}+\sqrt{18}\sqrt{2}$$

$$=2-\sqrt{6}+\sqrt{36}$$

$$=2-\sqrt{6}+6=8-\sqrt{6}.$$

【例 2】化簡 $(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})(5\sqrt{3}-6\sqrt{2})$.

【解】 $(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})(5\sqrt{3}-6\sqrt{2})$

$$=10(\sqrt{3})^2-12\sqrt{2}\sqrt{3}+15\sqrt{2}\sqrt{3}-18(\sqrt{2})^2$$

$$=30-12\sqrt{6}+15\sqrt{6}-36=3\sqrt{6}-6.$$

【例 3】求 $(\sqrt{3}+\sqrt{2})\div(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ 的商.

【解】 $$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$$
$$=\frac{3+2\sqrt{3}\sqrt{2}+2}{3-2}=5+2\sqrt{6}.$$

【例 4】化簡 $\dfrac{1}{\sqrt{7}+2\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{7}-2\sqrt{2}}$.

【解】 $$\text{原式}=\frac{\sqrt{7}-2\sqrt{2}}{(\sqrt{7}+2\sqrt{2})(\sqrt{7}-2\sqrt{2})}$$
$$-\frac{\sqrt{7}+2\sqrt{2}}{(\sqrt{7}-2\sqrt{2})(\sqrt{7}+2\sqrt{2})}$$
$$=\frac{\sqrt{7}-2\sqrt{2}-\sqrt{7}-2\sqrt{2}}{(\sqrt{7})^2-(2\sqrt{2})^2}$$
$$=\frac{-4\sqrt{2}}{7-8}=4\sqrt{2}.$$

## 本　章　練　習　題

(1)　求下列各式的平方根:

(a)　$x^2-10x+25$.　　(答)　$x+5$.

(b)　$25x^2-20xy+4y^2$.　　(答)　$5x-2y$.

(c)　$4x^4-12x^3+5x^2+6x+1$.　　(答)　$2x^2-3x-1$.

(d)　$x^4-4x^3-2x^2+12x+9$.　　(答)　$x^2-2x-3$.

(e)　$25x^4-30ax^3+29a^2x^2-12a^3x+4a^4$.

(答)　$5x^2-3ax+2a^2$.

(f)　$a^2+4b^2+9c^2-4ab+6ac-12bc$.　　(答)　$a-2b+3c$.

(g)　$x^6+4x^5-2x^4-14x^3+5x^2+6x+1$.

(答)　$x^3+2x^2-3x-1$.

(h)　$\frac{1}{4}a^4-\frac{1}{3}a^3+\frac{14}{45}a^2-\frac{2}{15}a+\frac{1}{25}$.

(答)　$\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{3}a+\frac{1}{5}$.

(i)　$\frac{4a^4-20a^2+25}{4x^4-12x^2y^2+9y^4}$.　　(答)　$\frac{2a^2-5}{2x^2-3y^2}$.

(j)　$\frac{x^4-4x^3+6x^2-4x+1}{x^4+2x^3+5x^2+4x+4}$.　　(答)　$\frac{x^2-2x+1}{x^2+x+2}$.

(2)　求下列各數的平方根：

(a)　3481.　(答) 59.　　(b)　276676.　(答) 526.

(c)　104976.　(答) 324.　　(d)　15129.　(答) 123.

(e)　54756.　(答) 234.　　(f)　0.5184.　(答) 0.72.

(g)　30.1421.　(答) 5.49.　　(h)　0.002401.　(答) 0.049.

(i)　0.170569.　(答) 0.413.　　(j)　64821.16.　(答) 254.6.

(k)　$3\frac{22}{169}$.　(答) $1\frac{10}{13}$.　　(l)　$2\frac{14}{25}$.　(答) $1\frac{3}{5}$.

(3)　求下列各式的立方根：

(a)　$64x^3-144x^2y+108xy^2-27y^3$.　　(答) $4x-3y$.

(b　$1+3x+6x^2+7x^3+6x^4+3x^5+x^6$.　　(答) $x^2+x+1$.

(c)　$x^6-3x^5+6x^4-7x^3+6x^2-3x+1$.　　(答) $x^2-x+1$.

(d) $8y^6-36y^5+66y^4-63y^3+33y^2-9y+1$.

(答) $2y^2-3y+1$.

(e) $\dfrac{x^3+6x^2+12x+8}{8x^3-12x^2+6x-1}$. (答) $\dfrac{x+2}{2x-1}$.

(4) 求下列各數的立方根:

(a) 250047. (答) 63. (b) 4330747. (答) 163.

(c) 97.336. (答) 4.6. (d) 2.197. (答) 1.3.

(e) $\dfrac{1331}{6859}$. (答) $\dfrac{11}{19}$. (f) $\dfrac{3374}{4096}$. (答) $\dfrac{15}{16}$.

(5) 一塊矩形地,長是闊的3倍,面積是 1587 方丈.問長闊各是幾丈?(但面積=長×闊)

(答) 長69丈,闊23丈.

(6) 有一木箱,體積是10.368立方尺,縱是深的 2 倍,橫是深的3倍,求縱橫深各是幾尺?(但體積=縱×橫×深)

(答) 深1.2尺,縱2.4尺,橫3.6尺.

(7) 本金 250 元,借出 3 年,每年計算複利,共得本利和 297.754 元.問年利率多少?{但本利和=本金(1+利率)$^3$}

(答) 六厘.

(8) 甲有款若干元,是乙的 5 倍.二人的元數相乘,乘積是 3645. 問各有幾元? (答) 甲 135 元,27 元.

(9) 有甲乙二數,甲數 2 倍等於乙數 3 倍,乘積是 864. 求此二數. (答) 甲 36, 乙 24.

(10) 有一長方形水池，長與闊的尺數相乘是 72，長與深的尺數相乘是 63，闊與深的尺數相乘是 56. 問長闊深各是幾尺？

(答) 長 9 尺，闊 8 尺，深 7 尺.

(11) 將下列各式化簡：

(a) $\sqrt{50}-\sqrt{32}+\sqrt{72}-\sqrt{18}$. (答) $4\sqrt{2}$.

(b) $\sqrt{24}+\sqrt{54}-\sqrt{96}$. (答) $\sqrt{6}$.

(c) $\sqrt{\frac{1}{3}}+\sqrt{27}-\sqrt{12}$. (答) $\frac{4}{3}\sqrt{3}$.

(d) $2\sqrt[3]{172}+3\sqrt[3]{375}-3\sqrt[3]{81}-2\sqrt[3]{1029}$.

(答) 0.

(e) $2a\sqrt{a}-\sqrt{9a^3}+6\sqrt{a^3}$. (答) $5a\sqrt{a}$.

(12) 將 $\sqrt{75}+\sqrt{12}$ 化簡，再求至小數三位。(答) 12.124.

(13) 化簡下列各式：

(a) $(7-3\sqrt{6})(9+7\sqrt{6})$. (答) $22\sqrt{6}-63$.

(b) $(\sqrt{5}-2\sqrt{2})(3\sqrt{5}+\sqrt{2})$. (答) $11-5\sqrt{2}$.

(c) $\sqrt{8}\ \ \sqrt{6}\ \ \sqrt{54}$. (答) $36\sqrt{2}$.

(d) $(4\sqrt{3}-5\sqrt{2})(4\sqrt{3}+5\sqrt{2})$. (答) $-2$.

(e) $(2\sqrt{3}-1)(5+\sqrt{3})$. (答) $9\sqrt{3}+1$.

(f) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$.

(答) $4\sqrt{6}$.

(14) 比較 $\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{3}$，$\sqrt[6]{6}$ 的大小。

(答) $\sqrt[3]{3}>\sqrt{2}>\sqrt[6]{6}$.

(15)　將下列各式的分母有理化：

(a)　$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.　(答)　$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

(b)　$\dfrac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.　(答)　$3(\sqrt{5}+\sqrt{3})$.

(c)　$\dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$.　(答)　$5-\sqrt{15}$.

(d)　$\dfrac{12}{7-3\sqrt{5}}$.　(答)　$3(7+3\sqrt{5})$.

(e)　$\dfrac{2-\sqrt{3}}{6-3\sqrt{3}}$.　(答)　$\dfrac{1}{3}$.

(f)　$\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$.　(答)　$\dfrac{1}{2}(5+\sqrt{21})$.

# 第七章　二次方程

**引言**　前已講過，代數中應用最廣的部分是方程，方程依未知數分類，有一元二元等，依次數分類，有一次二次等，且每多一元，解法較繁一些，每多一次，解法便難一層．前章已學過一元一次方程多元一次方程及開方等，對於方程解法及方根求法，已有根柢，今再進習二次方程，從一元以至多元．

**一元二次方程**　一元二次方程經移項化簡後，必可化成普遍形 $ax^2+bx+c=0$；式中 $x$ 表未知數，$a,b,c$ 表已知數．上式若 $b=0$，則得 $ax^2+c=0$，叫做純二次方程．對於此而如上述之普遍形，叫做完全二次方程或雜二次方程．

純二次方程解法　解純二次方程 $mx^2-n=0$ 較易，方法如下：

先移項得　$$mx^2=n.$$

用 $x^2$ 的係數除兩邊，　$$x^2=\frac{n}{m}.$$

求 $\frac{n}{m}$ 的平方，便是所求的根：　$$x=\sqrt{\frac{n}{m}}.$$

【例 1】解 $3x^2-19=17-x^2$.

【解】　移項　$3x^2+x^2=17+19$，　即　$4x^2=36$.

故　$x^2=\frac{36}{4}=9$，　$\therefore\ x=\pm3$.　　(答)　$x=\pm3$

【例 2】解 $(2x+1)^2=81$.

【解】 將 $2x+1$ 當作一文字，得　$2x+1=\pm 9$.

從 $2x+1=9$，得 $2x=8$，　$\therefore\ x=4$.

從 $2x+1=-9$，得 $2x=-10$，　$\therefore\ x=-5$.

(答)　$x=4$ 或 $-5$.

完全二次方程解法　完全二次方程比純二次方程多一個一次項，故解法不能如純二次方程的簡單，可分三種如下：

(I) 析因式法　完全二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的左邊，如可析因式，則先變成如右的形狀：　$(lx+m)(px+q)=0$.

此式中 $l$, $m$, $p$, $q$ 各不等於 0，故各因式等於 0，即得兩個一次方程。解此二方程，便得所求的二根。即如由 $lx+m=0$ 及 $px+q=0$，得 $x=-\dfrac{m}{l}$ 及 $x=-\dfrac{q}{p}$.

但若二次方程缺常數項如 $ax^2+bx=0$，則析因式得 $x(ax+b)=0$。從此得 $x=0$；又從 $ax+b=0$ 得 $x=-\dfrac{b}{a}$.

【例 1】解 $3x^2+7x-6=0$.

【解】 左邊析因式，$(3x-2)(x+3)=0$. 故 $3x-2=0$ 及 $x+3=0$　$\therefore\ x=\dfrac{2}{3}$ 及 $x=-3$. (答)

【例 2】解 $(x-1)(x-2)=42$.

【解】 實行乘法，移項化簡，　$x^2-3x-40=0$.

左邊析因式，$(x+5)(x-8)=0$. 故 $x+5=0$ 及 $x-8=0$

$\therefore$ $x=-5$ 及 $x=8$.(答)

【例 3 】解 $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x}{3}=2(x+2)$.

【解】 去分母， $3x^2-2x=12(x+2)$.

去括號化簡， $3x^2-14x-24=0$.

析因式， $(3x+4)(x-6)=0$. 故 $3x+4=0$ 及 $x-6=0$.

$\therefore$ $x=-\dfrac{4}{3}$ 及 $x=6$. (答)

(II) 配成完全平方法 $x$ 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ (但 $a\neq0$)，如左邊不易析因式，則可用配成完全平方法，卽二次方程的一般解法，步驟如下：

(1) 將方程整頓如上式形狀，並移項得 $ax^2+bx=-c$.

(2) 用 $x^2$ 的係數除兩邊，得 $x^2+\dfrac{b}{a}x=-\dfrac{c}{a}$.

(3) 兩邊各加 $x$ 的半係數平方，使成完全平方，卽

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a},$$

$$\therefore \quad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

(4) 兩邊各開平方， $x+\dfrac{b}{2a}=\pm\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

即得兩個一次方程 $x+\dfrac{b}{2a}=\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

及 $$x+\frac{b}{2a}=-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

(5) 解此二方程,得 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$

【例 1】解 $(2x+1)(3x-2)-(5x-7)(x-2)=64.$

【解】 去括號, $6x^2-x-2-5x^2+17x-14=64.$

整頓,移項, $x^2+16x=80.$

兩邊各加$\left(\dfrac{16}{2}\right)^2$ 即 64, $x^2+16x+64=80+64.$

$$\therefore\quad (x+8)^2=144.$$

兩邊開平方, $x+8=\pm12.$

故 $x+8=12$ 及 $x+8=-12.$ $\therefore$ $x=4$ 及 $x=-20.$(答)

【例 2】解 $x^2-2\sqrt{3}\,x+2=0.$

【解】 移項, $x^2-2\sqrt{3}\,x=-2.$

兩邊各加$\sqrt{3}$的平方即 3, $x^2-2\sqrt{3}\,x+3=3-2.$

$$\therefore\quad (x-\sqrt{3})^2=1.$$

故 $x-\sqrt{3}=\pm1.$ $\therefore$ $x=\sqrt{3}\pm1.$ (答)

(III) 應用公式法 上述配成完全平方法,是適用於一元二次方程的解法,故如下列方程(1)的根,可省去中途的計算,直接代入(2)式求得:

$$ax^2+bx+c=0\cdots\cdots(1)\qquad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdots\cdots(2)$$

因此(2)式叫做二次方程根的公式.

【例 1】解 $\frac{1}{2}(x-5)(x-3)-\frac{1}{3}(x-4)(x+3)=1-x$.

【解】 去分母及括號,$3x^2-24x+45-2x^2+2x+24=6-6x$.

移項化簡, $x^2-16x+63=0$.

用 $a=1$, $b=-16$, $c=63$ 代入根的公式,得

$$x=\frac{-(-16)\pm\sqrt{(-16)^2-4\times1\times63}}{2\times1}=\frac{16\pm\sqrt{4}}{2}$$

$$=\frac{16\pm2}{2}=9 \text{ 或 } 7.\text{(答)}$$

【例 2】解 $mnx^2-(m^2+n^2)x+mn=0$.

【解】 用 $a=mn$, $b=m^2+n^2$, $c=mn$ 代入根的公式,得

$$x=\frac{-\{-(m^2+n^2)\}\pm\sqrt{\{-(m^2+n^2)\}^2-4mn\times mn}}{2mn}$$

$$=\frac{m^2+n^2\pm\sqrt{m^4-2m^2n^2+n^4}}{2mn}=\frac{m^2+n^2\pm(m^2-n^2)}{2mn}.$$

$$\therefore\quad x=\frac{m^2+n^2+(m^2-n^2)}{2mn}=\frac{m}{n}.$$

及 $x=\frac{m^2+n^2-(m^2-n^2)}{2mn}=\frac{n}{m}$. (答) $x=\frac{m}{n}$或$\frac{n}{m}$.

**虛數**　以上所述一元二次方程　$ax^2+bx+c=0$　之根的公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 中，如 $b^2-4ac$ 表負數，則依前述方根性質(3)，不能求得 $\sqrt{b^2-4ac}$，卽方程的解法不可能．但以前要使減法常可能，已定出一種負數，今要使二次方程的解法常可能，亦不可不定出一種新數叫做虛數．虛數的單位是 $\sqrt{-1}$，常用 $i$ 代表，卽

$$\sqrt{-1}=i,\qquad (\sqrt{-1})^2=i^2=-1,\qquad i^3=i^2i=-i,$$

$$i^4=i^2i^2=(-1)(-1)=1,\ i^5=i^4i=i,$$ 以上依次類推．

對於虛數而言，稱尋常的有理數與無理數，統叫做實數．二次方程的根是虛數時，此虛數的根叫做虛根；對於虛根稱實數的根叫做實根．實數與虛數是完全劃開的兩種數，不能比較大小．虛數雖可與實數同樣看待，亦有加減乘除等算法，但根指數律中，若根號內是負數，便不能成立．如 $\sqrt{-4}\times\sqrt{-25}=\sqrt{-4\times(-25)}=\sqrt{100}=10$，便是錯誤．

【例 1】計算　$\sqrt{-16}-3\sqrt{-1}+2\sqrt{-25}$．

【解】　$\sqrt{-16}-3\sqrt{-1}+2\sqrt{-25}$

$$=\sqrt{16(-1)}-3\sqrt{-1}+2\sqrt{25(-1)}$$

$$=4i-3i+10i=11i.$$

【例 2】計算　$\sqrt{-4}\times\sqrt{-25}$．

【解】　$\sqrt{-4}\times\sqrt{-25}=\sqrt{4(-1)}\times\sqrt{25(-1)}=2i\times5i$

$$=10i^2=-10.$$

【例 3】計算　$\sqrt{-64}\div\sqrt{-36}$．

【解】 $\sqrt{-64} \div \sqrt{-36} = \dfrac{\sqrt{64(-1)}}{\sqrt{36(-1)}} = \dfrac{8i}{6i} = \dfrac{4}{3}$.

【例 4】解 $2x^2-5x+6=0$.

【解】 用根的公式,得

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2-4\times 2\times 6}}{2\times 2} = \frac{5 \pm \sqrt{-23}}{4} = \frac{5 \pm i\sqrt{23}}{4}.$$

**判別式** 已知一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的二根是

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad 及 \quad \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

今設一根是 $\alpha$,他根是 $\beta$,則有下列性質:

(1) 若 $b^2-4ac>0$, 則 $\sqrt{b^2-4ac}$ 是實數,故 $\alpha$, $\beta$ 都是實數,且 $\alpha\neq\beta$.

反之,如 $\alpha\neq\beta$, 且 $\alpha$, $\beta$ 都是實數,則 $b^2-4ac>0$.

(2) 若 $b^2-4ac=0$, 則 $\sqrt{b^2-4ac}=0$ 故 $\alpha$, $\beta$ 都是實數,且 $\alpha=\beta$.

反之,如 $\alpha=\beta$, 則 $b^2-4ac=0$.

(3) 若 $b^2-4ac<0$, 則 $\sqrt{b^2-4ac}$ 是虛數,故 $\alpha$, $\beta$ 都是虛數,且 $\alpha\neq\beta$.

反之,如 $\alpha\neq\beta$, 且 $\alpha,\beta$ 都是虛數,則 $b^2-4ac<0$.

依上所述,方程 $ax^2+bx+c=0$ 根的性質,從 $b^2-4ac$ 判別,故 $b^2-4ac$ 叫做根的判別式. 但一元二次方程的二根,不能一實一虛,亦不能是相等的二虛數,此點卻要注意.

【例 1】判別下列各方程中根的性質：

(a)　$3x^2-8x-5=0$.

(b)　$3x^2-4x-7=0$.

(c)　$4x^2+12x+9=0$.

(d)　$3x^2+5x+4=0$.

【解】 (a)的判別式是 $(-8)^2-4\times3\times(-5)=124>0$，故有不等的二實根。

(b)的判別式是 $(-4)^2-4\times3\times(-7)=100>0$，故有不等的二實根。

(c)的判別式是 $12^2-4\times4\times9=0$，故有相等的二實根。

(d)的判別式是 $5^2-4\times3\times4=-23<0$，故有不等的二虛根。

又(b)的判別式 $100=10^2$，故(b)的二根是有理數。凡判別式是完全平方數的，他的根必是有理數，此點亦宜注意。

【例 2】設方程 $kx^2-(3k-2)x+4-k=0$ 的二根相等，求 $k$ 的值。

【解】 因二根相等，故判別式等於 0，即

$$(3k-2)^2-4k(4-k)=0.$$

去括號化簡， $13k^2-28k+4=0$.

$$\therefore\ (13k-2)(k-2)=0.\ 故\ k=\frac{2}{13}\ 及\ k=2.$$

【例 3】設 $a$，$b$ 是相異的實數，試證 $(a^2+b^2)x^2-2(a+b)x+2=0$ 有虛根.

【解】 判别式是

$$4(a+b)^2-4\times 2(a^2+b^2)=-4a^2+8ab-4b^2$$

$$=-4(a^2-2ab+b^2)=-4(a-b)^2.$$

因 $a, b$ 爲相異的實數，故 $(a-b)^2>0$，卽判别式小於 0，而方程有虛根。

**根與係數的關係** 依前所述，設 $ax^2+bx+c=0$ 的二根是 $\alpha$ 及 $\beta$，則

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad \beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

二根的和是 $\alpha+\beta=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a},$$

二根的積是 $\alpha\beta=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\times\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}.$$

故 $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$，$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$，此二式叫做根與係數的關係式。由此公式，可不解方程求得二根的和與積。

又由此公式，設 $x^2+px+q=0$ 的二根是 $\alpha, \beta$，則 $\alpha+\beta=-p$，$\alpha\beta=q$。故用二數 $\alpha, \beta$ 爲根的方程是 $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$。因此用已知二數爲二根可作二次方程。又已知二數的和及積而求此

二數的問題，亦可作二次方程而解之.

【例 1】設 $x^2+x+1=0$ 的二根是 $\alpha$，$\beta$，求 $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$ 及 $\frac{\alpha}{\beta^2}+\frac{\beta}{\alpha^2}$ 的值.

【解】 $\alpha+\beta=-1$，$\alpha\beta=1$.

故 $$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$$

$$=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{(-1)^2-2\times 1}{1}=1-2=-1$$

又 $$\frac{\alpha}{\beta^2}+\frac{\beta}{\alpha^2}=\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2\beta^2}=\frac{\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3-3\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2}{\alpha^2\beta^2}$$

$$=\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha^2\beta^2}$$

$$=\frac{(-1)^3-3\times 1\times(-1)}{1^2}=-1+3=2.$$

【例 2】用 7，$-8$ 爲二根作方程.

【解】 $7+(-8)=-1$，　$7\times(-8)=-56$

故所求的方程是　$x^2+x-56=0$.

【例 3】已知二根的和是 $m$，積是 $n$，求作方程，並求二根的值.

【解】 所求方程是　$x^2-mx+n=0$.

而二根是　$x=\frac{m\pm\sqrt{m^2-4n}}{2}$.

**二次方程應用題** 解二次方程應用題，與解一次方程應用題大致相同．惟解二次方程應用題所得的根，常有只能適合於方程而不適合於題意的，此點應特別注意．

【例 1】長比闊多 2 丈的矩形地，面積 288 方丈．求長闊．

【解】 設長是 $x$ 丈，則闊是$(x-2)$丈，故得方程如下：

$$x(x-2)=288. \qquad x^2-2x-288=0.$$

解此方程， $x=18$ 或 $-16$.

因負數不合題意，故取 $x=18$，而 $x-2=16$.

(答) 長 18 丈，闊 16 丈．

【例 2】有縱比橫多 18 公分的畫片，周圍裝闊 9 公分的框．連框的面積，恰是畫片面積的 2 倍．求畫片的縱橫．

【解】 設畫片的橫是 $x$ 公分，則縱是$(x+18)$公分．裝框後外邊的橫是$(x+18)$公分，縱是$(x+18+18)$公分，故得方程如下：

$$(x+18+18)(x+18)=2x(x+18).$$

$$\therefore\quad (x+36-2x)(x+18)=0. \qquad \therefore (x+18)(36-x)=0.$$

故 $x=36$ 或 $-18$．因負數不合題意，故取 $x=36$，而 $x+18=54$.

(答) 橫 36 公分，縱 54 公分．

[注意] 此例若用 $x+18$ 除原方程兩邊，則得一次方程 $x+36=2x$，解之亦得 $x=36$.

【例 3】存款 1000 元，一年滿期，在利息中支取 30 元，其餘加入本金，再存一年 到期共得本利和 1134 元．求年利率多少？

【解】　設所求年利率是 $x$，則一年後的本利和是 $1000(1+x)$ 元，第二年本金是 $\{1000(1+x)-30\}$ 元，第二年末的本利和是 $\{1000(1+x)-30\}(1+x)$ 元。故得

$$\{1000(1+x)-30\}(1+x)=1134.$$

$$\therefore\quad 1000(1+x)^2-30(1+x)=1134.$$

將 $1+x$ 當作一文字解此方程，得 $1+x=1.08$ 或 $-1.05$.

負數不合題意，故取 $1+x=1.08$.　$\therefore\ x=0.08$.

（答）　年利率 8 厘。

**聯立二次方程**　解聯立多元一次方程，都可用消去法化成一元一次方程，但解聯立二元二次方程，則用消去法化成的一元方程在二次以上者很多，須用高等代數解法．今說明聯立二元二次方程的解法，仍以屬於一元二次方程解法者爲限。此種聯立方程，可分三類如下：

（I）　一個一次方程與一個二次方程所成的聯立方程　此類聯立方程的解法，可從一次方程用一未知數表他未知數的值，代入二次方程而解之。

【例 1 】解 $2x-y=1\cdots\cdots(1)$　　$4xy+3y^2=51\cdots\cdots(2)$

【解】　從(1)得　　$y=2x-1\cdots\cdots(3)$

代入(2)，　$4x(2x-1)+3(2x-1)^2=51.$

化簡，　$20x^2-16x-48=0.$

用 4 除，得　$5x^2-4x-12=0,$

$$\therefore\quad (x-2)(5x+6)=0.$$

$$\therefore\quad x=2 \text{ 及 } x=-\frac{6}{5}.$$

用 $x=2$ 代入(3)，$y=3$.　用 $x=-\frac{6}{5}$ 代入(3)，$y=-\frac{17}{5}$.

（答）有二組：$x=2$，$y=3$，及 $x=-\frac{6}{5}$，$y=-\frac{17}{5}$.

[注意]此例如用 $x$ 的值代入(2)，則對應於 $x=2$，有 $y=3$ 或 $-\frac{17}{3}$；而對應於 $x=-\frac{6}{5}$ 有 $y=-\frac{17}{5}$ 或5.但 $x=2$，$y=-\frac{17}{3}$ 及 $x=-\frac{6}{5}$，$y=5$ 二組的值，只適合於(2)，不適合於(1)，卽不是聯立方程的根.故如此例求 $y$ 的值，宜用 $x$ 的值代入一次式(3)或(1).又如從(1)得 $x=\frac{y+1}{2}$，代入(2)亦可得解，請讀者自試.

【例 2】解 $3x-2y=1\cdots\cdots(1)$　　$9x^2-4y^2=11\cdots\cdots(2)$

(2)的左邊析因式，　$(3x+2y)(3x-2y)=11\cdots\cdots(3)$

用(1)代入(3)，　　$3x+2y=11\cdots\cdots(4)$

解(1)(4)的聯立方程，　$x=2$，$y=2\frac{1}{2}$.

（答）$x=2$，　$y=2\frac{1}{2}$.

(II)　二個二次方程所成的聯立方程　又可分三類：

(A)　二次項可消去的.

【例】解 $x^2+xy-y+1=0\cdots\cdots(1)$

$$2x^2+2xy+3x+3=0\cdots\cdots(2)$$

【解】 $(2)-(1)\times 2$，　$3x+2y+1=0$.

$$\therefore\quad y=-\frac{3x+1}{2}\cdots\cdots(3)$$

用 (3) 代入(2)，　$2x^2+2x\left(-\dfrac{3x+1}{2}\right)+3x+3=0$.

化簡，　$x^2-2x-3=0$.　　$\therefore\quad (x+1)(x-3)=0$.

故　$x=-1$ 及 $x=3$.

用 $x=-1$ 代入 (3)，得 $y=1$. 用 $x=3$ 代入(3)，得 $y=-5$.

(答)　$x=-1$，$y=1$，及 $x=3$，$y=-5$.

(B)　有一方程可析成兩個一次方程的.

【例】解 $x^2-3xy+2y^2=0\cdots\cdots(1)$　$2xy-y^2=3\cdots\cdots(2)$

【解】從 (1)，$(x-y)(x-2y)=0$.　$\therefore$　$x=y$ 及 $x=2y$.

用 $x=y$ 代入 (2)，得　$2y^2-y^2=3$.

$$\therefore\quad y=\pm\sqrt{3}，\quad 而\quad x=\pm\sqrt{3}.$$

用 $x=2y$ 代入 (2)，得 $4y^2-y^2=3$，

$$\therefore\quad y=\pm 1，\quad 而\quad x=\pm 2.$$

(答)　有四組：$\begin{cases}x=\sqrt{3}\\y=\sqrt{3}\end{cases}$ $\begin{cases}x=-\sqrt{3}\\y=-\sqrt{3}\end{cases}$ $\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$ $\begin{cases}x=-2\\y=-1\end{cases}$

(C)　不含一次項或一次項可消去的.

【例 1】解 $x^2-3xy-y^2=9\cdots\cdots(1)$

$$2x^2+2xy+3y^2=7\cdots\cdots(2)$$

【解】　先消去常數項，$(2)\times 9-(1)\times 7$得

$$11x^2+39xy+34y^2=0.$$

析因式，　$(x+2y)(11x+17y)=0.$

$$\therefore\quad x=-2y\ \text{及}\ x=-\frac{17y}{11}.$$

用 $x=-2y$ 代入 (1)，得 $4y^2+6y^2-y^2=9$，

$$\therefore\quad y=\pm 1,\ \text{而}\ x=\mp 2.$$

用 $x=-\dfrac{17y}{11}$ 代入 (1)，得 $\dfrac{17^2}{11^2}y^2+\dfrac{3\times 17}{11}y^2-y^2=9.$

$$\therefore\quad 729y^2=9\times 11^2,\quad \therefore\quad y=\pm\frac{11}{9},\ \text{而}\ x=\mp\frac{17}{9}.$$

（答）　有四組：$\begin{cases}x=2\\y=-1\end{cases}$ $\begin{cases}x=-2\\y=1\end{cases}$ $\begin{cases}x=\dfrac{17}{9}\\y=-\dfrac{11}{9}\end{cases}$ $\begin{cases}x=-\dfrac{17}{9}\\y=\dfrac{11}{9}\end{cases}$

【例 2】解 $2x^2-3xy+y^2=4y$ ………(1)

$$8x^2+2xy-3y^2=-12y\cdots\cdots(2)$$

【解】　先消去一次項，$(1)\times 3+(2)$ 得 $14x^2-7xy=0.$

即　$7x(2x-y)=0.$　　$\therefore\quad x=0$ 及 $y=2x.$

用　$x=0$ 代入 (1)，得 $y^2=4y$，　　$\therefore\quad y=0$ 及 $y=4.$

用　$y=2x$ 代入 (1)，得 $2x^2-6x^2+4x^2=8x$，即 $8x=0$，

$$\therefore\quad x=0\ \text{而}\ y=0.$$

（答）　$x=0$，$y=0$ 及 $x=0$，$y=4.$

（III）　特別情形的聯立二次方程　除以上解法外，有特別情形的問題，須用特別解法，較爲簡單．

【例 1 】解 $x+y=7\cdots\cdots(1)$　　$xy=12\cdots\cdots(2)$

【解】 $(1)^2-(2)\times 4$，得 $x^2-2xy+y^2=1$，　$\therefore\ x-y=\pm 1.$

故可依下列二組聯立方程解之：

$x+y=7,\ x-y=1$　　及　$x+y=7,\ x-y=-1.$

（答）　$x=4,\ y=3$　　及　$x=3,\ y=4.$

【例 2 】解 $x^2+4xy+y^2=37\cdots\cdots(1)$　　$xy=6\cdots\cdots(2)$

【解】 $(1)-(2)\times 2$，得　　$x^2+2xy+y^2=25.$

$$\therefore\quad x+y=\pm 5.$$

$(1)-(2)\times 6$，得　$x^2-2xy+y^2=1.$　　$\therefore\ x-y=\pm 1.$

故可依下列四組聯立方程解之：

$$\begin{cases}x+y=5\\x-y=1\end{cases}\quad\begin{cases}x+y=5\\x-y=-1\end{cases}\quad\begin{cases}x+y=-5\\x-y=1\end{cases}\quad\begin{cases}x+y=-5\\x-y=-1\end{cases}$$

（答）　有四組 $\begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}\quad\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}\quad\begin{cases}x=-2\\y=-3\end{cases}\quad\begin{cases}x=-3\\y=-2\end{cases}$

**高次聯立方程**　此類解法，屬於高等代數，今就特殊情形舉例：

【例 1 】解 $x+y=5\cdots\cdots(1)$　　$x^3+y^3=35\cdots\cdots(2)$

【解】 (2)的左邊析因式，　$(x+y)(x^2-xy+y^2)=35$

用 (1) 代入，化簡　　$x^2-xy+y^2=7\cdots\cdots(3)$

$(1)^2-(3)$, $3xy=18$, $\therefore$ $xy=6\cdots\cdots(4)$

(1)(4) 聯立解之,卽得. (答) $x=2, y=3$ 及 $x=3, y=2$.

【例 2】解 $x^4+x^2y^2+y^4=91\cdots\cdots(1)$

$$x^2-xy+y^2=13\cdots\cdots(2)$$

【解】 $(1)\div(2)$, 得 $x^2+xy+y^2=7\cdots\cdots(3)$

$(3)-(2)$得, $2xy=-6$, $\therefore$ $xy=-3\cdots\cdots(4)$

$(2)+(4)\times3$ 得 $x^2+2xy+y^2=4$, $\therefore$ $x+y=\pm2$.

依 $x+y=2$, $xy=-3$ 及 $x+y=-2$, $xy=-3$ 解之卽得.

(答) $(x=3, y=-1)$, $(x=-3, y=1)$, $(x=-1, y=3)$,

$(x=1, y=-3)$.

**多元聯立方程** 此類解法,亦屬於高等代數,今就可用二次方程解得者舉例.

【例 1】解 $x(x+y+z)=2\cdots\cdots(1)$

$$y(x+y+z)=4\cdots\cdots(2)$$

$$z(x+y+z)=3\cdots\cdots(3)$$

【解】 $(1)+(2)+(3)$得 $(x+y+z)^2=9$.

$$\therefore\quad x+y+z=\pm3\cdots\cdots(4)$$

用 (4) 各除 (1) (2) (3)卽得.

(答) $x=\frac{2}{3}$, $y=\frac{4}{3}$, $z=1$

及 $x=-\frac{2}{3}$, $y=-\frac{4}{3}$, $z=-1$.

【例 2】解 $x+y+z=6\cdots\cdots(1)$

$$x^2+y^2+z^2=14\cdots\cdots(2) \qquad yz=6\cdots\cdots(3)$$

【解】 $(1)^2-(2)$，得 $2(xy+xz+yz)=22.$

$$\therefore \quad xy+xz+yz=11, \qquad x(y+z)+yz=11\cdots\cdots(4)$$

從 (1) 得 $y+z=6-x\cdots\cdots(5)$

用 (3) (5) 代入 (4)，$x(6-x)+6=11.$

$$\therefore \quad x^2-6x+5=0. \qquad \therefore \quad (x-1)(x-5)=0.$$

故 $x=1$ 及 $x=5$. 代入 (5)，得 $y+z=5$ 或 1.

依 $yz=6$，$y+z=5$ 及 $yz=6$，$y+z=1$ 解之卽得。

(答) $(x=1,\ y=3,\ z=2)$，$(x=1,\ y=2,\ z=3)$，

$$\left(x=5,\ y=\frac{1+i\sqrt{23}}{2},\quad z=\frac{1-i\sqrt{23}}{2}\right),$$

$$\left(x=5,\quad y=\frac{1-i\sqrt{23}}{2},\quad z=\frac{1+i\sqrt{23}}{2}\right).$$

**聯立二次方程應用題**

【例 1】會員聚餐，若到會者多 3 人，每人多出餐費 2 角，則共用 39 元 6 角。若到會者少 2 人，每人少出餐費 2 角，則共用 23 元 4 角，求預定到會人數，及每人餐費.

【解】 設預定到會人數是 $x$ 人，每人餐費是 $y$ 元，則得

$$(x+3)(y+0.2)=39.6\cdots\cdots(1)$$

$$(x-2)(y-0.2)=23.4\cdots\cdots(2)$$

從(1)，$xy+0.2x+3y=39\cdots\cdots\cdots(3)$

從(2)，$xy-0.2x-2y=23\cdots\cdots\cdots(4)$

(3)−(4) 得　$0.4x+5y=16$，

$$\therefore\quad y=\frac{1}{5}(16-0.4x)\cdots\cdots(5)$$

用 (5) 代入 (3) 並化簡，　$0.4x^2-15.8x+147=0$.

用 5 乘，得　　　$2x^2-79x+735=0$.

$$\therefore\quad (x-15)(2x-49)=0.$$

故　$x=15$ 及 $x=\frac{49}{2}$，但人數決不是分數，卽$x=\frac{49}{2}$ 不合題意，故取 $x=15$，代入 (5) 得 $y=2$.

(答)　預定到會者 15 人，餐費每人 2 元。

【例 2】有款 6500 元，分作甲乙兩部，依不同的利率放出，一年的利息相等。如甲部依乙部利率放出，則一年的利息是 180 元。如乙部依甲部利率放出，則一年的利息是 245 元。求兩部的元數及年利率。

【解】　設甲部是 $x$ 元，則乙部是 $(6500-x)$元。又設甲乙兩部的年利率各是 $y$，$z$，則得方程如下：

$$xy=(6500-x)z\cdots\cdots(1)\qquad xz=180\cdots\cdots(2)$$

$$(6500-x)y=245\cdots\cdots(3)$$

$(1)\times(2)\times(3)$，得　$245x^2yz=180(6500-x)^2yz$.

因 $y$，$z$ 都不等於 0，故用 $5yz$ 各除上式兩邊，得

$$49x^2=36(6500-x)^2.$$

兩邊各開平方，$7x=\pm6(6500-x)$，$\therefore\ x=3000$或$-39000$.

負數不合題意，故取 $x=3000$ 而 $6500-x=3500$.

用 $x=3000$ 代入 (2)，得 $z=\dfrac{180}{3000}=\dfrac{6}{100}$；

用 $6500-x=3500$ 代入 (3)，得 $y=\dfrac{245}{3500}=\dfrac{7}{100}$.

(答)　甲部 3000 元，年利率 7 厘，乙部 3500 元，年利率 6 厘.

## 本　章　練　習　題

(1)　解以下各方程：

(a)　$7x^2-8=4x^2+28$.　(答)　$\pm2\sqrt{3}$.

(b)　$(3x-1)^2-49=0$.　(答)　$2\dfrac{2}{3},-2$.

(c)　$(x-15)(x+15)=175$.　(答)　$\pm20$.

(d)　$5(3x^2+1)=7(5x^2-25)$.　(答)　$\pm3$.

(e)　$4(x-1)^2+1=10$.　(答)　$2\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}$.

(f)　$\dfrac{x^2-19}{5}+\dfrac{x^2-33}{4}=10$.　(答)　$\pm7$.

(2)　用兩種方法解下列各方程.

(a)　$x^2-8x+15=0$.　(答)　5，3.

(b)　$2x^2-7x+3=0$.　(答)　$\dfrac{1}{2}$，3.

(c) $6x^2-5x-56=0$. (答) $\frac{8}{3}, -\frac{7}{2}$.

(d) $24x^2+23x-12=0$. (答) $\frac{3}{8}, -\frac{4}{3}$.

(e) $3x^2-7x+3=0$. (答) $\frac{7\pm\sqrt{13}}{3}$.

(f) $6x^2+5x-4=0$. (答) $\frac{1}{2}, -\frac{4}{3}$.

(g) $3(x+3)(x+1)-(x+3)(x+2)=0$.

(答) $-3, -\frac{1}{2}$.

(h) $(3x+1)(x-4)-x(2x-11)=0$.

(答) $\pm 2$.

(i) $(x-6)(x-5)+(x-7)(x-4)=10$.

(答) $3, 8$.

(3) 計算下列各式:

(a) $\sqrt{-25}+\sqrt{-36}-\sqrt{-100}$. (答) $i$.

(b) $\sqrt{-64}\times\sqrt{-25}$. (答) $-40$.

(c) $\sqrt{-36}\div\sqrt{-16}$. (答) $\frac{3}{2}$.

(d) $\sqrt{-4}+\sqrt{-100}\times\sqrt{-3}$. (答) $-12\sqrt{3}$.

(e) $(3+2i\sqrt{5})(3-4i\sqrt{5})$. (答) $49-6i\sqrt{5}$.

(f)　$\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$.　(答)　$\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

(4)　判別下列各方程中根的性質：

(a)　$2x^2-7x+4=0$.　(答)　不等實根。

(b)　$4x^2+20x+25=0$.　(答)　相等實根。

(c)　$3x^2-5x+4=0$.　(答)　不等虛根。

(5)　設 $(2+k)x^2+2kx+1=0$ 的二根相等，求 $k$ 的值.

(答)　$2,-1$.

(6)　求 $7x^2-12x+3=0$ 二根的和及積.

(答)　和 $\dfrac{12}{7}$，積 $\dfrac{3}{7}$.

(7)　設 $ax^2+bx+c=0$ 的二根是 $\alpha$，$\beta$，求 $\dfrac{\alpha^2}{\beta}+\dfrac{\beta^2}{\alpha}$ 的值。

(答)　$\dfrac{3abc-b^3}{a^2c}$.

(8)　用 3 及 $-\dfrac{1}{2}$ 爲二根作二次方程.（答）$2x^2-5x-3=0$.

(9)　設 $x^2-mx+40=0$ 的二根相差是 3，求 $m$ 的值.

(答)　$\pm 13$.

(10)　一人手握銅元，說出枚數的 11 倍比平方數多 5，試猜出他究有銅元幾枚?　(答)　5 枚。

(11)　一人做算題，將一數的二乘方誤作二倍，以致答數小

35.問正確的答數是多少? (答) 49 或 25.

(12) 長 52 寸的鉛絲,要曲折成矩形,使面積是 168 方寸.問長闊應各是多少? (答) 12 寸,14寸.

(13) 有兵一隊,排成 3 人厚的中空方陣,尚多 88 人.若排成比外邊人數之半多 4 人的實心方陣,恰無多餘,求兵數。

(答) 484 人.

(14) 有田二區,一是正方,一是矩形,面積相等.已知矩形的長比正方形一邊的 2 倍少 6 丈,寬比正方形一邊少 4 丈,求矩形的長寬。 (答) 長18丈,寬8丈.

(15) 有長 30 丈寬 20 丈的矩形公園,在四周闢同樣闊的路,因此面積減少 141 方丈.問此路的闊是多少? (答) 1丈5尺.

(16) 有一立方木箱,如每邊各增 3 寸,則體積要增 1647 立方寸,問邊長多少? (答) 1 尺 2 寸.

(17) 放款 2000 元,一年後收回,留起 60 元,餘款再依同利率放出,又過一年,得本利和 2268 元,求年利率. (答) 8厘.

(18) 某人借款 420 元,1 年後還 242 元,又過 1 年,再還 242 元,本利都清,求年利率。 (答) 1 分.

(19) 物體依每秒 $v$ 公尺的速度,向上投擲,設 $t$ 秒後的距離是 $S$ 公尺,則物理學上有公式 $S=vt-\frac{1}{2}gt^2$, 式中 $g=9.8$ 公尺是常數.今依每秒 25 公尺的速度,將物體上擲,問要幾秒鐘可達 30 公尺的遠? (答) $\frac{125\pm5\sqrt{37}}{49}$ 秒後。

(20)　解下列聯立二次方程：

(a)　$3x-4y=5$，　$3x^2-xy-3y^2=21$.

(答)　$(x=3, y=1), \left(x=-\frac{137}{9}, y=-\frac{38}{3}\right)$.

(b)　$x-y=10$，$x^2+y^2=25$.

(答)　$x=\frac{10\pm 5i\sqrt{2}}{2}$，　$y=\frac{-10\pm 5i\sqrt{2}}{2}$.

(c)　$x+y=5$，$x^2+y^2=13$.

(答)　$(x=3, y=2)$，$(x=2, y=3)$.

(d)　$x^2-3xy+2y^2=3$，$2x^2+y^2=6$.

(答)　$(x=\pm 1, y=\pm 2)$，$(x=\pm\sqrt{3}, y=0)$.

(e)　$xy+y^2=18$，$x^2-2xy=21$.

(答)　$(x=\pm 7, y=\pm 2), (x=\pm\sqrt{3}, y=\mp 3\sqrt{3})$.

(f)　$x^2+xy-6=0$，　$x^2-5xy+6y^2=0$.

(答)　$(x=\pm 2, y=\pm 1)$,

$\left(x=\pm\frac{3\sqrt{2}}{2}, y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

(g)　$x^2+xy+y^2=19$，$x^2-xy+y^2=7$.

(答)　$(x=\pm 2, y=\pm 3), (x=\pm 3, y=\pm 2)$.

(h)　$3x^2+5x-8y=36$，$2x^2-3x-4y=3$.

（答）$(x=5,\ y=8)$，$(x=6,\ y=\frac{51}{4})$．

(21) 解下列高次聯立方程：

(a) $x+y=12$，$x^3+y^3=468$．

（答）$(x=4, y=8)$，$(x=8, y=4)$．

(b) $x^2-xy+y^2=13$，$x^3+y^3=91$．

（答）$(x=3,\ y=4)$，$(x=4,\ y=3)$．

(c) $x^2+xy+y^2=13$，$x^4+x^2y^2+y^4=91$．

（答）$(x=\pm1,\ y+\pm3)$，$(x=\pm3,\ y=\pm1)$．

(d) $x+y=4$，$x^3+y^3=5(x^2+y^2)$．

（答）$x=2\pm2\sqrt{3}$，$y=2\mp2\sqrt{3}$．

(22) 解下列多元聯立方程：

(a) $yz=12$，$xz=15$，$xy=20$．

（答）$(x=5, y=4, z=3)$，$(x=-5, y=-4, z=-3)$．

(b) $x(y+z)=6$，$y(z+x)=12$，$z(x+y)=10$．

（答）$(x=1, y=4, z=2)$，$(x=-1, y=-4, z=-2)$．

(c) $x+y+z=13$，$x^2+y^2+z^2=65$，$yz=10$．

（答）$(x=6, y=2, z=5)$，$(x=6, y=5, z=2)$，

$(x=9,\ y=3\pm\sqrt{2},\ z=3\mp\sqrt{2})$．

(d) $x(x+y+z)=6$，$y(x+y+z)=12$，$z(x+y+z)=18$．

（答）$(x=1, y=2, z=3)$，$(x=-1, y=-2, z=-3)$．

(23) 有矩形地面，若縱減 2 公尺，橫增 3 公尺，則面積不變．

又若縱減 5 公尺，橫增 9 公尺，則面積是$\frac{3}{4}$，求縱橫各幾公尺？

(答)　縱 8 公尺，橫 9 公尺。

(24)　現款 1300 元，分借與甲乙二人，利率不同，一年間的利息相同。如甲照乙的利率，則一年的利息是 36 元。又乙照甲的利率，則一年的利息是 49 元。求各人所借的元數及年利率。

(答)　甲 600 元，年利率 7 厘；乙700元，年利率6厘。

(25)　有面積相等的矩形及正方形地，正方形一邊比矩形長邊短 10 尺。若矩形的短邊增 1 尺，長邊減 2.5 尺，則面積不變。求矩形二邊的長。　(答)　25尺，9 尺。

(26)　扛夫一羣，搬礮彈至前線，要往返 9 次。若扛夫多 7 人，每人每次少搬 2 個，則要往返 8 次。又若扛夫少 4 人，每人每次多搬 1 個，則要往返 10 次。求人數及礮彈數。

(答)　28 人，5040個。

(27)　$A$, $B$ 二職工在同期間內受雇。$A$ 告假 5 日，共得工資 40 元；$B$ 不告假，共得工資 60 元。若 $B$ 告假 5 日，$A$ 不告假，則 $A$ 可比 $B$ 多得 2 元。求受雇日數及每人每日工資。

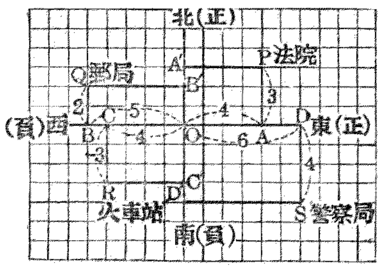
(答)　25日，甲2元，乙2.4元。

(28)　工場臨時雇甲乙二職工，至期滿，甲比乙多作 5 日，甲共得工資 18 元，乙共得工資 32 元。若甲照乙的日數作工，而乙比前少作 15 日，則甲可比乙多得 16 元。求各人工作日數及每日工資。　(答)　甲15日，每日1.2元；乙20日，每日1.6元。

# 第八章　代數式與圖形

**引言**　第一章講過，數目可用線段表示，今再依此推廣，說明代數式與圖形的關係，及方程的圖解，以示代數可與幾何合參.

**坐標**　某處的地圖如下，每格當一公里.




設有人問法院在何處？如回答的單說在東北，或單說離此幾公里，此尙是含糊之詞，必須說在東 4 里北 3 里，方覺明瞭.因單說東北，則遠近未定；單說 4 公里 3 公里，則方向不明，而在東 4 公里北 3 公里的法院與在西 4 公里南 3 公里的火車站，將無從區別.故爲使人明瞭起見，須將方向與遠近連帶說出，今仍如第一章依方向定正負如下：

向東卽向右的距離爲正，向西卽向左的距離爲負.

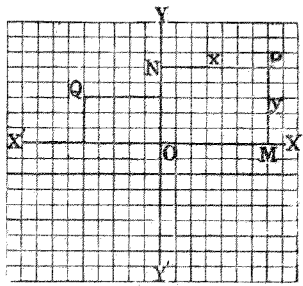
向北卽向上的距離爲正，向南卽向下的距離爲負.

則說法院在 $+4$ 公里，$+3$ 公里，火車站在 $-4$ 公里，$-3$ 公里，亦足以明確表示其位置.仿此在西 5 公里北 2 公里的位置有郵局，可用 $-5$ 公里，$+2$ 公里表示；在東 6 公里南 4 公里的位置有

警察局，可用 $+6$ 公里，$-4$ 公里表示。

上圖中因 $OA=A'P$，$OB=B'Q$，$OC=C'R$，$OD=D'S$，故表法院位置的 $+4$ 公里，$+3$ 公里，各是 $PA'$，$PA$ 的長；表郵局位置的 $-5$ 公里，$+2$ 公里；各是 $QB'$，$QB$ 的長；表火車站位置的 $-4$ 公里，$-3$ 公里，各是 $RC$，$RC$ 的長；表警察局位置的 $+6$ 公里，$-4$ 公里，各是 $SD'$，$SD$ 的長.

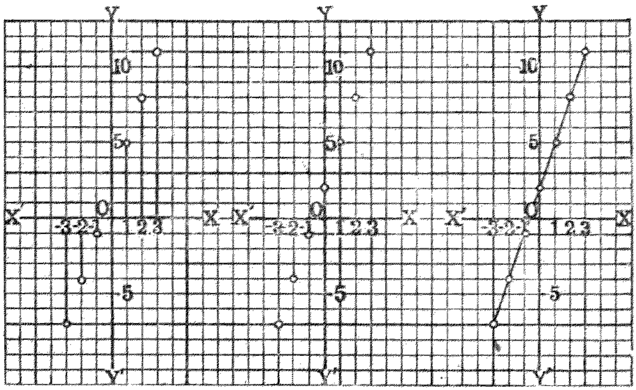
依上所述，平面上一點的位置，可設二定直線 $XX'$ $YY$ 互相正交於點 $O$，而用從此點至二定直線的垂線長明確表示出來。故決定一點 $P$ 的位置，須有二要素，即二垂線的長，叫做 $P$ 的坐標.如右圖，從點 $P$ 至 $XX$ 的垂線長 $PM$ 即 $y$，叫做縱坐標或縱線；從點 $P$ 至 $YY'$ 的垂線長 $PN$ 即 $x$，叫做橫坐標或橫線：而 $P$ 的位置，可用 $(x,y)$ 的形狀表示. 因此如 $(-5,3)$，便是橫坐標爲 $-5$，縱坐標爲 3 的一點 $Q$. 又設爲標準的二定直線，叫做坐標軸；其中橫線 $XX'$ 叫做橫軸或 $X$ 軸；縱線 $YY'$ 叫做縱軸或 $Y$ 軸；而坐標軸的交點 $O$，叫做原點.




**一次方程的圖形**　既知坐標的意義，今再說明用圖形表代數式及解方程的方法。如要作代數式 $3x+2$ 的圖形，可先設 $x$ 是種種的值，得 $3x+2$ 的對應值如下表：

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ 的值…… | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | …… |
| $3x+2$的值… | $-7$ | $-4$ | $-1$ | $2$ | $5$ | $8$ | $11$ | …… |

依上表，對於 $x$ 的數值變化，而用縱線段表 $3x+2$ 的值，如下列 $A$ 圖。從 $A$ 圖可見當代數式 $3x+2$ 的數值變動時，必要的是各線段的一端，故先記出端點的位置而省去縱線段，如 $B$ 圖，卽已明瞭。又知 $B$ 圖的諸點，都在一直線上如 $C$ 圖。故 $C$ 圖的直線，叫做 $3x+2$ 的圖形.



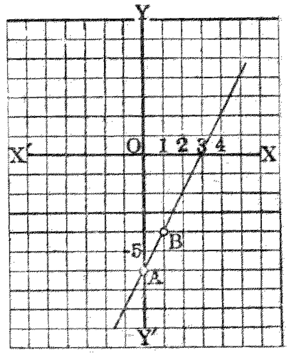

A 圖　　B 圖　　C 圖

因此要作 $3x+2$ 的圖形，可取 $x$ 的任意二值，而求 $3x+2$ 的對應二值，依此 $x$ 的二值與 $3x+2$ 的二值，求縱坐標與橫坐標的二點，過此二點畫直線卽得.

又設 $y=3x+2$ 則依 $C$ 圖可知 $x$ 的數值變動，$y$ 的數值亦隨着變動。故此直線叫做方程 $y=3x+2$ 的圖形。再就一般考察，二

元一次方程中 $x$, $y$ 的關係，可用一直線表示，此直線叫做此方程的圖形。因此要作二元一次方程的圖形，可設 $x$ 的二值而求 $y$ 的對應二值，依此各值記出橫坐標與縱坐標的二點，過此二點畫直線即得。

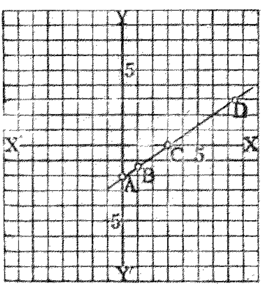
【例 1】作 $2x-6$ 的圖形，並從此解方程 $2x-6=0$.




【解】 設 $x=0, x=1$，求得 $2x-6$ 的對應值 $-6, -4$，記出 $(0,-6)$ 與 $(1,-4)$ 的二點 $A$, $B$，過此二點作直線，便是 $2x-6$ 的圖形。

又方程 $2x-6=0$ 的根，便是 $2x-6$ 的值等於 0 即縱坐標為 0 時 $x$ 的對應值，故看圖形與橫軸的交點，依橫坐標可讀出 $x=3$.

【例 2】作 $2x-3y=6$ 的圖形，又從此求 $y=0, y=3$ 時 $x$ 的對應值.




【解】 設 $x=0$，則 $y=-2$；又設 $x=1$，則 $y=-\frac{4}{3}$. 過二點 $A$ $(0, -2)$, $B\left(1, -\frac{4}{3}\right)$ 畫直線，即得 $2x-3y=6$ 的圖形.

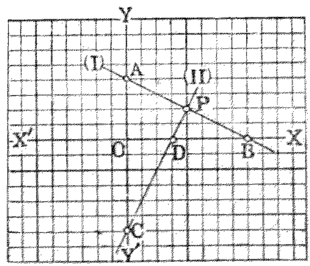
在此直線上，求得縱坐標等於0，3的

點 $C$, $D$, 依 $C$, $D$ 的橫坐標讀出 $x=3, x=7.5$, 便是 $y=0$ 或3時 $x$ 的對應值。

[備考]上述代數式 $3x+2$ 中, $x$ 的值變動不定, 叫做自變數, $3x+2$ 的數值隨 $x$ 而變動, 叫做因變數, 而 $3x+2$ 叫做 $x$ 的函數. 如設 $y=3x+2$, 則是二元一次方程, 亦可稱 $y$ 是 $x$ 的一次函數. 若設 $3x+2=0$, 則 $x$ 的值有定, 便是一元一次方程. 對於變數而言, 稱尋常一定不變的數, 叫做常數. 如圓周率 $\pi=3.14159\cdots\cdots$ 是常數。

**聯立一次方程的圖解** 既知一元一次方程的圖形, 今再說明從圖形解聯立二元一次方程的方法卽圖解.

【例】 解 $x+2y=8\cdots\cdots(1)$ $2x-y=6\cdots\cdots(2)$



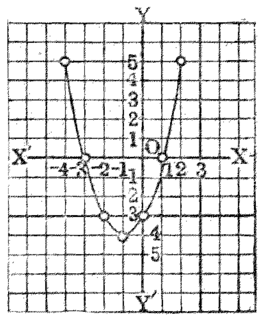

【解】 從(1)得 $x=0$, $y=4$, 及 $x=8$, $y=0$ 記出二點 $A$ (0, 4), $B$ (8,0), 過 $A$, $B$ 作直線(I) 是 (1)的圖形. 從 (2) 得 $x=0$, $y=-6$ 及 $x=3$, $y=0$, 記出二點 $C(0,-6)$, $D(3, 0)$, 過 $C$, $D$ 作直線(II) 是 (2) 的圖形. 故直線 (I) 上各點的坐標, 都適合方程 (1) 中 $x$, $y$ 的值, 直線(II) 上各點的坐標, 都適合方程 (2) 中 $x$, $y$ 的值. 因此坐標能同時適合方程(1)(2)中 $x$, $y$ 的點, 必在直線 (I) 及(II)上, 卽是二直線的交點 $P$. 讀點 $P$ 的坐標得 $x=4, y=2$, 便是所求的根。

**二次方程的圖形**　一次方程的圖形是一直線，已如前述，今再研究二次方程的圖形。

【例 1】作 $x^2+2x-3$ 的圖形，從此求 $x^2+2x-3=0$ 的根。

【解】　設 $x^2+2x-3=y$ 中，$x$ 有種種的值，則得 $y$ 的對應值如下表：

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | …… | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | …… |
| $y$ | …… | 5 | 0 | $-3$ | $-4$ | $-3$ | 0 | 5 | …… |




用 $x$，$y$ 的種種對應值作坐標的諸點，都在如右圖的曲線上，此曲線便是二次式 $x^2+2x-3$ 的圖形。

又方程 $x^2+2x-3=0$ 就是 $x^2+2x-3=y$ 在 $y=0$ 時所得的，故此方程的根，是圖形上縱坐標等於 0 的一點之橫坐標，即圖形與橫軸交點的橫坐標 $x=-3$，$x=1$。

如此圖的曲線，叫做抛物線。一般凡二次式如 $ax^2+bx+c$ 的圖形，都是抛物線。

又 $x^2+2x-3=y$ 是含二未知數 $x$，$y$ 的方程，而適合此方程的 $x$，$y$ 各組值，皆如上表所列，因此凡用適合方程的 $x$，$y$ 各值爲坐標的點，都在上圖的曲線上。故上圖的曲線，是方程 $x^2+2x-3=y$ 的圖形。

依上例要作二次三項式 $ax^2+bx+c$ 的圖形，可先求適合 $ax^2+bx+c$ 中 $x, y$ 的各組值，記出用此各值爲坐標的諸點，再依橫坐標大小的點，順次用曲線連結卽得。又求 $ax^2+bx+c=0$ 的根，卽求上述圖形與橫軸交點的橫坐標。

故從 $ax^2+bx+c=y$ 的圖形與橫軸的關係，可看出 $ax^2+bx+c=0$ 中根的性質如下：

(1) 圖形與橫軸相交於二點，則 $ax^2+bx+c=0$ 有不等二實根。

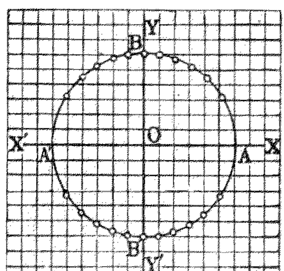
(2) 圖形與橫軸相遇於一點，則 $ax^2+bx+c=0$ 有相等二實根。

(3) 圖形與橫軸不相遇，則 $ax^2+bx+c=0$ 有不等二虛根。

【例 2】作 $x^2+y^2=36$ 的圖形。

【解】從 $x^2+y^2=36$ 求得 $x, y$ 的對應值如下表：

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | …… | 0 | ±1 | ±2 | ±3 | ±4 | ±5 | ±6 | …… |
| $y$ | …… | ±6 | ±5.9 | ±5.65 | ±5.19 | ±4.47 | ±3.31 | 0 | …… |




用上表中各組值作坐標，記出諸點，再順次用曲線連結此諸點，卽得方程 $x^2+y^2=36$ 的圖形如右。

此圖形的曲線叫做圓；$O$ 叫做圓心，與原點重合，$OA$，$OB$ 等叫做半徑，各等於 $\sqrt{36}$ 卽 ±6。一般凡二次方

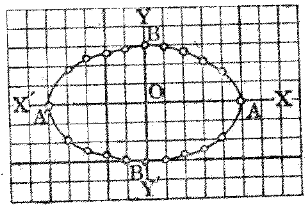
程如 $x^2+y^2=r^2$ 的圖形都是圓。

【例 3】作 $9x^2+25y^2=225$ 的圖形。

【解】 從 $9x^2+25y^2=225$ 求得 $x,y$ 的對應值如下表：

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | …… | 0 | ±1 | ±2 | ±3 | ±4 | ±5 | …… |
| $y$ | …… | ±3 | ±2.93 | ±2.74 | ±2.4 | ±1.8 | 0 | …… |

依上表照前法得 $9x^2+25y^2=225$ 的圖形如下。



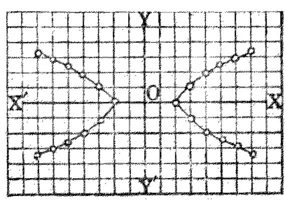

此圖形的曲線，叫做橢圓；$O$ 叫做中心，與原點重合；$AA'$ 叫做長徑，半長徑 $OA,OA'$ 各等於 $\sqrt{25}$ 卽 ±5；$BB'$ 叫做短徑，半短徑 $OB,OB'$ 各等於 $\sqrt{9}$ 卽 ±3. 一般凡二次方程如 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 的圖形都是橢圓。

【例 4】作 $x^2-4y^2=4$ 的圖形.

【解】 從 $x^2-4y^2=4$ 求得 $x,y$ 的對應值如下表：

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | …… | ±2 | ±3 | ±4 | ±5 | ±6 | ±7 | …… |
| $y$ | …… | 0 | ±1.11 | ±1.73 | ±2.29 | ±2.82 | ±3.35 | …… |

依上表照前法得 $x^2-4y^2=4$ 的圖形如右.




此圖形的曲線，叫做雙曲線，一般凡二次方程如 $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ 的圖

形，都是雙曲線。

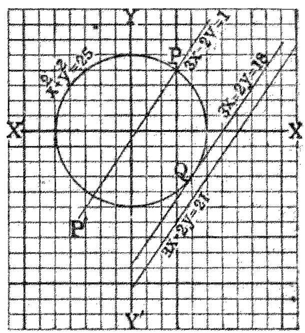
**聯立二次方程的圖解** 聯立一次方程的根，可各作圖形從交點的坐標求得，已述於前。聯立二次方程的根，亦可如此求得，舉例於下：

【例】 作下列三題的圖解：

$$(A)\begin{cases}x^2+y^2=25\\3x-2y=1\end{cases}\quad(B)\begin{cases}x^2+y^2=25\\3x-2y=18\end{cases}\quad(C)\begin{cases}x^2+y^2=25\\3x-2y=21\end{cases}$$

【解】 此三題中，只有第二式右邊的數目不同，其餘都相同。

依各方程作半徑 5 的圓與直線的圖形如右，從交點的坐標，即得各題的根。




(A) 題的解，是二交點 $P$ $(x=3, y=4)$，$P'$ $(x=-2.5,\ y=-4.3)$ 的坐標，故有二組根。(B) 題的解，是切點 $Q$ $(x=4, y=-3)$ 的坐標，故只有一組根。(C) 題的圓與直線不相交，故無實根。

## 本 章 練 習 題

(1) 已知諸點的坐標如下，試作圖表示：

A$(-5,3)$，　B$(-7,-2)$，　C$(4,-6)$，

D$(0,-5)$，　E$(-6,0)$。

(2)　過下列各組的二點作直線：

(a)　$(2,3)$，　$(-7,4)$.

(b)　$(-1,-2)$，　$(0,-5)$.

(c)　$(-5,3)$，　$(2,-7)$.

(3)　作下列各方程的圖形：

(a)　$5x-10=0$.　(b)　$x-3=0$.　(c) $x+2=0$.

(4)　作下列各方程的圖形：

(a)　$5x-y=0$.　(b)　$x-y=1$.

(c)　$2x+3y=4$.　(d)　$x+9=3y$.

(5)　作下列聯立方程的圖解：

(a)　$x+y=7$，　$4x-y=8$.

(b)　$x=y$，　$x+y=-6$.

(c)　$x-3=0$，　$2x-y=4$.

(d)　$3x-2y+10=0$，　$x+y+5=0$.

(6)　作下列各二次式的圖形：

(a)　$x^2-10$.　(d)　$2x^2+x-6$.

(c)　$x^2-4x+7$.　(d)　$x^2-2x+$ [illegible].

(7)　作下列各二次方程的圖解：

(a)　$x^2+x-1=0$.

(b)　$x^2-6x+9=0$.

(c)　$2x^2-3x-4=0$.

(d)　$x^2+10x=13$.

(8) 作下列聯立二次方程的圖解：

(a) $x^2+y^2=9$, $x-2y=0$.

(b) $x^2+y^2=4$, $y-2x+2=0$.

(c) $y=3x^2$, $x^2+y^2=25$.

(d) $y=x^2-2$, $y+x-4=0$.

(e) $4x^2+16y^2=144$, $3x+4y=12$.

(f) $4x^2-9y^2=36$, $4x^2+9y^2=36$.

# 第九章　分式方程與無理方程

**引言**　解分式所成的方程，要用乘法去分母，解無理式所成的方程，要用自乘去根號，結果都屬於二次方程．讀者對於解二次方程既有根柢，今再進習此種方程的解法．

**分式方程**　含分式的方程，叫做分式方程．換言之，即分式方程的各項中，必有分母含未知數的分式．若各項都是整式的方程，叫做整式方程．例如 $\frac{2x+5}{3x-2}-7x=\frac{1}{3}$ 是分式方程，$\frac{3}{4}x^2+\frac{3x-1}{7}=6$ 是整式方程．

分式中若分母的值等於 0，則無意義．故分式方程中所含各分式的分母，都不等於 0，即分母的最低公倍式必不等於 0，此點在解法中須特別注意．

(I)　普通分式方程的解法

【例 1】解 $\frac{2x+1}{3x-2}=\frac{2x-3}{3x-4}$．

【解】　去分母，$(2x+1)(3x-4)=(2x-3)(3x-2)$．

去括號化簡，$8x=10$．　　　$x=\frac{5}{4}$．

此 $x=\frac{5}{4}$ 代入分母中都不等於 0，故是所求的根．

【例 2】解 $\frac{3}{x^2-5x+6}-\frac{9}{x^2-7x+10}=\frac{x}{x^2-8x+15}$.

【解】 $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$,

$x^2-7x+10=(x-2)(x-5)$,

$x^2-8x+15=(x-3)(x-5)$.

用分母的最低公倍式 $(x-2)(x-3)(x-5)$ 乘兩邊,得

$3(x-5)-9(x-3)=x(x-2)$. 去括號化簡, $x^2+4x-12=0$.

$\therefore\ (x-2)(x+6)=0$, $\therefore\ x=2$ 及 $x=-6$.

$x=2$ 代入分母中有等於 0 的,故非所求的根. 又 $x=-6$ 代入分母中都不等於 0, 故是所求的根.

[注意]此例中的 $x=2$, 叫做增根. 如將原方程移項合併,則得

$\frac{(x-2)(x+6)}{(x-2)(x-3)(x-5)}=0$,即 $\frac{x+6}{(x-3)(x-5)}=0$, 故此增根是因公因式 $x-2$ 未約去而發生,並非原方程的根.

【例 3】解 $\frac{2x^2}{x^2-4}-\frac{x}{2-x}=\frac{x}{x+2}+1$.

【解】 將原方程第二項變形,寫作 $\frac{2x^2}{x^2-4}+\frac{x}{x-2}=\frac{x}{x+2}+1$.

用分母的最低公倍式 $x^2-4$ 乘兩邊,得

$$2x^2+x(x+2)=x(x-2)+x^2-4.$$

去括號化簡, $x^2+4x+4=0$ $\therefore\ (x+2)^2=0$. $x=-2$.

$x=-2$ 代入分母中有等於 0 的, 故非所求的根, 即原方程無根,或不可能.

從上各例，得分式方程解法的次序如下：

(1)　用分母的最低公倍式乘兩邊，去分母而得一整式方程．

(2)　解此整式方程，求得未知數的值．

(3)　在所得未知數的值中，代入原方程的分母而分母不等於 0 的，便是所求的根．

(II) 特殊形狀的分式方程解法　有特殊形狀的分式方程，亦可不去分母而解法較簡．

【例 1】解 $\frac{1}{3x+2}-\frac{1}{3x+3}=\frac{1}{3x+7}-\frac{1}{3x+8}$.

【解】　兩邊分別計算，$\frac{3x+3-3x-2}{(3x+2)(3x+3)}=\frac{3x+8-3x-7}{(3x+7)(3x+8)}$,

即 $$\frac{1}{(3x+2)(3x+3)}=\frac{1}{(3x+7)(3x+8)}.$$

故 $$(3x+7)(3x+8)=(3x+2)(3x+3),$$

去括號去簡，$30x=-50$,　$\therefore$　$x=-\frac{5}{3}$.

此值代入分母中不等於 0，故是所求的根．

【例 2】解 $\frac{4x-3}{x-1}+\frac{x+2}{x+1}=\frac{4x-15}{x-4}+\frac{x+5}{x+4}$.

【解】　各項中用分母除分子，得

$$\left(4+\frac{1}{x-1}\right)+\left(1+\frac{1}{x+1}\right)=\left(4+\frac{1}{x-4}\right)\left(1+\frac{1}{x+4}\right).$$

即 $$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x-4}+\frac{1}{x+4},$$

移項， $$\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-4}=\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+1}.$$

即 $$\frac{-3}{(x-1)(x-4)}=\frac{-3}{(x+1)(x+4)}.$$

$\therefore\quad (x-1)(x-4)=(x+1)(x+4).$

解此方程，得 $x=0$.

此 $x=0$ 代入分母中都不等於 0，故是所求的根.

【例 3】解 $\dfrac{4-x}{3x+5}+\dfrac{10+6x}{4-x}=-\dfrac{19}{3}$.

【解】 設 $\dfrac{4-x}{3x+5}=X$，則 $\dfrac{10+6x}{4+x}=\dfrac{2}{X}$，代入原方程中，得

$X+\dfrac{2}{X}=-\dfrac{19}{3}$. 去分母， $3X^2+19X+6=0$.

即 $(X+6)(3X+1)=0$.

$\therefore\quad X=-6$ 及 $X=-\dfrac{1}{3}$. 故可解下列二方程以求根：

$$\frac{4-x}{3x+5}=-6,$$

$\therefore\quad 4-x=-18x-30.$

$\therefore\quad x=-2.$

$$\frac{4-x}{3x+5}=-\frac{1}{3}.$$

$\therefore\quad 12-3x=3x-5.$

$\therefore\quad 17=0$ 是不可能.

$x=-2$ 代入分母中都不等於 0，故是所求的根.

**聯立分式方程** 解分式方程是先化作整式方程再解. 故解聯

立分式方程，亦可先化作整式方程，再依聯立方程解之．但解得的根，亦要從分母驗算．

【例 1】解 $\dfrac{2}{x+2}=\dfrac{3}{y+3}\cdots\cdots(1)$ $\dfrac{3x+4}{2x-5}-\dfrac{3y-2}{2y-9}=0\cdots\cdots(2)$

【解】 從(1)得 $2(y+3)=3(x+2)$. $\therefore\quad 2y=3x\cdots\cdots(3)$

從(2)得 $(3x+4)(2y-9)-(3y-2)(2x-5)=0.$

即 $23y-23x-46=0.$ $\therefore\ y-x=2\cdots\cdots(4)$

解(3),(4),得 $x=4,\ y=6.$

此 $x,y$ 的值代入分母中都不等於 0，故是所求的根．

【例 2】解 $\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{3}{y+1}=1\cdots\cdots(1)$ $\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{2}{y+1}=1\cdots\cdots(2)$

【解】 設 $\dfrac{1}{x-1}=X,\ \dfrac{1}{y+1}=Y$,則

從(1)得 $2X+3Y=1\cdots\cdots(3)$

從(2)得 $3X+2Y=1\cdots\cdots(4)$

$(4)\times3-(3)\times2$,得 $5X=1,\quad\therefore\quad X=\dfrac{1}{5}.$

代入(3)， $\dfrac{2}{5}+3Y=1,\quad\therefore\quad Y=\dfrac{1}{5}.$

故 $\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{1}{5},\ \dfrac{1}{y+1}=\dfrac{1}{5}\quad\therefore\quad x=6,\ y=4.$

此 $x,y$ 的值代入分母中都不等於 0，故是所求的根．

【例 3】解 $2x+y=2xy\cdots\cdots(1)$ $3y-4z=-yz\cdots\cdots\cdots(2)$

$2z-3x=zx\cdots\cdots(3)$

【解】 細察原式，知 $x=y=z=0$ 是方程的根．今再求此外的根．

(1)$\div xy$，得 $\dfrac{2}{y}+\dfrac{1}{x}=2$， (2)$\div yz$ 得 $\dfrac{3}{z}-\dfrac{4}{y}=-1$，

(3)$\div zx$，得 $\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{z}=1$．

設 $\dfrac{1}{x}=X$， $\dfrac{1}{y}=Y$， $\dfrac{1}{z}=Z$， 代入上三式，得

$$2Y+X=2 \cdots\cdots(4) \qquad 3Z-4Y=-1\cdots\cdots(5)$$

$$2X-3Z=1\cdots\cdots(6)$$

(5)+(6)得 $2X-4Y=0$． $\therefore\ X-2Y=0\cdots\cdots(7)$

(4)+(7)得 $2X=\ $， $\therefore\ X=1$．

$X=1$ 代入(4)，得 $Y=\dfrac{1}{2}$． $X=1$ 代入(6)，得 $Z=\dfrac{1}{3}$．

從 $\dfrac{1}{x}=X=1$， $\dfrac{1}{y}=Y=\dfrac{1}{2}$， $\dfrac{1}{z}=Z=\dfrac{1}{3}$，

得 $x=1$，$y=2$，$z=3$．

(答) $x=y=z=0$，及 $x=1$，$y=2$，$z=3$．

**分式方程應用題**

【例 1】有一工程，甲乙二人合作，要 20 日．如乙獨作，則要比甲獨作多 9 日，問甲乙獨作各要幾日？

【解】 設甲獨作要 $x$ 日，則乙獨作要 $(x+9)$ 日，故得

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+9}=\frac{1}{20}.$$ 去分母，$20x+180+20x=x^2+9x.$

化簡，$x^2-31x-180=0$，　$\therefore\ (x-36)(x+5)=0.$

$\therefore$　　$x=36$ 及 $x=-5.$

此二值代入分母中都不等於 0，但日數必是正數，故 $-5$ 雖適合方程卻不合題意，因此取 $x=36$，而 $x+9=45.$

(答)　甲 36 日，乙45 日.

【例 2】甲乙兩地相距 60 公里，$A$ 從甲動身往乙，5 時後，$B$ 從乙動身往甲，二人在途中相會後，再過 6 時，$A$ 至乙而 $B$ 至甲. 求各人每時的速度.

【解】 設每時速度，$A$ 是 $x$ 公里，$B$ 是 $y$ 公里，因相會後 6 時，二人各到目的地，故相會處距甲是 $6y$ 公里，距乙是 $6x$ 公里，故得

$$6x+6y=60\cdots\cdots(1)\qquad \frac{6y}{x}-5=\frac{6x}{y}\cdots\cdots(2)$$

從(1)得　$x+y=10.$　　$\therefore\ x=10-y\cdots\cdots(3)$

從(2)得　$6y^2-5xy-6x^2=0\cdots\cdots(4)$

(3)代入(4)，得　$6y^2-50y+5y^2-600+120y-6y^2=0.$

即　$5y^2+70y-600=0$，　$\therefore\ y^2+14y-120=0.$

故　$(y-6)(y+20)=0$，　$\therefore\ y=6$ 及 $y=-20.$

負數不合理，故取 $y=6$，代入 (3)，得 $x=4.$

(答)　$A$每時 4 公里，$B$ 每時 6 公里.

**文字方程** 用文字表已知數全部或一部的方程，叫做文字方程．文字方程的解答，可作爲同類問題一般的解答．故從文字方程可得一般方程求根的公式．例如二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 是文字方程，前第七章中已解得 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，就是根的公式．但解文字方程用文字乘除兩邊時，必須假定此文字不等於 0，方不致誤，此點務宜注意．

【例】 解 $ax+by=c\cdots\cdots(1)$ $a'x+b'y=c'\cdots\cdots(2)$

【解】 $(1)\times b'-(2)\times b$，得 $(ab'-a'b)x=b'c-bc'$．

又 $(2)\times a-(1)\times a'$， 得 $(ab'-a'b)x=ac'-a'c$．

設 $ab'-a'b$ 不等於 0，則從上列二方程，得 $x=\dfrac{b'c-bc'}{ab'-a'b}$，

$y=\dfrac{ac'-a'c}{ab'-a'b}$．

此是二元一次聯立方程求根的公式．若 $ab'-a'b=0$，則方程是不能或不定．

如用公式解 $3x+2y=7$，$4x-8y=-12$，則用 $a=3$，$b=2$，$c=7$，$a'=4$，$b'=-8$，$c'=-12$ 代入此公式，得

$$x=\frac{(-8)\times7-2\times(-12)}{3\times(-8)-4\times2}=\frac{-32}{-32}=1.$$

$$y=\frac{3\times(-12)-4\times7}{3\times(-8)-4\times2}=\frac{-64}{-32}=2.$$

**無理式 $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$ 的變形** 簡單無理式的變形，已在第六章

講過，今再講無理式定理及$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$變形的方法，以作無理方程解法的根基.

定理　設 $a$, $b$, $c$, $d$ 是有理數，$\sqrt{b}$，$\sqrt{d}$ 是無理數，若 $a+\sqrt{b}=c+\sqrt{d}$，則 $a=c$, $b=d$.

【證】 移項 $a-c+\sqrt{b}=\sqrt{d}$.

兩邊平方，$(a-c)^2+b+2(a-c)\sqrt{b}=d$.

$\therefore\quad 2(c-a)\sqrt{b}=(a-c)^2+b-d$.

但 $a$, $b$, $c$, $d$ 是有理數，卽左邊的無理數等於右邊的有理數.故要此等式成立，非兩邊同等於 0 不可.如兩邊各等於 0，則 $c-a=0$. $(a-c)^2+b-d=0$，故 $a=c$, $b=d$.

應用此定理，則如$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$的形式，而 $a$,$b$ 是有理數，可化作二有理數平方的和或差，較爲簡單，示例於下：

【例 1】化簡$\sqrt{11+2\sqrt{30}}$.

【解】 設 $x$,$y$ 是有理數，而

$$\sqrt{11+2\sqrt{30}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}.$$

兩邊平方，　$11+2\sqrt{30}=x+y+2\sqrt{xy}$.

依定理，　$x+y=11\cdots\cdots(1)\quad 2\sqrt{xy}=2\sqrt{30}$.

$\therefore\qquad xy=30\cdots\cdots(2)$

解 (1) (2) 得　$x=5$, $y=6$ 及 $x=6$, $y=5$.

用此二組中的任一組，$\sqrt{x}+\sqrt{y}$都得同値，

故 $\sqrt{11+2\sqrt{30}}=\sqrt{6}+\sqrt{5}$.

【例 2】化簡$\sqrt{11+2\sqrt{30}}$.

【解】 設$\sqrt{11-2\sqrt{30}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$. 與上例同法，求得 $x=6$, $y=5$ 及 $x=5$, $y=6$ 二組的值. 但 $\sqrt{5}-\sqrt{6}$ 是負數，$\sqrt{6}-\sqrt{5}$是正數，故 $\sqrt{x}-\sqrt{y}$不是同值. 今 $\sqrt{11-2\sqrt{30}}$常表正數，故 $\sqrt{11-2\sqrt{30}}=\sqrt{6}-\sqrt{5}$.

【例 3】化簡$\sqrt{a^2+b+2a\sqrt{b}}$，但 $a$, $b$ 是正數.

【解】 設 $\sqrt{a^2+b+2a\sqrt{b}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$.

$\therefore\quad a^2+b+2a\sqrt{b}=x+y+2\sqrt{xy}$.

故 $x+y=a^2+b$, $xy=a^2b$，從此求得 $x=a^2$, $y=b$ 及 $x=b$, $y=a^2$.

故 $\sqrt{a^2+b+2a\sqrt{b}}=a+\sqrt{b}$.

【例 4】試將$\sqrt{7+\sqrt{21}}$ 化成二數平方根的和.

【解】 設$\sqrt{7+\sqrt{21}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$,

依前法得 $x+y=7$, $4xy=21$.

解此二方程，得 $x,y$ 的值是$\dfrac{7\pm2\sqrt{7}}{2}$. 故

$\sqrt{7+\sqrt{21}}=\sqrt{\dfrac{7+2\sqrt{7}}{2}}+\sqrt{\dfrac{7-2\sqrt{7}}{2}}$，反比原式繁複

從此例可見如$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$的形式，亦有不能化簡的，卽 $x,y$ 的值如非有理數，便不能化簡．故要將此種問題化作簡單形狀，可用視察法，卽將$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$化作$\sqrt{p\pm2\sqrt{q}}$的形狀，設 $\sqrt{p\pm2\sqrt{q}}=\sqrt{x}\pm\sqrt{y}$，從 $x+y=p$，$xy=q$ 看出 $x,y$ 的值．再示例於下：

【例 5】$\sqrt{12-6\sqrt{3}}=\sqrt{12-2\sqrt{3\times3^2}}$

$=\sqrt{(9+3)-2\sqrt{3\times9}}=\sqrt{9}-\sqrt{3}=3-\sqrt{3}.$

【例 6】$\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{4+2\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}.$

【例 7】化簡$\dfrac{1}{\sqrt{11+\sqrt{120}}}+\dfrac{1}{\sqrt{11-\sqrt{120}}}.$

【解】$\sqrt{11\pm\sqrt{120}}=\sqrt{11\pm2\sqrt{30}}=\sqrt{6}\pm\sqrt{5}.$

$\therefore$ 原式$=\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$

$=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{5}}{(\sqrt{6}+\sqrt{5})(\sqrt{6}-\sqrt{5})}=\dfrac{2\sqrt{6}}{6-5}=2\sqrt{6}.$

**無理方程** 方程中有含未知數的無理式的，叫做無理方程.今示例解於下：

【例 1】解 $x+\sqrt{x+5}=7$

【解】 移項，$\sqrt{x+5}=7-x$. 兩邊平方，$x+5=49-14x+x^2$.

即 $x^2-15x+44=0$.

$\therefore$ $(x-4)(x-11)=0$

$\therefore$ $x=4$ 及 $x=11$.

如 $x=4$，則原方程左邊 $=4+\sqrt{4+5}=4+3=7$，

故 $x=4$ 是所求的根.

如 $x=11$，則原方程左邊 $=11+\sqrt{11+5}=11+4=15$，

故 $x=11$ 非所求的根.

[注意] 此例中 $x+5=49-14x+x^2$ 雖是 $\sqrt{x+5}=7-x$ 兩邊的平方，但亦是 $-\sqrt{x+5}=7-x$ 兩邊的平方，可見因兩邊平方而多出一根.故 $x=11$ 是 $-\sqrt{x+5}=7-x$ 的根，便是題外的根，叫做增根.

【例 2】解 $2x-5-\sqrt{2x^2-17}=0$.

【解】移項，$2x-5=\sqrt{2x^2-17}$，

兩邊平方，$4x^2-20x+25=2x^2-17$.

即 $2x^2-20x+42=0$.

$\therefore$ $x^2-10x+21=0$.

$\therefore$ $x=3$ 及 $x=7$.

此二值都適合原方程，故 $x=3$ 或 $7$ 是所求的根.

【例 3】解　$\sqrt{3x-5}+\sqrt{3x+7}=6.$

【解】 移項，$\sqrt{3x-5}=6-\sqrt{3x+7}.$

兩邊平方，　$3x-5=36-12\sqrt{3x+7}+3x+7.$

即　$12\sqrt{3x+7}=48.$　$\therefore\ \sqrt{3x+7}=4.$

兩邊再平方，　$3x+7=16.$　$\therefore\ x=3.$

$x=3$ 適合原方程，故是所求的根．

【例 4】解 $3x^2-4x-10+2\sqrt{3x^2-4x+5}=0.$

【解】 設$\sqrt{3x^2+4x+5}=X$，則 $3x^2-4x-10=X^2-15.$

代入原方程，得 $X^2+2X-15=0.$

$$\therefore\qquad (X+5)(X-3)=0.$$

$\therefore\ X=-5$ 及 $X=3.$

但 $X$ 即 $\sqrt{3x^2-4x+5}$ 不表負數，故 $X=-5$ 不合題意．今取 $X=3$，則 $\sqrt{3x^2-4x+5}=3.$

兩邊平方，$3x^2-4x+5=9$，　即　$3x^2-4x-4=0$，

$$\therefore\quad (x-2)(3x+2)=0\qquad \therefore\quad x=2\ \text{及}\ x=-\frac{2}{3}.$$

此二值都適合原方程，故都是所求的根．

從上各例，得無理方程解法的次序如下：

(1)　將含未知數的無理式移至方程的一邊，其餘移至另一邊．

(2)　兩邊各平方，若平方一次後，尚有含未知數的無理式，則移項再平方．

(3) 解最後所得的整式方程.

(4) 用未知數的值代入原方程，如能適合，便是所求的根. 如不能適合，便是因平方而多出的增根，不是所求的根.

**無理方程應用題**

【例】 周圍 30 公分面積 30 方公分的直角三角形，求三邊的長.

【解】 設夾直角二邊的長是 $x$ 公分，$y$ 公分，則斜邊的長是 $\sqrt{x^2+y^2}$ 公分，面積是 $xy$ 方公分，依幾何面積定理(參看以後面積一章)，得方程如下:

$$x+y+\sqrt{x^2+y^2}=30\cdots\cdots(1) \qquad xy=60\cdots\cdots(2)$$

從(1)，得 $\sqrt{x^2+y^2}=30-(x+y)$.

兩邊平方， $x^2+y^2=900-60(x+y)+x^2+y^2+2xy$.

$\therefore\ 2xy-60(x+y)+900=0$.

用(2)代入， $120-60(x+y)+900=0$,

$\therefore\ x+y=17\cdots\cdots(3)$

解(2)，(3)得 $x=5, y=12$ 或 $x=12, y=5$.

用此二值作夾直角的二邊都合題意，故斜邊的長是 $\sqrt{x^2+y^2}$ $=\sqrt{25+144}$ (或 $\sqrt{144+25}$) $=\sqrt{169}=13$.

(答) 5 公分，12 公分，13 公分.

## 本 章 練 習 題

(1) 解下列分式方程:

(a)　$\dfrac{2x-3}{3x-5}+\dfrac{3x-5}{2x-3}=\dfrac{5}{2}$.　(答)　$1, \dfrac{7}{4}$.

(b)　$\dfrac{x+1}{x+4}=\dfrac{2x-1}{x+6}$.　(答)　$\sqrt{10}$.

(c)　$\dfrac{2x-1}{x-1}+\dfrac{2x+4}{x-2}=1$.　(答)　$\dfrac{4}{3}, -2$.

(d)　$\dfrac{x^2-3x}{x^2-1}+\dfrac{1}{x-1}+2=0$.　(答)　$-\dfrac{1}{3}$.

(e)　$\dfrac{4}{x-1}-\dfrac{8}{x^2-1}=1$.　(答)　3.

(f)　$\dfrac{x^2-11x}{x^2-1}+\dfrac{5}{x-1}+2=0$.　(答)　無限.

(g)　$\dfrac{x+1}{x+4}-\dfrac{x+4}{x+1}+\dfrac{x+1}{x-2}-\dfrac{x-2}{x+1}=\dfrac{2}{3}$.

(答)　$5, -7$.

(h)　$\dfrac{x^2-5x+3}{x^2+5x-3}-\dfrac{x^2+5x-3}{x^2-5x+3}=\dfrac{8}{3}$.

(答)　$1, -\dfrac{3}{2}, -5\pm\sqrt{31}$.

(2)　解下列聯立分式方程:

(a)　$\dfrac{x+3}{x-3}+\dfrac{y-3}{y+3}=2$,　$\dfrac{x-3}{2x+3}+\dfrac{y-3}{2y+3}=1$.

(答)　$x=1.5, y=-4.5$.

(b)　$\dfrac{3}{2x}-\dfrac{7}{y}=18$,　$\dfrac{1}{2x}-\dfrac{2}{y}=3$.

(答)　$x=-\frac{1}{30}, y=-\frac{1}{9}$.

(c)　$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=2\frac{1}{2}$,　　$x+y=6$.

(答)　$(x=4, y=2)$, $(x=2, y=4)$.

(d)　$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=5$,　　$\frac{1}{x^3}-\frac{1}{y^3}=35$.

(答)　$(x=\frac{1}{3}, y=-\frac{1}{2})$, $(x=\frac{1}{2}, y=-\frac{1}{3})$.

(e)　$yz=y-2z$,　$xz=6z-x$,　$xy=x-y$.

(答)　$(x=y=z=0)$, $(x=1, y=\frac{1}{2}, z=\frac{1}{5})$.

(3)　有汽車往返於相距 60 公里的兩地,如回來每時增速 5 公里,則可比去時少費 24 分鐘,求此汽車往返每時的速度.

(答)　往 25 公里,返 30 公里.

(4)　二車同行 200 里,甲車比乙車每時快 7 里,而先到 1 時 45 分鐘,求二車的速度.　　(答)　甲 32 里,乙 25 里.

(5)　有人用款 1750 元,買進某種股票若干張,留起 10 張,其餘照每張較原價高 3 元的價賣出,共賣得 1680 元.求買進股票張數.　　(答)　70 張.

(6)　甲乙兩地,相距 385 公里. $A$ 飛機從甲往乙,經 1 時後,$B$ 飛機出發從乙往甲.在途中相會之後,$A$ 機再經 2 時 55 分鐘至乙地,$B$ 機再經 3 時至甲地.求二機每時速度.

(答)　$A$ 60 公里,$B$ 70 公里.

（7）　三人合作一事，預定若干日可成．若甲一人獨作，則要比原定日期多 6 日；乙一人獨作，則要比甲獨作日期多 9 日；丙一人獨作，則要原定日期的 2 倍．求各人獨作完成的日數．

（答）　甲 9 日，乙 18 日，丙 6 日．

（8）　有上中次三等肥皂，上等每元比中等少買 4 塊，次等每 3 元可比中等多買 20 塊．但中等每塊的價，恰是上次兩等每塊的平均價．求中等每元可買幾塊？　（答）　20 塊．

（9）　團體旅行，預定費用 200 元，由各人勻擔．臨時有 10 人不到，因此參加者每人要多出 1 元．求預定人數．

（答）　50 人．

（10）　甲乙二電車同行圓路．若同向則每隔 20 分鐘交會一次，若反向則每隔 4 分鐘交會一次．求二車各行圓路一周的時間．

（答）　甲 6 分 40 秒，乙 10 分鐘．

（11）　解下列文字方程：

(a)　$\frac{x+a}{b}+\frac{x-b}{a}=\frac{2x}{b}+\frac{2x}{a}$.　（答）　$a-b$.

(b)　$\frac{x+a}{x-b}+\frac{x+b}{x-a}=2$.　（答）　$\frac{a+b}{2}$.

(c)　$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.　（答）　$a+b, \frac{2ab}{a+b}$.

(d)　$\frac{2a}{x}-\frac{x}{a}-2=0$.　（答）　$-a(1\pm\sqrt{3})$.

(e) $ax-by=abc$, $3ax-2by=4abc$.

(答) $x=2bc$, $y=ac$.

(f) $x+y=2b$, $\dfrac{a+b}{x}=\dfrac{b-a}{y}$.

(答) $x=a+b, y=b-a$.

(12) 化簡下列各式:

(a) $\sqrt{9-2\sqrt{14}}$. (答) $\sqrt{7}-\sqrt{2}$.

(b) $\sqrt{18-8\sqrt{5}}$. (答) $\sqrt{10}-2\sqrt{2}$.

(c) $\sqrt{16+2\sqrt{60}}$. (答) $\sqrt{10}+\sqrt{6}$.

(d) $\sqrt{2m-2\sqrt{m^2-n^2}}$.

(答) $\sqrt{m+n}-\sqrt{m-n}$.

(e) $\dfrac{1}{\sqrt{14+2\sqrt{45}}}+\dfrac{1}{\sqrt{14-2\sqrt{45}}}$. (答) $\dfrac{3}{2}$.

(f) $\dfrac{\sqrt{45}-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+\sqrt{9-\sqrt{10}}}$. (答) $\dfrac{19-4\sqrt{10}}{3}$.

(13) 解下列無理方程:

(a) $x+\sqrt{x+1}=5$. (答) 3.

(b) $x+\sqrt{3x-14}=6$. (答) 3.

(c) $2\sqrt{x-1}-\sqrt{2x-1}=1$. (答) 5.

(d) $\sqrt{x+10}-\sqrt{x+1}=1.$ (答) 15.

(e) $\sqrt{2x-3}-\sqrt{5x-6}+\sqrt{3x-5}=0.$

(答) 2.

(f) $x^2-4x+2\sqrt{x^2-4x+7}=1.$ (答) 1,3.

(g) $$\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}+\frac{1}{1-\sqrt{1-x}}=\frac{9}{2}x.$$

(答) $\pm\frac{2}{3}$.

(h) $$\frac{1}{\sqrt{x+2}}+\frac{1}{\sqrt{3x-2}}=\frac{4}{\sqrt{3x^2+4x-4}}.$$

(答) 2.

(i) $x+y+\sqrt{x+y}=30,\quad xy=144.$

(答)$(x=16,\ y=9)$,$(x=9,\ y=16)$.

(14) 有大小二數,和是 65,正平方根的差是 3. 求此二數.

(答) 49, 16.

(15) 有直角三角形,夾直角二邊的長,相差 5 寸,周圍 60 寸.求三邊的長. (答) 15寸,20寸,25寸.

# 第十章　不等式

**引言**　等式分作恆等式與方程二種，前已講過．但兩個代數式的關係，除相等的叫做等式外，尚有不等的甚多，今再進習不等式．

**不等式**　表示一代數式大於或小於他代數式（或數）的式，叫做不等式．例如 $3x^2+8x>7$……(1)，$x-6<2$……(2)，$a^2+b^2>2ab$……(3) 都是不等式．式中記號 $>$，$<$ 叫做不等號，尖所對的一邊較小，口所向的一邊較大．兩個不等式中的不等號，口向同側的叫做同向，如上例的 (1) (3) 兩式是同向；口向異側的叫做反向，如上例的 (1) (2) 兩式是反向．不等式中的文字，無論用任何值代入都能成立的，叫做絕對不等式，如上例的 (3) 式就是；若只限於用特別值代入方能相等的，叫做條件不等式，如上例的(1)(2)式都是．決定適合於條件不等式中未知數的數值範圍，叫做解不等式．但虛數不能比較大小，故不等式中所論的數，都限於實數範圍．

**不等式性質**　不等式有下列性質，都可設數自證：

(1)　從二數的大小，可決定二數的差是正或負．

例如 $a>b$，則 $a-b>0$；$a<b$ 則 $a-b<0$．

反之，$a-b>0$，則 $a\quad b$；$a-b<0$，則 $a<b$．

(2)　不等式的兩邊，各加或減同一的數，不等號不變向．

例如 $a>b$，則 $a+c>b+c$，$a-c<b-c$．據此可將不等式的

任何項變號,從一邊移至他邊,此名移項.

(3)　不等式的兩邊,各用同一正數乘或除,不等號不變向.

例如 $a>b$, $n>0$, 則 $na>nb$, $\frac{a}{n}>\frac{b}{n}$.

(4)　不等式的兩邊,各用同一負數乘或除,不等號變向.

例如 $a>b$, $n<0$ 則 $na<nb$ $\frac{a}{n}<\frac{b}{n}$. 據此將不等式的各項,一律變號,不等式變向.

**絕對不等式證法**

【例 1】設 $a,b$ 是不等的正數,試證 $a^3+b^3>ab(a+b)$.

【證】 $a^3+b^3-ab(a+b)=(a+b)(a^2-ab+b^2)-ab(a+b)$

$$=(a+b)(a^2-2ab+b^2)=(a+b)(a-b)^2.$$

因 $a,b$ 是不等的正數,故 $a+b>0$, $(a-b)^2>0$.

$\therefore$ $(a+b)(a-b)^2>0$, $a^3+b^3-ab(a+b)>0$,

移項, $a^3+b^3>ab(a+b)$.

【例 2】設 $a$, $b$, $c$ 是不等的正數,試證

$$(a+b)(b+c)(c+a)>8abc.$$

【證】 $(a+b)(b+c)(c+a)-8abc$

$$=(ab+b^2+ac+bc)(c+a)-8abc.$$

$$=(2abc+b^2c+ac^2+bc^2+a^2b+ab^2+a^2c-8abc$$

$$=(a^2c-2abc+b^2c)+(a^2b-2abc+bc^2)$$

$$+(ab^2-2abc+ac^2)$$

$$=c(a-b)^2+b(a-c)^2+a(b-c)^2$$

因 $a$，$b$，$c$ 是不等的正數，故各項都是正數．

$\therefore\quad (a+b)(b+c)(c+a)>8abc.$

**條件不等式解法**

【例 1】解 $\dfrac{x}{5}-\dfrac{1}{3}>\dfrac{x}{3}+\dfrac{1}{5}.$

【解】 用 15 乘兩邊，$3x-5>5x+3$，

移項，$3x-5x>3+5\quad\therefore\quad -2x>8.$

用 $-2$ 除兩邊，$x<-4.$

【例 2】解 $3-4x<7\cdots\cdots(1)$

$5x+10<20\cdots\cdots(2)$

【解】 從 (1)，得 $-4x<4,\quad\therefore\quad x>-1.$

從 (2) 得 $5x<10,\quad\therefore\quad x<2.$

故所求 $x$ 的值是 $-1<x<2.$

【例 3】解 $x+2y=3\cdots\cdots(1)$

$3x-y>0\cdots\cdots(2)$

【解】 $(1)+(2)\times 2$，得 $7x>3,\quad\therefore\quad x>\dfrac{3}{7}.$

$(2)-(1)\times 3$，得 $-7x>-9,\quad\therefore\quad x<\dfrac{9}{7}.$

故所求 $x$ 的值是 $\dfrac{9}{7}>x>\dfrac{3}{7}.$

【例 4】解 $x^2+2x>24.$

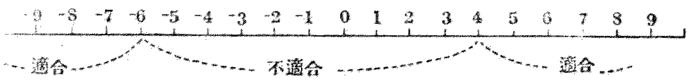
【解】 移項，$x^2+2x-24>0$，析因式，$(x-4)(x+6)>0.$

故二因式都是正或都是負，即　(1)$\begin{cases}x-4>0\\x+6>0\end{cases}$　(2)$\begin{cases}x-4<0\\x+6<0\end{cases}$

從(1)得 $x>4$，$x>-6$，此二值須同時成立．但 $x>4$ 能包括 $x>-6$，而 $x>-6$ 不能包括 $x>4$．故$x>4$．

從(2)得 $x<4$，$x<-6$，與上同理，$x<-6$ 能包括 $x<4$，故 $x<-6$．

故所求 $x$ 的值是 $x>4$，$x<-6$，即數值範圍如下圖：




【例 5】解 $3x^2-8x-3<0$．

【解】析因式，$(x-3)(3x+1)<0$，故二因式一正一負，

即 (1)$\begin{cases}x-3>0\\3x+1<0\end{cases}$　(2)$\begin{cases}x-3<0\\3x+1>0\end{cases}$

從(1)得 $x>3$，$x<\frac{1}{3}$，此二值不能同時成立．

從(2)得 $x<3$，$x>-\frac{1}{3}$，此二值能同時成立．

故所求 $x$ 的值是 $3>x>-\frac{1}{3}$．

**證明問題**

【例 1】證明 $x^2+10x+29>0$．

【解】$x^2+10x+29=x^2+10x+25+4=(x+5)^2+4$．

因 $x$ 是實數，故 $(x+5)^2>0$, $\therefore\ (x+5)^2+4>0$

即 $x^2+10x+29>0$.

[注意] 如設 $x=-5$, 則 $x+5=0$, 故此時原式有最小值 4.

【例 2】對於 $x$ 的實數值，求二次式 $8-6x-x^2$ 的最大值，又求此時 $x$ 的值.

【解】 設 $8-6x-x^2=m$, 則 $x^2+6x+m-8=0$. 因 $x$ 是實數，故判別式必是正或 0, 即 $6^2-4(m-8)\geqq 0$,

$\therefore\ m\leqq 17$. 故原式等於 17 時是最大.

又此時判別式等於 0, 故方程有等根，即 $x=\dfrac{-6}{2}=-3$

故最大值是 17, 此時 $x=-3$.

【例 3】設 $x$ 是實數，試證 $\dfrac{x^2-3x+2}{31x-x^2-30}$ 的值必是實數.

【解】 設 $\dfrac{x^2-3x+2}{31x-x^2-30}=k$, 則 $x^2-3x+2=31kx-kx^2-30k$,

$\therefore\ (1+k)x^2-(3+31k)x+2+30k=0$.

因 $x$ 是實數，故判別式必是正或 0.

即 $(3+31k)^2-4(1+k)(2+30k)\geqq 0$.

化簡， $841k+58k+1\geqq 0$, $\therefore\ (29k+1)^2\geqq 0$.

此式無論 $k$ 是任何值都能成立，故原式的值是實數.

應用問題

【例】 聚餐會的費用，由會員平均分擔. 若每人出 2.5 元，則

可多餘 3.5 元. 若每人出 2.4 元，則最後一人只要出 0.55 元以下，求會員人數的範圍.

【解】 設會員有 $x$ 人，則費用總數是 $(2.5x-3.5)$ 元. 又每人出 2.4 元，則 $(x-1)$ 人所出總數是 $2.4(x-1)$ 元. 故最後一人所出的款是 $\{2.5x-3.5-2.4(x-1)\}$ 元，故得不等式如下：

$$0.55>2.5x-3.5-2.4(x-1)\geqq 0.$$

解 $0.55>2.5x-3.5-2.4(x-1)$，得 $x>16.5$

又解 $2.5x-3.5-2.4(x-1)\geqq 0$，得 $x\geqq 11$.

因 $x$ 表人數必是整數，故得 $16>x\geqq 11$，卽會員有 11 人至 16 人.

## 本 章 練 習 題

(1) 設 $a,b,c$ 是不等的正數，試證以下不等式：

(a) $a^2+3b^2>2b(a+b)$.

(b) $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2>abc(a+b+c)$.

(c) $(a^4+b^4)(a^2+b^2)>(a^3+b^3)^2$.

(d) $\dfrac{a^2+b^2}{a+b}<\dfrac{a^3+b^3}{a^2+b^2}$.

(2) 設 $a,b$ 是不等的實數，試證 $a^2+b^2>2ab$.

(3) 設 $a,b$ 是不等的正數，試證 $\dfrac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$.

(4) 解下列不等式：

(a) $5x-2<7x+4$.　　(答) $x>-3$.

(b) $\frac{1}{5}x-6x>\frac{1}{3}-\frac{4}{5}x$. (答) $x<-\frac{1}{15}$

(c) $ax-b>cx-d$.

(答)$a>c$, 則 $x>\frac{b-d}{a-c}$;$a<c$, 則 $x<\frac{b-d}{a-c}$.

(d) $9x-23>2x+5$, $5x-7<2x+8$. (答) $5>x>4$

(e) $\frac{3}{4}x-1\frac{1}{20}>\frac{2x}{5}$, $\frac{3}{5}x+1>\frac{2}{3}x-2$.(答) $45>x>3$.

(f) $7-5x=3y$, $3x+2y>4$. (答) $x<2, y>-1$.

(g) $x=y+4$, $x-2y>8$. (答) $x<0$, $y<-4$.

(5) 解下列不等式:

(a) $x^2-7x+10<0$. (答) $5>x>2$.

(b) $x^2+4>x$. (答) $x>4$, $x<1$.

(c) $3-2x>8x^2$. (答) $\frac{1}{2}>x>-\frac{3}{4}$

(d) $x^2+2x>3x^2-5x+3$. (答) $3>x>\frac{1}{2}$

(6) 對於 $x$ 的實數值,求 $x^2-8x+54$ 的最小值,又求此時 $x$ 的值. (答) 最小值 38, $x=4$.

(7) 設 $a,b$ 是實數,試證 $ax^2-(2a+b)x+2b=0$ 有實根.

(8) 設 $n$ 是不等於 1 的實數,試決定 $2n-4$ 與 $n^2-3$ 的大小? (答) $n^2-3>2n-4$.

(9) 甲乙二人分現款 73 元,各得整元數.已知甲的 3 倍,多於乙與 8 元的和的 5 倍, 而乙所得多於 20 元. 求二人各得

幾元?　(答)　乙 21 元，甲 52 元或乙 22 元，甲 51 元.

(10)　用現款分給災民，若每人給 0.5 元，則多 3.2 元.若每人給 0.8 元，則分到最後一人不及 0.8 元.求災民人數的範圍.　(答)　11 人至 13 人.

# 第十一章　比與比例

**引言**　比例在社會上應用甚廣，算術與代數中，各有此一門．今依代數為主，用分式與方程為基礎，講述比例，包括算術的比例在內，有時並附列算術解法，使讀者可以融會貫通．

**比**　有二數或同種類的二量 $a$ 與 $b$，其中 $a$ 當 $b$ 幾倍的關係，叫做 $a$ 對於 $b$ 的比，用 $a:b$ 表示．$a$ 叫做前項，$b$ 叫做後項，：是比號．因 $a$ 當 $b$ 幾倍的關係，可用 $b$ 除 $a$ 的商決定，故分式$\frac{a}{b}$的大小，叫做比值，而 $a:b$ 可寫作$\frac{a}{b}$．因此第四章中所述分數或分式的性質，都可通用於比．據此性質，同單位二量的比，與所用單位的大小無關係．

交換比的前項與後項所得的比，叫做原比的反比．而原比對於反比叫做正比．例如 $b:a$ 是 $a:b$ 的反比．因$\frac{b}{a}\times\frac{a}{b}=1$，故比與反比的積等於 1，而$\frac{1}{a}:\frac{1}{b}$便是 $a:b$ 的反比．

有二以上諸比，用諸前項的積作前項，諸後項的積作後項所得的比，叫做諸比的複比．如 $a:b$ 與 $c:d$ 的複比是 $ac:bd$．二個同比所成的複比，叫做二乘比或平方比，如 $a:b$ 的平方比是 $a^2:b^2$；三個同比的複比，叫做三乘比或立方比，如 $a:b$ 的立方比是 $a^3:b^3$；

以上類推．故複比的值，等於各比值的積　因此 $a$，$b$，$c$，$d$ 等數，順次取二數作諸比 $a:b$，$b:c$，$c:d$，……，$k:l$，此諸比所成複比的值，等於 $a:l$.

【例 1 】設 $8x^2-2xy-15y^2=0$，求 $x:y$ 的值．

【解】　析因式，$(2x-3y)(4x+5y)=0$，從 $2x-3y=0$，得 $\frac{x}{y}=\frac{3}{2}$．從 $4x+5y=0$，得 $\frac{x}{y}=-\frac{5}{4}$．

【例 2 】甲乙二人收入的比如 $4:3$，支出的比如 $8:5$，一年間各積儲 1000 元．問二人的收入各幾元？

［代數解法］　依題意，設二人的收入，甲是 $4x$ 元，乙是 $3x$ 元．二人的支出，甲是 $8y$ 元，乙是 $5y$ 元，則得方程如下：

$$4x-8y=1000\cdots\cdots(1)\qquad 3x-5y=1000\cdots\cdots(2)$$

$(2)\times 8-(1)\times 5$，得　$4x=3000$．而 $3x=2250$．

（答）　甲 3000 元，乙 2250 元．

［算術解法］　乙收入當甲的$\frac{3}{4}$，如乙支出亦當甲的$\frac{3}{4}$，則乙要少儲 1000 元 $\times\ (1-\frac{3}{4})\ =250$ 元．今多儲 250 元，是從乙支出當甲的$\frac{5}{8}$而來，故此 250 元，與甲支出的$(\frac{3}{4}-\frac{5}{8})$相當，卽甲支出是250元$\div(\frac{3}{4}-\frac{5}{8})=2000$ 元．故甲的收入是 1000 元 $+2000$ 元 $=3000$ 元，乙的收入是 3000 元 $\times\frac{3}{4}=2250$ 元．

**比例** $a:b\ \ c:d$ 時，叫做 $a$, $b$, $c$, $d$ 成比例，$a$ 與 $d$ 叫做外項，$b$ 與 $c$ 叫做內項．又 $a:b=b:c$ 時，$b$ 叫做 $a,c$ 的比例中項，$c$ 叫做 $a,b$ 的第三比例項．

設 $a:b=c:d$，即 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$，去分母得 $ad=bc$，故有

基本定理　比例外項的積，等於內項的積．反之，$a,d$ 的積等於 $b,c$ 二數的積，則 $a$, $b$, $c$, $d$ 成比例．

設 $a:b=c:d$，又可得重要定理如下：

更迭定理　$a:c=b:d$（用 $cd$ 除 $ad=bc$ 的兩邊得證）．

反轉定理　$b:a=d:c$（用 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ 的兩邊除 1 得證）．

合比定理　$a+b:b=c+d:d$，（於 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{e}$ 的兩邊各加 1 得證）．

分比定理　$a-b:b=c-d:d$（從 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ 的兩邊各減 1 得證）．

合分比定理　$a+b:a-b=c+d:c-d$（依合比與分比定理得證）．

用以上各定理，求比例中的未知數，叫做解比例．

【例 1】解 $10-x:13-3x=6+x:3+2x$．

【解】　依基本定理 $(10-x)(3+2x)=(13-3x)(6+x)$．

即　$30+17x-2x^2=78-5x-3x^2$．

化簡　$x^2+22x-48=0$，　　$\therefore\ (x-2)(x+24)=0$．

$\therefore\ x=2$ 及 $x=-24$．

【例 2】設 $a:b=\ :d$，試證 $a^2+b^2:c^2+d^2=b^2:d^2$.

【解】 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 兩邊自乘，$\frac{a^2}{b^2}=\frac{c^2}{d^2}$.

依合比定理，$\frac{a^2+b^2}{b^2}=\frac{c^2+d^2}{d^2}$.

依更迭定理，$\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}=\frac{b^2}{d^2}$　$\therefore$　$a^2+b^2:c^2+d^2=b^2:d^2$.

【別解】 設 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$，則　$a=bk$，$c=dk$，代入原式左邊得

$$\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}=\frac{b^2k^2+b^2}{d^2k^2+d^2}=\frac{b^2(k+1)}{d^2(k+1)}=\frac{b^2}{d^2}.$$

【例 3】解 $\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}}=\frac{\sqrt{x-3}+\sqrt{x-4}}{\sqrt{x-3}-\sqrt{x-4}}$.

【解】 依合分比定理，

$$\frac{2\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x-2}}=\frac{2\sqrt{x-3}}{2\sqrt{x-4}}.$$

$$\therefore\qquad \frac{x+1}{x-2}=\frac{x-3}{x-4}.$$

故　$(x+1)(x-4)=(x-3)(x-2)$，解此方程，得 $x=5$ 是求的根.

【例 4】兄弟二人經商，最初資本的比是 7:4. 以後兄損失 560 元，弟獲利 560 元，則兄弟資本的比變爲 5:6. 求各人最初的資本.

[代數解法] 依題意設兄弟最初的資本是 $7x$ 元與 $4x$ 元，

則得 $7x-560:4x+560=5:6$,

$\therefore$ $6(7x-560)=5(4x+560)$.

化簡 $22x=560\times 11$,

$\therefore$ $x=280$, $7x=1960$ 元, $4x=1120$ 元.

(答) 兄1960 元,弟 1120 元.

[算術解法] 損益都是 560 元,故資本總數不變.兄前後資本各當總數的$\frac{7}{11}$與$\frac{5}{11}$,相差是 560 元.故設兄最初資本是 $x$ 元,

則得 $$\frac{7}{11}-\frac{5}{11}:\frac{7}{11}=560\text{ 元}:x\text{ 元}$$

$$\therefore\quad x=\frac{560\times\frac{7}{11}}{\frac{7}{11}-\frac{5}{11}}=\frac{560\times 7}{2}=1960\text{ 元}.$$

弟最初的資本是 $1960\text{ 元}\times\frac{4}{7}=1120$ 元.

**連比** 設 $A:B=a:b$, $B:C=b:c$, $A:C=a:c$, 可寫作 $A:B:C=a:b:c$, 則 $A$, $B$, $C$ 叫做與 $a$, $b$, $c$ 成比例,而 $A:B:C$ 及 $a:b:c$ 各叫做連比,其中 $A$ 與 $a$, $B$ 與 $b$, $C$ 與 $c$ 各叫做對應數.依連比的意義,有下列諸定理:

(1) 連比的各項,用不等於 0 的同數乘或除,仍得相等的連比.如 $a:b:c:\cdots=ma:mb:mc:\cdots$ 及 $a:b:c:\cdots=\frac{a}{m}:\frac{b}{m}:\frac{c}{m}:\cdots$.

(2) 互成比例的二組數中,對應二數的二比相等.反之,二組數中,如對應二數的二比相等,則此二組數互成比例.

如 $a:b:c:\cdots=a':b':c':\cdots\cdots(1)$ $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\cdots\cdots(2)$

(3) 設$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\cdots\cdots$，則此各比又等於$\frac{a+b+c+\cdots}{a'+b'+c'+\cdots}$，此名加比定理.

一般，$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\cdots\cdots=\frac{pa+qb+rc+\cdots}{pa'+qb'+rc'+\cdots}$

$$=\frac{\sqrt[n]{pa^n+qb^n+rc^n+\cdots}}{\sqrt[n]{pa'^n+qb'^n+rc'^n+\cdots}}.$$

(此諸定理，可設$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\cdots\cdots=k$，則 $a=bk$，$a^n=a'^nk^n$，$pa^n=pa'^nk^n$，……等依次證明)

**連比例** 設一組數 $a,b,c,d,\cdots$ 之間，有 $a:b=b:c=c:d=\cdots$ 的關係，則叫做此一組數成連比例. 因 $a:b=b:c$，則 $b^2=ac$，$ab^2=a^2c$，故 $\frac{a}{c}=\frac{a^2}{b^2}$，此名連比例定理.

【例 1】設 $x:y=5:4$，$y:z=6:7$，求 $x:y:z$.

【解】$x:y=5:4=15:12$

$y:z=6:7=\quad 12:14$

$\therefore\quad x:y:z=15:12:14$

$$\begin{array}{ccccc} x & : & y & : & z \\ 5 & : & 4 & & \\ & & 6 & : & 7 \\ \hline 15 & : & 12 & : & 14 \end{array}$$

[注意] 12 是 4 與 6 的最小公倍數.

【例 2】設 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$，試證 $\frac{x^3}{a^2}+\frac{y^3}{b^2}+\frac{z^3}{c^2}=\frac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^2}$.

【解】 設 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=k$，則 $x=ak$，$y=bk$，$z=ck$.

$$\text{故原式左邊}=\frac{a^3k^3}{a^2}+\frac{b^3k^3}{b^2}+\frac{c^3k^3}{c^2}=ak^3+bk^3+ck^3$$

$$=k^3(a+b+c).$$

$$\text{又原式右邊}=\frac{(ak+bk+ck)^3}{(a+b+c)^2}=\frac{k^3(a+b+c)^3}{(a+b+c)^2}=k^3(a+b+c).$$

【例 3 】設 $x-2y:2x-3z:2y+z=1:2:3$，求 $x:y:z$.

【解】 設 $\frac{x-2y}{1}=\frac{2x-3z}{2}=\frac{2y+z}{3}=k$，

則 $x-2y=k\cdots(1)$ $2x-3z=2k\cdots\cdots(2)$ $2y+z=3k\cdots\cdots(3)$

(1)+(3)，得 $x+z=4k\cdots\cdots(4)$

(4)×2−(2)，得 $5z=6k$，$\therefore\ z=\frac{6}{5}k$.

$z=\frac{6}{5}k$ 代入(4)，得 $x=4k-\frac{6}{5}k=\frac{14}{5}k$，

$z=\frac{6}{5}z$ 代入(3)，得 $y=\dfrac{3k-\frac{6}{5}k}{2}=\frac{9}{10}k$.

$\therefore\ x:y:z=\frac{14}{5}k:\frac{9}{10}k:\frac{6}{5}k=28:9:12$.

【例 4 】解 $\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{5}\cdots\cdots(1)$ $x+y+z=24\cdots\cdots(2)$

【解】 從(1)得 $\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{5}=\frac{x+y+z}{3+4+5}=\frac{x+y+z}{12}=\frac{24}{12}=2$.

故 $x=6$，$y=8$，$z=10$.

**比例配分**　將一數量依一定的比分成各部分的方法，叫做比例配分.

【例 1】甲乙丙依 3∶4∶5 的比分 120 元，求每人各得多少？

[代數解法]　設甲乙丙所得各是 $x$ 元，$y$ 元，$z$ 元，則依題意得

$$x+y+z=120,\ \frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{5}.$$

$$\therefore\quad \frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{5}=\frac{x+y+z}{3+4+5}=\frac{120}{12}=10.$$

故　$x=10\times3=30$，$y=10\times4=40$，$z=10\times5=50$.

(答)　甲 30 元，乙 40 元，丙 50 元.

[算術解法]　$3+4+5=12$，故　12∶3＝120 元∶甲所得.

$\therefore$　甲所得是 $\dfrac{120\times3}{12}=30$ 元.

同理，乙所得是 $\dfrac{120\times4}{12}=40$ 元. 丙所得是 $\dfrac{120\times5}{12}=50$ 元.

【例 2】甲乙丙三人出資經商，甲出 600 元經 8 個月；乙出 500 元經 7 個月；丙出 1000 元經 5 個月；共得純利益 665 元. 若依出資額與時間分配，每人各得多少？

[代數解法]　設甲乙丙各得利益 $x$ 元，$y$ 元，$z$ 元，則得

$x+y+z=665,\ x:y:z=600\times8:500\times7:1000\times5=48:35:50.$

$$\therefore\quad \frac{x}{48}=\frac{y}{35}=\frac{z}{50}=\frac{x+y+z}{48+35+50}=\frac{665}{133}=5.$$

故　$x=5\times48=240$，$y=5\times35=175$，$z=5\times50=250$.

(答)　甲 240 元，乙 175 元，丙 250 元

[算術解法] $600\times 8:500\times 7:1000\times 5=48:35:50$,

而 $48+35+50=133$.

故 $133:48=665$ 元:甲所得,

$\therefore$ 甲所得是 $\dfrac{665\times 48}{133}=240$ 元.

同法,乙所得是 $\dfrac{665\times 35}{133}=175$ 元,

丙所得是 $\dfrac{665\times 50}{133}=250$ 元

【例 3】工廠有獎勵金 360 元,分配於男女童工共 200 人.男女童工所得總數的比如 5:4:3, 而各一人所得的如 3 2: 1.求各種人數及一人所得的額.

[代數解法] 設男女童工各是 $x$ 人,$y$ 人,$z$ 人,又從題意各一人所得是 $3a$ 元,$2a$ 元,$a$ 元,則得

$$x+y+z=200\cdots\cdots(1) \qquad 3ax+2ay+az=360\cdots\cdots(2)$$

$$\frac{3ax}{5}=\frac{2ay}{4}=\frac{az}{3}\cdots\cdots(3)$$

從(2),(3)得 $\dfrac{3ax}{5}=\dfrac{2ay}{4}=\dfrac{az}{3}=\dfrac{3ax+2ay+az}{5+4+3}=\dfrac{360}{12}=30$.

$\therefore$ $x=\dfrac{50}{a}$, $y=\dfrac{60}{a}$, $z=\dfrac{90}{a}$. 代入(1),得 $\dfrac{50}{a}+\dfrac{60}{a}+\dfrac{90}{a}=200$.

$\therefore$ $a=1$, $3a=3$, $2a=2$.

故 $x=50$, $y=60$, $z=90$,

(答) 男 50 人,每人 3 元;女 60 人,每人 2 元;童 90 人,每人 1 元.

[算術解法]　三種工人各得總數是

$$\frac{360\times5}{5+4+3}\text{元},\frac{360\times4}{5+4+3}\text{元},\frac{360\times3}{5+4+3}\text{元}=150\text{元},120\text{元},90\text{元}.$$

三種人數的比是$\frac{150}{3}:\frac{120}{2}:90=5:6:9$. 依此比分配 200 人，

得男工 $=200$ 人$\times\frac{5}{5+6+9}=50$人，

女工 $=200$ 人$\times\frac{6}{5+6+9}=60$人，

童工 $=200$ 人$\times\frac{9}{5+6+9}=90$ 人.

故男工每人得$\frac{150}{50}=3$ 元，　女工每人得$\frac{120}{60}=2$ 元，

童工每人得 $\frac{90}{90}=1$ 元.

**混合比例**　將價值不等分量不同的原料混合　關於此種問題的算法，叫做混合比例. 分二種如下:

(1)　已知原料的價值及混合的比，定混合物的價值.

(2)　已知原料及混合物的價值，定混合的比.

【例 1】將每斤價 1.6 元，1.2 元，0.9 元的三種茶，依 3 : 2:1 的比混合. 求平均 1 斤的價.

[代數解法]　設三種茶混合的分量各是 3 斤，2 斤，1 斤，所求的每斤平均價是 $x$ 元，則

原料總價是 $1.6\times3+1.2\times2+0.9\times1=8.1$，混合物總價是

$(3+2+1)x=6x.$

故 $6x=8.1$, $\therefore$ $x=1.35$. (答) 1 元 3 角 5 分.

[算術解法] 設三種斤數是 3斤, 2 斤, 1 斤,則

總價 $=1.6$ 元 $\times 3+1.2$ 元 $\times 2+0.9$ 元 $\times 1=8.1$ 元,

總斤數 $=3+2+1=6$. $\therefore$ 平均價 $=8.1$ 元 $\div 6=1.35$ 元.

【例 2】每斤價 2 角 4 分與 1 角 7 分的醬油,依如何的比混合,方可得每斤價 1 角 9 分的醬油?

[代數解法] 設混合時, 2 角 4 分的要 $x$ 斤, 1 角 7 分的要 $y$ 斤,則得 $24x+17y=19(x+y)$

$$\therefore \quad (24-19)x=(19-17)y. \quad \therefore \quad \frac{x}{y}=\frac{2}{5}.$$

(答) 所求的比是 2:5.

[算術解法] 混合的比,等於各價與原價的差的反比,故如下:

| 平均價 | 各價 | 差 | 比 |
|---|---|---|---|
| 19 | 24 | 5 | 2 |
| | 17 | 2 | 5 |

【例 3】成色 0.75, 0.85 與 0.9 的三種銀塊,要依如何的比熔合,方能得成色 0.8 的銀塊.但限定成色 0.75 與 0.85 分量的比如 3:2?

[代數解法] 從題意設成色 0.75 與 0.85 的銀塊,各取 $3x$ 公分, $2x$ 公分,而成色 0.9 的取 $y$ 公分,則比較混合前後各種銀塊的分量,得

$$0.75\times 3x+0.85\times 2x+0.9y=0.8(3x+2x+y).$$

$\therefore\quad 0.1y=0.05x,\qquad \therefore\quad x=2y.$

故所求的比是 $3x:\ x:y=6y:4y:y=6:4:1.$

[算術解法]　可如下演算：

| 平　均 | 成　色 | 差 | 比 |
|---|---|---|---|
| | 0.75 | 0.05 | 3 |
| 0.8 | 0.85 | 0.05 | 2 |
| | 0.9 | 0.1 | $x$ |

$$0.05\times 3-0.05\times 2=0.1x.$$

$$\therefore\qquad x=\frac{0.15-0.1}{0.1}=\frac{1}{2}.$$

故所求的比是 $3:2:\frac{1}{2}=6:4:1.$

此例若成色 0.75 與 0.85 的銀塊分量的比不先限定，則混合的比亦不定.

**正比例**　設互有關係的二變量 $X$，$Y$，當 $X$ 是 $m$ 倍時，$Y$ 亦是 $m$ 倍，如此 $X$ 增減的比常與 $Y$ 增減的比相等，叫做 $X$ 與 $Y$ 成正比例，或 $X$ 依 $Y$ 而正變，寫作 $X\propto Y$. 當 $X$ 與 $Y$ 成正比例時，設其任何對應值是 $x,y$，則 $\frac{x}{y}=k$ 即 $x=ky$（$k$是常數）的等式常能成立.反之，設 $X$ 與 $Y$ 是互有關係的二變量，其任何

對應值 $x,y$ 之間，有 $\frac{x}{y}=k$ 即 $x=ky$（$k$ 是常數）的等式能成立，則 $X$ 與 $Y$ 成正比例.

【例 1】職工 14 日的工錢是 21 元，問 12 日的工錢是多少？

[代數解法]　設 $x,y$ 是工錢與日數的對應值，因工錢與日數成正比例，故 $x=ky$（$k$ 是常數）. 依題意，$x=21$，$y=14$ 是對應值，故

$$21=k\times 14, \qquad \therefore \quad k=\frac{21}{14}=\frac{3}{2}.$$

令 $y=12$，則 $x=k\times 12=\frac{3}{2}\times 12=18$.　　（答） 18 元.

[注意]　本例的常數 $k$，是表一日的工錢.

[算術解法]　設所求的工錢是 $x$ 元，則得比例

$$14\text{ 日}:12\text{ 日}=21\text{ 元}:x\text{ 元}.$$

$$\therefore \quad x=\frac{21\times 12}{14}=18\text{ 元}.$$

【例 2】物體從靜止時落下，其落下的距離與所費時間的平方成正比例. 今 2 秒鐘落下 19.6 公尺，問 5 秒鐘落下幾公尺？

[代數解法]　設距離與落下時間的對應值是 $S$，$t$. 依題意得

$S=kt^2$（$k$ 是常數）. 而 $S=19.6$，$t=2$ 是對應值.

$$\therefore \quad 19.6=k\times 2^2, \qquad \therefore \quad k=\frac{19.6}{4}=4.9.$$

令 $t=5$，則 $S=k\times 5^2=4.9\times 25=122.5$.

(答)　122.5 公尺.

[注意]　本例常數 $k$ 是地心吸力的 $\frac{1}{2}$.

[算術解法]　設所求的距離是 $x$ 公尺，則得

$$2^2 : 5^2 = 19.6\text{公尺} : x\ \text{公尺}.$$

$$\therefore \quad x = \frac{19.6 \times 5^2}{2^2} = 122.5\ \text{公尺}.$$

**反比例**　設互有關係的二變量 $X$, $Y$, 當 $X$ 是 $m$ 倍時，$Y$ 反是 $\frac{1}{m}$ 倍，則叫做 $X$ 與 $Y$ 成反比例，或 $X$ 依 $Y$ 而反變，寫作 $X \propto \frac{1}{Y}$. 當 $X$ 與 $Y$ 成反比例時，表此二量對應值的積，常是一定，即設 $x, y$ 是 $X$, $Y$ 的任何對應值，$k$ 是常數，則 $xy = k$，或 $x = k \times \frac{1}{y}$. 反之，設互相關係的二變量 $X$, $Y$，其任何對應值是 $x$, $y$，若有 $xy = k$ 的關係，則 $X$ 與 $Y$ 成反比例.

【例 1】有工人 20 人 12 日可成的事，今限 16 日作成，要用工人幾人？

[代數解法]　設對應的人數與日數各是 $x$, $y$，因成一定的事，人數與日數成反比例，故

$xy = k$ ($k$ 是常數)，依題意，$x = 20$, $y = 12$ 是對應值，

$$\therefore \quad 20 \times 12 = k.$$

今 $y = 16$，則 $16x = k$，　$\therefore \quad x = \frac{20 \times 12}{16} = 15.$

（答） 15 人.

［注意］ 本例的常數 $k$，是表一日作成的人數或一人作成的日數.

［算術解法］ 設所求人數是 $x$ 人，則

16 日：12 日 =20人：$x$ 人. $\therefore\quad x=\dfrac{20\times 12}{16}=15$ 人.

【例 2】物體受光的強度，與光源距離的平方成反比例.今與光源距離 3 尺之處有物體，問何處物體受光的強度，是前者的$\dfrac{1}{4}$?

［代數解法］ 設物體與光源的距離是 $d$，光的強度是 $f$. 則 $f=k\times\dfrac{1}{d^2}$. 今 $d=3$，則 $f=k\times\dfrac{1}{9}$.

又設所求距離是 $x$ 公尺，則 $f_1=k\times\dfrac{1}{x^2}$，而 $f_1=\dfrac{1}{4}f$.

$\therefore\quad k\times\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{1}{4}k\times\dfrac{1}{9}$.解此方程，$x=\pm 6$.

（答） 距光源 $\pm 6$ 尺.

［注意］ 本例的 $\pm 6$ 尺可作爲距離光源前後 6 尺解釋.

［算術解法］ 設所求的距離是 $x$ 尺，而光的強度，前者是 1，則後者是$\dfrac{1}{4}$.故得

$\dfrac{1}{4}:1=3^2:x^2 \qquad \therefore\quad x^2=3^2\times 4=36. \qquad \therefore\quad x=6.$

**複比例** 設互有關係的二以上變量 $X, Y, Z,\cdots$，而 $X$ 與 $Y, Z,\cdots$ 各成正比例或反比例，則叫做 $X$ 與 $Y, Z,\cdots$ 成複比例，

或 $X$ 依 $Y, Z, \cdots$ 而聯變，如 $X \propto YZ$，卽表 $X$ 各與 $Y, Z$ 成正比例；如 $X \propto \frac{1}{YZ}$，卽表 $X$ 各與 $Y, Z$ 成反比例．又如 $X \propto \frac{Z}{Y}$ 卽表 $X$ 與 $Z$ 成正比例，而與 $Y$ 成反比例．

【例 1】槍彈進行時所受空氣的抵抗，各與槍彈直徑的平方及速度成正比例．今直徑 $\frac{3}{5}$ 公分，速度每秒 450 公尺的槍彈，空氣的抵抗是 1.152 公斤．問直徑 $\frac{3}{4}$ 公分速度每秒 300 公尺的槍彈，所受空氣的抵抗如何？

[代數解法]　設空氣的抵抗是 $x$ 公斤，槍彈的直徑是 $r$ 公分，每秒速度 $v$ 公尺．　則　$x = kr^2v$．

今　$r = \frac{3}{5}, v = 450$ 公尺，$x = 1.152$ 公斤．

故　$1.152 = k \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 \times 450$．　$\therefore\ k = \frac{1.152 \times 5^2}{3^2 \times 450}$．

又 $r = \frac{3}{4},\ v = 300$．

則　$x = k \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times 300 = \frac{1.152 \times 5^2 \times 3^2 \times 300}{3^2 \times 450 \times 4^2} = 1.2$．

（答）　1.2 公斤．

[算術解法]　設所求空氣的抵抗是 $x$ 公斤，則

$$\left.\begin{matrix}\left(\frac{3}{5}\right)^2 : \left(\frac{3}{4}\right)^2 \\ 450 \quad : \quad 300\end{matrix}\right\} = 1.152 : x.$$

$$\therefore \quad x=\frac{1.152\times\left(\frac{3}{4}\right)^2\times 300}{\left(\frac{3}{5}\right)^2\times 450}=\frac{1.152\times 5^2\times 300}{4^2\times 450}=1.2 \text{ 公斤.}$$

【例 2】氣體的體積，與絕對溫度成正比例，與壓力成反比例.今有氣體當壓力 1.5 氣壓，絕對溫度 $280°$ 時，體積是 400 立方公分，問壓力增 0.5，溫度增 $20°$ 時，此氣體的體積多少?

[代數解法] 設體積是 $V$ 立方公分，絕對溫度是 $T$ 度，壓力是 $P$ 氣壓，則 $V=k\times\frac{T}{P}$($k$ 是常數).

今 $P=1.5$，$T=280$ 時，$V=400$，則 $400=k\times\frac{280}{1.5}$，

$$\therefore \ k=\frac{400\times 1.5}{280}=\frac{15}{7}.$$

又 $P=1.5+0.5=2$，$T=280+20=300$，

則 $V=\frac{15}{7}\times\frac{300}{2}=321\frac{3}{7}$. (答) $321\frac{3}{7}$ 立方公分.

[算術解法] 設所求的體積是 $x$ 立方公分，則得

$$\left.\begin{array}{r} 280:280+20 \\ 1.5+0.5:\ \ 1.5 \end{array}\right\}=400:x.$$

$$\therefore \ x=\frac{400\times 300\times 1.5}{280\times 2}=\frac{2250}{7}=321\frac{3}{7}\text{立方公分.}$$

## 本 章 練 習 題

(1) 化簡下列各比:

(a) $3\frac{3}{4}:4\frac{2}{7}$. (答) 7:8.

(b) $7(a^2-b^2):21(a+b)^2$. (答) $a-b:3(a+b)$.

(2) 從下列等式,求 $x,y$ 的值:

(a) $3x^2-6y=7xy$ (答) 3 或 $-\frac{2}{3}$.

(b) $15(2x^2-y^2)=7xy$. (答) $\frac{5}{6}$或$-\frac{3}{5}$.

(3) 從 $x-2y+3z=0$, $2x+3y-z=0$, 求$\frac{x}{z}$及$\frac{y}{z}$.

(答) $\frac{x}{z}=-1, \frac{y}{z}=1$.

(4) 設 $\frac{x}{y}=\frac{a}{b}$, $\frac{y}{z}=\frac{c}{d}$,求 $x:z$. (答) $\frac{ac}{bd}$.

(5) 有甲乙二種物品,甲 10 個與乙 4 個的價,等於甲 8 個與乙 7 個的價.求甲乙每個價的比. (答) 3:2.

(6) 甲乙二汽車速度的比如 5:3, 今同行 120 公里的路,甲遲開半時而早到半時,求二車的速度.

(答) 甲 80 公里,乙 48 公里.

(7) 有雞甲乙二羣,雞數的比,甲與乙如 7:9. 而雌雄的比,

甲羣如 $3:4$，乙羣如 $7:5$. 問二羣合併,其中雌雄的比如何?

(答)　$33:31$.

(8)　解下列比例:

(a)　$x+4:x+2=x+8:x+5$.　　(答)　4.

(b)　$x^2+2x+1:x^2-2x+1=x+13:x+3$.

(答)　5 或 $\frac{1}{3}$.

(9)　解 $x:y=3:4$, $x-1:y+2=1:2$.

(答)　$x=6$, $y=8$.

(10)　設 $\frac{x+y}{x-y}=\frac{y+z}{y-z}$,試證 $y$ 是 $x$ 與 $z$ 的比例中項.

(11)　設 $a:b=c:d$，試證 $a^2-b^2:c^2-d^2=b^2:d^2$.

(12)　有甲乙二組工人,從甲組移 3 人到乙組，則二組人數相等.若甲組裁 4 人，乙組裁 5 人，則二組人數的比如 $8:7$. 問各組原有工人幾人?　　(答)　甲組 36 人,乙組 33 人.

(13)　求下列各題中 $x:y:z$ :

(a)　$x:y=5:6$, $y:z=4:5$.　　(答)　$10:12:15$.

(b)　$2x+\ y=7z$, $5x-2y=8z$.　　(答)　$2:1:1$.

(14)　從 $x+y:y+z:z+x=5:7:8$, $x+y+z=0$. 求 $x$, $y$, $z$ 的值.　　(答)　$x=3$, $y=2$, $z=5$.

(15)　有現款 410 元，獎勵甲乙丙三職工，甲與乙的比如 5 與 3,乙與丙的比如 4 與 3. 求三人各得多少?

(答)　甲 200 元,乙 120 元,丙 90元.

(16)　甲出資 5000 元經商，4 個月後，乙出資 3000 元加入，再經 8 個月，共得純利益 1680 元．問照出資額及月數分配利益，每人各得多少？　　(答)　甲 1200 元，乙 480 元．

(17)　有成色 0.8 的銀塊與純銀，要取如何的比熔合，方可得成色 0.85 的銀塊？　　(答)　八成銀與純銀的比如 3:1．

(18)　純金是 24 開金，今有 18 開，14 開，12 開金，要熔合成 16 開金，預定 14 開與 12 開金分量的比如 3:2，問應依如何熔合？　　(答)　18 開，14 開，12 開金的比如 7:3:2．

(19)　有酒精與水的混合液二瓶，各瓶中酒精與水的比，甲瓶是 5:1，乙瓶是 25:3．今從甲乙二瓶中取 6 與 7 的比混合，求其中酒精與水的比．　　(答)　45:7．

(20)　從一點可望見地平線上的距離，與此點在平地上高的平方根成正比例．今在高 600 公尺的山頂，可望見的距離是 160 公里．問要在多少高之處，方可望見 300 公里的距離？

(答)　$2109\frac{3}{8}$公尺．

(21)　織襪出售，成本 175 元，可得利益 14 元．問要成本多少元，方可得利益 100 元？　　(答)　1250 元．

(22)　鐘擺的振動，與長的平方根成反比例．今長 1 公尺的擺，2 秒鐘振動一次．問每秒鐘振動 4 次的擺長多少？

(答)　$\frac{1}{64}$公尺．

(23)　照每人每日平均食 5 合，預算可養一羣人 36 日的米．

今每人每日只食 4.5 合，可支持幾日？ (答) 40 日.

(24) 甲走 4 分 30 秒可到的距離，乙要走 4 分 40 秒.問在 1000 公尺的賽跑，甲可許乙先發幾公尺而仍能同時到達？

(答) $35\frac{5}{7}$公尺.

(25) 雇工人 28 人，每日作 8 時，15 日共付工錢 504 元.今照此例，雇工人 21 人，20 日共付工錢 441 元.問每日作工幾時. (答) 7 時.

(26) 有甲乙二船，長途航海. 甲船共載 40 人，備 1000 元的食物，供 125 日的用；乙船載 60 人，備 1200 元的食物，每人每日所用是甲船的$\frac{5}{6}$，問可供幾日的用？ (答) 120 日.

# 第十二章　級數

**引言**　從一起順次加幾，可得許多的數，永無窮盡，此種數的次序有一定，是級數的一種，此外級數的種類尚多，都在本章中敍述，以作研究高等數學的基礎．但級數的範圍甚廣，變化甚多，斷非區區數頁所能詳盡，本章所述，不過是最緊要的幾種．

**級數**　依一定法則有一定次序排列的數，叫做級數；各數叫做級數的項，第一項叫做首項，末一項叫做末項．除首項末項外，其餘都叫做中項．

**等差級數**　級數的各項中，任何一項與前一項的差，都相等的，叫做等差級數，或算術級數，常簡寫作 $A.P.$ 此相等的差，叫做公差．例如 2,5,8,11 是四項的等差級數，2 是首項，5,8 是中項，11是末項，$5-2$，$8-5$，$11-8$ 都等於 3，此 3 便是公差．

設等差級數的首項是 $a$，公差是 $d$，項數是 $n$，末項是 $l$，則第二項是 $a+d$，第三項是 $a+2d$，……依此推得末項即第 $n$ 項的公式是

$$l=a+d(n-1).$$

由此公式，又可推得公差的公式是 $d=\dfrac{l-a}{n-1}$.

又設等差級數的總和是 $S$，則

$$S=a+(a+d)+(a+2d)\cdots\cdots+(l-d)+l \text{（各項順列）}$$

$$S=l+(l-d)+(l-2d)+\cdots\cdots+(a+d)+a\text{(各項倒列)}$$

相加，$2S=(a+l)+(a+l)+(a+l)+\cdots\cdots+(a+l)+(a+l)$

$$=n(a+l).$$

故得總和的公式是 $S=\frac{n}{2}(a+l)$.

用 $l=a+d(n-1)$ 代入上式，又可得 $S=\frac{n}{2}\{2a+d(n-1)\}$.

如設 $a, A, b$ 成等差級數，則 $A$ 叫做 $a, b$ 的等差中項．因 $A-a=b-A$, $\therefore\ 2A=a+b$, 故得等差中項的公式：$A=\frac{a+b}{2}$.

因此，二數的等差中項，亦叫做相加平均數或算術平均數．

【例 1】有等差級數，首項是 60，第十三項是 12，求公差．

【解】 設公差是 $d$，則第十三項是 $60+12d=12$. $\therefore d=-4$.

【例 2】有等差級數，首項是 6，公差是 $-3$，問第幾項是 $-21$?

【解】 設所求是第 $n$ 項，則 $-21=6+(n-1)\times(-3)$,

$$\therefore\ n=10.$$

【例 3】有等差級數，第二項與第三項的和是 19，第五項與第 7 項的和是 40，求第十五項．

【解】 設首項是 $a$，公差是 $d$，則第二項是 $a+d$，第三項是 $a+2d$，第五項是 $a+4d$，第七項是 $a+6d$，故得

$$a+d+a+2d=19, \qquad \therefore\ 2a+3d=19\cdots\cdots(1)$$

$$a+4d+a+6d=40. \qquad \therefore \quad 2a+10d=40\cdots\cdots(2)$$

從 (1),(2) 解得 $d=3$,代入 (1),得 $a=5$.

故第十五項 $=a+14d=5+14\times3=47$.

【例 4】求於 8 與 24 中間插入七個等差中項。

【解】 插入七個中項後,則 24 是第九項,今設此級數的公差是 $d$,則 $24=8+8d$, $\therefore d=2$.故所求的七個中項是 10,12,14,16,18,20,22.

【例 5】有等差級數 $2,-2,-6,\cdots\cdots$ 求首二十項的和.

【解】 首項是 2, 公差是 $-4$, 項數是 20. 故設二十項的和是 $S$,則

$$S=\frac{20\{2\times2+(20-1)\times(-4)\}}{2}=10(4-76)=-720.$$

【例 6】有等差級數,和是 63, 首項與第三項的和是 24, 第二項與第六項的和是 18, 求項數.

【解】 設首項是 $a$, 公差是 $d$, 項數是 $n$,則得

$$a+a+2d=24\cdots\cdots(1) \qquad a+d+a+5d=18\cdots\cdots(2)$$

$$\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}=63\cdots\cdots(3)$$

從(1)得 $a+d=12\cdots\cdots(4)$ 從(2)得 $a+3d=9\cdots\cdots(5)$

從(4),(5)解得 $d=-\frac{3}{2}$, $a=\frac{27}{2}$,

代入 (3), 得 $\dfrac{n\left\{2\times\frac{27}{2}+(n-1)\times\left(-\frac{3}{2}\right)\right\}}{2}=63.$

$\therefore \qquad 3n^2-57n+252=0.$

析因式， $(3n-21)(n-12)=0.$

$$\therefore \quad n=7 \text{ 及 } n=12.$$

本例 $n$ 的二根都合題意。因公差是負數，故從第八項至第十二項的和，可相消而等於 0. 請讀者全寫各項自行試驗。

【例 7】有三數成等差級數，和是 24，平方的和是 210，求此三數。

【解】因所求的三數成等差級數，故可設此三數是 $x-y$，$x$，$x+y$（公差 $y$），依題意得

$$x-y+x+x+y=24\cdots\cdots(1)$$

$$(x-y)^2+x^2+(x+y)^2=210\cdots\cdots(2)$$

從 (1) 得 $3x=24$， $\therefore \quad x=8$，

從 (2) 得 $3x^2+2y^2=210.$

用 $x=8$ 代入，$2y^2=18.$ $\therefore \quad y=\pm 3.$

故所求的三數是 5，8，11 及 11，8，5 都合題意。

**等比級數** 級數的各項中，任何一項與前一項的比都相等的，叫做等比級數，或幾何級數，常簡寫作 G. P. 此相等的比值，叫做公比。例如 3，6，12，24，48 是五項的等比級數，3 是首項，6，12，24 是中項，48 是末項，$6\div 3$，$12\div 6$，$24\div 12$，$48\div 24$ 都等於 2，此 2 便是公比。

設等比級數的首項是 $a$，公比是 $r$，項數是 $n$，末項是 $l$，則第二項是 $ar$，第三項是 $ar^2$，……依此推得末項卽第 $n$ 項的公式

是 $$l=ar^{n-1}$$

從此式又可推得公比的公式是 $r^{n-1}=\dfrac{l}{a}$.

又設此等比級數的總和是 $S$，則

$$S=a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}\cdots\cdots\cdots(1)$$

(1)×$r$，得 $$rS=ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}+ar^n\cdots\cdots(2)$$

(2)−(1)，得 $rS-S=ar^n-a$，$\therefore\ S(r-1)=a(r^n-1)$.

故得總和的公式是：

$S=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$ 或 $\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ ($r>1$ 時用前式，$r<1$ 時用後式)。

用 $l=ar^{n-1}$ 代入上式，又可得 $S=\dfrac{lr-a}{r-1}$.

公式 $S=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{a}{1-r}-\dfrac{ar^n}{1-r}$ 中，若項數 $n$ 無限增大，而 $-1<r<1$，則 $r^n$ 無限減小而趨近於 0，即 $\dfrac{ar^n}{1-r}$ 可當作 0，故此時設無限等比級數的總和是 $S_\infty$，則得公式 $S_\infty=\dfrac{a}{1-r}$.

如 $a$，$G$，$b$ 成等比級數，則 $G$ 叫做 $a$，$b$ 的等比中項。因 $\dfrac{G}{a}=\dfrac{b}{G}$，$\therefore\ G^2=ab$，故得等比中項的公式：$G=\sqrt{ab}$，此與比例中項的意義相同。因此，二數的等比中項，亦叫做相乘平均數或幾何平均數。

【例 1】有等比級數，首項是 3，第四項是 192，求公比。

【解】 設公比是 $r$，則 $3r^{4-1}=192$，

$$\therefore\ r^3=64, \text{故} r=4.$$

【例 2】有等比級數，第三項是 12，第七項是 $2\frac{10}{27}$，求首項，公比及第八項。

【解】 設首項是 $a$，公比是 $r$，則得

第三項 $ar^2=12\cdots\cdots(1)$　　第七項 $ar^6=2\frac{10}{27}\cdots(2)$

$(2)\div(1)$，得 $r^4=\frac{16}{81}$.　　$\therefore\ r=\pm\frac{2}{3}$.

代入 (1)，得 $a=12\div\frac{4}{9}=27$.

故 第八項 $ar^7=\left(\pm\frac{2}{3}\right)\times 2\frac{10}{27}=\pm\frac{128}{81}=\pm1\frac{47}{81}$.

【例 3】有等比級數，首項是 3，公比是 2，問第幾項是 96?

【解】 設第 $n$ 項是 96，則 $3\times 2^{n-1}=96$.

$$\therefore\ 2^{n-1}=32=2^5 \qquad \therefore\ n-1=5, \text{ 故 } n=4.$$

【例 4】求於 7 與 224 中間，插入四個等比中項。

【解】 插入後的等比級數，首項是 7，第六項是 224，故設公比是 $r$，則 $224=7r^5$，　$\therefore\ r^5=32=2^5$，故 $r=2$.

故所求的四個等比中項，是 14，28，56，112.

【例 5】有等比級數，第二項是 40，第四項是 1000，求前六項的和。

【解】 設首項是 $a$，公比是 $r$，依題意，得

第二項 $ar=40\cdots\cdots(1)$ 第四項 $ar^3=1000\cdots(2)$

$(2)\div(1)$，得 $r^2=25$. $\therefore\ r=\pm5$.

代入 (1)，得 $a=\pm8$.

設前六項的和是 $S$，

如 $r=5$，$a=8$， 則 $S=\dfrac{8(5^6-1)}{5-1}=2\times15624=31248$.

如 $r=-5$ $a=-8$，

則 $S=\dfrac{-8\{1-(-5)^6\}}{1+5}=\dfrac{4}{3}\times15624=20832$.

【例 6】有三數成等比級數，和是 19，平方的和是 133，求各數.

【解】 設所求的三數是 $x^2, xy, y^2$，$\left(\text{公比是}\dfrac{y}{x}\right)$，則得

$x^2+xy+y^2=19\cdots\cdots(1)$ $x^4+x^2y^2+y^4=133\cdots\cdots(2)$

$(2)\div(1)$，得 $x^2-xy+y^2=7\cdots\cdots(3)$

$(1)-(3)$，$2xy=12$. $\therefore\ xy=6\cdots\cdots(4)$

$(1)+(4)$，得 $(x+y)^2=25$. $\therefore\ x+y=\pm5$.

從 $x+y=5$，$xy=6$，得 $x=2$，$y=3$ 及 $x=3$，$y=2$.

從 $x+y=-5, xy=6$,

得 $x=-2, y=-3$, 及 $x=-3, y=-2$.

故 $x^2=4$, $xy=6$, $y^2=9$. 及 $x=9$, $xy=6$, $y^2=4$.

故所求的三數是 4, 6, 9.

【例 7】求無限等比級數 $3, -\frac{1}{3}, \frac{1}{27}\cdots\cdots$的總和.

【解】首項是 3, 公比是 $-\frac{1}{9}$,故設所求的總和是 $S_\infty$, 則得

$$S_\infty=\frac{3}{1-\left(-\frac{1}{9}\right)}=\frac{3}{1\frac{1}{9}}=\frac{27}{10}=2\frac{7}{10}.$$

【例 8】有無限等比級數$\frac{a}{a+b}+\left(\frac{a}{a+b}\right)^2+\left(\frac{a}{a+b}\right)^3+\cdots$ 其中 $a$, $b$ 是同符號的數,求總和.

【解】 因 $a$, $b$ 是同符號的數,故公比$\frac{a}{a+b}$是正數而小於 1.

設所求的總和是 $S_\infty$, 則 $S_\infty=\dfrac{\frac{a}{a+b}}{1-\frac{a}{a+b}}=\frac{a}{a+b-a}=\frac{a}{b}$.

**調和級數** 設 $a, b, c\cdots\cdots$的倒數卽 $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \cdots\cdots$成等比級數,則 $a, b, c, \cdots\cdots$叫做成調和級數.故調和級數的問題,都可化作等差級數解之.

設 $a, H, b$ 成調和級數, 則 $H$ 叫做 $a$, $b$ 的調和中項. 因

$$\frac{1}{H}-\frac{1}{a}=\frac{1}{b}-\frac{1}{H},\qquad \therefore\ \frac{2}{H}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab},$$

故得調和中項的公式是　$H=\dfrac{2ab}{a+b}$.

【例 1】求於 6 與 24 中間插入二個調和中項。

【解】 6 與 24 的倒數是 $\frac{1}{6}$ 與 $\frac{1}{24}$，先求 $\frac{1}{6}$ 與 $\frac{1}{24}$ 間的二個等差中項，設公差是 $d$，則 $\frac{1}{24}=\frac{1}{6}+3d$，　$\therefore\ d=-\frac{1}{24}$.

故等差中項是　$\frac{1}{6}-\frac{1}{24}=\frac{1}{8}$，$\frac{1}{8}-\frac{1}{24}=\frac{1}{12}$，即所求的調和中項是 8,12.

【例 2】設 $a$, $b$, $c$ 成調和級數，試證　$\dfrac{b+a}{b-a}+\dfrac{b+c}{b-c}=2$.

【解】 因 $b$ 是 $a$, $c$ 的調和中項，故 $b=\dfrac{2ac}{a+c}$.

$$\therefore\quad \frac{b+a}{b-a}+\frac{b+c}{b-c}=\frac{\frac{2ac}{a+c}+a}{\frac{2ac}{a+c}-a}+\frac{\frac{2ac}{a+c}+c}{\frac{2ac}{a+c}-c}$$

$$=\frac{2ac+a(a+c)}{2ac-a(a+c)}+\frac{2ac+c(a+c)}{2ac-c(a+c)}$$

$$=\frac{a+3c}{c-a}+\frac{3a+c}{a-c}=\frac{2(c-a)}{c-a}=2.$$

【例 3】設 $a$ 是 $b$ 與 $c$ 的等差中項，$b$ 是 $a$ 與 $c$ 等比中項，試證 $c$ 是 $a$ 與 $b$ 的調和中項。

【解】 因 $a$ 是 $b$ 與 $c$ 的等差中項，故 $2a=b+c$，

$$\therefore \quad 2ab=b^2+bc \cdots\cdots(1)$$

又因 $b$ 是 $a$ 與 $c$ 的等比中項，故 $b^2=ac\cdots\cdots(2)$

用(2)代入(1)，得 $2ab=ac+bc$. 今 $abc\neq 0$，用 $abc$ 除此式兩邊，得 $\dfrac{2}{c}=\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{a}$. 故 $c$ 是 $a, b$ 的調和中項。

## 本 章 練 習 題

(1) 有等差級數，首項是 1，公差是$\frac{1}{2}$，求第十五項。

(答) 8.

(2) 有等差級數，公差是 9，第七項是 33，求首項。

(答) $-21$.

(3) 求等差級數 $5, 2, -1, \cdots\cdots, 52$的項數。

(答) 20 項。

(4) 求於 18 與 43 中間插入四個等差中項。

(答) 23, 28, 33, 38.

(5) 求級數 $5, 2, -1, \cdots\cdots, -55$的總和。

(答) $-525$.

(6) 求從 1 起 $n$ 個整數的總和。 (答) $\frac{n}{2}(1+n)$.

(7) 試證從 1 起 $n$ 個奇數的和必是平方數.

(8) 有五數成等差級數,和是 15,平方的和是 55,求各數.

(答) 1,2,3,4,5.

(9) 有米袋一堆,最上層 3 袋,以下各層,順次少一袋,最下層是 12 袋,問共有幾袋? (答) 75 袋.

(10) 一人往某處,路程 280 里,從第一日起,每日遞減 5 里,7 日走到.求第一日所行的路程. (答) 52 里.

(11) 有人用銅元 100 個,分給乞丐.第一人 10 個,第二人 15 個,以下順次增 5 個,問可分配幾人? (答) 5 人.

(12) 將款 420 元獎勵職工,從第一人以下,遞增 5 元.已知第一人所得,是最後一人所得的一半.求人數.

(答) 8 人.

(13) 求級數 $3,-6,12,\cdots\cdots$ 的第六項.

(答) $-96$.

(14) 有第五項是 32 第七項是 128 的等比級數,求首項及公比. (答) 首項2,公比$\pm 2$.

(15) 等比級數的和是 1456,首項是 4,末項是 972,求公比及項數. (答) 公比 3,項數 6.

(16) 設 $a,b,c,d$ 是等比級數,試證 $a^2+b^2$, $b^2+c^2$, $c^2+d^2$ 亦是等比級數.

(17) 有三數成等差級數,和是 6.若順次加 1,2,5,則成等比級數,求此三數. (答) 1,2,3,或 7,2,$-3$.

(18) 求等比級數 $\frac{5}{7}+\frac{10}{21}+\frac{20}{63}+\cdots\cdots$無限項的和.

(答) $\frac{15}{7}$.

(19) 王君儲蓄,逐年加多,次年所儲都是上年的 $1\frac{1}{2}$ 倍.如是 7 年,共儲 1029.5 元(不計利息),問第一年所儲多少?

(答) 32 元.

(20) 皮球從 20 尺的高處落下,第一次反躍力高 8 尺.如此任他起落,直到靜止.問上下運動所經的距離如何?

(答) $46\frac{2}{3}$尺.

(21) 不等二正數的等差中項與調和中項的積, 必等於等比中項的平方.

(22) 二數的等差中項是 10,調和中項是 $8\frac{2}{5}$,求此二數.

(答) 14, 6.

# 第十三章　對數

**引言**　應用對數的原理，可以用加減代乘除，用乘除代乘方開方，使繁複難解的演算，一變爲平易簡捷，在計算上最切實用。本章以指數律爲基礎，敍述對數的意義，對數表的用法，並舉利息算的公式，以示對數的應用，使讀者獲得用對數解決問題的技能。至書中舉例，都依據世界書局出版的溫德華斯密司兩氏對數表，讀者最好購置一册，以備檢查。

**指數律**　以前所講的指數律，都指正整數而言，今再解釋指數是 0 或負數或分數時的意義.

(1) 0 指數　從除法指數律 $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$，設 $m=n$，則

左邊 $=1$，　右邊 $=a^0$.　故 $a^0=1$.

(2) 負指數　$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$ 式中，設 $m=0$，則

左邊 $=\frac{a^0}{a^n}=\frac{1}{a^n}$，　右邊 $=a^{0-n}=a^{-n}$.　故 $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$.

(3) 分指數　從乘法指數律，$(a^m)^n=a^{mn}$，設 $mn=p$，則 $m=\frac{p}{n}$.

代入上式，$\left(a^{\frac{p}{n}}\right)^n=a^p$．但從根指數律，$(\sqrt[n]{a^p})^n=a^p$．

$$\therefore\ \left(a^{\frac{p}{n}}\right)^n=(\sqrt[n]{a^p})^n.\qquad 故\ a^{\frac{p}{n}}=\sqrt[n]{a^p}.$$

**對數**　設 $a^x=N$ 時，可寫作 $x=log_aN$，此是對數記法；式中 $a$ 叫做底數，$x$ 叫做用 $a$ 作底時 $N$ 的對數，$N$ 叫做對數 $x$ 的眞數；$log$ 是對數記號．故 $a^x=N$ 與 $x=log_aN$ 表同一事實，不過形式與名稱不同，前式中 $x$ 是指數，後式中 $x$ 是對數．

在 $a^x=N$ 中，因底數必取正數，故 $x$ 無論爲正或負，$N$ 一定是正數，因此而負數無對數．

【例】 用 10 作底，求 1000 與 0.01 的對數．

【解】 因 $1000=10^3$，故 $log_{10}1000=3$．

又 $0.01=\dfrac{1}{100}=\dfrac{1}{10^2}=10^{-2}$，故 $log_{10}0.01=-2$．

[注意]用 10 作底數時，此 10 常可從略，如 $log_{10}100$ 簡寫作 $log\ 100$．

**對數基本定理**　依對數的意義，有基本定理如下：

(1)　底的對數　因 $a^1=a$，　故 $log_aa=1$．

(2)　1 的對數　因 $a^0=1$，　故 $log_a1=0$．

(3)　積與商的對數　設 $log_aM=m$，$log_aN=n$，則 $a^m=M$，$a^n=N$．

故 $MN=a^ma^n=a^{m+n}$．

$$\therefore\ log_aMN=m+n=log_aM+log_aN.$$

又　$\frac{M}{N}=\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$.

$$\therefore\quad log\left(\frac{M}{N}\right)=m-n=log_aM-log_aN.$$

(4)　乘冪與方根的對數　設 $log_aM=m$，則 $a^m=M$.

故　$M^n=a^{mn}$.　　$\therefore\quad log_aM^n=mn=nlog_aM.$

又於此式中設 $n=\frac{q}{p}$，則 $log_aM^{\frac{q}{p}}=\frac{q}{p}log_aM$.

$$\therefore\quad log_a\sqrt[p]{M^q}=\frac{q}{p}log_aM.$$

又此式若 $q=1$，則 $log_a\sqrt[p]{M}=\frac{1}{p}log_aM$.

【例 1】已知 $log2=0.30103$，求 $log5$.

【解】　$log5=log\frac{10}{2}=log10-log2=1-0.30103=0.69897.$

【例 2】化簡 $log\frac{28}{33}-log\frac{1}{35}+log\frac{99}{98}-log3.$

【解】　原式 $=log\left(\frac{28}{33}\div\frac{1}{35}\times\frac{99}{98}\div 3\right)$.

$$=log\left(\frac{28\times 35\times 99}{33\times 98\times 3}\right)=log10.$$

【例 3】解 $log(x-2)+log(x-3)=0$.(此名對數方程)

【解】 左邊$=log(x-2)(x-3)=log(x^2-5x+6)$，右邊$=log1$.

故 $log(x^2-5x+6)=log1$, $\therefore\quad x^2-5x+6=1$.

$$\therefore\quad x=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}.$$

但 $x=\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$時，$x-2, x-3$ 都是負數，與前述負數無對數不合，故 $x=\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$.

**常用對數** 用 10 作底的對數，卽日常計算所用的，叫做常用對數．如 $log2=0.30103$ 是常用對數．故 $log20=log10\times2=log10+log2=1+0.30103=1.30103$．又$log0.2=log\dfrac{2}{10}=log2-log10=0.30103-1=\bar{1}.30103$．可見常用對數是整數與小數兩部合成，整數部叫做指標，可正可負；小數部叫做假數，必是正數．並從此得指標與假數的性質如下：

(1) 假數 數字的排列完全相同，只有小數點位置不同的各數，其對數的假數都相同。

(2) 指標 整數部有 $n$ 位的數，其對數的指標是 $n-1$．又整數部是 0，而小數第 $n$ 位起始有有效數字的數，其對數的指標是 $\bar{n}$ (卽 $-n$).

[注意]上式$\bar{1}.30103$中，$\bar{1}$是負數，0.30103 是正數，其代數和是 $-0.69897$．但對數的假數，常不用負數，故如上記法．

【例 1】已知$log2=0.30103$, $log3=0.47712$, $log7=0.84510$, 求 $log\,0.042$.

【解】 $0.042=\dfrac{2\times3\times7}{1000}$.故

故$log0.042=log2+log3+log7-log1000$

$$=0.30103+0.47712+0.84510-3=\overline{2}.62325.$$

【例 2】解 $5^{7-3x}=2^{x+4}$（此名指數方程）

【解】 兩邊各用對數，$(7-3x)log5=(x+4)log2$.

$$\therefore\quad 7log5-3x\,log5=x\,log2+4log2.$$

移項， $(3log5+log2)x=7log5-4log2$.

$$\therefore\quad x=\frac{7log5-4log2}{3log5+log2}.$$

但 $log5=log\dfrac{10}{2}=log10-log2$，代入上式，得

$$x=\frac{7(1-log2)-4log2}{3(1-log2)+log2}=\frac{7-11log2}{3-2log2}=\frac{7-11\times0.30103}{3-2\times0.30103}$$

$$=\frac{3.68867}{2.39794}=1.538.$$

**對數表** 計算連續整數的對數至小數若干位，列成一表，以備檢用，叫做對數表。今將對數表的用法，示例於下：

(1)有眞數求對數

【例】求 134.76 的對數。

此數有整數三位，故對數的指標是 2. 依眞數 134.76 檢表，

得略大略小二眞數的對數如下：

$$\begin{array}{ll} \log 134.8=2.12969 & 134.76-134.7=0.06. \\ \underline{\log 134.7=2.12937} & 0.1:0.06=0.00032:x. \\ \text{差}\ 0.1=0.00032 & \therefore\quad x=0.00019. \end{array}$$

故 $\log 134.76=2.12937+0.00019=2.12956.$

(2)有對數求眞數

【例】求對數 $\bar{1}.26379$ 的眞數.

因指標是 $\bar{1}$，故所求眞數從小數第一位起．依假數檢表，得略大略小二對數的眞數如下：

$$\begin{array}{ll} \log 0.1836=\bar{1}.26387 & \bar{1}.26379-\bar{1}.26364=0.00015, \\ \underline{\log 0.1835=\bar{1}.26364} & 0.00023:0.00015=0.00001:x. \\ \text{差}\ 0.0001=0.00023 & \therefore\quad x=0.000065. \end{array}$$

故所求的眞數是 $0.1835+0.000065=0.183565.$

對數表的用法旣明，今再述對數應用於利息算的公式：

[利息]借人款項，到期歸還，照原借數目，外加若干作報酬，叫做利息．原借的金額，叫做本金：每期內利息對於本金的百分之幾，叫做利率；經過幾期，叫做期數．本金與利息的和，叫做本利和．

(1)單利法　計算利息，每期的本金不變，卽本自爲本，利不生利者，叫做單利法．設本金是 $A$，利息是 $B$，利率是 $r$，期數是 $n$，本利和是 $S$，則得

公式：　$B=Arn,\qquad S=A(1+rn).$

(2)複利法　計算利息，每期將利息併入本金，下期再算利息，

卽本旣生利，利復生利者，叫做複利法．設 S, $A$, $r$, $n$ 所表與上單利法相同，則

$$\text{第一期本利和}=A(1+r)$$
$$\text{第二期本利和}=A(1+r)^2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

公式：
$$S=A(1+r)^n$$

故
$$\log S=\log A+n\log(1+r).$$

【例】依年利率 5 厘的複利，要在 10 年間得本利和3000元，此時應存本金多少？

【解】 設所求的本金是 $x$ 元，則從公式得

$$3000=x(1.05)^{10}.$$

$$\therefore\quad x=\frac{3000}{1.05^{10}}.$$

故 $\log x=\log 3000-10\log 1.05.$

$$\begin{aligned}\log 3000&=3.47712\\ -)\ 10\log 1.05&=0.21190\\ \hline \log x&=3.26522\\ &=\log 1842.\end{aligned}$$

（答） 1842 元。

［注意］如此求得的數，亦叫做複利現價．

**年金**　每期支付同一的金額，叫做年金．

(1) 年金終價　各期年金依複利計算的本利和總數，叫做年金終價，卽如銀行中零存整付的到期本息．設年利率是 $r$，每年算複利，每年初儲蓄 $a$ 元，第 $n$ 年終的本利和是 $S$，則得

$$S=a(1+r)+a(1+r)^2+\cdots\cdots+a(1+r)^n.$$

依等比級數得公式(I)：$S=\dfrac{a(1+r)\{(1+r)^n-1\}}{r}$．

若改作每年終儲蓄 $a$ 元,則依上法得

$$\text{公式(II)}:\ S=\frac{a\{(1+r)^n-1\}}{r}.$$

(2)每期年金　即如銀行中整存零付的每次支款.設存款$A$元,依年利率 $r$ 的複利計算,每年支取 $a$ 元,至 $n$ 年本利都淸,則用 $S=A(1+r)^n$ 代入年金終價公式(II)中,得

$$\text{公式}:\quad a=\frac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n-1}.$$

(3)年金現價　在定期內每期可得定額的年金,今預先一次算淸所得的金額,叫做年金現價.設從今起,每滿一年可得 $a$ 元,至 $n$ 年爲止的年金現價是 $A$ 元,年利率是 $r$,則從每期年金公式,得

$$\text{公式}:\quad A=\frac{a}{r}\left\{1-\frac{1}{(1+r)^n}\right\}.$$

【例 1】每年初儲蓄 100 元,年利率 6 厘,每年算複利,求 30 年後的本利和.

【解】 依年金終價公式(I),得 $S=\dfrac{100\times1.06(1.06^{30}-1)}{0.06}$.

今 $\log 1.06^{30}=30\log 1.06=30\times0.02531=0.7593$

$=\log 5.745.$

$$\therefore\quad S=\frac{106\times5.745}{0.6}=10149.5.$$

【例 2】借款 5000 元,年利率 6 厘,每半年算複利,今定每

半年還一定金額，至 10 年後本利還清，問每次該還幾元？

【解】 因半年還一次，故用 $r=0.03$，$n=20$ 代入每期年金公式，得

$$a=\frac{5000\times0.03\times1.03^{20}}{1.03^{20}-1}=\frac{150\times1.03^{20}}{1.03^{20}-1}.$$

今 $\log 1.03^{20}=20\log1.03=20\times0.01284=0.2568=\log1.806$，

故 $$1.03^{20}-1=0.806.$$

$$\therefore\quad a=\frac{150\times1.806}{0.806}=336.1.$$

【例 3】依年利率 5 厘計算，在 20 年中每年可得 500 元的年金現價是多少？

【解】 依年金現價公式，得

$$A=\frac{500}{0.05}\left(1-\frac{1}{1.05^{20}}\right)=10000(1-1.05^{-20}).$$

今 $\log 1.05^{-20}=-20\log 1.05=-20\times0.02119=-0.4238$

$$=\overline{1}.5762=\log 0.3769.$$

$$\therefore\quad A=10000(1-0.3769)=6231.$$

## 本 章 練 習 題

(1) 化簡下列各式：

$$27^{\frac{2}{3}},\quad 8^{-2},\quad (-64)^{\frac{5}{3}},\quad 32^{0.4},\quad 100^{1.5}\quad 25^{\frac{1}{2}}.$$

(答) $9,\dfrac{1}{64}$, 1024, 4, 1000, 5.

(2) 用公式化簡下列各式:

(a) $\left(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)$ (答) $a+b$.

(b) $\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)$. (答) $x-y$.

(c) $(x-y)\div\left(x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}\right)$. (答) $x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}$.

(d) $(1-x)\div\left(1-x^{\frac{1}{3}}\right)$. (答) $1+x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}$.

(3) 求 $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7}=\left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$ 中 $x$ 的值。 (答) $x=1$.

(4) 用對數記法表示下列各式的關係:

$3^4=81$, $\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{64}$, $9^{\frac{3}{2}}=27$.

(答) $log_3 81=4$, $log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{64}=3$, $log_9 27=\frac{3}{2}$.

(5) 求 1, 10, 100, 1000 的對數. (答) 0,1,2,3.

(6) 求 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001 的對數。

(答) $-1,-2,-3,-4$.

(7) 化簡 $log\frac{28}{15}+2\,log\frac{14}{3}-3\,log\frac{7}{6}$. (答) $\frac{128}{5}$.

(8) 解對數方程 $log\,16x-log\,8x^2=log\,3x^2-2log\,4x$. (答) $x=4$.

(9)　已知 $log\,2=0.30103$，$log3=0.47712$，求 $log\,1.08$，$log\,7680$，並檢表覆驗。

(10)　本金 3000 元，年利率 7 厘，每年算複利。求 10 年後的本利和。　(答)　6384.5 元。

(11)　依年利率 6 厘的複利，5 年後可得 1000 元的複利現價如何?　(答)　747.2 元。

(12)　依年利率 7 厘的複利，本利和超過本金 10 倍，要在幾年之後?　(答)　35 年後。

(13)　半年一期的複利法，10 年後本利和約是本金的 2 倍。求年利率。　(答)　約 7 厘。

(14)　依年利率 6 厘的複利，每年初儲蓄 50 元。存滿 25 年，可得本利和多少?　(答)　2908 元。

(15)　借款一宗，每年撥還 200 元，至 15 年後本利都清；依年利率 6 厘的複利計算，此借款的金額多少?　(答)　1942 元。

(16)　借款 1000 元，依年利率 9 厘的複利計算，每年應還多少元，方可於 10 年後本利都清?　(答)　155.8元。

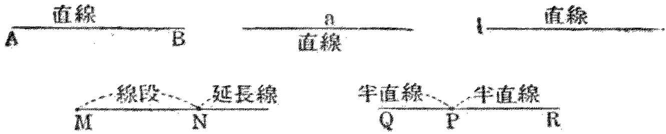
# 第十四章　幾何基本事項

**引言**　以前各章,已講過代數中的重要事項,是研究正負虛實的數,重在計算.今將講述幾何中的重要事項,是研究圖形的性質,重在推理.本章先述各種名詞的意義及初步定理,以灌輸形象的基本觀念,及推理的方式,以爲幾何入門的基礎.

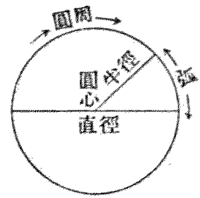
**圖形**　凡在空間佔有位置的實物,叫做物體.不問實物的質料如何,單研究實物的形狀與大小,叫做立體或簡稱體.立體有長有闊有厚,如火柴匣與皮球等的形狀與大小,都是立體.　立體與空間的交界處,叫做面,面有長有闊而無厚.面有二種,如火柴匣的六面是平坦的,叫做平面;如皮球的面是凹凸的,叫做曲面.　面與面的交界處,叫做線,線有長而無闊無厚.線有二種,如火柴匣的十二稜是平直的,叫做直線;如皮球面的裂痕是彎曲的,叫做曲線.　線與線的交界處叫做點,點只有位置而無長闊厚.　點線面體組成的形狀,叫做圖形.　研究平面上圖形的性質,叫做平面幾何學.今先將線與角的種類分述於下:

**直線分類**　長短無限制的直線,叫做無限直線,尋常說直線都指此種.在直線上二點中間的一段,叫做線段,此二點叫做端點.線段的長,就是兩端點的距離;在線段以外的部分,叫做延長線.如一直線從線上一點分成二部分,每部分叫做半直線,故半直線只有一

端點．直線的記法,可在相近處左右各記一大寫字母,或在中間或在旁邊記一小寫字母.線段與半直線仿此,如下圖:

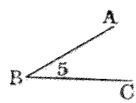



**圓**　一條閉曲線上各點與其內一點的距離處處相等，此圖形叫做圓，曲線叫做圓周，此一點叫做圓心，周上各點至圓心的距離叫做半徑，故同圓的半徑都相等．二半徑合成的線段，叫做直徑，故同圓的直徑亦都相等．圓周的一段叫做弧．

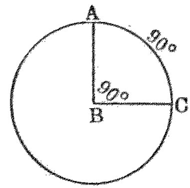



將一圓周分作 360 等分，每一等分叫做度，一度又等分作 60 分，一分又等分作 60 秒．此度，分，秒是測弧的單位，各可用記號 $^\circ$，$'$，$''$ 寫在數字的右肩表示，如 $90^\circ 45' 30''$ 便是 90 度 45 分 30 秒．

**角**　同一端點的二條半直線所成的形，叫做角，端點叫做頂點，半直線叫做邊．如右圖，$AB$ 與 $BC$ 是邊，$B$ 是頂點，所成的角可記作 $\angle ABC$ 或 $\angle B$ 或 $\angle 5$，但用三文字記角時，頂點的文字，須在當中．

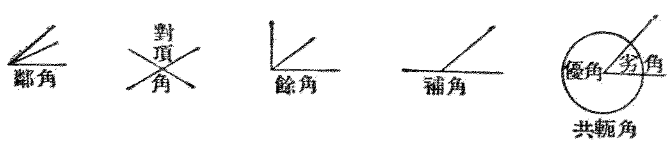



角的單位　從圓心至圓周作二線段，此所成的角，叫做圓心角．其兩邊所截弧的度數，便是此角的度數．如下圖，$\angle ABC$ 是 90 度．故測角也用度分秒作單位．




角的分類　等於 90 度的角，叫做直角(記號用 $\angle R$)；小於 90 度的角，叫做銳角，大於 90 度的角叫做鈍角．等於 180 度的角即兩邊接成一直線時的角，叫做平角．等於 360 度的角即由旋轉一周而兩邊重合時的角，叫做周角．故 1 平角 $=2$ 直角，1 周角 $=2$ 平角 $=4$ 直角．因此有一定之理：(1)凡直角都相等，(2)凡平角都相等．(3)凡周角都相等．


二角關係　二角公有頂點與一邊時，叫做互爲鄰角．一角的二邊各從頂點延長，所成的四角中，不相鄰的二角，叫做對頂角．二鄰角的和，如等於一直角時，此二角叫做互爲餘角；如等於一平角時，此二角叫做互爲補角；如等於一周角時，此二角叫做共軛角，其中凸角叫做劣角，凹角叫做優角．因此有一定之理：(1)等角的餘角相等．(2)等角的補角相等．(3)對頂角相等．




**直線的性質**　二直線相會於一點，叫做相交，此一點叫做交點．二直線無論如何延長，永不能相交的，叫做平行（平行的記號

用//)，此二直線叫做平行線。從此種關係可得眞理如下：


(1)　二直線非相交必平行。

(2)　許多直線能過同一點。

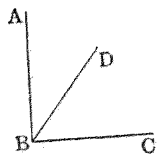
(3)　相交二直線不能與第三直線平行。

(4)　過二點只能作一直線，故二點可定一直線。

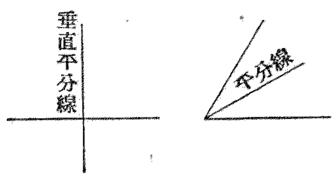
(5)　二直線交點，不能多於一點，故相交二直線可定一點。

(6)　連結二點的線段之長，是二點間的最短距離。

垂線，斜線　二直線相交若成直角，則此二線叫做互相垂直或互為垂線，此交點叫做垂線足；若不成直角，叫做斜線。如右圖，$AB$ 與 $BC$ 互為垂線，可記作 $AB \perp BC$，而 $BD$ 則是 $BC$ 的斜線。




平分線　將一線段分成相等二段的垂線，叫做垂直平分線，交點是線段的中點。將一角分成相等二角的直線，叫做角的平分線或分角線。一線段的垂直平分線與一角的平分線，都只有一條，也是眞理。

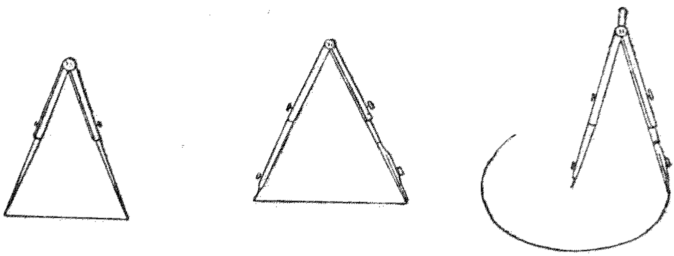



上面已將圖形的要素敘明，今再述幾何學上所用的儀器及術語於下：

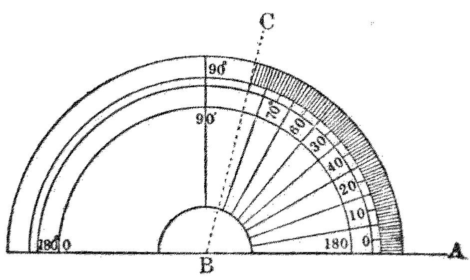
**畫圖儀器**　幾何學所研究的是圖形，畫圖形要用儀器，應備的儀器有下列四種，前二種是必不可少的，後二種是便於實用的：

(1)直尺　本是一種平直不刻分寸的尺，但爲便利計，常取市尺或公尺代用。用直尺可畫線連結二點或將線段延長，即將邊緣與二點重合，用鉛筆沿邊緣畫去便得。

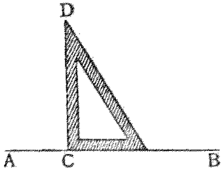
(2)圓規　亦名兩脚規，一脚有針尖，一脚可裝鉛筆或鴨嘴筆。用圓規可畫圓或截取等長線段。畫圓時即將一脚的針尖固定在紙上一點，將另一脚旋轉一周，便畫成一圓。截取線段時，可將兩脚尖的距離，等於已知線段的長，即可依此在他直線上截取等長線段。如下圖：

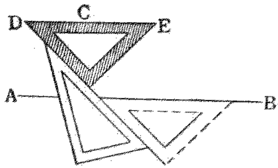


(3)量角器　是一個半圓形的儀器，分成 180 度。用量角器可依角量得度數，及依所要度數作角。量角時，將此器直徑與角的一邊重合，圓心與角頂重合，即可照角的他邊讀出度數。作角時仿此，如右圖。



(4)三角板　一副有二塊:一塊的三角是45°,45°,90°,餘一塊的三角是 30°,60°,90°,即兩塊中都有直角.用三角板可畫垂線及平行線,如下列左圖,是過直線 $AB$ 上 $C$ 點畫垂線 $DC$, 右圖是過線段 $AB$ 外 $C$ 點畫平行線 $DE$.




普通術語　幾何學上常用的術語,多不能望文生義,今解釋於下:

(I)定義　是確定一名詞的意義,使不致與他名詞相混.

(II)公理　是不必證明而人人知道的眞理,分二種:

普通公理　是算學各科都可通用的公理,如第五章等式性質,叫做等量公理,第十章不等式性質,叫做不等量公理.又代數中相等的數,可以互代,在幾何上用處甚多,叫做代換公理.

幾何公理　是幾何上專用的公理,如前直線性質中的眞理,叫做直線性質公理,平分線中的眞理,叫做平分線公理.此外尙有移形公理:「圖形可變其位置而不變其形狀與大小」,及重合公理:「兩形疊置,如處處重合,便是全等」.

(III)公法　是不必試驗而人人認爲可能的方法.公法是畫圖的基礎,最重要的如下:

(1) 作直線公法 過二點可作一直線.

(2) 延長線公法 線段可任意延長.

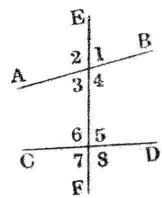
(3) 作圓公法 用定點作中心,定線段作半徑,可作一圓.

(4) 等線段公法 在直線上可截取線段與定線段等長.

(IV) 定理,系 用定義及公理作基礎,依推理所得的眞理,叫做定理.從一定理可直捷推得的眞理,叫做系.如前角的分類中一定的理,叫做(1)直角定理,(2)平角定理,(3)周角定理.及二角關係中一定的理,叫做(1)餘角定理,(2)補角定理,(3)對頂角定理.凡一定理,都由二部分合成,第一是所定的條件,叫做假設或前提,第二是從假設所生必然的結果,叫做結論或終結.如餘角定理中,「等角的餘角」是假設,「相等」是結論.

(V) 證明 從定理的假設導出結果,中間明示推理的原由,叫做證明.

今將述直線間的關係及初步定理:




**截線** 與二或諸直線相交的直線,叫做此諸直線的截線.如右圖,$EF$ 是 $AB,CD$ 的截線.截線與每一直線在交點處成四角,如 $\angle 3,\angle 4,\angle 5,\angle 6$ 在二直線內的,叫做內角;如 $\angle 1,\angle 2,\angle 7,\angle 8$ 在二直線外的,叫做外角;如 $\angle 1$ 與 $\angle 5$ 在對應位置的角有四對,叫做同位角;如內角 $\angle 3$ 與 $\angle 5$ 在交錯位置的有二對,叫做內錯角;如外角 $\angle 1$ 與 $\angle 7$ 在交錯位置的有二對,叫做外錯角;如內角 $\angle 4$ 與 $\angle 5$ 在截線同側的有二對,叫做同側內角;如外角

$\angle 1$與 $\angle 8$ 在截線同側的有二對，叫做同側外角。

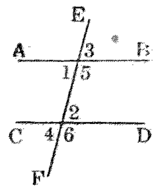
平行線　依前用三角板畫二條平行線及截線時，則三角板的一角因平行移動而成一對同位角，依移形公理而知其相等，故得平行線的又一定義是:「二直線被一截線所截，如一對同位角相等，則此二直線叫做平行線。」

**平行線決定定理**　二直線被一截線所截，若有下列情形之一，則此二直線必平行：

(1)　內錯角相等。　(2)　外錯角相等。

(3)　同側內角互爲補角。　(4)　同側外角互爲補角。

[假設] $AB$ 與 $CD$ 被 $EF$ 所截，




(1)　$\angle 1=\angle 2$,

(2)　$\angle 3=\angle 4$,

(3)　$\angle 2+\angle 5=2\angle R$,

(4)　$\angle 3+\angle 6=2\angle R$.

[結論]　$AB//CD$.

[證明] (1)　$\angle 1=\angle 2$(假設)，　$\angle 1=\angle 3$(對頂角定理)。

$\therefore$　$\angle 2=\angle 3$(代換公理)。　故 $AB//CD$(平行線定義)

(2)　$\angle 3=\angle 4$(假設)，　$\angle 4=\angle 2$(對頂角定理)

$\therefore$　$\angle 3=\angle 2$(代換公理)。　故 $AB//CD$(平行線定義)

(3)　$\angle 2+\angle 5=2\angle R$(假設)，$\angle 3+\angle 5=2\angle R$(補角定義)

$\therefore$　$\angle 2+\angle 5=\angle 3+\angle 5$(代換公理)

$\therefore$　$\angle 2=\angle 3$(等量公理)，

故 $AB//CD$（平行線定義）

(4) $\angle 3+\angle 6=2\angle R$（假設）

$\angle 2+\angle 6=2\angle R$（補角定義）

$\therefore$ $\angle 3+\angle 6=\angle 2+\angle 6$（代換公理），

$\therefore$ $\angle 3=\angle 2$（等量公理）． 故 $AB//CD$.

垂線平行系 同一直線的二垂線必平行.

**平行線性質定理** 一截線與二平行線相交，所成的：

(1)同位角相等． (2)內錯角相等． (3)外錯角相等． (4)同側角內互爲補角． (5)同側外角互爲補角．

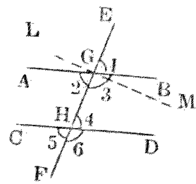
[假設] $AB//CD$，截線 $EF$ 與 $AB,CD$ 相交於 $G,H$.

[結論] (1) $\angle 1=\angle 4$， (2) $\angle 2=\angle 4$，

(3) $\angle 1=\angle 5$.

(4) $\angle 3+\angle 4=2\angle R$.

(5) $\angle 1+\angle 6=2\angle R$.




[證明] (1)若 $\angle 1\neq\angle 4$，過交點 $G$ 另作直線 $LM$，使 $\angle EGM=\angle 4$，則 $LM//CD$（平行線定義）．但 $AB//CD$（假設），是相交二直線平行於 $CD$，與直線性質公理不合，故 $LM$ 不可不與 $AB$ 合一，而 $\angle 1=\angle 4$.

(2) $\angle 1=\angle 4$（本定理 1）， $\angle 1=\angle 2$（對頂角定理）

$\therefore$ $\angle 2=\angle 4$（代換公理）

(3) $\angle 1=\angle 4$（本定理 1）， $\angle 5=\angle 4$（對頂角定理）

$\therefore$ $\angle 1=\angle 5$（代換公理）

(4)　$\angle 3+\angle 2=2\angle R$(補角定理)，　$\angle 2=\angle 4$(本定理 2 )

　　$\therefore\ \angle 3+\angle 4=2\angle R$(代換公理)

(5)　$\angle 1+\angle 3=2\angle R$(補角定理)，　$\angle 3=\angle 6$(定本理 1 )

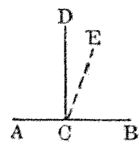
　　$\therefore\ \angle 1+\angle 6=2\angle R$(代換公理)。

平行線公垂線系　一直線垂直於二平行線之一，亦必垂直於他一(此垂線叫做二平行線的距離)。

三線平行系　與同一直線平行的二直線互相平行。

**逆定理**　將一定理的假設與結論交換所成的定理，叫做本定理的逆定理。如平行線性質定理是平行線決定定理的逆定理。但本定理眞確，逆定理未必一定眞確，故仍要證明。

**垂線定理一**　從定直線上定點，只可作此直線的一垂線。




[假設]　$C$ 是 $AB$ 上的定點，且 $DC\perp AB$.

[結論]　過 $C$ 作 $AB$ 的垂線，只有 $LC$.

[證明]　假定過 $C$ 除 $CD$ 外，尚可作 $AB$ 的第二條垂線 $CE$，則 $\angle BCD$ 與 $\angle BCE$ 都是直角(垂線定義)，$\therefore \angle BCD=\angle BCE$ (直角定理)。今 $\angle BCE<\angle B\ D$，是此假定不合於理。故 $CE$ 不得不與 $CD$ 合一，卽過 $C$ 作 $AB$ 的垂線，只有 $CD$ 一條。

[注意]從直線外定點作垂線的定理，見下章。

## 本　章　練　習　題

(1)　靜止的水面與有波浪的水面，各是何種面?

(2) 張緊的繩與放寬的繩，各是何種線？

(3) 太陽穿過屋漏的光線是何種線？

(4) 二銳角的和成何種角？

(5) 時鐘的兩針，在 1 點鐘時成何角？ 在 3 點鐘時呢？在 6 點鐘呢？ 在 9 點鐘呢？ 在 12 點鐘呢？

(6) 30°角的餘角是幾度？ 補角是幾度？ 共軛角是幾度？

(7 平角的平分線與邊有何關係？

(8) 何角的餘角等於其 5 倍(用方程解)？

(答) 15度角。

(9) 何角的補角等於其 8 倍？ (答) 20度角.

(10) 有二角互爲餘角，小角比大角小 10°，求各角。

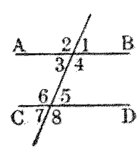
(答) 50度，40度。

(11) 二直線相交成四角，若有一角是直角，則餘三角如何？

(答) 直角。

(12) 任意畫相交二直線，用量角器精密量對頂角，是否相等？

(13) 任意用三角板畫二平行線及截線，再用量角器量同位角是否相等？ 內錯角是否相等？ 外錯角是否相等？




(14) 如右圖，$AB//CD$，設 $\angle 1=65°$，求其餘各角。

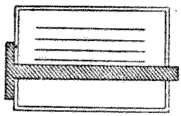
(答) $\angle 3=\angle 5=\angle 7=65°$，$\angle 2=\angle 4=\angle 6=\angle 8=115°$.

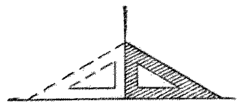
(15)　二平行線被截線所截，試證內錯角的平分角必平行。

(16)　如上題，同位角的平分線有何關係？

(17)　如下列左圖，用丁字規畫平行線，是據何種理由？

（答）　平行線決定定理。





(18)　如上列右圖驗三角板是否正確，是據何種理由？

（答　垂線定理。

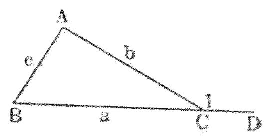
(19)　用三角板在線段上一定點作垂線，能否作二條？

(20)　用三角板過線段外一定點作垂線，可作幾條？

# 第十五章　直線形

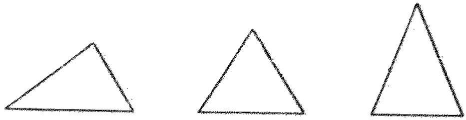
**引言**　前章講過各種線各種角的定義及初步定理，讀者對於幾何學已略有根柢，本章進述直線形中的定義及定理，是幾何學中的重要部分．所謂直線形，就是直線組成的圖形，如三角形，四邊形，多角形等都是．

**三角形**　今先就三角形來研究：三線段包圍的圖形，叫做三角形，常用記號△表示．此線段叫做邊；每二邊的交點叫做頂點；每二邊所成的角，叫做內角；每一邊與鄰邊延長線所成的角，叫做外角；與外角不相鄰的二內角，叫做內對角；尋常說三角形的角，都指內角．如右圖的三角形，可記作 $\triangle ABC$，$AB$, $BC$, $CA$ 是邊，$A$, $B$, $C$ 是頂點，$\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 是內角，$\angle 1$ 是 $\angle C$ 的外角，$\angle A$ 與 $\angle B$ 各是 $\angle C$ 的內對角．與頂點 $A$, $B$, $C$ 相對的邊，常用相應的小寫文字 $a$, $b$, $c$ 表示．每一三角形，有三邊及三角，叫做三角形的六要素．



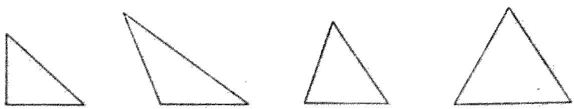

**三角形依邊分類**　一個三角形中，無二邊相等的，叫做斜三角形；有二邊相等的，叫做等腰三角形；三邊都相等的，叫做等邊三角形或正三角形．三角形可任用一邊作底邊，對底邊的角叫做頂角．但在等腰三角形中，常用相等二邊作腰，第三邊作底，底邊兩端的

角叫做底角。



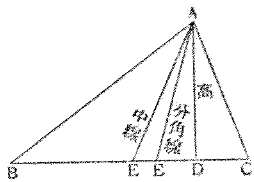
斜三角形　正三角形　等腰三角形

三角形依角分類　一個三角形中，有一角是直角的，叫做直角三角形；有一角是鈍角的，叫做鈍角三角形；三角都是銳角的，叫做銳角三角形。三角都相等的，叫做等角三角形。直角三角形對直角的一邊，叫做斜邊或弦，夾直角的二邊，叫做股。

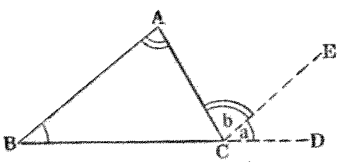


直角三角形　鈍角三角形　銳角三角形　等角三角形

高，中線，分角線　三角形中，從一頂點至對邊（或延長）的垂線叫做高；從一頂點至對邊中點的線段，叫做中線；從一頂點平分此頂角而至對邊的線段，叫做分角線。因一三角形有三頂點，故高與中線與分角線各有三條。




**三角形內角和定理**　三角形三內角的和等於二直角。




［假設］$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 是 $\triangle ABC$ 的三內角。

［結論］$\angle A + \angle B + \angle C = 2\angle R$。

[證明]延長 $BC$ 至 $D$,作 $CE//AB$,成$\angle a$,$\angle b$. 依平行線性質定理,$\angle A=\angle a$(同位角),$\angle B=\angle b$(內錯角).但 $\angle a+\angle b+\angle c=2\angle R$ (平角定義),故 $\angle A+\angle B+\angle C=2\angle R$ (代換公理).

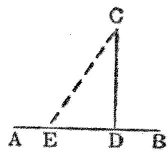
三角形內外角關係系　三角形的外角,大於任一內對角而等於二內對角的和.

三角形內角性質系　三角形若有一內角是直角或鈍角,則其餘二內角必都是銳角.

直角三角形內角關係系　直角三角形的二銳角互為餘角.

二三角形二角對應相等系　設一三角形的二角與他三角形的二角對應相等,則第三角亦相等.

**垂線定理二**　從定直線外一定點,只可作此直線的一垂線.



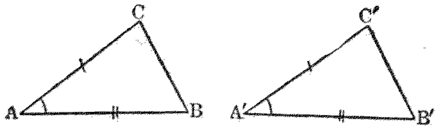

[假設] $C$ 是 $AB$ 外定點,且 $CD\perp AB$.

[結論]從 $C$ 作 $AB$ 的垂線,只是 $CD$.

[證明]假使除 $CD$ 外,從 $C$ 尚可作 $CE\perp AB$. 但 $\triangle CDE$ 中,$\angle CDE$ 是直角(假設),則 $\angle CED$ 是銳角必不是直角(三角形內角性質系),故 $CE$ 不能作為 $AB$ 的垂線(垂線定義),即從 $C$ 至 $AB$ 的垂線,只有 $CD$.

**三角形全等定理一**　設一三角形的兩邊及夾角,與他三角形的兩邊及夾角對應相等,則此兩形全等.

[假設] $\triangle ABC$ 與 $\triangle A'B'C'$ 中,$AB=A'B'$,$AC=A'C'$ 及 $\angle A=\angle A'$.



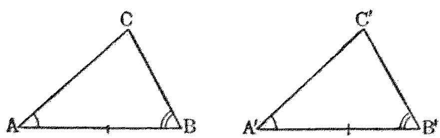

[結論] $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ (式中$\cong$是全等記號).

[證明] 將 $\triangle ABC$ 疊置在 $\triangle A'B'C'$ 上,使 $A$ 與 $A'$ 重合, $AB$ 與 $A'B'$ 重合(移形公理及假設 $AB=A'B'$).又因 $\angle A=\angle A'$ (假設),故 $AC$ 與 $A'C'$ 重合(移形公理及假設 $AC=A'C'$).因此 $BC$ 不得不與 $B'C'$ 重合 (直線性質公理 4). 故 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ (重合公理).

直角三角形全等系　設一直角三角形的兩股與他直角三角形的兩股對應相等,則此兩形全等.

**三角形全等定理二**　設一三角形的兩角及公共邊,與他三角形的兩角及公共邊對應相等,則此兩形全等.

[假設] $\triangle ABC$ 與 $\triangle A'B'C'$ 中, $\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$ 及 $AB=A'B'$.




[結論] $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

[證明]將 $\triangle ABC$ 疊置在 $\triangle A'B'C'$ 上,使 $\angle A$ 與 $\angle A'$ 重合, $AB$ 與 $A'B'$ 重合(移形公理及假設 $AB=A'B'$).因 $\angle A=\angle A'$,

$\angle B=\angle B'$ (假設),故 $AC$ 落於 $A'C'$ 上,$BC$ 落於 $B'C'$ 上,因此 $C$ 不得不與 $C'$ 重合(直線性質公理 5),故 $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$(重合公理).

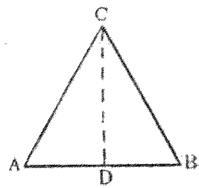
直角三角形全等系二 設一直角三角形的一銳角及一邊,與他直角三角形的一銳角及一邊對應相等,則此兩形全等.

三角形全等系 設一三角形的二角及其中一角的對邊,與他三角形的二角及其中一角的對邊,對應相等,則此兩形全等.

**等腰三角形性質定理** 等腰三角形的底角相等.

[假設] $\triangle ABC$ 中, $AC=BC$.

[結論] $\angle A=\angle B$.




[證明] 從 $C$ 作分角線 $CD$, 如何可證 $\triangle ACD\cong\triangle BCD$,及 $\angle A=\angle B$? (請讀者自己證明)

等邊三角形系 等邊三角形必是等角三角形.

等邊三角形內角系 等邊三角形每一內角等於 $60°$.

等腰三角形頂角分角線系 等腰三角形頂角的分角線,必垂直平分其底邊,即從頂角至底邊的高及中線及分角線,合而爲一.

**等腰三角形決定定理** 三角形有二角相等,必是等腰三角形.

[假設] 仍用前圖, $\triangle ABC$ 中, $\angle A=\angle B$.

[結論] $AC=BC$, 而 $\triangle ABC$ 是等腰.

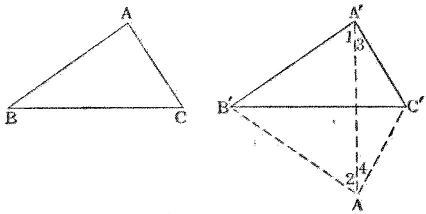
[證明] 作 $\angle C$ 的分角線,如何可證 $\angle ADC=\angle BDC$, $\triangle ADC\cong\triangle BDC$,及 $AB=BC$?

等角三角形系　等角三角形必是等邊三角形.

**三角形全等定理三**　設一三角形的三邊，與他三角形的三邊對應相等,則此兩形全等.

[假設]　$\triangle ABC$ 與 $\triangle A'B'C'$ 中,有 $AB=A'B'$, $BC=B'C'$, $AC=A'C'$.

[結論]　$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.

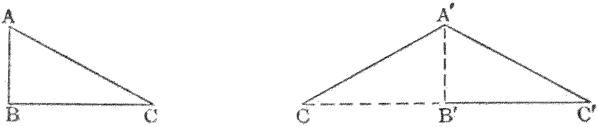



[證明]將 $\triangle ABC$ 反置在 $\triangle A'B'C'$ 下面,使 $BC$ 與 $B'C'$ 重合(假設 $BC=B'C'$ 及移形公理), $A$ 與 $A'$ 在 $BC$ 的反側兩側.連結 $AA'$, 因 $A'B'=AB$(假設),故 $\triangle A'B'A$ 是等腰(等腰三角形定義),而$\angle 1=\angle 2$.同理, $\triangle A'C'A$ 亦是等腰,而 $\angle 3=\angle 4$.故$\angle 1+\angle 3=\angle 2+\angle 4$(等量公理),即 $\angle A=\angle A'$(代換公理). 從此如何可證 $\triangle AB'C'\cong\triangle A'B'C'$ 即 $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$?

**直角三角形全等公理**　設一直角三角形的斜邊及一股，與他直角三角形的斜邊及一股對應相等,則此兩形全等.

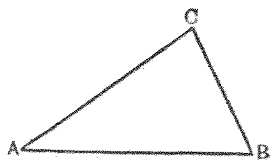
[假設]　$\triangle ABC$ 與 $\triangle A'B'C'$ 中, $AB=A'B'$, $AC=A'C'$, $\angle B$及$\angle B'$ 是 $\angle R$.

[結論]　$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.




[證明]將 $\triangle ABC$ 反置在 $\triangle A'B'C'$ 左邊，使 $AB$ 與 $A'B'$ 重合（假設 $AB=A'B'$ 及移形公理），$C$ 與 $C'$ 在 $A'B'$ 的兩側。因 $\angle A'B'C$ 與 $\angle A'B'C'$ 都是直角（假設），故 $CB'C$ 成一直線（平角定義），而 $\triangle A'CC'$ 成一等腰三角形（假設 $AC=A'C'$），故 $\angle C=\angle C$（等腰三角形性質定理）。因此 $\triangle A'B'C\cong\triangle A'B'C'$（直角三角形全等系二），即 $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$。

**三角形二邊和定理**　三角形任二邊的和，必大於第三邊．




［假設］　$\triangle ABC$.

［結論］　$AC+BC>AC$，$BC+CA>AB$，$CA+AB>BC$.

[證明]線段 $AC$ 是二點 $A,C$ 間的最短距離（直線性質公理 6），故得 $AC+BC>AC$. 同理，$BC+CA>AB$，$CA+AB>BC$.

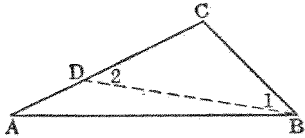
三角形二邊差系　三角形任二邊的差，必小於第三邊。（可用不等式證明）。

以上是講三角形邊角的相等關係，今再講邊角的大小關係。

**三角形大邊對大角定理**　設一三角形的二邊不等，則大邊所對的角較大。

［假設］　$\triangle ABC$中，$AC>BC$.

［結論］　$\angle B>\angle A$

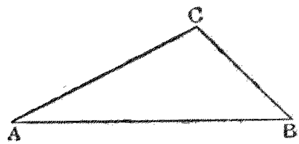


［證明］因　$AC>BC$（假設），故在　$AC$　上截取　$DC=BC$（等線段公法），則　$\angle 2=\angle 1$　（等腰△性質定理）．但　$\angle B>\angle 1$（不等量公理）　$\therefore \angle B>\angle 2$（代換公理）．又　$\angle 2>\angle A$（△內外角關係系），故　$\angle B>\angle A$（代換公理）．

**三角形大角對大邊定理**　設一三角形的二角不等，則大角所對的邊較大．

［假設］　$\triangle ABC$中，$\angle B>\angle A$.

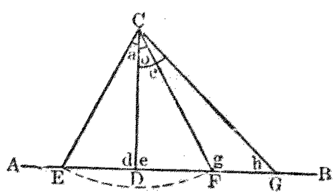
［結論］　$AC>BC$.



［證明］　$AC$　與　$BC$的大小關係，只有三種：（1）$AC=BC$，（2）$AC<BC$，（3）$AC>BC$．如（1）則　$\angle B=\angle A$（等腰△性質定理）；如（2）則　$\angle B<\angle A$（△大邊對大角定理）．今$\angle B>\angle A$（假設），都與（1）（2）不合，故必是　$AC>BC$.

**垂線斜線比較定理**　從直線外一點至此直線的諸線段中：

（1）　垂線最短（此垂線叫做點與直線的距離）．



（2）　與垂線成等角的斜線相等．

（3）　與垂線成大角的斜線較大．

[假設]從直線 $AB$ 外一點 $C$，至此直線作諸線段：$CD, CE, CF, CG$：(1) $CD \perp AB$. (2) $\angle a = \angle b$. (3) $\angle c > \angle b$.

[結論] (1) $CD < CE$. (2) $CE = CF$. (3) $CG > CF$.

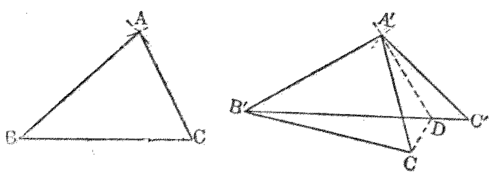
[證明] (1) $\triangle EDC$ 中，$\angle d = \angle R$（假設），故 $\angle a$ 與 $\angle E$ 都是銳角（$\triangle$ 內角性質系），即 $\angle E < \angle d$（銳角定義），故 $CD < CE$（$\triangle$ 大角對大邊定理）.

(2) 在 $\triangle CDE$ 與 $\triangle CDF$ 中，依假設，$\angle d = \angle e = \angle R$，$\angle a = \angle b$，$CD$ 公用，故 $\triangle CDE \cong \triangle CDF$（$\triangle$ 全等定理二），而 $CE = CF$（全等形對應邊）.

(3) 因 $\angle g = \angle b + \angle e$（$\triangle$ 內外角關係系），故 $\angle g > \angle R$，而 $\angle h < \angle R$（$\triangle$ 內角性質系），故 $CG > CF$（$\triangle$ 大角對大邊定理）.

**兩三角形對應大角對大邊定理**　設一三角形的二邊與他三角形的二邊對應相等，而夾角不等，則大角所對第三邊較大.

[假設] $\triangle ABC$ 與 $\triangle A'B'C'$ 中，$AB = A'B'$，$AC = A'C'$，$\angle A' > \angle A$.




[結論] $BC > B'C'$.

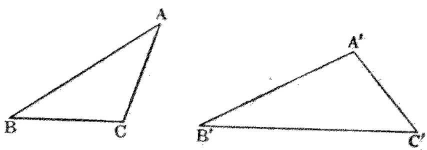
[證明]將 $\triangle ABC$ 疊置在 $\triangle A'B'C'$ 上，使 $B$ 與 $B'$ 重合，$AB$ 與 $A'B'$ 重合（假設及移形公理）. 但 $\angle A' > \angle A$（假設），故 $AC$ 落

在 $AB'$ 與 $A'C'$ 之間，而 $\triangle ABC$ 移在 $\triangle A'B'C$ 的位置。作 $\angle C'A'C$ 的分角線 $A'D$，則 $\angle C'A'D=\angle CA'D$（作圖），$A'C'=A'C$（假設），$A'D$ 公用，故 $\triangle C'A'D\cong\triangle CA'D$（$\triangle$全等定理一），而 $C'D=CD$（全等形對應邊），但 $B'D+CD>B'C$（$\triangle$二邊和定理），故 $B'D+C'D>B'C$（代換公理），卽 $B'C'>B'C$，$B'C'>BC$.

**兩三角形對應大邊對大角定理**　設一三角形的二邊與他三角形的二邊對應相等，而第三邊不等，則大邊所對的角較大。

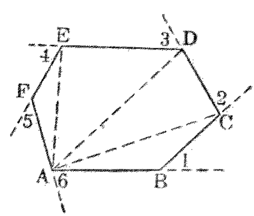
［假設］　$\triangle ABC$ 與 $\triangle A'B'C'$ 中，$AB=A'B'$，$AC=A'C'$，$B'C'>BC$.

［結論］　$\angle A'>\angle A$.



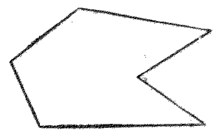

［證明］　$\angle A'$ 與 $\angle A$ 大小關係有幾種？如 $\angle A'=\angle A$，$\angle A'<\angle A$，則 $B'C'$ 與 $BC$ 的大小各如何？　如何可證 $\angle A'>\angle A$？請讀者補出證法！

**多角形**　以上所述，都是關於三角形的定理，今再進一步講述關於多角形的定義及定理：三線段以上包圍的圖形，叫做多角形；邊，頂點，內角，外角的意義，都與三角形相仿。連結不相鄰二頂點的

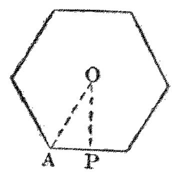


線段，叫做對角線．各邊的和叫做周界．多角形的記法，用頂點的文字表示．如上圖是多角形 $ABCD\cdots\cdots$，$AB$，$BC$，$\cdots\cdots$是邊；$\angle A$，$\angle B$，$\cdots\cdots$是內角；$\angle 1$，$\angle 2$，$\cdots\cdots$是外角；$AC$，$AD$，$\cdots\cdots$ 是對角線；$AB+BC+\cdots\cdots+FA$ 是周界．

多角形分類　(1)延長多角形的各邊，都在形外的，叫做凸多角形，如上圖；若有在形內的，則叫做凹多角形，如右圖．尋常說多角形，都指凸多角形．



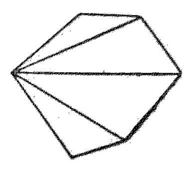
(2)　多角形的各邊都相等的，叫做等邊多角形，各角都相等的，叫做等角多角形．等邊又等角的，叫做正多角形，如右圖．正多角形中，從中心至各邊的垂線，叫做邊心距，如 $OP$；從中心至各頂點的線段，叫做頂心距或半徑，如 $OA$．



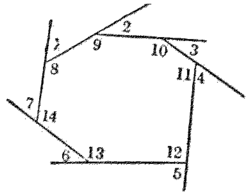

(3)　多角形依邊數有三角形，四邊形，五角形，六角形等名稱．

**多角形內角和定理**　$n$邊多角形內角的和，等於$2(n-2)\angle R$．

［證明］從 $n$ 邊多角形的一頂點作各對角線，可分成$(n-2)$個三角形．但每一三角形內角的和等於 $2\angle R$ (△內角和定理)，故$(n-2)$個三角形內角的和，即 $n$ 邊多角形內角的和，等於 $(n-2)\times 2\angle R$ 即 $2(n-2)\angle R$．



**多角形外角和定理**　多角形外角的和等於 4 直角．



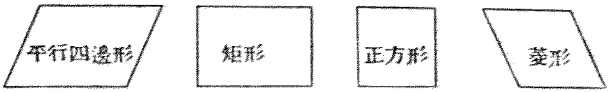

［假設］$\angle 1, \angle 2, \cdots\cdots$是 $n$ 邊多角形的外角.

［結論］$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\cdots\cdots$
$=4\angle R$.

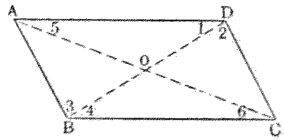
［證明］因每一內角與外角的和如$\angle 1+\angle 8=2\angle R$(補角定義)，而 $n$ 邊多角形有 $n$ 內角及 $n$ 外角，故內外角總和等於 $2n\angle R$. 但內角的和等於 $2(n-2)\angle R$(多角形內角和定理)，故外角的和等於 $2n\angle R-2(n-2)\angle R=4\angle R$.

**四邊形** 多角形中，與三角形同一重要的是四邊形。四邊形中，無平行邊的，叫做不平行四邊形；有一雙對邊平行的，叫做梯形；梯形中不平行兩邊相等的，叫做等腰梯形。梯形的平行兩邊叫做上底下底，兩底的公垂線叫做高，不平行兩邊中點的連線，叫做中線.


四邊形中兩雙對邊平行的，叫做平行四邊形（記號用▱），可用任一邊做底，底與對邊的公垂線做高。平行四邊形中，各角都是直角的，叫做長方形或矩形(記號用▭).矩形中各邊相等的，叫做正方形（記號用□)。平行四邊形中，各邊相等各角不是直角的，叫做菱形.




**平行四邊形性質定理**　平行四邊形中：(1)對邊相等．(2)對角相等．(3)對角線平分原形成全等兩三角形．(4)二對角線相交互相平分．




[假設] $\square ABCD$ 中，對角線 $AC$，$BD$ 相交於 $O$．

[結論] (1) $AB=DC$，$AD=BC$．

(2) $\angle A=\angle C$，$\angle B=\angle D$．

(3) $\triangle ABC\cong\triangle CDA$，$\triangle ABD\cong\triangle CDB$．

(4) $AO=CO$，$BO=DO$．

[證明] (1) (2) (3)，因 $AD//BC$，$AB//DC$（$\square$定義），故 $\angle 1=\angle 4$，$\angle 2=\angle 3$（平行線性質定理）．又 $BD$ 公用，故 $\triangle ABD\cong\triangle CLB$（$\triangle$全等定理二）　$\therefore$ $AD=BC$，$AB=DC$，$\angle A=\angle C$（全等形對應部分）．同法，$\triangle ABC\cong\triangle CDA$，$\angle B=\angle D$．

(4) 因 $AD//BC$，$AB//DC$（假設），故 $\angle 1=\angle 4$，$\angle 5=\angle 6$（平行線性質定理）．又 $AD=BC$（本定理 1），故 $\triangle AOD\cong\triangle COB$（$\triangle$全等定理二），即 $AO=CO$，$BO=D$)（全等形對應邊）．

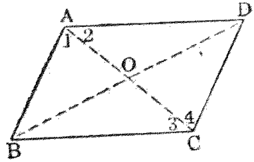
平行線間夾等長平行線段系　平行線間所夾平行線段相等．

平行線距離系　平行線間的距離處處相等．

**平行四邊形決定定理**　四邊形有右列情形之一，必是平行四

邊形：(1)對邊相等，或 (2)對角相等，或(3)相對二邊相等且平行，或(4)對角線相交互相平分。

［假設］四邊形 $ABCD$ 中：(1) $AB=DC$，$AD=BC$，或 (2) $\angle A=\angle C$，$\angle B=\angle D$，或 (3) $AD=BC$，$AD//BC$，或 (4) $AO=OC$，$BO=OD$.




［結論］$ABCD$ 是平行四邊形。

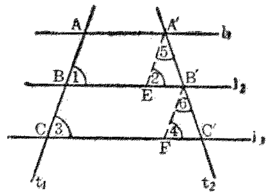
［證明］(1) 因 $AB=DC$，$AD=BC$ (假設)，及 $BD$ 公用，故 $\triangle ABC\cong\triangle CDA$ ($\triangle$ 全等定理三)，卽 $\angle 1=\angle 4$，$\angle 2=\angle 3$ (全等形對應邊)，故 $AB//DC$，$AB//DC$(平行線決定定理)，而 $ABCD$ 是 $\square$.

(2) 依多角形內角和定理，$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=2(4-2)\angle R=4\angle R$，今依假設，$\angle A=\angle C$，$\angle B=\angle D$，卽 $2A+2B=4\angle R$，或 $\angle A+\angle B=2\angle R$，故 $AD//BC$ (平行線決定定理)．同法，$AB//DC$，故 $ABCD$ 是 $\square$.

(3) 因 $AD//BC$(假設)，故 $\angle 2=\angle 3$ (平行線性質定理)，又 $AD=BC$(假設)，$AC=AC$ (公用)，故 $\triangle ADC\cong\triangle CBA$ ($\triangle$ 全等定理一)，而 $\angle 4=\angle 1$(全等形對應邊)，故 $AB//CD$(平行線決定定理)，而 $ABCD$ 是 $\square$.

(4) 在 $\triangle AOD$ 與 $\triangle COB$ 中，$AO=OC$，$BO=OD$ (假設)，$\angle AOD=\angle COB$ (對頂角定理)，故 $\triangle AOD\cong\triangle COB$ ($\triangle$ 全等定理一)，而 $\angle 1=\angle 4$，$\angle 2=\angle 3$ (全等形對應角)，故 $AD//BC$ (平行線決定定理)．同法，$AB//DC$，故 $ABCD$ 是 $\square$.

**平行截線定理** 設諸平行線與一截線相交，截取等長線段，則此諸平行線與任何截線相交，亦必截取等長線段。

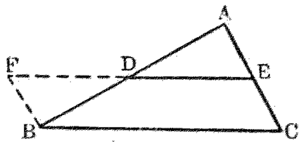



［假設］$l_1//l_2//l_3$，截線 $t_1$，$t_2$，且 $AB=BC$.

［結論］ $A'B'=B'C'$.

［證明］作 $A'E//t_1$，$B'F//t_1$，則 $\angle 2=\angle 1=\angle 3=\angle 4$（何故）．但 $A'E//B'F$（三線平行系），故 $\angle 5=\angle 6$（何故）．又 $A'E=AB=BC=B'F$（何故）．故 $\triangle A'B'E\cong\triangle B'C'F$（何故），而 $A'B'=B'C'$（何故）．

**三角形二邊中點連線定理** 三角形二邊中點的連線，必與第三邊平行，而等於第三邊的一半。



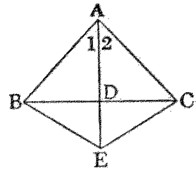

［假設］$\triangle ABC$ 中，$D$，$E$ 是 $AB$，$AC$ 的中點。

［結論］$DE//BC$，$DE=\dfrac{1}{2}BC$.

［證明］作 $BF//AC$，與 $DE$ 的延長線相交於 $F$，則 $\triangle ADE\cong\triangle BDF$（何故），而 $BF=AE$，$FD=DE$（何故）．但 $AE=EC$（假設），故 $BF=EC$，卽 $BCEF$ 是▱（▱決定定理），$\therefore$ $FE=BC$，$FE//BC$（何故），$DE=\dfrac{1}{2}EF=\dfrac{1}{2}BC$，$DE//BC$.

今將研究等距離點的性質，再由此講到三角形的重要諸點。

**垂直平分線決定定理**　與一線段兩端等距離的二點，可決定此線段的垂直平分線。



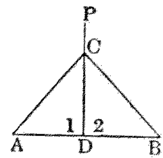

[假設]線段 $BC$ 及二點 $A, E$，且 $AB=BC$，$EB=EC$.

[結論] $AE$ 是 $BC$ 的垂直平分線.

[證明]如何可證 $\triangle ABE\cong\triangle ACE$? $\angle 1=\angle 2$? 又 $\triangle ABC$ 是等腰(何故)，故 $AE$ [illegible] $BC$ 的垂直平分線.（等腰△頂角分角線系）.

線段兩端等距離點系　與線段兩端等距離的點，必在此線段的垂直平分線上.

**垂直平分線性質定理**　一線段的垂直平分線上任何點，必與此線段兩端的距離相等.

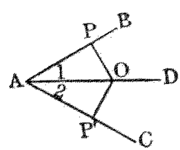



[假設] $PD$ 是 $AB$ 的垂直平分線，$C$ 是 $PD$ 上任一點.

[結論] $CA=CB$.

[證明]依假設，$AD=DB$，$PD\perp AB$，而 $\angle 1=\angle 2$（何故），又 $DC=DC$，故 $\triangle ADC\cong\triangle BDC$（何故），即 $CA=CB$.

**分角線性質定理**　分角線上的任何點，必與角邊的距離相等.



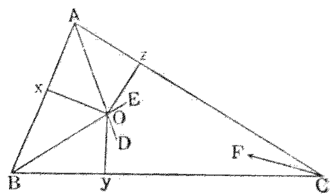

[假設] $AD$ 是 $\angle BAC$ 的分角線，$O$ 是 $AD$ 上任一點，$OP\perp AB$，$OP'\perp AC$.

［結論］ $OP=OP'$.

［證明］ $\angle 1=\angle 2$ （何故） $\angle APO=\angle AP'O=\angle R$（何故） $\triangle APO \cong \triangle AP'O$（何故） $\therefore$ $OP=OP'$.

角邊等距離點系　與角邊距離相等的點，必在分角線上.

**三角形內心定理**　三角形各角的平分線，必相交於同一點，而此點與三邊的距離相等（此點叫做三角形的內心）.




［假設］ $AD$, $BE$, $CF$ 是 $\triangle ABC$中$\angle A$,$\angle B$,$\angle C$的平分線.

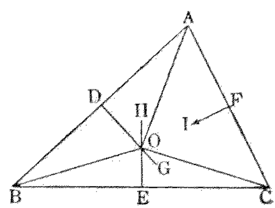
［結論］(1) $AD$, $BE$, $CF$ 同交於一點 $O$.

(2) $O$ 與 $AB$,$BC$, $CA$的距離相等.

［證明］設 $AD$ 與 $BE$ 相交於 $O$，從 $O$ 作 $OX \perp AB$, $OY \perp BC$, $OZ \perp CA$. 則依分角線性質定理，$OX=OZ$, $OX=OY$，故 $OZ=OY$（代換公理），故 $O$ 在 $CF$ 或延長上（角邊等距離點系），即 $AD$, $BE$,$CF$ 同交於一點 $O$，而 $O$ 與三邊等距離.

［注意］如此定理中三線同交於一點的，叫做共點線.

**三角形外心定理**　三角形三邊的垂直平分線，必相交於同一點，而此點與三頂點的距離相等（此點叫做三角形的外心）.




［假設］ $DG$, $EH$, $FI$ 是 $\triangle ABC$

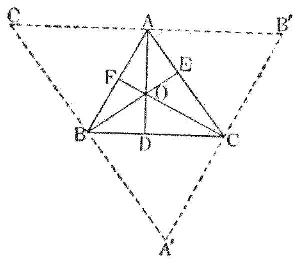
中 $AB, BC, CA$ 的垂直平分線。

［結論］(1) $DG, EH, FI$ 同交於一點 $O$.

(2) $O$ 與 $A\ B, C$ 的距離相等。

［證明］設 $DG, EH$ 相交於 $O$，則依垂直平分線性質定理，$OA=OB$，$OB=OC$，故 $OA=OC$.故 $O$ 在 $FI$ 或延長上（線段兩端等距離點系），卽 $DG, EH, FI$ 同交於一點 $O$，而 $O$ 與三頂點等距離.

**三角形垂心定理**　三角形從各頂點至對邊的垂線，必相交於同一點（此點叫做三角形的垂心）。

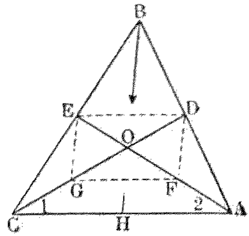



［假設］$AD, BE, CF$是$\triangle ABC$中從 $A, B, C$ 至對邊的垂線。

［結論］$AD$, $BE$, $CF$ 相交於同一點 $O$.

［證明］過各頂點作 $B'C'//BC$, $A'C'//AC$, $AB'//AB$，因 $AD\perp BC$(假設)，故 $AD\perp B'C'$（平行線公垂線系）.但 $ABCB'$ 與 $ACBC'$ 都是▱，(▱定義)，故 $AB'=BC$, $AC'=BC$（▱性質定理），卽 $AB'=AC'$，因此 $AD$ 是 $B'C'$ 的垂直平分線(垂直平分線定義)，同理 $BE, CF$ 各是 $A'C'$, $A'B'$ 的垂直平分線.故 $AD, BE, CF$同交於一點(△外心定理).

**三角形重心定理**　三角形的三中線，必相交於同一點，而此點與各頂點的距離，等於各中線的 $\frac{2}{3}$（此點叫做三角形的重心）.




[假設] $AE, CD, BH$ 是 $\triangle ABC$ 的三中線。

[結論] (1) $AE$, $CD$, $BH$ 相交於同一點 $O$.

(2) $AO=\frac{2}{3}AE$, $CO=\frac{2}{3}CD$,

$LO=\frac{2}{3}BH$.

[證明]設 $CG=GO, OF=FA$,連結 $ED$, $DF$, $FG$, $GE$,則依三角形二邊中點連線定理,$ED=\frac{1}{2}CA$, $ED//CA$, $GF=\frac{1}{2}CA$, $GF//CA$. 故 $ED=GF$, $ED//GF$, 而 $EGFD$ 是$\square$ ($\square$決定定理), $\therefore$ $OE=OF$, $OD=OG$($\square$性質定理). 故 $OE=OF=FA$, $OD=OG=CG$, 即 $AO=\frac{2}{3}AE$, $CO=\frac{2}{3}CD$.同理, $BH$ 亦過 $O$, 而 $BO=\frac{2}{3}BH$.

**證法分類** 研究幾何的方法,全在步步着實,據理證明, 但幾何證題法本無一定,以上所述,都是普通所常用的,按性質總括,可分四類:

(1) 綜合證法, 是從定理的假設,應用定義公理定理逐步推演到結論爲止,如前證三角形內角和定理,卽用此法.尋常證題,用此法較多。

(2)　重合證法,是根據移形公理重合公理而證兩形全等,如前證三角形全等定理,都用此法。

(3)　歸謬證法,是先否認定理的結論,逐步推理,最後得到不合理的結論,反證定理的結論眞確,如前證垂線定理,卽用此法。

(4)　窮舉證法,是依定理的假設,列舉所有可以並立的結論,從此種結論反推與定理的假設不合,而證明定理的結論眞確,如前證三角形大角對大邊定理,卽用此法。

**證題思路**　既知證題的方法及步驟,但如何從假設方可推到結論,亦是感覺困難的事.今就前述定理的性質,指示思想的途徑:

(I)　要證兩線段相等,可證:(1)是全等形的對應邊,(2)是一三角形等角的對邊,(3)是平行四邊形的對邊,(4)是二截線被平行線所截的對應線段。

(II)　要證兩角相等,可證:(1)是對頂角,(2)是同角(或等角)的餘角或補角,(3)是等腰三角形的底角,(4)是平行四邊形的對角,(5)是全等形的對應角,(6)是關於平行線的同位角或內錯角或外錯角.

(III)　要證一角是直角,可證:(1)是等於已知直角,(2)是與補鄰角相等,(3)是角邊互相垂直的角。

(IV)　要證二線平行,可證:(1)是合於平行線決定定理,(2)是平行四邊形的對邊,(3)是三角形二邊中點的連線與第三邊,(4)是同時垂直或平行於一直線的二直線,(4)是距離處處相等的二直線.

(V) 要證兩三角形全等，可證其合於三角形全等定理及系。

(VI) 要證四邊形是平行四邊形，可證其合於平行四邊形決定定理。

## 本章練習題

(1) 試證三角形內點與二頂點連線定理： 三角形內任一點與二頂點的連線必相交。(提示：用歸謬證法，非平行必相交)

(2) 試證三角形內點與二頂點連線成角定理： 三角形任一點與二頂點連線所成的角，大於第三頂角。

(3) 試證三角形內點與二頂點連線和定理： 三角形內任一點與二頂點連線的和，小於第三角二邊的和。

(4) 試證三角形內外角平分線成角定理： 三角形內角與外角平分線所成的角，必是直角。

(5) 試證三角形二外角平分線成角定理： 三角形二外角平分線所成的角，等於第三外角之半。

(6) 直角三角形 $ABC$ 從直角頂點 $A$ 至斜邊 $BC$ 作垂線 $AH$，則 $\angle BAH=\angle ACB$， $\angle CAH=\angle ABC$.

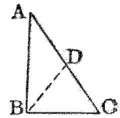
(7) 在同一底邊上的二個等腰三角形，連結二頂點的線段，必是底邊的垂直平分線。

(8) 從等腰三角形底邊兩端至對邊的兩中線相等，兩垂線相等，兩分角線相等。

(9) 試證等腰三角形全等定理： 二個等腰三角形中，(1)底

邊與頂角對應相等，或(2)底邊與高對應相等，則此兩形全等。

(10)　試證正三角形全等定理：　一邊相等的兩個正三角形全等。



(11)　試證倍銳角直角三角形定理：　設直角三角形的一銳角等於他銳角兩倍，則斜邊等於最短邊二倍。(提示：如右圖，$\angle C=2\angle A$，作中線 $BD$)。

(12)　設四邊形二鄰角互為補角，則是平行四邊形。

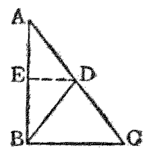
(13)　平行四邊形對角的平分線必平行。

(14)　試證矩形對角線定理：　矩形的對角線相等。

(15)　菱形的對角線互相垂直。

(16)　試證三角形一邊中點平行線定理：　過三角形一邊中點與他邊平行的直線，必過第三邊中點(提示：用平行截線定理)。

(17)　試證梯形中線定理：　梯形的中線，與兩底平行而等於兩底和之半。



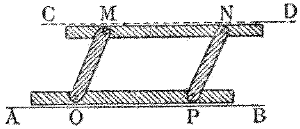
(18)　試證直角三角形斜邊中點定理：　直角三角形斜邊的中點，與各頂點的距離相等。(提示：如右圖，$\angle B$ 是 $\angle R$，$E$，$D$各是 $AB$，$AC$ 的中點，則 $ED // BC$，　$\therefore ED \perp AB$)。

(19)　設正多角形的一內角是 144°，求邊數。　(答)　10邊。

(20)　設正多角形的一外角是 20°，求邊數。　(答)　18邊。

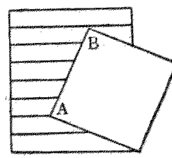
(21)　試證三角形傍心定理：　三角形一內角及其他二外角的平分線，必相交於同一點（此點叫做三角形的傍心，故一三角形

有三傍心)。



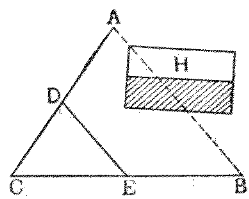

(22) 如右圖的器械,叫做平行尺,$MO=NP$, $MN=OP$,用此器可畫 $CD//AB$,是根據何種定理?

(答) ▱決定定理。




(23) 用三根木條釘成三角形能固定不動,是根據何種定理? (答) △全等定理三。

(24) 如右圖用格子紙可等分 $AB$ 成五段,是根據何種定理? (答) 平行截線定理。



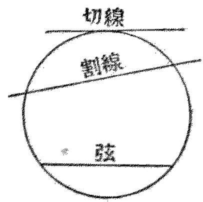

(25) 如右圖,$A$,$B$ 二點間有屋阻隔,不能直接測量. 今測得 $AD=9$ 丈,$AC=18$ 丈, $EC=11$ 丈, $CB=22$丈,$DE=10$ 丈。應根據何種定理,可求得 $AB$?

(答) 據△二邊中點連線定理, $AB=20$ 丈。

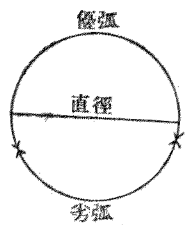
# 第十六章　圓

**引言**　平面上的圖形，可分直線形與曲線形二種．但平面幾何學所研究的曲線，只有圓一種．圓在幾何學中的地位，與直線形同一重要．本章繼直線形之後，用第十四章中圓與角的定義作基礎，講述關於圓的性質及定理．

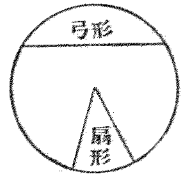
**圓**　半徑，直徑，圓，圓周，弧，圓心角的意義，已述於第十四章中．此外關於圓的他種名詞尙多，列舉如下：



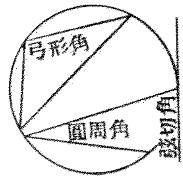

直線與圓　連結一弧兩端的線段，叫做弦．與圓周相交於二點的直線，叫做割線．與圓周只相交於一點的直線，叫做切線，此交點叫做切點．




圓周的部分　弧是圓周的一部分．直徑將圓周分成相等的二弧，每弧叫做半圓周．小於半圓周的弧，叫做劣弧；大於半圓周的弧，叫做優弧．從一圓周所分的一優弧與一劣弧，叫做共軛弧．




圓的部分　弧與弦圍成圓的部分，叫做弓形．弧與二半徑圍成圓的部分，叫做扇形．




關於圓的角　二半徑的夾角是圓心角．圓周上一點所作二弦的夾角，叫做圓周角．角頂在弓形弧上，角邊過弧兩端的角，叫做弓形角．切線與過切點的弦所成的角，叫做弦切角．

**圓的基本性質**　依上述各種定義，易於推得圓的性質如下，此種性質，大部分可用疊合證法證明，亦可當作定理，爲將來證題的根據：

（1）　等半徑的二圓全等．

（2）　同圓或等圓的直徑，等於半徑二倍．

（3）　同圓或等圓的半徑相等，直徑相等．

（4）　在同圓或等圓中，等圓心角對等弧，大圓心角對大弧．

（5）　在同圓或等圓中，等弧對等圓心角，大弧對大圓心角．

（6）　在同圓或等圓中，等弧對等弦，大弧對大弦．

（7）　在同圓或等圓中，等弦對等弧，大弦對大弧．

（8）　直徑分圓成全等二半圓．

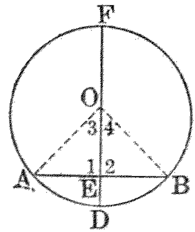
（9）　直徑是圓的最大弦．

（10）　一點與圓心的距離，若等於，大於，小於半徑，則此點在圓上，在圓外，在圓內．又其逆．

**垂徑平分弦弧定理**　垂直於弦的直徑，必平分此弦及其對弧．

[假設]圓 $O$ 中 $FD\perp AB$.

[結論] $AE=EB$，及弧 $AD=$ 弧 $DB$，弧 $AF=$ 弧 $FB$.

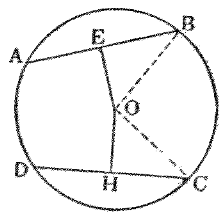



[證明]連結 $OA$ $OB$，因 $OE\perp AB$(假設)，故 $\angle 1=\angle 2=\angle R$ (垂線定義，直角定理)。又 $OA=OB$(基本性質3)，$OE=OE$(公用)，故 $\triangle AOE\cong\triangle BOE$ (直角△全等定理)，即 $AE=EB$，$\angle 3=\angle 4$ (全等形對應部分)，而弧 $AD=$ 弧 $DB$(基本性質 4)。又弧 $DAF=$ 弧 $DBF$ (基本性質 8)，故弧 $AF=$ 弧$FB$. (等量公理)。

過弦中點的半徑系　過弦中點的半徑，必垂直於此弦。

弦的垂直平分線系　弦的垂直平分線必過圓心。

**等弦距圓心等遠定理**　在同圓或等圓中，等弦距圓心等遠。又逆定理：距圓心等遠的弦相等。




[假設]圓 $O$ 中，$AB=CD$，$OE\perp AB$，$OH\perp DC$.

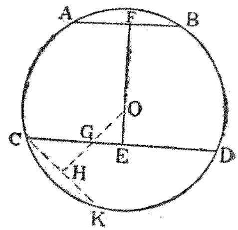
[結論] $OE=OH$.

[證明]連結 $OB$，$OC$. 因 $E$，$H$ 各是 $AB$,$DC$ 的中點(垂徑平分弦弧定理)，故 $EB=HC$ (何故)，$\triangle OEB\cong\triangle OHC$ (何故)，即 $OE=OH$ (全等形對應邊)。

逆定理請讀者自證。

**弦距圓心遠近定理**　在同圓或等圓中，設二弦不等，則大弦距圓心較近。又逆定理：設二弦距圓心不等，則距圓心較近的弦較大。

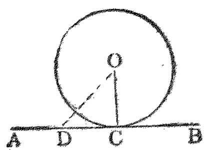
[假設]圓 $O$ 中，$CD>AB$，$OE\perp CD$，$OF\perp AB$.




[結論] $OE<OF$.

[證明]因 $CD>AB$(假設),故弧$CD>$弧 $AB$ (基本性質 7). 從 $C$ 作 $CK=AB$, $OH\perp CK$,故$OH=OF$ (等弦距圓心等遠定理).但 $OE<OG$ (△大角對大邊定理),而 $OG<OH$, 故 $OE<OH$, $\therefore$ $OE<OF$(代換公理)。

逆定理可用窮舉證法,請讀者自證。




**切線定理** 從半徑外端所作的垂線,必是圓的切線。

[假設] $OC$ 是圓 $O$ 的半徑, $AB\perp OC$ 於 $C$.

[結論] $AB$ 是圓 $O$ 的切線.

[證明]設 $D$ 是 $AB$ 上 $C$ 以外的一點, 連結 $OD$,則 $OD>OC$ (垂線斜線比較定理).故 $D$ 在圓外(基本性質 10),因此 $AB$ 上只有一點在圓周上,即 $AB$ 是圓的切線(切線定義)。

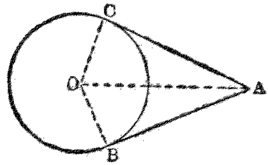
切點半徑系 切線是過切點半徑的垂線.

切點垂線過圓心系 從切點所作切線的垂線,必過圓心.

切線垂線過切點系 從圓心至切線的垂線,必過切點。

切線惟一系 過已定切點所作的切線,只有一條。

**切線等長定理** 從圓外一點所作的二切線相等.(從一點至圓的切線長,就是此點至切點的線段)

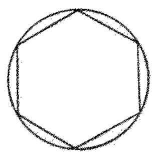



〔假設〕 $AB, AC$ 是從圓 $O$ 外一點 $A$ 所作的切線。

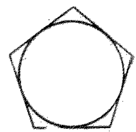
〔結論〕 $AB=AC$.

〔證明〕 連結 $OA, OB, OC$，則 $\angle OBA=\angle OCA=\angle R$（切點半徑系，直角定理）。故 $\triangle OBA\cong\triangle OCA$（何故），即 $AB=AC$.

切線等角系　從圓外一點至圓的二切線，與此點至圓心的連線成等角.



外接圓
內接多角形

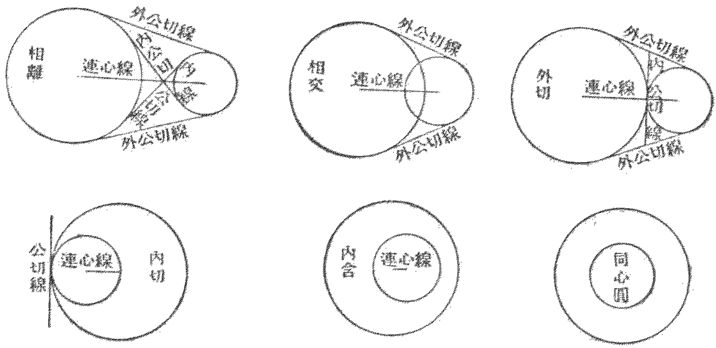


內切圓
外切多角形

**圓與多角形**　圓與多角形有密切關係，多角形各頂點在同一圓周上的，叫做圓的內接多角形，而此圓叫做多角形的外接圓。多角形各邊切於同一圓周的，叫做圓的外切多角形，而此圓叫做多角形的內切圓。

**二圓關係**　可依相交相切分作六種：(1)二圓都在形外不相遇，叫做相離。(2)二圓交會於二點，叫做相交；過交點的二圓切線所夾的角，叫做二圓的交角；若交角是直角，則叫做二圓正交。(3)二圓在形外交會於一點，叫做外切。(4)一圓在他圓內交會於一點，叫做內切。(5)一圓全在他圓內不相交，叫做內含。(6)公有中心的二圓，叫做同心圓。

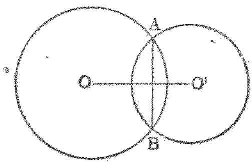
二圓的公共切線叫做公切線，又依位置分爲內公切線與外公切線.二圓中心的連結線，叫做連心線.設連心線是 $l$，大圓半徑是




$R$，小圓半徑是 $r$，則依定義及上圖，易知：(1)相離時，$l>R+r$，(2)相交時，$l<R+r$，(3)外切時，$l=R+r$，(4)內切時，$l=R-r$，(5)內含時，$l<R-r$，(6)同心時，$l=0$.

**交圓定理**　設二圓相交，則連心線是公弦的垂直平分線.

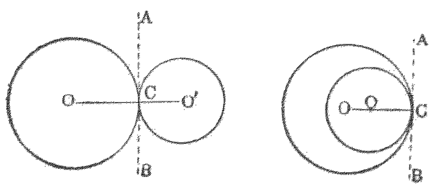
[假設]二圓 $O,O'$ 相交於 $A,B$.




[結論]連心線 $OO'$ 是 $AB$ 的垂直平分線.

[證明]依圓的基本性質 3，$O$ 與 $A,B$ 的距離相等，$O'$ 與 $A,B$ 的距離相等，故 $OO'$ 是 $AB$ 的垂直平分線(垂直平分線決定定理).

**切圓定理**　設二圓相切，則連心線必過切點.



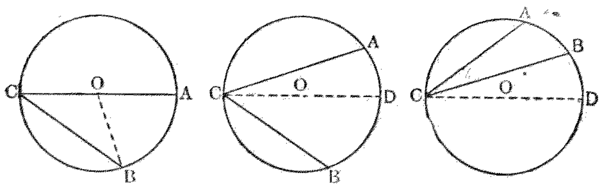

[假設]二圓 $O,O'$ 相切於 $C$.

[結論] $OO'$ 過 $C$.

[證明]在 $C$ 作公切線 $AB$. 再在切點 $C$ 作 $AB$ 的垂線,則此垂線必過 $O,O'$ (切點垂線過圓心系).故 $OO'$ 過 $C$ (何故).

關於圓的直線所成的角,亦甚重要,今用圓周角爲主,依次敍述.

**圓周角定理**　圓周角的度數,等於所截弧的一半.




[假設] $\angle ACB$ 是圓 $O$ 的圓周角.

[結論] $\angle ACB$ 的度數$=\frac{1}{2}$ 弧 $AB$.

[證明] (1) 圓 $O$ 在角的一邊時(如第一圖).

作直線連結 $OB$, 則 $BO=CO$ (何故), $\angle C=\angle B$ (何故), $\angle AOB=\angle B+\angle C=2\angle C$ (何故). 故 $\angle C=\frac{1}{2}\angle AOB$, 但 $\angle AOB$的度數$=$弧$AB$(角的單位).故$\angle C$的度數$=\frac{1}{2}$弧$AB$(何故).

(2) 圓心在角內時(如第二圖).

作直徑 $CD$,則依上面證明 (1),$\angle ACD$ 的度數 $=\frac{1}{2}$弧$AD$,

$\angle BCD$ 的度數 $=\frac{1}{2}$ 弧 $BD$.故依等量公理,得

$(\angle ACD+\angle BCD)$ 的度數 $=\frac{1}{2}$(弧 $AD+$ 弧 $BD$).

$\therefore\ \angle ACB$ 的度數 $=\frac{1}{2}$ 弧 $AB$.

(3)　圓心在角外時(如第三圖).

作直徑 $CD$,則可依 $\angle ACB=\angle ACD-\angle BCD$ 證明,請讀者自證.

圓心角與圓周角系　圓周角等於同弧所對圓心角之半.

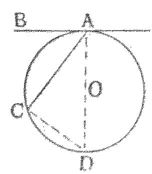
等圓周角對等弧系　同圓或等圓內,等圓周角對等弧,等弧對等圓心角.

弓形含等角系　同一弓形的角都相等.

半圓含直角系　半圓的角是直角.

內接四邊形對角系　內接四邊形的相對二角,互為補角.

**弦切角定理**　弦切角的度數,等於所夾弧的一半.




[假設] $AB$ 是圓 $O$ 的切線,$AC$ 是弦.

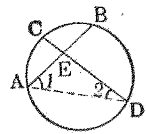
[結論] $\angle CAB$ 的度數 $=\frac{1}{2}$ 弧 $AC$.

[證明]作直徑 $AD$ 及弦 $CD$,則 $\angle C$ 是 $\angle R$(半圓含直角系),$\angle DAB$ 是 $\angle R$(切點半徑系),故 $\angle D$ 是 $\angle DAC$ 的餘角(直角△內角關係系),$\angle BAC$ 是 $\angle DAC$ 的餘角(餘角定義),故

$\angle BAC=\angle D$ (餘角定理). 但 $\angle D$ 的度數$=\frac{1}{2}$弧 $AC$ (圓周角定理), 故 $\angle BAC$ 的度數 $=\frac{1}{2}$弧 $AC$.

弦切角系　弦切角等於夾弧所對的圓周角。

**二弦交角定理**　二弦相交於圓內，其交角的度數，等於此角與對頂角所夾二弧的半和。




[假設] $AB$, $CD$ 是圓內相交的二弦。

[結論] $\angle CEA=\frac{1}{2}$(弧 $AC+$ 弧 $BD$).

[證明]連結 $AD$, 則 $\angle CEA=\angle 1+\angle 2$ (何故), 但 $\angle 1$ 的度數$=\frac{1}{2}$弧 $BD$, $\angle 2$ 的度數 $=\frac{1}{2}$弧 $AC$ (何故), 故 $\angle CEA$的度數 $=\frac{1}{2}$(弧 $BD+$ 弧 $AC$).

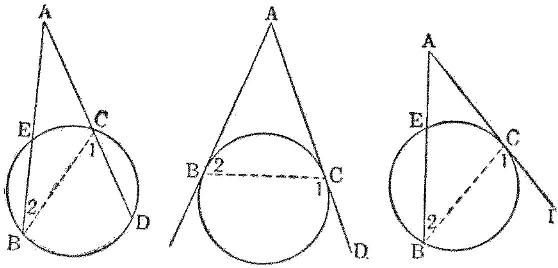
**切線割線交角定理**　從圓外一點作二割線，或二切線，或切線割線各一，其交角的度數，等於所夾二弧的半差。

[假設] $AB$, $AD$ 是從圓外 $A$ 點所作的二割線(第一圖)，二切線(第二圖)，一切線與一割線(第三圖)。

[結論] $\angle A$ 的度數$=\frac{1}{2}$(弧 $BD-$ 弧 $EC$)(第一圖)，

$\angle A$ 的度數$=\frac{1}{2}$(優弧 $BC-$ 劣弧 $BC$)(第二圖)，

$\angle A$ 的度數 $=\frac{1}{2}$(弧 $BC-$ 弧 $EC$)(第三圖)。




[證明]連結 $BC$，則 $\angle A+\angle 2=\angle 1$ (何故)，故 $\angle A=\angle 1-\angle 2$(何故)，以下請讀者補足。

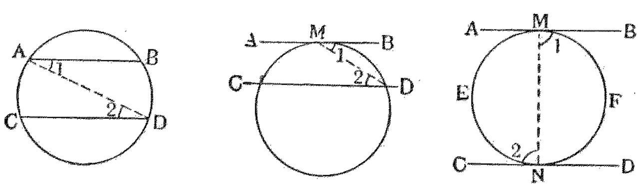
**平行線夾等弧定理**　二平行線在一圓上所夾的二弧相等。

[假設] $AB,CD$ 是一圓上的二平行線。

[結論] 弧 $AC=$ 弧 $BD$ (第一圖)，

弧 $MC=$ 弧 $MD$ (第二圖)，

弧 $MEN=$ 弧 $MFN$ (第三圖)。




[證明]如各圖連結線段，則 $\angle 1=\angle 2$ (何故)，以下請讀者補足。

[注意]讀者習畢此章，可仿照前章「證題思路」方法，將關於圓

的性質及定理，分類摘要，以便記憶。

## 本　章　練　習　題

(1)　同心二圓周間所夾一直線的部分相等.

(2)　設二弦各垂直於第三弦的兩端，則此二弦相等。

(3)　連結一弦中點與圓心的直線，必垂直於此弦.

(4)　過圓內一定點的諸弦中，垂直於過此點直徑的弦最小。

(5)　同圓或等圓內，設弧 $AB$ 是弧 $A'B'$ 的二倍，則弦 $AB$ 小於弦 $A'B'$ 的二倍.

(6)　同心二圓中，大圓切於小圓的弦，平分於切點。

(7)　直徑兩端所作的二切線平行。

(8)　設等腰三角形外切於一圓，則底邊平分於切點.

(9)　任何外切四邊形相對二邊的和，等於餘相對二邊的和。

(10)　直角三角形內切圓的直徑，等於二股的和減去斜邊的差。

(11)　大於半圓的弓形角是銳角，小於半圓的弓形角是鈍角。

(12)　圓的內接梯形，必是等腰.

(13)　設二等圓相交，則公弦平分連心線。

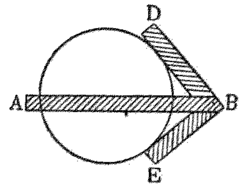
(14)　設二圓相切於 $A$，外公切線與二圓的切點是 $B$,$C$，則過 $A$ 點的內公切線平分 $BC$.

(15)　設在同心二圓的大圓中，作二弦與小圓相切，則此二弦相等。

(16) 試證弦切角逆定理: 過弦一端的直線與此弦所成角的度數，如等於所夾弧的半，則此直線是此圓的切線。

(17) 從弦的兩端引二切線，此二切線與弦所成的角相等。

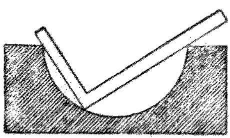
(18) 如左圖的器械，$BD=BE$，$AB$ 平分 $\angle DBE$，用此器可求圓板的直徑，是根據何種理由?

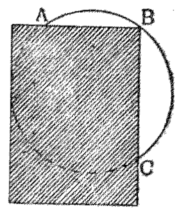



(答) 切線等角系。

(19) 如下列左圖，木匠用曲尺試驗是否半圓，是根據何種理由?

(答) 半圓含直角系。





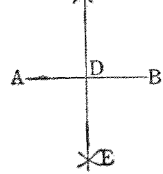

(20) 如上列右圖，如何可用長方紙求圓的直徑?

# 第十七章　作圖題

**引言**　平面幾何的圖形，無非直線形與圓二種．作直線與圓的方法，已在第十四章講畫圖儀器時，約略說過．今以此作基礎，並依據公法及定理，講述關於作圖的問題，以養成幾何學應用的技術．但此種作圖，只許用直尺與圓規，不得用量角器與三角板．

**作圖題**　畫圖形合於一定條件的方法，叫做作圖法．關於作圖法的問題，叫做作圖題．作圖題解法的順序，可分作四步：(1)解析，是先作草圖，查考圖形與一定條件的關係，從此想出作圖法．(2)作圖，是說明作圖的次序與方法．(3)證明，是根據定理，證明所作的圖合於已定條件．(4)討論，是決定作圖的可能不可能及解答的多少或有無．但在簡單的作圖題，解析與討論可省，至於作圖與證明，則必不可省．

**(I)基本作圖題**　是作圖的基礎，連絡應用，可解一般的作圖題．

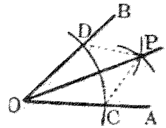



平分線段作圖題　平分線段 $AB$.

［作圖］　用 $A,B$ 各作圓心，大於 $\frac{1}{2}AB$ 作半徑，畫二弧交於 $C,E$，則 $CE$ 平分 $AB$ 於 $D$.

［證明］　因 $CA=CB$, $EA=EB$ (作圖)，故 $CE$ 是 $AB$ 的

垂直平分線.(垂直平分線決定定理)

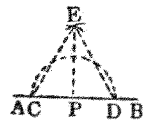



平分定角作圖題　平分定角 $\angle AOB$.

[作圖]　用 $O$ 作圓心,任意長作半徑,畫弧,截 $\angle O$ 二邊於 $C$, $D$.用 $C$, $D$ 各作圓心,大於$\frac{1}{2}CD$ 作半徑,畫二弧相交於 $P$, 則 $OP$ 平分 $\angle AOB$.

[證明]　連結 $CP$, $DP$, 則 $\triangle OCP\cong\triangle ODP$ (何故).

$\therefore$ $\angle AOP=\angle BOP$. 故 $OP$ 平分 $\angle AOB$.



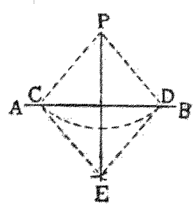

垂線作圖題　過定點 $P$, 求作定直線 $AB$ 的垂線.

(1)　$P$ 在 $AB$ 上時.

[作圖]　用 $P$ 作圓心,任意長作半徑,畫弧,截 $AB$ 於 $C$, $D$. 又用 $C$, $D$ 各作圓心,大於 $CP$ 作半徑,畫二弧相交於 $E$, 則 $EP$ 是所求的垂線.

[證明]　連結 $CE$, $DE$, 則 $\triangle EPC\cong\triangle EPD$ (何故).故 $\angle EPC=\angle EPD=\frac{1}{2}$平角(平角定義)=直角.故 $EP$ 是過 $P$ 垂直於 $AB$ 的直線(垂線定義).

(2)　$P$ 在 $AB$ 外時.



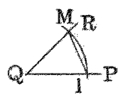

[作圖]　用 $P$ 作圓心,大於 $P$ 與 $AB$ 的距離作半徑,畫弧截 $AB$ 於 $C$, $D$. 又用 $C$, $D$ 各作圓心,大於$\frac{1}{2}CD$ 作半徑,畫二弧相交於

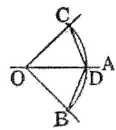
$E$，則 $PE$ 是所求的垂線．

［證明］　因 $PC=PD$，$EC=ED$（作圖），故 $PE$ 是 $AB$ 的垂直平分線（何故）．

等角作圖題　用定直線 $OA$ 上定點 $O$ 作頂點，$OA$ 作一邊，求作一角等於定角 $\angle PQR$．

［作圖］　用 $Q$ 作圓心，任取半徑畫弧，截 $QP$，$QR$ 於 $L$，$M$．又用 $O$ 作圓心，依前半徑畫弧，截 $OA$ 於 $D$．用 $D$ 作圓心，$LM$ 作半徑畫弧，與前弧相交於 $B$，$C$，則 $\angle AOC$，$\angle AOB$ 都合所求．



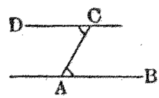




［證明］　$\triangle MQL \cong \triangle COD \cong \triangle BOD$（何故）．

$\therefore \quad \angle COA = \angle BOA = \angle PQR$．

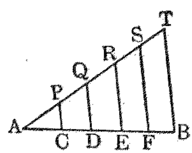
平行線作圖題　過定直線 $AB$ 外定點 $C$，求作直線與 $AB$ 平行．

［作圖］　在 $AB$ 上任取一點 $A$，連結 $AC$，作 $\angle ACD = \angle BAC$（等角作圖題），則 $DC$ 便是所求的平行線．




［證明］　因 $\angle ACD = \angle BAC$（作圖），故 $DC // AB$（平行線決定定理）．

等分線段作圖題　將線段 $AB$ 分成五等分．




［作圖］　從 $AB$ 的一端 $A$，任作線段 $AT$，

五等分 $AT$，得各分點 $P, Q, R, S$，連結 $TB$. 從 $P, Q, R, S$，各作 $TB$ 的平行線 $PC, QD, RE, SF$，與 $AB$ 相交於 $C, D, E, F$ 四點，則此四點分 $AB$ 成五等分

［證明］ 可用平行截線定理證明.

定直徑圓作圖題　求作一圓，用定線段作直徑.

［作圖］ 用定線段的中點作圓心，定線段的半長作直徑畫圓卽得.

［證明］ 因直徑等於半徑二倍（圓的基本性質），故此圓的直徑等於定線段.

圓過三點作圖題　求作一圓，過不在一直線上的三定點.

［作圖］ 用線段連結每二定點，成一三角形，用此三角形的外心作圓心，外心與一頂點的距離作半徑畫圓卽得

［證明］ 可用三角形外心定理證明.

求定弧中點作圖題　求定弧的中點.

［作圖］ 作弦連結定弧兩端，再作此弦的垂直平分線，與弧相交於一點，此點卽是所求弧的中心.

［證明］ 可用垂徑平分弦弧定理證明.

求定圓中心作圖題　求定圓的中心.

［作圖］ 設在定圓周上任取三點 $A, B, C$，弦 $AB, BC$ 的垂直平分線相交於 $O$，則 $O$ 便是所求的圓心.

［證明］ 可用弧的垂直平分線系證明.

切線過圓周上定點作圖題　求作切線過定圓周上定點 $A$.

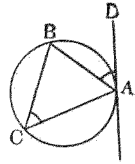
(1)　利用圓心.

[作圖]　在定點作半徑,過此點作半徑的垂線卽得.

[證明]　見切線定理.

(2)　不利用圓心.

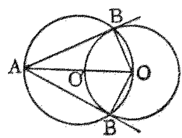
[作圖]　設定點是 $A$, 過 $A$ 任作弦 $AB$, $AC$, 連結 $BC$. 在弓形 $ACB$ 的反對側,過 $A$ 作直線 $AD$, 使 $\angle BAD=\angle ACB$, 則 $AD$ 是所求的切線.




[證明]　可用弦切角逆定理證明.

切線過圓周外定點作圖題　求作切線過定圓 $O$ 外定點 $A$.

[作圖]　用 $AO$ 作直徑畫圓 $O'$, 與圓 $O$ 相交於 $B$, 連結 $AB$,便是所求的切線.

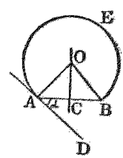



[證明]　$AO$ 是圓 $O'$ 的直徑 (作圖), 故 $\angle ABO$ 是 $\angle R$ (半圓含直角系). 又 $OB$ 是圓 $O$ 的半徑,故 $AB$ 是圓 $O$ 的切線(切線定理).

[討論]　二圓相交於二點,故有二解.

弓形含定角作圖題　在定線段 $AB$ 上, 求作弓形含定角 $\alpha$.

[作圖]　作 $\angle BAD=\angle\alpha$, 於 $A$ 作 $AD$ 的垂線, 又作 $AB$ 的垂直平分線, 相交於 $O$. 用 $O$ 作圓心, $OA$ 作半徑,畫圓,則 $\angle BAD$ 外的弓形,卽合所求.

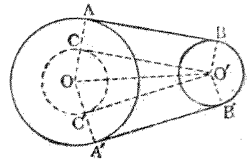

[證明]　$O$ 在 $AB$ 的垂直平分線上(作圖),則 $OA=OB$ (何故),故圓 $O$ 過 $B$, 卽 $AB$ 是圓 $O$ 的弦. 又 $AO\perp AD$, 故 $AD$

是圓 $O$ 的切線，即弓形 $AEB$ 的角等於 $\angle BAD$（弦切角定理）$=\angle\alpha$.

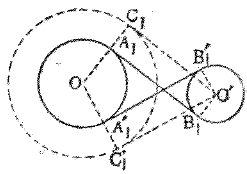
［討論］ $\angle BAD$ 可作於 $AB$ 的兩側，故有二解.

二圓公切線作圖題 求作定圓 $O$，$O'$ 的公切線.

［作圖］(1) 作外公切線 設圓 $O$ 的半徑大於圓 $O'$ 的半徑.




用 $O$ 作圓心，二圓半徑的差作半徑，畫圓.從 $O'$ 作此圓的切線，切點是 $C$，$C'$. 過 $C$，$C'$ 作圓 $O$ 的半徑 $OA$，$OA'$. 又作圓 $O'$ 的半徑 $O'B//OA$，$O'B'//OA'$. 連結 $AB$，$A'B'$，便是二圓的外公切線.




(2) 作內公切線 用 $O$ 作圓心，二圓半徑的和作半徑，畫圓.從 $O'$ 作此圓的切線 $O'C_1$，$OC'_1$，切點是 $C$，$C_1$. 連結 $OC'$，$OC'_1$，與圓 $O$ 相交於 $A_1$，$A'_1$.又作圓 $O'$ 的半徑 $O'B'_1//OC'_1$，$O'B_1//OC_1$. 連結 $A_1$ $B_1$，$A'_1$ $B'_1$，便是二圓的內公切線.

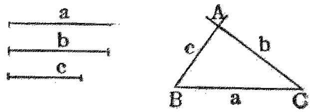
［證明］ 依作圖，$AC=AO-CO$，但 $CO=AO-BO'$，故 $AC=BO'$，且 $AC//BO'$，故 $ACO'B$ 是平行四邊形（▱決定定理）. 但 $\angle OCO'=\angle R$（切線定理），故 $ACO'B$ 是矩形，$\therefore$ $OA\perp AB$，$O'B\perp AB$（垂線定義），故 $AB$ 切於二圓（切線定理）.仿此，$A'B'$ 亦切於二圓.同理，可證 $A_1B_1$，$A'_1B'_1$ 亦切於二圓.

(II)**重要作圖題** 種類甚多，略舉數例，以示作圖題解法的模

範.

三角形作圖題一　已知三邊 $a, b, c$, 求作三角形.

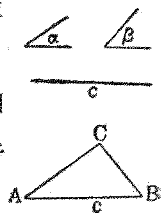
[作圖]　作 $BC=a$, 用 $B, C$ 各作圓心, $c, b$ 各作半徑, 畫二弧相交於 $A$, 則 $ABC$ 便合所求.




[證明]　易證從略.

[討論]　須 $b+c>a>b-c$ 時,作圖可能.

三角形作圖題二　已知二角 $\alpha, \beta$ 及公邊 $c$, 求作三角形.



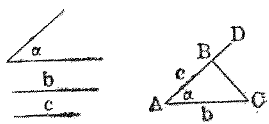

[作圖]　作　$AB=c$,　$\angle CAB=\angle\alpha$,　$\angle CBA=\angle\beta$. $AB$, $BC$ 相交於 $C$, 則 $\triangle ABC$ 便合所求.

[證明]　易證從略.

[討論]　$\angle\alpha+<\beta<2\angle R$ 時,作圖可能.

三角形作圖題三　已知二邊 $b, c$ 及夾角 $\alpha$, 求作三角形.

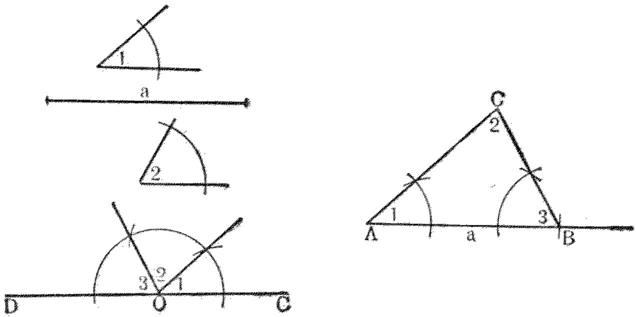
[作圖]　作　$AC=b$,　$\angle CAD=\angle\alpha$, 在 $AD$ 上截取　$AB=c$, 連結　$BC$,　則 $\triangle ABC$ 便合所求.




[證明]　易證從略.

三角形作圖題四　已知一邊 $a$, 鄰角 $\angle 1$ 及 $a$ 的對角 $\angle 2$, 求作三角形.

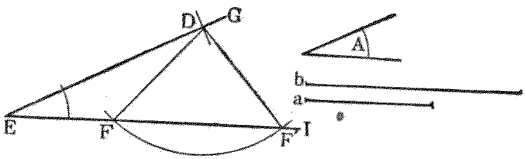
[作圖]　任作直線 $DC$, 在 $DC$ 上任一點 $O$, 作角等於 $\angle 1$




及 $\angle 2$，則所餘的 $\angle 3$ 等於所求三角形的第三角，因此可依三角形作圖題二作圖．

[證明] $\angle 1+\angle 2+\angle 3=\angle A+\angle C+\angle B=2\angle R$（何故），又 $AB=a$，故 $\triangle ABC$ 合於所求．

三角形作圖題五 已知二邊 $a$，$b$，及 $a$ 的對角 $A$，求作三角形．

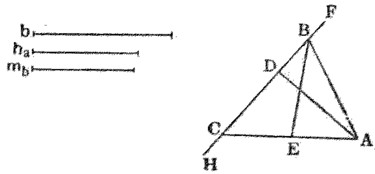



[作圖] 作 $\angle GEI=\angle A$，在 $EG$ 上截取 $ED=b$．用 $D$ 作圓心，$a$ 作半徑畫弧，與 $EI$ 相交於 $F$ 及 $F'$，則 $\triangle EDF$ 及 $\triangle EDF'$ 都合所求．

[證明] 易證從略．

［討論］　弧與 $EI$ 相交於二點時有二解，相切時有一解，不相交切時則無解．

三角形作圖題六　已知一邊 $b$ 及 $b$ 上的中線 $m_b$，他邊上的高 $h_a$，求作三角形．



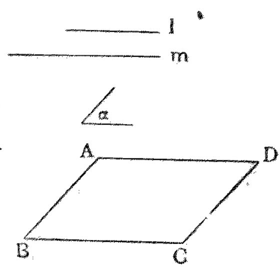

［解析］　假定 $ABC$ 是所求的三角形，$CA=b$，$AD=h_a$，$BE=m_b$，則 $\angle ADC=\angle ADB=\angle R$，而直角三角形 $ADC$ 有二邊已知，即可作圖．

［作圖］　作 $AD=h_a$，過 $D$ 作 $FH\perp AD$．用 $A$ 作圓心，$b$ 作半徑畫弧，與 $FH$ 相交於 $C$．用 $AC$ 的中點 $E$ 作圓心，$m_b$ 作半徑，畫弧，與 $FH$ 相交於 $B$．則 $\triangle ABC$ 便合所求．

［證明］　依作圖，$AD=h_a$，$BE=m_b$，$AC=b$；因 $\angle ADC$ 是 $\angle R$，故 $AD$ 是高；因 $CE=EA$，故 $BE$ 是中線．

［討論］　如 $h_a>b$，則不能作圖．

平行四邊形作圖題　已知相鄰二邊 $l$，$m$ 及夾角 $a$，求作平行四邊形．

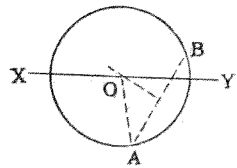



［作圖］　作 $\angle ABC=\angle a$，$AB=l$，$BC=m$．過 $A$ 作 $AD//BC$；過 $C$ 作 $CD//BA$，相交於 $D$，則 $ABCD$ 便合所求．

［證明］　易證從略．

圓的作圖題一 求作一圓，過二定點 $A$, $B$，而中心在定直線 $XY$ 上.

[作圖] 作線段 $AB$ 的垂直平分線，與 $XY$ 相交於 $O$. 用 $O$ 作圓心，$OA$ 作半徑畫圓，卽合所求.

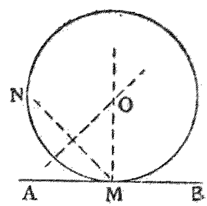



[證明] $OA=OB$(何故)，故圓 $O$ 過 $B$.

[討論] $AB$ 的垂直平分線如與 $XY$ 重合，則解答無數；如與 $XY$ 平行則無解.

圓的作圖題二 求作一圓，切於定直線 $AB$ 上定點 $M$，而過 $AB$ 外定點 $N$.

[解析] 假定圓 $O$ 是所求的圓，則 $OM\perp AB$ (切線定理)，而 $O$ 又在 $MN$ 的垂直平分線上(何故).故可作圖如下：




[作圖] 在 $M$ 作 $AB$ 的垂線，作 $MN$ 的垂直平分線，相交於 $O$. 用 $O$ 作圓心，$OM$ 作半徑，畫圓，便合所求.

[證明] 請讀者自證.

## 本 章 練 習 題

(1) 已知斜邊及一股，求作直角三角形.

(2) 已知斜邊及一銳角，求作直角三角形.

(3) 已知底邊及高，求作等腰三角形.

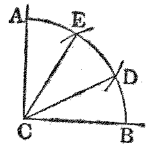
(4) 已知一邊，求作正三角形及正方形.

(5)　已知高，求作正三角形.

(6)　已知相鄰二邊，求作矩形.

(7)　三等分直角.

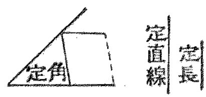
[作圖]　如下圖，$\angle C$ 是直角. 用 $C$ 作圓心，任意長作半徑，畫弧，截二邊於 $A,B$. 用 $A,B$ 各作圓心，前半徑作半徑畫弧，與前弧相交於 $E$, $D$, 則 $CD$, $CE$ 三等分 $\angle C$.




(8)　已知兩對角線，求作菱形.

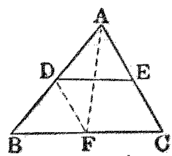
(9)　過定直線外一定點，求作一直線與定直線成定角.

(10)　求在定角二邊之間，夾一線段，使等於定長而與定直線平行.



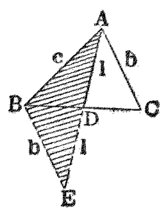

提示：如右圖.

(11)　求作直線，與 $\triangle ABC$ 的 $BC$ 平行，與 $AB$, $AC$ 相交於 $D$, $E$, 而 $AD=CE$ (提示：如右圖，$AF$ 是 $\angle A$ 的平分線，$DF//EC$).




(12)　已知二邊 $b,c$ 及第三邊上的中線 $l$, 求作三角形.

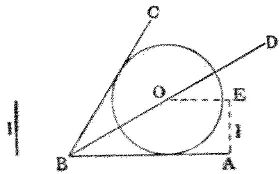
提示：參照右圖.




(13)　求作一圓，切於定圓周上的定點而過定圓周外的定點.

(14) 用定點作中心,求作一圓,切於定直線.

(15) 用定長作半徑,求作一圓,切於定角的二邊.



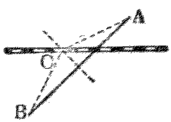

[解析] 假定圓 $O$ 是所求的圓,$EA=l$(定長).$BD$ 是定角 $B$ 的平分線,$OE//BA$.

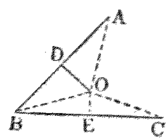
(16) 求作定三角形的內切圓.

(17) 求作定三角形的三個傍切圓.

(18) 求作一圓,切於定圓周上定點,且切於定直線.

(19) 有如下列左圖的鐵路,要距 $A,B$ 二村等遠設一車站,求此車站的位置.



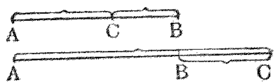




(20) 如上列右圖,有 $A, B, C$ 三家.今要掘一井距三家等遠,求井的位置.

# 第十八章　比例與相似形

**引言**　兩線段的相等與不等，前面都已講過，線段既有長短可言，當然是一種量，便可相比，此即幾何上的比例．故凡第十一章所述比的性質及定理，在幾何學上都可適用．本章從線段的比起，再推廣到圖形，講述相似形．尋常畫圖與照相的縮小放大，就是應用此種原理．

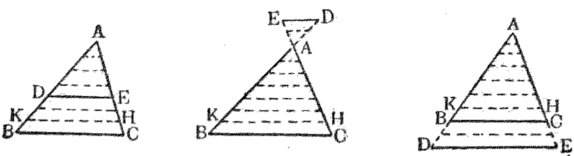
**內分外分**　如右圖，設 $C$ 是線段 $AB$ 上一點，則 $C$ 叫做內分點，而 $AC$，$CB$ 叫做內分線段．又設 $C$ 是 $AB$ 延長線上一點，則 $C$ 叫做外分點，$AC$，$BC$ 叫做外分線段．




**三角形一邊平行線定理**　三角形一邊的平行線，必分其他二邊成比例．

［假設］　$\triangle ABC$ 中，$DE // BC$．

［結論］　$AD:BD=AE:EC$．




(1)　　(2)　　(3)

〔證明〕 設 $BK$ 是合宜的單位，$AD=m(BK)$，$BD=n(BK)$，故 $AD:BD=m:n$. 過各分點作直線與 $BC$ 平行，則 $AE$ 亦分成 $m$ 等分，$EC$ 亦分成 $n$ 等分，而每一等分各等於 $BK$(平行截線定理)，故 $AE:EC=m:n$， $\therefore$ $AD:BD=AE:EC$.

三角形一邊平行線系 三角形一邊的平行線，所分其他二邊的對應線段，都成比例. 卽如上圖，依比的各種定理，可得以下各式：

(1) $AD:DB=AC:EC$. (2) $AD:AE=BD:EC$.

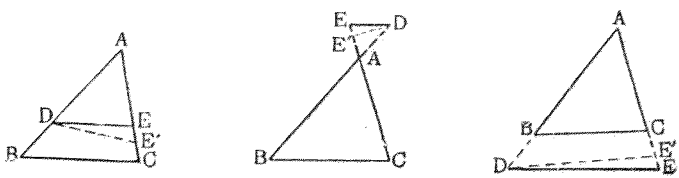
(3) $AB:AD=AC:AE$. (4) $AB:AC=AD:AE$.

(5) $AB:AC=BD:EC$.

平行線截二線成比例系 諸平行線截二直線，所截成的對應線段成比例.

**三角形二邊分成比例定理** 設一直線分三角形的二邊成比例，則此直線與第三邊相平行.

〔假設〕 $\triangle ABC$ 中，$DE$ 與 $AB$，$AC$ (或延長)相交於 $D$，$E$，且 $AD:DB=AE:EC$.



1) (2) (3)

〔結論〕 $DE//BC$.

〔證明〕 設從 $D$ 作 $DE'//BC$，則 $AD:DB=AE':E'C$(何

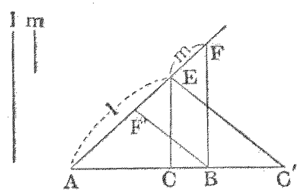
故). 今 $AD:DB=AE:EC$ (假設) 故 $AE:EC=AE':E'C$,

∴ $AE\pm EC:EC=AE'\pm E'C:E'C$ (合比分比定理), 卽 $AC:EC=AC:E'C$. 因此 $EC$ 與 $E'C$ 不得不合而爲一, 故 $DE//BC$.

三角形二邊分成比例系　設一直線截三角形的二邊, 所截的對應線段成比例, 則此直線必與第三邊平行.

**依定比分線段作圖題**　依二線段 $l:m$ 內分及外分線段 $AB$.

[作圖]　從 $A$ 任作 $\angle FAB$. 在 $AF$ 上取 $AE=l$, $EF=F'E=m$, 連結 $FB$, $F'B$. 從 $E$ 作 $EC//FB$, 與 $AB$ 相交於 $C$, 此 $C$ 便是所求的內分點. 又從 $E$ 作 $EC'//F'B$, 與 $AB$ 相交於 $C'$. 此 $C'$ 便是所求的外分點.




[證明]　$\triangle ABF$ 中, $EC//FB$, 故 $AC:CB=AE:EF=l:m$ (何故), 卽 $C$ 是內分點.

又 $\triangle AE'C$ 中, $EC'//FB$, 故 $AC':BC'=AE:F'E=l:m$ (何故), 卽 $C'$ 是外分點.

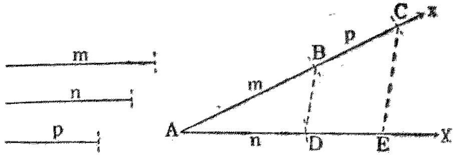
[注意]　如上圖中, $A, B, C, C'$ 叫做調和列點; $C, C'$ 叫做調和分 $AB$, 亦叫做 $AB$ 的調和共軛點.

**比例第四項作圖題**　求作三線段 $m, n, p$ 的比例第四項.

[作圖]　任作 $\angle XAx$, 在 $Ax$ 上取 $AB=m$, $BC=p$. 在 $AX$ 上取 $AD=n$, 連結 $BD$. 過 $C$ 作 $CE//BD$, 則 $DE$ 便是

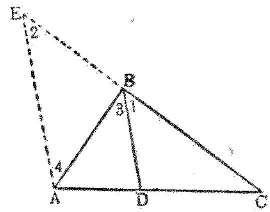
所求的比例第四項.

[證明]請讀者自證.




**三角形內角平分線定理** 三角形內角的平分線,內分對邊所成的二線段,與夾此角二邊成比例.

[假設] 在 $\triangle ABC$ 中,直線 $BD$ 平分 $\angle ABC$.




[結論] $AD:DC=AB:BC$.

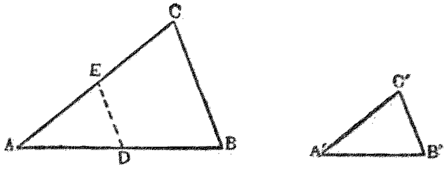
[證明] 作 $AE//DB$, 與 $CB$ 的延長相交於 $E$, 則 $AD:LC=EB:BC$(何故), $\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$ (何故). 今 $\angle 1=\angle 3$, 故 $\angle 2=\angle 4$, 而 $AB=EB$ (何故),故 $AD:DC=AB:BC$.

三角形外角平分線系 三角形外角的平分線,外分對邊所成的二線段,與二鄰邊成比例.

**相似形** 以上是講比例線段的定理,今用此作基礎,研究相似形.二多角形如有對應角都相等,對應邊成比例,叫做相似形;對應邊的比,叫做相似比.故相似形有必要的二條件:(1) 各角相等.(2)對應邊成比例.

**相似三角形決定定理**

一 設一三角形的三角與他三角形的三角,對應相等,則此二形相似.



［假設］ $\triangle ABC$ 與 $\triangle A'B'C'$ 中，$\angle A=\angle A'$ $\angle B=\angle B'$，$\angle C=\angle C'$.

［結論］ $\triangle ABC\sim\triangle A'B'C'$（$\sim$是相似的記號）

［證明］ 在 $AB$，$AC$ 上，各取 $AD=A'B'$，$AE=A'C'$，則 $\triangle ADE\cong\triangle A'B'C'$（何故），$\therefore$ $\angle ADE=\angle B'=\angle B$，故 $ED//BC$（何故），$AB:AD=AC:AE$（三角形一邊平行線系），

$AB:A'B'=AC:A'C'$. 同理，$AB:A'B'=BC:B'C'$. 故 $AB:A'B'=AC:A'C'=BC:B'C'$. $\therefore$ $\triangle ABC\sim\triangle A'B'C'$（相似形定義）

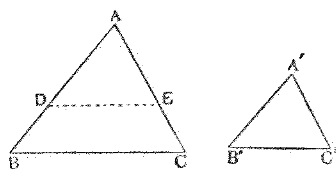
相似三角形決定系　設一三角形的二角，與他三角形的二角對應相等，則此二形相似.

相似直角三角形決定系　設二直角三角形有一銳角相等，則二形相似.

三角形母子相似系　三角形一邊的平行線，所分成的三角形，與原形相似.

相似三角形互相似系　設二三角形各與第三三角形相似，則此二形相似.

**相似三角形決定定理二**　設二三角形有一角相等，而夾等角的邊成比例，則此二形相似.




［假設］ $\triangle ABC$ 與 $\triangle A'B'C'$ 中，$\angle A=\angle A'$，$AB:A'B'=AC:A'C'$.

［結論］ $\triangle ABC\sim\triangle A'B'C'$.

［證明］ 在 $AB$，$AC$ 上，各取 $AD=A'B'$，$AC=A'C'$，連結

$DE$. 則 $\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$ (何故), $AB:AD=AC:AE$ (何故), 故 $DE//BC$ (△二邊分成比例系), $\angle ADE=\angle B$, $\angle AED=\angle C$ (何故), 因此 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ (相似三角形決定定理一), 卽 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

**相似三角形決定定理三** 設二三角形的三邊對應成比例, 則此二形相似.

[假設] 用前定理的圖, $\triangle ABC$ 與 $\triangle A'B'C'$ 中, $AB:A'B=AC:A'C'=BC:B'C'$.

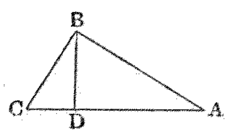
[結論] $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C$.

[證明] 在 $AB, AC$ 上,各取 $AD=A'B'$, $AE=A'C'$, 連結 $DE$, 則 $AB:AD=AC:AE$(假設)故 $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ (相似△決定定理二), $AB:AD=BC:DE$(何故),卽 $AB:A'B'=BC:DE$. 但 $AB:A'B'=BC:B'C'$(假設),故$DE=B'C'$. $\therefore \triangle A'B'C' \cong \triangle ADE$ (何故),故$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

**射影** 一點在一直線上的射影, 便是從此點至此直線的垂線足. 一線段在一直線上的射影,便是從線段兩端至此直線的垂線足的連線. 今用射影定義,研究三角形中的比例線段.

**直角三角形母子相似定理** 直角三角形從直角頂點至斜邊的垂線,將原形分成二個直角三角形,都與原形相似.

[假設] $ABC$ 是直角三角形, $B$ 是直角, $BD \perp CA$.



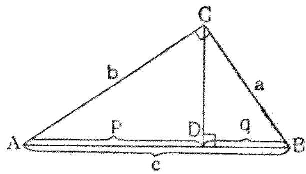

[結論] $\triangle BDC \sim \triangle ABC \sim \triangle ADB$.

［證明］　依垂線定義,三形都是直角三角形,因 $\angle C$ 公用,故 $\triangle BDC\sim\triangle ABC$（何故）,又因 $\angle A$ 公用,故 $\triangle ADB\sim\triangle ABC$. 即 $\triangle BDC\sim\triangle ABC\sim\triangle ADB$（相似△互相似系）.

高與兩股射影關係系　直角三角形斜邊上的高，是兩股在斜邊上射影的比例中項. 即如上圖 $CD:BD=BD:DA$.

股與斜邊上射影關係系　直角三角形的一股，是此股在斜邊上射影與斜邊的比例中項. 即如上圖,$CA:AB=AB:DA$ 及 $CA:BC=BC:CD$.

**畢氏定理**　直角三角形二股平方的和,等於斜邊的平方.




［假設］　$\triangle ABC$ 是直角三角形，$C$ 是直角.

［結論］　$a^2+b^2=c^2$.

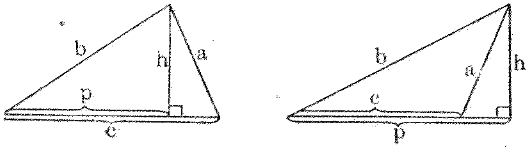
［證明］　作 $CD\perp AB$，則依股與斜邊上射影關係系，$c:b=b:p$，$\therefore$ $b^2=cp$. 同理，$a^2=cq$. 故 $a^2+b^2=cq+cp=c(q+p)=c^2$.

股與斜邊平方關係系　直角三角形一股的平方，等於斜邊的平方減其他一股的平方.

**畢氏推廣定理一**　任何三角形中,銳角對邊的平方,等於餘二邊平方的和,減其中一邊與他邊在此邊上射影相乘積的二倍.

［假設］　$\triangle abc$ 中，$p$ 是 $b$ 在 $c$ 上的射影，$a$ 是銳角的對邊.

［結論］　$a^2=b^2+c^2-2cp$.



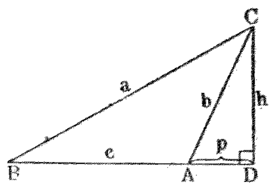

［證明］　設 $h$ 是 $c$ 上的垂線，則依畢氏定理，$h^2=b^2-p^2$.
在第一圖中，

$$a^2=h^2+(c-p)^2=b^2-p^2+c^2-2cp+p^2=b^2+c^2-2cp.$$

在第二圖中，

$$a^2=h^2+(p-c)^2=b^2-p^2+p^2-2cp+c^2=b^2+c^2-2cp.$$

**畢氏推廣定理二**　任何三角形中，鈍角對邊的平方，等於餘二邊平方的和，加其中一邊與他邊在此邊上射影相乘積的二倍.




［假設］　$\triangle abc$ 中，$p$ 是 $b$ 在 $c$ 上的射影，$a$ 是鈍角的對邊.

［結論］　$a^2=b^2+c^2+2cp$.

［證明］　依畢氏定理，$h^2=b^2-p^2$，
故 $a^2=h^2+(c+p)^2=b^2-p^2+c^2+2cp+p^2=b^2+c^2+2cp$.

以上講相似三角形的定理，今用此作基礎，研究相似多角形.

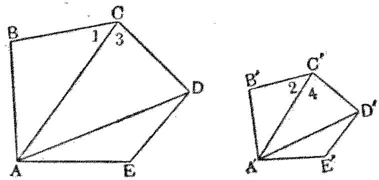
**相似多角形周界定理**　相似二多角形的周界，與任何對應邊成比例(可用加比定理證明).

**相似多角形性質定理**　相似二多角形可分成同數三角形對應相似.

［假設］　多角形 $ABCDE\sim$ 多角形 $A'B'C'D'E'$.

［結論］　$\triangle ABC\sim\triangle A'B'C'$，$\triangle ACD\sim\triangle A'C'D'$，……

［證明］　從 $A$, $A'$ 作各形的對角線．則 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$（何故），故 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$（何故）．又 $\dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{CD}{C'D'}$．故 $\triangle ACD \sim \triangle A'C'D'$．同理，$\triangle ADE \sim \triangle A'D'E'$．

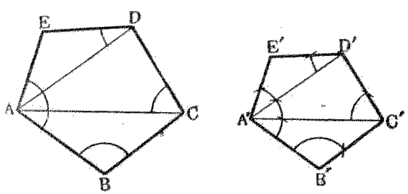



**相似多角形決定定理**　設二多角形是對應相似的同數三角形合成，則此二形相似．

［證明］　用前定理的圖，依假設，$\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \cdots$, $\angle B = \angle B'$ $\angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4$,　$\therefore$　$\angle C = \angle C'$．　同理，$\angle D = \angle D'$, $\angle E = \angle E'$,… 故二形相似（相似形定義）．

**相似多角形作圖題**　求作一多角形與定多角形 $ABCDE$ 相似，用線段 $A'B'$ 作 $AB$ 的對應邊．

［作圖］　從 $A$ 作各對角線 $AC$, $AD$,……．在 $A'B'$ 上作 $\angle B'A'C' = \angle BAC$, $\angle B' = \angle B$, $A'C'$ 與 $B'C$ 相交於 $C'$．又作 $\angle C'A'D' = \angle CAD$, $\angle A'C'D' = \angle ACD$, $A'D'$ 與 $C'D'$ 相交於 $D'$．以下仿此．

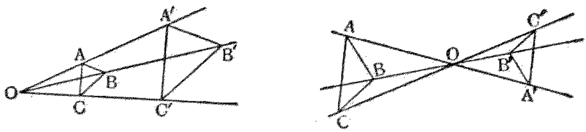



［證明］　請讀者自證．

**相似三角形頂點連線定理**　設相似二三角形的對應邊平行移置，則對應頂點的連線必相交於同一點．

［假設］ $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$，且 $AB // A'B'$，$BC // B'C'$，$AC // A'C'$.

［結論］ $AA'$，$BB'$，$CC'$ 同交於一點 $O$.



［證明］ 設 $AA'$，$BB'$ 相交於 $O$，則 $OA' : OA = A'B' : AB$.（何故），又設 $AA'$，$CC'$ 相交於 $O'$ 則 $O'A' : O'A = A'C' : AC = A'B' : AB$. 故 $OA' : OA = O'A' : O'A$. $\therefore$ $OA' : AA' = O'A' : AA'$（分比定理），因此 $OA'$ 與 $O'A'$ 不得不合而爲一，卽 $O$ 與 $O'$ 一致，故 $AA'$，$BB'$，$CC'$ 同交於 $O$ 點.

［注意］ 如此定理的二相似形，叫做在相似位置；對應頂點連線的交點，叫做相似中心.

相以多角形頂點連線系　設相似二多角形的對應邊平行移置，則對應頂點的連線，相交於同一點（如相似比是一，則互相平行）

相似中心距對應頂點系　相似二多角形在相似位置時，從相似中心至對應頂點距離的比，等於相似比.

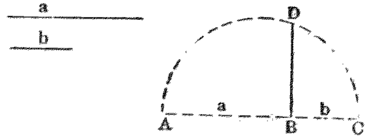
多角形相似系　將多角形頂點與形外一點的連線，內分或外分，則順次連結各分點所成的多角形，與原多角形相似.

以上是講直線形的比例線段，今再講關於圓的比例線段.

**比例中項作圖題**　求作二線段 $a, b$ 的比例中項.

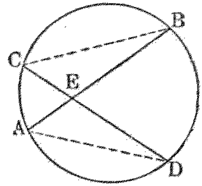
［作圖］ 作 $AB = a$，$BC = b$. 用 $AC$ 作直徑畫半圓. 作 $BD$

$\perp AC$，與半圓周相交於 $D$，則 $BD$ 便是所求的比例中項．




［證明］　可用高與二股射影關係系證明．

**交弦定理**　設二弦相交於圓內，則一弦所分二線段的積，等於他弦所分二線段的積．




［假設］　二弦 $AB$，$CD$ 相交於圓內 $E$ 點．

［結論］　$AE\times EB=CE\times ED$．

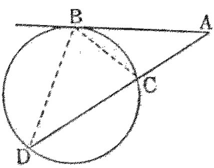
［證明］　連結 $CB$，$AD$，則依等圓周角與等弧相對系，$\angle A=\angle C$，$\angle B=\angle D$，

故 $\triangle CEB\sim\triangle AED$（何故），$\therefore$ $AE:CE=ED:EB$（何故），

即 $AE\times EB=CE\times ED$（何故）．

一弦內分系　過圓內定點的弦，所分二線段的積是常數（即一定）．

**切割線定理**　設從圓外一點作切線及割線，則切線等於割線與割線在圓外一段的比例中項．




［假設］　切線 $AB$ 切圓於 $B$，割線 $AD$ 割圓於 $C$，$D$．

［結論］　$AD:AB=AB:AC$．

［證明］　連結 $BD$，$BC$，則

$\angle D=\angle CBA$（何故）$\angle A=\angle A$，故 $\triangle DAB\sim\triangle BAC$（何故）即

$AD:AB=AB:AC$（何故）．

割線系　從圓外定點至圓的割線，與其圓外一段的乘積是常數.

## 本章練習題

(1)　將 2 寸長的線段,依 2:3 内分及外分

(2)　有定線段 $a$，$b$，$c$，求作線段 $x$，使 $a:b=x:c$.

(3)　求作 2 寸，3 寸，4 寸的比例第四項.

(4)　試證三角形内外分角線逆定理：　將三角形底邊依其餘二邊的比内分及外分，則頂點與各分點的連線，各平分頂角及頂角的外角.

(5)　已知三角形的三邊是 $a$，$b$，$c$，求 $a$ 的對角平分線所分 $a$ 邊二線段的長.

(6)　將線段 $AB$ 調和分於二點 $C$，$D$，則 $\frac{1}{AC}-\frac{1}{AB}=\frac{1}{AB}-\frac{1}{AD}$.(此題中的 $AC$，$AB$，$AD$ 與調和級數相當).

(7)　設 $A$，$C$，$B$，$D$ 順次在一直線上，而 $\frac{1}{AC}-\frac{1}{AB}=\frac{1}{AB}-\frac{1}{AD}$，則此四點是調和列點.

(8)　設二三角形的邊各各平行，或各各垂直，則此二三角形相似.

(9)　試證三角形相似比定理　相似二三角形中，對應高的

比，對應分角線的比，對應中線的比，各等於相似比．

(10)　設二平行四邊形有對應二鄰邊成比例而夾角相等，則此二形相似．

(11)　設二平行四邊形有二鄰邊及一對角線對應成比例，則此二形相似．

(12)　過梯形對角線的交點，作直線與底平行，則此直線夾於不平行二邊的線段，被對角線的交點平分．

(13)　某時測地上的塔影長 20 公尺，而長 3 公尺的影是 $\sqrt{3}$ 公尺，求塔高．　(答)　400 公尺．

(14)　在 $\triangle ABC$ 中，$AD$ 是高，如 $AD^2=BD\times CD$，則 $\angle BAC$ 是直角．

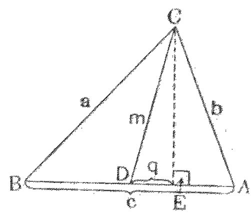
提示：　可將等式化作比例式，再用相似三角形的理論．

(15)　試證三角形二邊平方和定理：三角形二邊平方和的二倍，等於第三邊平方加第三邊上中線平方的四倍．

提示：　$CE\perp AB$，$CD=m$ 是 $c$ 邊上的中線，$DE=q$．則

$$a^2=\left(\frac{c}{2}\right)^2+m^2+2\left(\frac{c}{2}\right)q.$$

$$b^2=\left(\frac{c}{2}\right)^2+m^2-2\left(\frac{c}{2}\right)^2q.$$




(16)　設二線段 $AB$，$CD$ (或延長) 相交於 $P$，如 $PA\times PB=PC\times PD$，則四點 $A$，$B$，$C$，$D$ 在一圓周上．

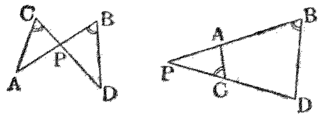
提示：　連結 $AC$, $BD$, 則因 $\angle APC=\angle DPB$,

及 $PA:PC=PD:PB$,

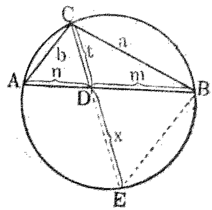
故 $\triangle APC\sim\triangle DPB$,

$\therefore\quad \angle C=\angle B$,

故過 $A$, $B$, $C$ 三點作圓必過 $D$.




(17)　試證三角形二邊乘積定理一：　三角形二邊的乘積，等於夾角平分線的平方，加第三邊上所分二線段的積.

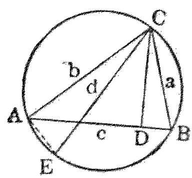



提示：　$\angle C$ 的平分線 $CD=t$. $\triangle ACD\sim\triangle ECB$.

故 $b:t+x=t:a$, 　$\therefore\quad ab=t^2+tx$.

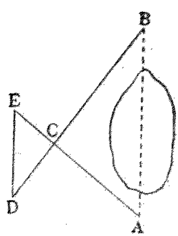
但 $tx=mn$.

(18)　試證三角形二邊乘積定理二：　三角形二邊的乘積，等於第三邊上的高乘外接圓直徑.



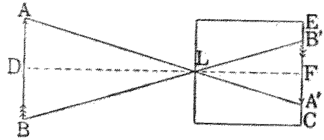

提示：　$\triangle CAE\sim\triangle CDB$.

(19)　如右圖，$BA$ 是不能直接測量的距離. 先量得 $AE=80$ 尺，$CE=20$ 尺，$DB=100$ 尺，$DC=25$ 尺，$ED=30$ 尺，求 $BA$.



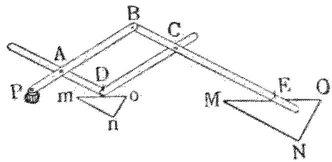

(答)　90 尺.

(20)　如右圖，是照相的原理．照片上 $A'$，是一點 $A$ 的像．$AA'$ 通過鏡頭中心 $L$．$CE$ 是照片的位置，$A'B'$ 是 $AB$ 的像．設 $AB=6$ 尺，$LD=12$ 尺，$LF=6$ 寸．求 $A'B'$．




(答)　3 寸．

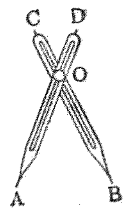
(21)　如右圖，叫做畫圖縮放器，是用四條木製成．$A,B,C,D$ 是活樞，$ABCD$ 常成平行四邊形，$P$ 是定樞．$D$ 與 $E$ 處可插鉛筆．$PA$ 與 $CE$ 的長，依 $\dfrac{PA}{AD}=\dfrac{DC}{CE}$ 而定．如是則 $D,E$ 無論如何移動，$PDE$ 常成一直線．若在 $E$ 依原圖描畫，則在 $D$ 畫成縮小圖；反之則放大．試證明理由．




(22)　如右圖，叫做比例規．$AD=BC$，$O$ 是關節，可以移動．

如取 $OD=\dfrac{2}{5}OA$ 或 $OC=\dfrac{2}{5}OB$，

則 $CD=\dfrac{2}{5}AB$，試證明理由



# 第十九章　面積,正多角形與圓

**引言**　以前已研究直線形與圓的性質,所得的是線段的相等或大小,角的相等或大小,弧弦角的關係定理等,其結果不出於加減的範圍.前章從線段的比講到相似形的理論,依比的性質定理,常得二線段的乘積,始從線段的加減,引到線段的乘法.所謂二線段的乘積,就是用此二線段作縱橫二邊的矩形,卽從線段的長短導出面積的大小.本章卽從此點出發,研究多角形與圓的面積,所講的是等積圖形定理,等積變形作圖題,正多角形與圓的關係等.此種理法,在實際上應用亦甚廣.

**面積**　用單位長的線段作一邊的正方形大小,叫做面積單位.平面形中所含面積單位的數,叫做面積.如用每邊一寸的正方形做面積單位,叫做一方寸,若用此單位量矩形得 25 方寸,卽此矩形的面積是 25 方寸.同理,如方尺方丈等,亦可作面積單位.

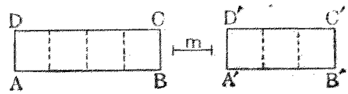
**等積形**　面積相等的二形,叫做等積形.如 $\triangle ABC$ 的面積 25 方寸,$\square MNOP$ 的面積 25 方寸,則二形是等積形,可寫作 $\triangle ABC = \square MNOP$.故等積形未必是全等形,而全等形則必是等積形.

**等高矩形相比定理**　等高矩形的比,等於底的比.

〔假設〕　矩形 $ABCD$ 與 $A'B'C'D'$ 中,高 $AD=A'D'$,底是 $AB$,$A'B'$.

［結論］　$\square ABCD : \square A'B'C'D' = AB . A'B'$,

即 $\dfrac{\square ABCD}{\square A'B'C'D'} = \dfrac{AB}{A'B'}$.

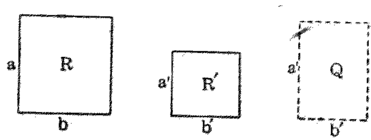



［證明］　設 $m$ 是 $AB$ 與 $A'B'$ 的合宜單位，而 $AB = am$, $A'B' = bm$，則 $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{am}{bm} = \dfrac{a}{b}$.

過 $AB$, $A'B'$ 上各分點作垂線,則二形各分成 $a$, $b$ 個小矩形,而都相等.故 $\dfrac{\square ABCD}{\square A'B'C'D'} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{AB}{A'B'}$.

等底矩形相比系　等底二矩形的比,等於高的比.

**矩形相比定理**　二矩形面積的比,等於底與高乘積的比.



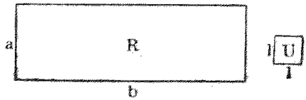

［假設］　矩形 $R, R'$ 中,底是 $b$, $b'$，高是 $a$, $a'$.

［結論］　$\dfrac{R}{R'} = \dfrac{ab}{a'b'}$.

［證明］　用 $R$ 的高作高，$R'$ 的底作底，畫矩形 $Q$，則

$\dfrac{R}{Q} = \dfrac{b}{b'}$, $\dfrac{Q}{R'} = \dfrac{a}{a'}$ (何故). $\therefore$ $\dfrac{R}{Q} \times \dfrac{Q}{R'} = \dfrac{b}{b'} \times \dfrac{a}{a'}$, 即 $\dfrac{R}{R'} = \dfrac{ab}{a'b'}$.

**矩形面積定理**　矩形的面積等於底乘高.



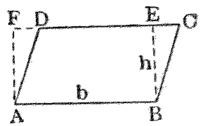

[假設]　矩形 $R$ 的高是 $a$，底是 $b$.

[結論]　$R$ 的面積 $=ab$.

[證明]　設 $U$ 是面積單位，則$\frac{R}{U}=\frac{ab}{1\times 1}$（矩形相比定理），但 $\frac{R}{U}$是 R 的面積（面積定義），故 $R$ 的面積 $=ab$.

正方形面積系　正方形的面積等於一邊的平方.

**平行四邊形面積定理**　平行四邊形的面積，等於底乘高.




[假設]　$\square ABCD$ 中，底 $AB=b$，高 $BE=h$.

[結論]　$\square ABCD=bh$.

[證明]　作 $AF\perp AB$，與 $CD$ 延長線相交於 $F$，則$AF//BE$（何故）. $\triangle AFD\cong\triangle BEC$（何故）.

故 $\square ABCD=\square ABEF$（何故）$=bh$（矩形面積定理）.

等積平行四邊形系　等底等高的二平行四邊形是等積形.

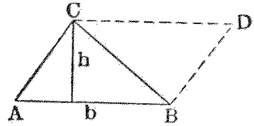
平行四邊形相比系　二平行四邊形面積的比，等於底與高乘積的比.

等底平行四邊形相比系　等底二平行四邊形面積的比，等於高的比.

等高平行四邊形相比系　等高二平行四邊形面積的比，等於底的比.

**三角形面積定理**　三角形的面積,等於底與高乘積的一半.

[假設]　$\triangle ABC$ 中,高是 $h$,底是 $b$.




[結論]　$\triangle ABC = \frac{1}{2}bh$.

[證明]　作 $BD//AC$, $CD//AB$, 則 $ABDC$ 是平行四邊形(何故),而 $\square ABDC=bh$ (何故).

故 $\triangle ABC = \frac{1}{2} \square ABDC$ (何故) $= \frac{1}{2}bh$.

三角形面積系　三角形面積等於等底等高平行四邊形的一半.

等積三角形系　等底等高的二三角形是等積形.

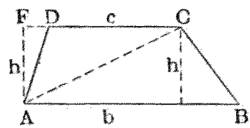
三角形相比系　二三角形面積的比,等於底與高乘積的比.

等底三角形相比系　等底二三角形面積的比,等於高的比.

等高三角形相比系　等高二三角形面積的比,等於底的比.

**梯形面積定理**　梯形的面積,等於高與二底和乘積的一半.

[假設]　梯形 $ABCD$ 中,二底是 $b, c$, 高是 $h$.

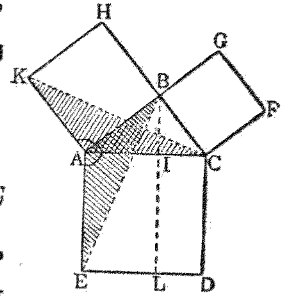



[結論]　梯形 $ABCD = \frac{1}{2}h(b+c)$.

[證明]　連結 $AC$, 作 $AF$ 垂直於 $CD$ 的延長, 則 $AF=h$ (何故). $\triangle ADC = \frac{1}{2}hc$, $\triangle ABC = \frac{1}{2}hb$ (何故).

故梯形 $ABCD = \triangle ABC + \triangle ADC = \frac{1}{2}hb + \frac{1}{2}hc = \frac{1}{2}h(b+c)$.

**畢氏定理別證** 直角三角形二股平方的和,等於斜邊的平方.



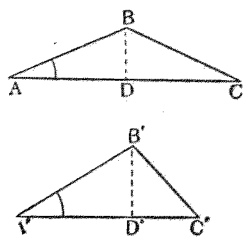

[假設] 直角三角形 $ABC$ 中,$AH$, $BF$ 是二股上的正方形,$AD$ 是斜邊上的正方形.

[結論] $\square AH+\square BF=\square AD$.

[證明] 作 $BL\perp ED$,則 $BL//AE$ (何故).連結 $KC$,$BE$.依假設,$AK=AB$, $AC=AE$.又 $\angle KAB=\angle EAC=\angle R$,故 $\angle KAB+\angle BAC=\angle EAC+\angle BAC$,$\therefore$ $\angle KAC=\angle BAE$. 因此 $\triangle KAC\cong\triangle BAE$(何故).但 $\triangle KAC$ 的底是 $AK$,高是 $AB$(何故); $\triangle BAE$ 的底是 $AE$,高是 $AI$. 故 $\triangle KAC=\dfrac{1}{2}\square AH$,$\triangle BAE$ $=\dfrac{1}{2}\square AELI$ ($\triangle$面積系),$\therefore$ $\square AH=\square AELI$. 同理,$\square BF$ $=\square CDLI$. 故 $\square AH+\square BF=\square AELI+\square CDLI=\square AD$.

以上所述是面積的基本定理,今再用此導出直線形相比理論.

**一角等的三角形相比定理** 設二三角形有一角相等,則面積的比,等於夾等角二邊乘積的比.




[假設] $\triangle ABC$ 與 $\triangle A'B'C'$ 中,$\angle A=\angle A'$.

[結論] $\dfrac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\dfrac{AB\times AC}{A'B'\times A'C'}$.

[證明] 作高 $BD$ 與$B'D'$,則

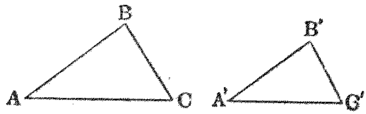
$\triangle ABD \sim \triangle A'B'D'$（相似△決定系）．故$\dfrac{BD}{B'D'}=\dfrac{AB}{A'B'}$（何故）．

$$\therefore\quad \frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{BD\times AC}{B'D'\times A'C'}\ (\triangle\text{相比系})=\frac{BD}{B'D'}\times\frac{AC}{A'C'}$$

$$=\frac{AB}{A'B'}\times\frac{AC}{A'C'}=\frac{AB\times AC}{A'B'\times A'C'}.$$

**相似三角形相比定理**　相似二三角形面積的比，等於對應邊平方的比．

［假設］　$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.




［結論］　$\dfrac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\dfrac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}$

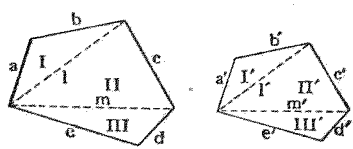
$$=\frac{\overline{AC}^2}{\overline{A'C'}^2}=\frac{\overline{BC}^2}{\overline{B'C'}^2}.$$

［證明］　依假設，$\angle A=\angle A'$，　$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{BC}{B'C'}$，

故　$\dfrac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\dfrac{AB\times AC}{A'B'\times A'C'}$（何故）$=\dfrac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}=\dfrac{\overline{AC}^2}{\overline{A'C'}^2}=\dfrac{\overline{BC}^2}{\overline{B'C'}^2}$

**相似多角形相比定理**　相似二多角形面積的比，等於對應邊平方的比．

［假設］　$a$ 及 $a'$ 是相似二三角形的對應邊，$S$，$S'$ 是面積．




［結論］　$\dfrac{S}{S'}=\dfrac{a^2}{a'^2}$.

［證明］　從對應一頂點各作所有的對角線，則　$\triangle I\sim\triangle I'$，

$\triangle II \sim \triangle II$，$\triangle III = \triangle III'$（何故），

$$故\frac{\triangle I}{\triangle I'}=\frac{a^2}{a'^2},\quad \frac{\triangle I}{\triangle I'}=\frac{l^2}{b^2}=\frac{\triangle II}{\triangle II'}=\frac{m^2}{m'^2}=\frac{\triangle III}{\triangle III'}(何故),$$

$$即\quad \frac{\triangle I+\triangle II+\triangle III}{\triangle I'+\triangle II'+\triangle III'}=\frac{\triangle I}{\triangle I'}(加比定理),$$

$$\therefore \qquad \frac{S}{S'}=\frac{\triangle I}{\triangle I'}=\frac{a^2}{a'^2}.$$

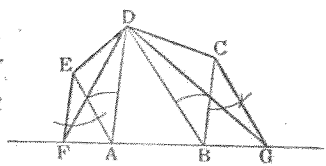
相似多角形相比系一　相似二多角形面積的比，等於對應對角線平方的比.

相似多角形相比系二　相似二多角形面積的比，等於周界平方的比.

以上是講關於面積的比例定理，今再敍述變形狀而不變面積的作圖題.

**多角形變成三角形作圖題**　求作三角形與多角形 $ABCDE$ 等積.

［作圖］　連結 $DA$，$DB$. 過 $C$ 作 $CG//DB$，過 $E$ 作 $EF//DA$，各與 $AB$ 延長相交於 $G$，$F$，則 $FDG$ 便是所求的三角形.



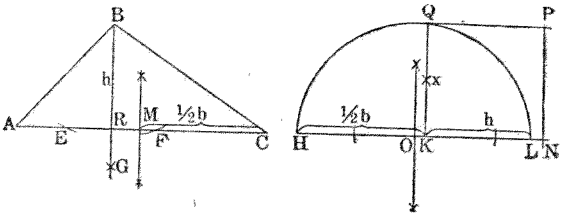

［證明］　$\triangle DBG=\triangle BCD$，$\triangle DFA=\triangle DEA$（等積△系）.

故多角形 $ABCDE=\triangle BCD+\triangle BDA+\triangle DEA$

$$=\triangle DBG+\triangle BDA+\triangle DFA=\triangle FDG.$$

**三角形變成正方形作圖題**　求作正方形與三角形 $ABC$ 等積.

[解析]　設 $\triangle ABC$ 的底 $AC=b$，高 $BR=h$.

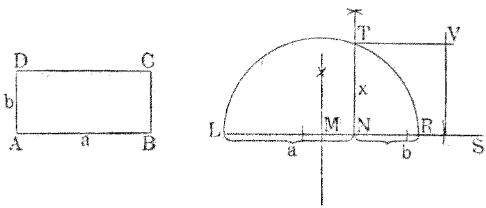



則 $\triangle ABC=\dfrac{1}{2}bh$. 又設所求正方形的一邊是 $x$，則面積是 $x^2$.

$\therefore\quad x^2=\dfrac{1}{2}bh$，即 $\dfrac{1}{2}b:x=x:h$. 故所求正方形的一邊，是 $\dfrac{1}{2}b$ 與 $h$ 的比例中項.

[作圖] [證明]　請依比例中項作圖題補出.

**矩形變成正方形作圖題**　求作正方形與矩形 $ABCD$ 等積.



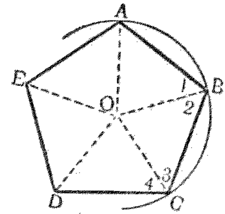

[作圖]　設矩形的底是 $a$，高是 $b$，求 $a$ 與 $b$ 的比例中項即得.

[作圖] [證明]　請讀者補足.

圓與多角形的關係定義，已在第十六章講過，今再述圓與多角形的關係定理，並從正多角形導出圓的度量.

**正多角形外接圓定理**　任何正多角形，必可作外接圓.

[假設] 正多角形 $ABCDE$.

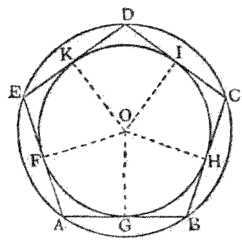


[結論] 可作一圓外接於此多角形.

[證明] 過三頂點 $A$, $B$, $C$, 作圓,圓心是 $O$ (過三定點畫圓作圖題). 連結 $OA$, $OB$, $OC$, $OD$, 則 $\angle ABC=\angle BCD$ (假設), $OB=OC$ (作圖),故 $\angle 2=\angle 3$, $\angle 1=\angle 4$ (何故). 又 $AB=CD$ (假設),故 $\triangle OAB\cong\triangle OCD$ (何故),即 $OA=OB$. 故圓 $O$ 亦過 $D$. 同理,可證此圓過其他各頂點. 故此圓外接於多角形 $ABCDE$.

**正多角形內切圓定理** 任何正多角形,必可作內切圓.

[假設] 正多角形 $ABCDE$.



[結論] 可作一圓內切於此多角形.

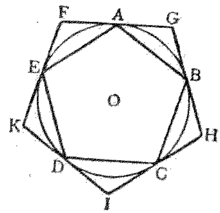
[證明] 作外接圓,圓心是 $O$. 從 $O$ 至各邊作垂線 $OG$, $OH\cdots$. 因 $AB=BC=\cdots$ (假設), 故 $OG=OH=\cdots$ (弦距遠心等遠定理),即用 $O$ 作圓心, $OG$ 作半徑畫圖, 必可過 $G$, $H$,$\cdots$ 各點,而 $AB$, $BC$,$\cdots$是圓的切線(切線定理), 故此圓內切於多角形 $ABCDE$.

正多角形中心角定 正 $n$ 邊形的中心角等於$\frac{4}{n}$直角.

**圓內接外切正多角形定理** 設一圓分成若干等弧.

(1) 順次連結各分點,成內接正多角形.

(2) 在各分點作切線,成外切正多角形.




[假設]　一圓分成等弧 $AB$, $BC$, …,

弦是 $AB$, $BC$,

切線是 $FG$, $GH$,…

[結論]　(1)　$ABCDE$ 是內接正多角形.

(2)　$FGHIK$ 是外切正多角形.

[證明]　(1) 因弧 $AB=$ 弧 $BC=\cdots$(假設),故$AB=BC=\cdots$(圓的基本性質),即 $ABCDE$ 是內接正多角形.

(2)　因 $\angle GAB=\angle GBA=\angle HBC=\angle HCB=\cdots$(弦切角定理), $AB=BC=\cdots$,

故　$\triangle ABG$, $\triangle CBH$,… 都是全等的等腰三角形(何故),

$\therefore$　$\angle G=\angle H=\cdots$, $AG=GB=BH=\cdots$,

因此 $GH=HI=\cdots$, 即 $FGHIK$ 是外切多角形.

圓內接等邊多角形系　圓內接等邊多角形,必是正多角形.

圓外切正多角形系　設從圓內接正多角形的頂點,各作切線,則成同邊數的外切正多角形.

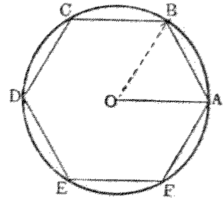
圓內接倍邊數正多角形系　設從圓內接正多角形各邊的兩端,與此邊對弧的中點連結,則成倍邊數的內接正多角形.

圓外切倍邊數正多角形系　設在圓外切正多角形相鄰二切點間所夾弧的中點,各作切線,則成倍邊數的外切正多角形.

**圓內接正六角形作圖題**　於定圓 $O$ 內,求作內接正六角形.

[作圖]　作半徑 $OA$. 用 $A$ 作圓心,$OA$作半徑,畫弧,截圓

於 $B$，連結 $AB$，

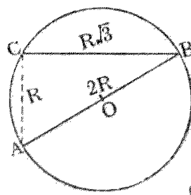



則弧 $AB$ 是圓周的 $\frac{1}{6}$，故弦 $AB$ 便是所求內接正六角形的一邊.

[證明] 因 $OA=OB=AB$ (作圖及假設)，故 $\angle AOB=60^\circ$(何故)， $\therefore$ 弧 $AB=60^\circ$. 因此用弧 $AB$ 量圓周，恰是六次量盡，得 $B,C,D,\cdots$ 各點. 故 $AB=BC=\cdots$(圓的基本性質). 而 $ABCDEF$ 是內接正六角形.

圓內接正三角形作法系　順次連結內接正六角形隔一的二頂點，則成內接正三角形.

圓內接正六角形一邊系　設圓半徑是 $R$，則內接正六角形的一邊等於 $R$.




圓內接正三角形一邊系　設圓半徑是 $R$，則內接正三角形的一邊等於 $R\sqrt{3}$ (如右圖，$AB$ 是直徑，$AC=R$，$BC$ 是所求的一邊).

**同邊數正多角形相似定理**　同邊數的二正多角形必相似.

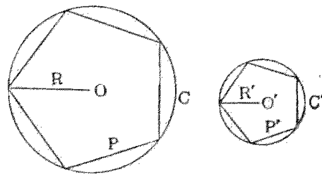
[證明] 因正 $n$ 邊形的一角都等 $\frac{2n-4}{n}$ 直角(多角形內角和定理)，故兩形的各角都相等. 又每形的各邊都相等，故對應邊成比例，因此二形相似.

同邊數正多角形周界比系　同邊數的二正多角形周界的比，等於頂心距的比或邊心距的比.(可用三角形相似比證明).

同邊數正多角形相比系　同邊數的二正多角形面積的比，等於頂心距平方的比或邊心距平方的比.

**圓周相比定理**　二圓周的比,等於半徑的比.

［假設］　圓 $O, O'$ 中，$C$ 與 $C'$ 是圓周，$R, R'$ 是半徑.




［結論］　$C:C'=R:R'$.

［證明］　各作內接正 $n$ 邊形,周界是 $P$, $P'$,則 $P:P=R:R$ (何故).如 $n$ 無限增加,則 $P$ 趨近於 $C$，而 $P'$ 趨近於 $C'$，故 $C:C'=R:R'$.

圓周相比系　二圓周的比，等於直徑的比.

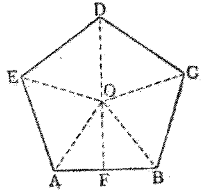
圓周與直徑相比系　圓周與直徑的比是常數.(依圓周相比系，$C:2R=C':2R'$，$\therefore\ \dfrac{C}{2R}=\dfrac{C'}{2R'}=$常數即一定，此常數叫做圓周率,常用 $\pi$ 表示,而 $\pi$ 的近似值是 $3\dfrac{1}{7}$或 $3.14159$).

圓周長系　因$\dfrac{C}{2R}=\pi$，故 $C=2\pi R$.

弧長系　$m^\circ$ 的弧長 $=\dfrac{m}{360}\times 2\pi R$.

**正多角形面積定理**　正多角形的面積，等於周界與邊心距乘積的一半.

［假設］　正 $n$ 邊形 $ABC\cdots$ 的面積是 $S$，周界是 $P$，邊心距是 $r$.

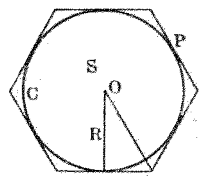



［結論］ $S=\frac{1}{2}Pr$.

［證明］ 作頂心距 $OA$, $OB$,… 將此多角形分成 $n$ 個三角形，則此諸三角形都用 $O$ 作頂點，面積都相等（何故），而高都等於 $r$（何故），故 $\triangle AOB=\frac{1}{2}\ AB)\times r$,

而 $S=n\triangle AOB=\frac{1}{2}n\times(AB)\times r=\frac{1}{2}Pr$.

**圓面積定理**　圓的面積，等於圓周與半徑相乘積的一半.




［假設］ 圓 $O$ 的面積是 $S$，半徑是 $R$，圓周是 $C$.

［結論］ $S=\frac{1}{2}CR$.

［證明］ 作外切正 $n$ 邊形，周界是 $P$，面積是 $A$，則 $A=\frac{1}{2}\ PR$.（何故）. 設 $n$ 無限增加，則 $A$ 漸近於 $S$，而 $P$ 漸近於 $C$，卽 $\frac{1}{2}PR$　漸近於 $\frac{1}{2}\ CR$. 故 $S=\frac{1}{2}CR$.

圓面積系　圓的面積，等於 $\pi$ 乘半徑平方.　$\therefore S=\pi R^2$.

二圓相比系　二圓面積的比，等於半徑平方的比或直徑平方的比.

扇形面積系　圓心角 $m^\circ$ 的扇形面積，等於 $\frac{m}{360}\times\pi R^2$.

扇形相比系　相似二扇形面積的比，等於半徑平方的比.

## 本　章　練　習　題

（1）　設二三角形有二邊對應相等，夾角互爲補角，則此二形等積，

（2）　三角形的中線分原形成二個等積三角形．

（3）　設有公用底邊 $AB$ 而在同側的二個等積三角形 $ABP$，$ABQ$，則 $PQ//AB$．

（4）　設有公用底邊 $AB$ 而在兩側的二個等積三角形 $ABP$，$ABQ$，則 $PQ$ 必被 $AB$ 或延長所平分．

（5）　設正三角形的一邊是 $a$，求面積．

（6）　設等腰直角三角形的斜邊是 $a$，求面積．

（7）　設正三角形的高是 $h$，求面積．

（8）　梯形的面積，等於高與中線的乘積．

（9）　菱形的面積，等於二對角線乘積的一半．

（10）　順次用線段連結四邊形各邊中點所成的平行四邊形，等於原形的一半．

（11）　設梯形的二底，各是高的 2 倍，3 倍，面積是 300 方寸，求高．

（12）　從正三角形內任一點至三邊所作垂線的和，等於此三角形的高．

（13）　試證餘形定理：　設過平行四邊形對角線上任一點，作二直線與鄰邊平行，則所成的四個平行四邊形中，不含對角線的二形等積．

(14) 設三角形的三邊是 $a$, $b$, $c$, 內切圓半徑是 $r$, 面積是 $S$, 則 $S=\frac{1}{2}(a+b+c)r$.

(15) 求作正方形等於二正方形的和或差(用畢氏定理).

(16) 求作矩形與定三角形等積.

(17) 求作定圓的內接正方形.

(18) 求作多角形與相似二多角形相似,面積等於二形的和.

(19) 求作一圓,使圓周等於二定圓的和或差.

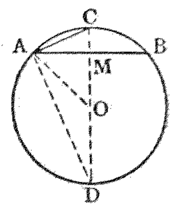
(20) 求作一圓,使面積等於二定圓的和或差.

(21) 求作三角形,與一邊 $a$ 的正六角形等積.

(22) 圓的內接正三角形面積,等於內接正六角形的一半.

(23) 設在半徑 $R$ 的圓內接正 $n$ 邊形一邊的長是 $a_n$, 內接正 $2n$ 邊形一邊的長是 $a_{2n}$, 則

$$a_{2n}=\sqrt{2R^2-R\sqrt{4R^2-a_n^2}}.$$




提示: $AB=a_n, AC=a_{2n}$, 則

$$OM=\sqrt{R^2-\left(\frac{a_n}{2}\right)^2},$$

$$a_{2n}=2R(R-OM).$$

(24) 設圓半徑 $R=1$, 則內接正六邊形的一邊 $a_6=1$; 周界 $P_6=6$; 試依上題的關係式,順次求內接 12, 24, 48, 96, 192, 384, 768 邊形的一邊及周界.再求周界 $P_{768}$ 與直徑 2 的比, 與 $\pi=3.14159$ 比較. (答) $a_{768}=0.00816, P_{768}=6.28317$、

# 第二十章　軌跡

**引言**　以前所講圖形上的點,都是固定不動的.倘若是可以移動的點,則移動時便生一線,如用鉛筆向紙上畫去,便是點動而生線的明徵.不過此種線有規則與不規則的二種,而有規則的又分直線與曲線二種.初等幾何所研究的軌跡,就是一點因運動所生的直線與圓(即曲線的一種).古人說蛛絲馬跡,亦可算是軌跡的例.本章敍述軌跡,都是有規則的直線與圓,描畫時要依據一定條件,證明時須根據幾何定理.習畢此章,幾何學部分,告一結束.

**軌跡**　一點依定條件而運動,此動點經過的跡,叫做此動點的軌跡.然點的運動,不能一一說明,故須從一定的性質,探討此無數的點是何種線可以通過,是否只有一條.因此而證明軌跡與證明定理的方法,略有不同.

**軌跡證法**　證明一圖形是動點合於定條件的軌跡,必須同時證明下列二事:

(1)　合於條件的點,都在此圖形上.　或(1)′不在圖形上的點,都不合於條件.

(2)　圖形上所有的點,都合於條件.　或(2)′不合於條件的點,都不在此圖形上.

**基本軌跡**　是軌跡的基礎,善用之可解一般軌跡問題.

(I) 動點與定點有定距離的軌跡，是用定點作圓心定距離作半徑的圓周

[證明] (1) 與定點有定距離的點，都在此圓周上（圓的基本性質 3）.

(2) 圓周上的點，都與定點有定距離（圓的定義）.

(II) 動點與定直線有定距離的軌跡，是平行於定直線而在兩側有定距離的二直線.

[證明] (1) 不在此二直線上的點，與定直線的距離不等（可用平行線距離系反證）.

(2) 此二直線上的點，都與定直線有定距離(平行線距離系).

(III) 動點與二定點等距離的軌跡，是此二定點連線的垂直平分線.

[證明] (1) 與二定點等距離的點，都在此垂直平分線上（垂直平分線決定定理）.

(2) 此垂直平分線上的點，都與二定點等距離（垂直平分線性質定理）.

(IV) 動點與相交二直線等距離的軌跡，是此二直線夾角的平分線.

[證明] (1) 與相交二直線等距離的點，都在此平分線上（角邊等距離點系）.

(2) 在此平分線上的點，都與二直線等距離（分角線性質定理）.

(V)　動點對定線段張定角的軌跡，是用定線段作弦在兩側含定角的二弓形。

[證明] (1) 不在此弓形上的點，對定線段所張的角不等於定角(三角形內外角關係定理)。

(2)　在此弓形上的點，都對定線段張定角(弓形角系)。

(VI)　動點對定線段張直角的軌跡，是用定線段作直徑的圓周(證法與V相彷)。

(VII)　圓內與定弦等長諸弦中點的軌跡，是用定弦與圓心距離作半徑的同心圓周。

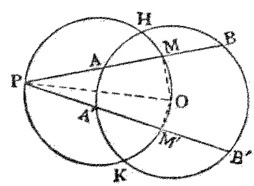
[證明] (1) 不在此圓周上的點，都不是等弦中點 (弦距圓心遠近逆定理)。

(2)　此圓周上的點，都是等弦中點(弦距圓心等遠定理)。

**軌跡求法**　上述的基本軌跡，是已知軌跡的圖形，只須依圖證明已足。若求合於定條件的軌跡，則倘不知所求的圖形如何，宜依下列的解法次序：

(1)　依題意任意取合於定條件的一點，決定此點在如何圖形上。

(2)　在圖形上任意取一點，證明此點亦合於定條件。

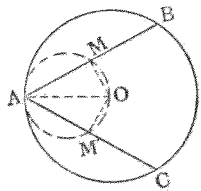



【例 1】從定圓 $O$ 外定點 $P$ 作諸割線，試求被定圓 $O$ 所截諸弦中點的軌跡。

[解]　(1)從 $P$ 任作割線 $PAB$，弦

$AB$ 的中點是 $M$. 連結 $OM$，則 $OM \perp AB$（過弦中點的半徑系），故 $M$ 在直徑 $PO$ 的圓周上（半圓含直角系）. 因 $M$ 在圓內，而圓 $O$ 與此圓相交於 $H, K$，故 $M$ 在弧 $HOK$ 上.

(2)　在弧 $HOK$ 上任取一點 $M'$，連結 $PM'$，因 $M$ 在圓 $O$ 內，故 $PM$ 與圓 $O$ 相交於二點 $A', B'$. 連結 $OM'$，則 $\angle OM'P = \angle R$（何故），　$\therefore A'M' = M'B'$（垂徑平分弦弧定理），即 $M'$ 是 $A'B'$ 的中點. 故弧 $HOK$ 是所求的軌跡.

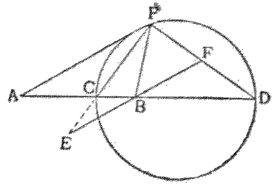


【例 2】過定圓 $O$ 周上定點 $A$ 的動弦，求動弦中點的軌跡.

［解］　與前例相仿，請讀者依圖補出.

【例 3】切於定直線 $AB$ 而有定半徑 $r$ 的圓，求圓心的軌跡.

［解］　所求的軌跡，是與 $AB$ 有距離 $r$ 在兩側的二平行線，請讀者自解.



【例 4】一動點與二定點 $A, B$ 距離的比等於定比 $m:n$. 求此動點的軌跡.

［解］　(1) 設 $P$ 是合於條件的一點，則 $PA:PB = m:n$. 設 $m \neq n$，在 $\triangle APB$ 中，作角 $P$ 的內外角平分線，與 $AB$ 相交於 $C, D$，則 $\angle CPD = \angle R$（△內外角平分線成角定理），且 $C, D$ 亦是定點，故 $P$ 在直徑 $CD$ 的圓周上（何故）.

(2)　又在此圓周上任取一點 $P$，連結 $PA, PB, PC, PD$，過

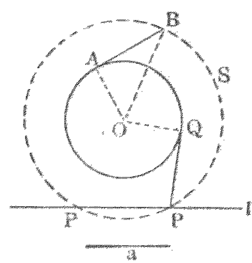
$B$ 作 $EF//AP$，與 $PC, PD$ 相交於 $E, F$，則 $\triangle ACP \sim \triangle BCE$（何故），$\therefore\ \dfrac{AP}{EB}=\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{m}{n}$．又 $\triangle DBF \sim \triangle DAP$（何故），

$\therefore\ \dfrac{AP}{BF}=\dfrac{AD}{BD}=\dfrac{m}{n}$，故 $EB=BF$．但 $\angle EPF=\angle R$（何故），

$\therefore\ BP=\dfrac{1}{2}EF=BF$（直角△斜邊中點定理），故 $\dfrac{AP}{BP}=\dfrac{AD}{BD}$ $=\dfrac{m}{n}$，即直徑 $CD$ 的圓周上各點，都合於條件．

故所求的軌跡，是用 $CD$ 作直徑的圓周．

**軌跡與作圖題**　作圖題常有要決定點的位置同時合於二條件的，「如有三定點 $A, B, C$，要求一點與 $A, B$ 有等距離，而與 $C$ 有定距離 $d$」，則有二條件：(1)所求點須與 $A, B$ 等距離，(2)所求點須與 $C$ 有定距離 $d$．故解此題，非求一點同時合於二條件不可．然點合於條件 (1)的軌跡，是 $AB$ 的垂直平分線；點合於條件 (2)的軌跡，是用 $d$ 作半徑 $C$ 作圓心的圓周．故所求的點，是此二軌跡的交點．如此方法的作圖，叫做軌跡交截法．作圖題須用此法的甚多，舉例於下：



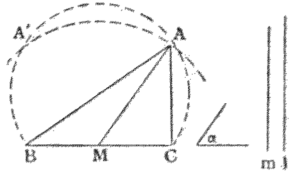

【例 1】從定直線 $l$ 上一點，求作定圓 $O$ 的切線等於定長 $a$．

［解］　從圓 $O$ 上任一點 $A$，作切線 $AB=a$，則 $OA$ 是定長，且 $\angle OAB=\angle R$（何故），故 $OB$ 亦是定長．用 $O$ 作圓心，

$OB$ 作半徑畫同心圓，與 $l$ 相交於 $P$. 從 $P$ 作定圓 $O$ 的切線 $PQ$，則 $PQ$ 合於條件(1) $P$ 在 $l$ 上，(2)是切線等於 $a$，故是所求。

[證明]從略。 [討論]若 $O$ 與 $l$ 的距離大於 $OB$，則不可能。

【例 2】已知底邊 $l$，頂角 $\alpha$ 及底邊上的中線 $m$，求作三角形。

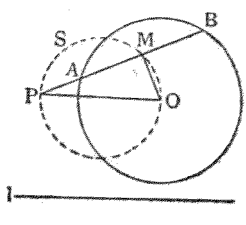



[解析] 設所求三角形是 $ABC$，$BC=l$，$\angle A=\angle\alpha$，$M$ 是 $BC$ 的中點，$AM=m$，則 (1) 頂點 $A$ 在用 $BC$ 作弦含 $\angle\alpha$ 的弓形上，(2) $A$ 在用 $M$ 作圓心 $m$ 作半徑的圓周上。故 $A$ 是(1)弓形與(2)圓周的交點。

[作圖]作 $BC=l$，用 $BC$ 作弦，畫含 $\angle\alpha$ 的弓形。又用 $BC$ 的中點 $M$ 作圓心，$m$ 作半徑畫圓，與弓形的一交點是 $A$. 連結 $AB$，$AC$，則 $ABC$ 即是所求的三角形。

[證明][討論]請讀者自作。

【例 3】從定圓 $O$ 外定點 $P$，求作割線 $PAB$，使 $PA+PB$ 等於定長 $l$.




[解析] 設 $PAB$ 是所求的割線，$M$ 是 $AB$ 的中點，則 $PM=\frac{1}{2}(PA+PB)=\frac{1}{2}l$，而 $OM\perp AB$(何故)，$\angle PMO=\angle R$. 故 (1) $M$ 在直徑 $PO$ 的圓周上，(2) $M$ 在中心 $P$ 半徑 $\frac{1}{2}l$ 的

原书缺页

原书缺页

原书缺页

原书缺页

原书缺页

原书缺页

原书缺页

原书缺页

(b)　$sin^4 A - cos^4 A = sin^2 A - cos^2 A$.

(c)　$tan^2 A - sin^2 A = tan^2 A\, sin^2 A$.

(d)　$tan^2 x\, cos^2 x + cot^2 x\, sin^2 x = 1$.

(e)　$cot^2 A - cos^2 A = cos^2 A\, cot^2 A$.

(f)　$\frac{tan\, x}{sec\, x - 1} + \frac{tan\, x}{sec\, x + 1} = 2 csc\, x$.

(4)　設 $sin A = a$，$tan A = b$，試證 $b^2 = a(1+b^2)$.

(5)　設 $x = a\, cos\theta, y = b\, sin\theta$，試證 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

(6)　從 $cos\theta + sin\theta = a$，$cos\theta - sin\theta = b$，消去 $\theta$.

(答)　$a^2 + b^2 = 2$.

(7)　從　$sin\, x = \frac{3}{5}$，求 $cos\, x, tan\, x$ 的值.

(答)　$cos\, x = \frac{4}{5}$，$tan\, x = \frac{3}{4}$.

(8)　從 $6 cos\theta + sec\theta = 5$，求 $cos\theta$ 的值.　(答)　$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$.

(9)　證明下列各式：

(a)　$tan\, 36° \; tan\, 54° = 1$.

(b)　$sin^2 27° \; sin^2 63° = 1$.

(10)　求 $sin\, 45° \, cos\, 30° - cos\, 45° \, sin\, 30°$ 的值.

(答)　$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

(11) 求適合 $\tan x+\cot x=2$ 中的銳角 $x$. (答) $x=45°$.

(12) 求適合 $5-4\sin x-4\cos^2 x=0$ 中的銳角 $x$.

(答) $x=30°$.

(13) 求 $\cos 28°\ 35'$ 的值. (答) 0.8781.

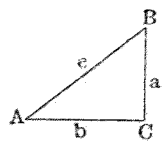
(14) 求 $\tan A=1.2298$ 中 $A$ 的度數. (答) $50°53'$.

# 第二十二章　直角三角形

**引言**　三角形中，最簡單的是直角三角形.上章講三角函數的定義，已說到直角三角形邊角的關係.今依此關係以求直角三角形的邊及角，並測量高與距離的方法.

**直角三角法解法**　三角形的三邊與三角，叫做六原素.據幾何理論，已知一邊及其餘二原素，卽可作三角形的圖，故三角形中，已知一邊及其餘二原素的數值，卽可求其餘三原素，此叫做三角形解法.但在直角三角形中，有直角已知，故解法只有二種：

(I) 已知一銳角及一邊　如右圖，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$.設已知角 $A, B$ 中的任一角，卽可依 $\angle A+\angle B=90°$ 求得餘一角.設已知 $a, b, c$ 中的任一邊，卽可依下式求得餘二邊.




$$\frac{a}{c}=sinA=cosB,\quad \frac{b}{c}=cosA=sinB,\quad \frac{a}{b}=tanA=cotB.$$

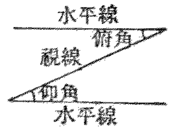
(II) 已知二邊　如前圖，設已知 $a, b, c$ 中的任二邊，卽可依 $c^2=a^2+b^2$ 求得餘一邊.又依下式求得角 $A$，而依 $\angle B=90°-\angle A$ 求得角 $B$：

$$tanA=\frac{a}{b},\qquad sinA=\frac{a}{c},\qquad cosA=\frac{b}{c}.$$

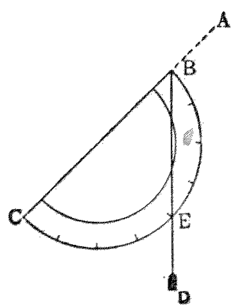
**測量**　三角法的實際應用，最重要的是測量地上諸物的距離，

測量上所用的術語如下：

繫鉛錘於繩的一端使繩下垂，則與此繩同方向的直線，叫做鉛垂線；含鉛垂線的平面，叫做鉛垂面．垂直於鉛垂線的直線或平面，叫做水平線，水平面．測量者視線與水平線所成的角，在水平線向上仰視的，叫做仰角，向下俯視的叫做俯角．故如測點與目的物互換位置，則仰角與俯角相等(平行截線定理)．測點與二目的物距離的夾角，叫做角距．

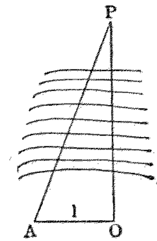



實際測量，必須先實測某距離作為基線．實測距離，常用測鎖或卷尺．實測水平面上的角，常用羅盤，如下列左圖．實測鉛垂面上的仰角俯角，常用經緯儀；但尋常為簡便計，亦可用量角器測得，即如下列右圖，使 $CB$ 的延長通過目的物 $A$，而鉛垂線 $BD$ 交半圓於 $E$，則對於 $A$ 的仰角度數，等於 $\frac{1}{2}$ 弧 $BE$ (圓周角定理)．仿此亦可測俯角．

**測量問題**　依直角三角形解測量問題，可分求高與距離二種。

(I)　求不能直達的二點距離　如圖，從 $O$ 到 $P$，有河阻隔。先從 $O$ 在 $OP$ 的垂直方向上定一點 $A$，



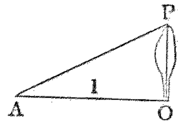

實測 $AO=l$，再從 $A$ 實測仰角 $A$，則 $\frac{OP}{l}=tanA$，

$\therefore\quad OP=l\ tanA$。

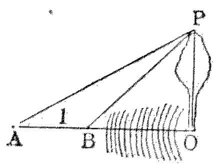
設實測的結果，$OA=120$尺，$\angle A=68°33'$，則 $OP=120\times2.5452=305.4$(尺)。

(II)　求水平面上直立物體的高　又可分作底脚可達與不可達二種。

(1)　直立物體的底脚可達者　如右圖，從底脚至水平面上一點 $A$，實測距離是 $l$，在 $A$ 測物體頂點 $P$ 的仰角 $A$，則 $PO=l\ tanA$.




(2)　直立物體的底脚不可達者　如右圖，與底脚在水平一直線上取二點 $A, B$，實測 $AB$ 的距離，於 $A, B$ 各測物體頂點 $P$ 的仰角 $A$, $B$，則 $AO=l+BD=POcotA$,　$BD=POcotB$.




$\therefore\quad l=PO(cotA-cotB)$，故 $PO=\frac{l}{cotA-cotB}$.

設　$\angle A=30°$，$\angle B=45°$，$l=100$ 尺，則

$$PO=\frac{100}{cot30°-cot45°}=\frac{100}{\sqrt{3}-1}=\frac{100}{2}(\sqrt{3}+1)$$

$$=50\times2.7321=136.6\ (尺).$$

## 本 章 練 習 題

(1) 解下列直角三角形($C$ 是直角):

(a) $c=600$ 公尺, $\angle A=30^\circ$.

(答) $\angle B=60^\circ$, $a=300$ 公尺, $b=300\sqrt{3}$ 公尺.

(b) $a=160$ 尺, $\angle A=45^\circ$.

(答) $\angle B=45^\circ$, $b=160^\circ$ 尺, $c=160\sqrt{2}$ 尺.

(c) $c=120$ 尺, $a=60$ 尺.

(答 $\angle A=30^\circ$, $\angle B=60^\circ$, $b=60\sqrt{3}$ 尺.

(d) $a=6\sqrt{3}$ 尺, $b=18$ 尺.

(答) $\angle A=30^\circ$, $\angle B=60^\circ$, $c=12\sqrt{3}$ 尺.

(2) 從高 $a$ 尺的山頂,測量與山脚同在水平面上的二點, 得俯角 $A$ 及 $B$. 求此二點的距離.

(答) $a(\cot A+\cot B)$ 尺.

(3) 塔高 100 尺,從塔頂測塔北二物,得俯角 $A$ 及 $B$. 求此二點的距離. (答) 42.26尺.

(4) 從塔底測山頂,得仰角 $60^\circ$. 在塔頂測山頂,得仰角 $30^\circ$. 已知塔高 50 尺,求山高. (答) 75 尺.

(5) 在塔底測山頂,得仰角 $60^\circ$. 又登高 40 尺的塔頂,再測山頂,得仰角 $4{,}^\circ$. 求山高及從山頂至塔底的距離.

(答) 山高 94.64 尺,距離 109.28尺.

(6) 有人立於距塔 60 尺處, 測塔頂及塔上旗桿頂的仰角,

是 30° 與 45°.求塔高及桿長.

(答)　塔高 34.64 尺,桿長 25.36 尺.

(　一船進行中,見二燈塔在北東及北北東的方位.再向正北進行 20 里,見此二燈塔都在正東.求二燈塔的距離.

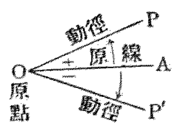
(答)　11.716 里.

(8)　一艦向正北航行,見正西有二燈塔,再進行一時後,見此二燈塔一在南 30 西,一在南西.已知二燈塔相距 12 里.求此艦每時的速度.

# 第二十三章　一般角的三角函數

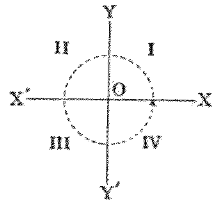
**引言**　銳角的三角函數，前已講過。但角的大小，並不以銳角為限，尚有大於直角的鈍角，小於周角的優角。又如設想角是由直線旋轉而成，則角可分正負，且可大至無限。故一般角的三角函數如何，亦有研究的必要。今用銳角三角函數及坐標為主，講述一般角的三角函數與其變化，及和角差角倍角半角的三角函數，以為引入斜三角形的徑路。

**一般角**　在一平面上從一點所引的直線，用此點作中心而旋轉，可有二種方向的角。若旋轉的方向，與時鐘兩針相反，則所成的角叫做正角；相同則叫做負角。旋轉時用作中心的一點，叫做原點。從此點所引直線的原來位置，叫做原線；旋轉時此直線叫做動徑。動徑可依正負方向任意旋轉，或幾周或不足一周，故角的大小，可用任何正負數表示。如動徑的最後位置與最初位置相同，則可有無限的正角或負角，相差是 $360°$ 的倍數。故如設最小正角是 $\theta$，則一般角是 $360°\times n+\theta$，式中 $n$ 表正負數或 0。

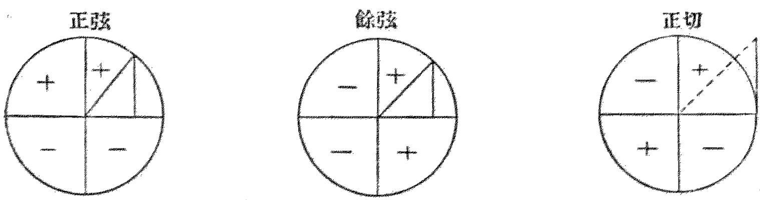



象限　前第八章中所講的橫軸與縱軸，將平面分作四部分，各叫做象限，順次稱為第一象限至第四象限，如下圖各以 $I, II, III, IV$ 為別。若將角的原點與正交點 $O$ 重合，原線與橫軸 $OX$ 重合，依

正角的方向旋轉，動徑止於某象限內，就叫做此角在某象限或某象限的角．故角在第一象限內是銳角，在第二象限內是鈍角，在第三象限內是大於 180° 小於 270° 的優角，在第四象限內是大於 270° 小於 360° 的優角．




**一般角的三角函數**　銳角的三角函數，是從斜邊垂線底邊中二者的關係而得，一般角的三角函數，亦是如此．但依坐標方法，垂線與底邊，皆有正負可言，即垂線在橫軸上方是正，下方是負；底邊在縱軸右方是正，左方是負．斜邊必在動徑上，無正負可言，故常是正．因此在各象限的角．正弦餘弦正切的正負，可如下圖（半徑＝1）表示，而餘割正割餘切的正負，依倒數關係，可知與正弦餘弦正切相同．




三角函數值的變化　依上圖詳細考察，可得下列各式，式中∞是無限大的意義：

$\sin 0°=0$，　$\csc 0°=\infty$；　　$\sin 90°=1$，　$\csc 90°=1$；

$\sin 180°=0$，$\csc 90°=\infty$；　$\sin 270°=-1$，$\csc 270°=-1$；

$\sin 360°=0$，$\csc 360°=\infty$．

$cos\ 0^\circ=1,\quad sec\ 0^\circ=1;$　　$cos\ 90^\circ=0,\ sec\ 90^\circ=\infty;$

$cos\ 180^\circ=-1,\ sec\ 180=-1;$　$cos\ 270^\circ=0,\ sec\ 270=\infty;$

$cos\ 360^\circ=1,\ sec\ 360=1.$

$tan\ 0^\circ=0,\quad cot\ 0^\circ=\infty;$　　$tan\ 90^\circ=\infty,\quad cot\ 90^\circ=0;$

$tan\ 180^\circ=0,\ cot\ 180^\circ=\infty;$　　$tan\ 270^\circ=\infty,\ cot\ 270^\circ=0;$

$tan\ 360^\circ=0,\ cot\ 360^\circ=\infty.$

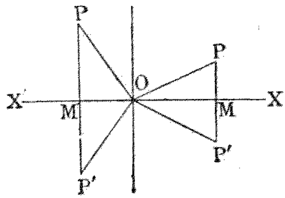
故角漸增時,三角函數的變化如下表:

| $\theta$ 函數 | 0° | I | 90° | II | 180° | III | 270° | IV | 360° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $sin\ \theta$ | 0 | 從正而增 | 1 | 從正而減 | 0 | 從負而減 | −1 | 從負而增 | 0 |
| $csc\ \theta$ | ∞ | 從正而減 | 1 | 從正而增 | ∞ | 從負而增 | −1 | 從負而減 | ∞ |
| $cos\ \theta$ | 1 | 從正而減 | 0 | 從負而減 | −1 | 從負而增 | 0 | 從正而增 | 1 |
| $sec\ \theta$ | 1 | 從正而增 | ∞ | 從負而增 | −1 | 從負而減 | ∞ | 從正而減 | 1 |
| $tan\ \theta$ | 0 | 從正而增 | ∞ | 從負而增 | 0 | 從正而增 | ∞ | 從負而增 | 0 |
| $cot\ \theta$ | ∞ | 從正而減 | 0 | 從負而減 | ∞ | 從正而減 | 0 | 從負而減 | ∞ |

$360^\circ\times n+\theta$ 的三角函數　設 $n$ 是任何正負整數,因同一原線的$360^\circ\times n+\theta$ 與 $\theta$,動徑的最後位置相同,故 $360^\circ\times n+\theta$ 與 $\theta$ 的三角函數完全相等.

負角的三角函數　如下圖,設 $\angle XOP=\angle XOP'$,且$OP=OP'$,

$XX'$ 垂直平分$PP'$ 於$M$. 因$OP=OP'$, $PM=-P'M$, 故設 $\angle XOP=\theta$, 則 $\angle XOP'=-\theta$. 故得




$\sin(-\theta)=-\sin\theta$,

$\cos(-\theta)=\cos\theta$,

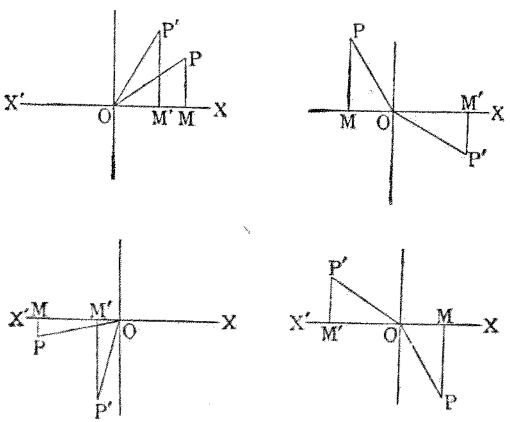
$\tan(-\theta)=-\tan\theta$.

$\csc(-\theta)=-\csc\theta$,

$\sec(-\theta)=\sec\theta$,

$\cot(-\theta)=-\cot\theta$.

$90°\pm\theta$的三角函數 如下圖,設$\angle XOP=\theta$, $\angle XOP'=90°-\theta$,




且 $OP=OP'$. 從 $P, P'$ 各作 $PM\perp XX'$, $P'M'\perp XX'$, 則依直角三角形全等系二, $\triangle OPM\cong\triangle P'OM'$, 即 $OP=OP'$, $OM'=PM$, $P'M'=OM$, 故得

$\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$,　　　$\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$,

$\tan(90^\circ-\theta)=\cot\theta$,　　　$\csc(90^\circ-\theta)=\sec\theta$,

$\sec(90^\circ-\theta)=\csc\theta$,　　　$\cot(90^\circ-\theta)=\tan\theta$.

又依負角的三角函數及上列公式,得

$\sin(90^\circ+\theta)=\sin\{90^\circ-(-\theta)\}=\cos(-\theta)=\cos\theta$,

$\cos(90^\circ+\theta)=\cos\{90^\circ-(-\theta)\}=\sin(-\theta)=-\sin\theta$,

$\tan(90^\circ+\theta)=\tan\{90^\circ-(-\theta)\}=\cot(-\theta)=-\cot\theta$.

其餘 $\csc$, $\sec$, $\cot$, 可依倒數關係求得.

$180^\circ\pm\theta$ 的三角函數　從 $90^\circ\pm\theta$ 的三角函數公式,可得

$\sin(180^\circ-\theta)=\sin\{90^\circ+(90^\circ-\theta)\}=\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$,

$\cos(180^\circ-\theta)=\cos\{90^\circ+(90^\circ-\theta)\}=-\sin(90^\circ-\theta)=-\cos\theta$,

$\tan(180^\circ-\theta)=\tan\{90^\circ+(90^\circ-\theta)\}=-\cot(90^\circ-\theta)=-\tan\theta$.

又依上列三公式,可得

$\sin(180^\circ+\theta)=\sin\{180^\circ-(-\theta)\}=\sin(-\theta)=-\sin\theta$,

$\cos(180^\circ+\theta)=\cos\{180^\circ-(-\theta)\}=-\cos(-\theta)=-\cos\theta$,

$\tan(180^\circ+\theta)=\tan\{180^\circ-(-\theta)\}=-\tan(-\theta)=\tan\theta$.

其餘 $\csc$, $\sec$, $\cot$ 都可依倒數關係求得.

角的化法　用以上各組公式,無論任何大小正角負角的三角函數,都可化作 $0^\circ$ 至 $45^\circ$ 的三角函數,此種方法,叫做角的化法,即如下:

(1)　負角可依負角的三角函數公式,化作正角的三角函數.

(2)　大於 $360^\circ$ 的角,可依 $360^\circ\times n+\theta$ 的三角函數公式,化

作小於 $360°$ 的三角函數.

(3)　大於 $180°$ 的角，可依 $180°+\theta$ 的三角函數公式，化作小於 $180°$ 的三角函數.

(4)　大於 $90°$ 的角，可依 $90°+\theta$ 的三角函數公式，化作小於 $90°$ 的三角函數.

(5)　在 $45°$ 至 $90°$ 間的角，可依 $90°-\theta$ 的三角函數公式，化作 $0°$ 至 $45°$ 的三角函數.

【例 1】　$\sin 1000°=\sin(360°\times 2+280°)$

$$=\sin 280°=\sin(180°+100°)=-\sin 100°$$

$$=-\sin(90°+10°)=-\cos 10°=-0.1736.$$

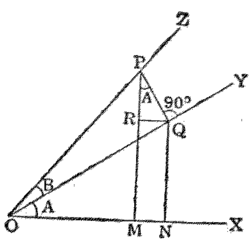
【例 2】　$\tan(-600°)=-\tan 600°=-\tan(360°+240°)$

$$=-\tan 240°=-\tan(180°+60°)$$

$$=-\tan 60°=-\cot 30°=-1.7321.$$

**複角的三角函數**　以上所述一般角的三角函數，雖可大至無限，但都是單角，今再進述複角的三角函數.

正餘弦加法定理　如右圖，設 $A$, $B$, $A+B$ 都是銳角，$\angle XOY=A$, $\angle YOZ=B$. 從 $OY$ 上取一點 $P$，作 $PM\perp OX$, $PQ\perp OY$. 再從 $Q$ 作 $QN\perp OX$, $QR\perp PM$，則 $\angle QPR=A$ (二角關係定理)，故



$$\sin(A+B)=\frac{PM}{OP}=\frac{PR+RM}{OP}=\frac{PR+QN}{OP}$$

$$=\frac{QN}{OP}+\frac{PR}{OP}=\frac{QN}{OQ}\cdot\frac{OQ}{OP}+\frac{PR}{PQ}\cdot\frac{PQ}{OP}$$

$$=\sin A\cos B+\cos A\sin B.$$

$$\cos(A+B)=\frac{OM}{OP}=\frac{ON-MN}{OP}=\frac{ON-RQ}{OP}$$

$$=\frac{ON}{OP}-\frac{RQ}{OP}=\frac{ON}{OQ}\cdot\frac{OQ}{OP}-\frac{RQ}{PQ}\cdot\frac{PQ}{OP}$$

$$=\cos A\cos B-\sin A\sin B.$$

以上二公式,不但 $A,B$ 是銳角時能成立,卽使 $A,B$ 是任何正負角,亦可用前述各組公式,證明其亦能成立.又如用 $-B$ 代此二公式中的 $B$,則得

$$\sin(A-B)=\sin A\cos(-B)+\cos A\sin(-B)$$

$$=\sin A\cos B-\cos A\sin B.$$

$$\cos(A-B)=\cos A\cos(-B)-\sin A\sin(-B)$$

$$=\cos A\cos B+\sin A\sin B.$$

以上四公式,叫做正餘弦加法定理,應用甚廣.

正切加法定理 依正餘弦加法定理,及商的關係,可得正切加法定理如下:

$$\tan(A+B)=\frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}=\frac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\cos A\cos B-\sin A\sin B}$$

$$=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}.$$

$$tan\ (A-B)=\frac{sin\ (A-B)}{cos\ (A-B)}=\frac{sinA\ cosB-cosA\ sinB}{cosA\ cosB+sinA\ sinB}$$

$$=\frac{tanA-tanB}{1+tanA\ tanB}.$$

倍角的三角函數　依正弦餘弦正切加法定理，可得二倍角的三角函數公式如下：

$$sin\ 2A=2sinA\ cosA,$$

$$cos2A=cos^2A-sin^2A=2cos^2A-1=1-2sin^2A;$$

$$tan\ 2A=\frac{2tanA}{1-tan^2A}.$$

半角的三角函數　在倍角的三角函數公式中，用 $\frac{A}{2}$ 代 $A$，則得半角的三角函數公式如下：

$$sin^2\frac{A}{2}=\frac{1-cosA}{2},\quad cos^2\frac{A}{2}=\frac{1+cosA}{2},$$

相除，得　$$tan^2\frac{A}{2}=\frac{1-cosA}{1+cosA}.$$

正餘弦和與積的互化　應用正餘弦加法定理，可將二角正餘弦的積，化作和的形式，即

$$sinA\,cosB=\frac{1}{2}\{sin(A+B)+sin(A-B)\}.$$

$$cosA\ sinB=\frac{1}{2}\{sin(A+B)-sin(A-B)\}$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}\{\cos(A+B)+\cos(A-B)\}.$$

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2}\{\cos(A-B)-\cos(A+B)\}.$$

又設 $A+B=\alpha$, $A-B=\beta$, 則 $A=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$, $B=\dfrac{\alpha-\beta}{2}$, 代入以上各式,可得正餘弦的和化作積的形式:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}.$$

## 本 章 練 習 題

(1) 試畫圖用同一原線表示下列各角動徑的位置:

(a) $60°$. (b) $120°$. (c) $-45°$.

(d) $-150°$. (e) 210. (f) $290°$.

(2) 如上題的角,各在何象限?

(答) (a)I, (b)II, (c)IV, (d)III, (e)III, (f)IV

(3) 從正午至午後三時四十分,時鐘的長針,旋轉幾度的角?

(答) $-1320°$

(4)　求 $120°$ 角的正弦餘弦正切.

(答)　$\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $-\sqrt{3}$.

(5)　求 $\sin 225°$, $\cos 225°$, $\tan 225°$ 的值.

(答)　$-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $-\frac{1}{2}$, $1$.

(6)　求 $\sin(-30°)$, $\cos(-30°)$的值.

(答)　$-\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(7)　設 $A$ 是三角形的一角, $\tan A=-\frac{2}{3}$,求 $\sin A$, $\cos A$ 的值.

(答)　$\frac{4}{5}$, $-\frac{3}{5}$.

(8)　設 $\theta$ 是一般角, $\sin\theta=\frac{5}{13}$, 求 $\cos\theta$, $\tan\theta$ 的值.

(答)　$\pm\frac{12}{13}$, $\pm\frac{5}{12}$.

(9)　求 (a)　$\sin 690°$.　　(b)　$\tan 3165°$.

(c)　$\cot(-930°)$.　　(d)　$\sec(-1500°)$的值.

(答)　(a) $-\frac{1}{2}$, (b) 1, (c) $-\sqrt{3}$, (d) 2.

(10)　化簡下列各式:

(a)　$\sin(90°-\theta)+\sin(180°-\theta)+\sin(360°-\theta)$.

(答)　$\cos\theta$.

(b) $\cos A+\cos(A+90°)+\cos(A+180°)+\cos(A+270°)$.

(答) 0.

(11) 在 0° 與 360° 之間，$2\cos x-1$ 是正，求 $x$ 的範圍.

(答) $0°<x<60°$，$300°<x<360°$.

(12) 求合於 $\cos^2\theta=\frac{1}{2}$ 在 $-180°$ 與 $180°$ 間 $\theta$ 的值.

(答) $\pm45°$，$\pm135°$.

(13) 試證下列各式：

$$\sin 15°=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}},\quad \cos 15°=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}},\quad \tan 15°=2-\sqrt{3}.$$

$$\sin 75°=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}},\quad \cos 75°=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}},\quad \tan 75°=2+\sqrt{3}.$$

(14) 證明：(a) $\sin(A+B)\sin(A-B)=\sin^2A-\sin^2B$.

(b) $\cos(A+B)\cos(A-B)=\cos^2A-\sin^2B$.

(c) $\cot(A+B)=\dfrac{\cot A\cot B-1}{\cot B-\cot A}$.

(d) $\cot(A-B)=\dfrac{\cot A\cot B+1}{\cot B-\cot A}$.

(15) 證明：(a) $\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$.

(b) $\cos\theta=1-2\sin^2\frac{\theta}{2}=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1$.

(16) 求 $\sin 22°30'$，$\cos 22°30'$，$\tan 22°30'$ 的值.

(答) $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$，$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$，$\sqrt{2}-1$.

(17)　證明三倍角的三角函數公式:

$\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$.

$\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$, $\tan 3A = \dfrac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - \tan^2 A}$.

(18)　證明下列二式.

(a)　$2\cos(45^\circ - A)\cos(45^\circ + A) = \cos 2A$.

(b)　$\sin(45^\circ - A)\sin(45^\circ + A) = \dfrac{1}{2}\cos 2A$.

# 第二十四章　斜三角形

**引言**　上章已講過一般角的三角函數，都可化作 $45°$ 以內角的三角函數，本章據此理由推廣到一般三角形的邊角關係，及應用對數原理，以解斜三角形，並示測量問題的解法，以作本書的結束。

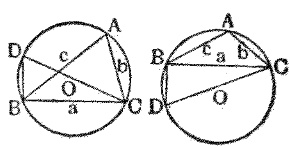
**三角形邊角關係**　要研究三角形邊角的關係，先須記憶各角間的關係，今將已有的知識整理一下。設三角形的三角是 $A, B, C$，則

$$A+B+C=180°\text{(何故)}, \qquad \frac{A+B+C}{2}=90°.$$

$$\sin A=\sin(B+C), \quad \cos A=-\cos(B+C)\text{(何故)}.$$

$$\sin\frac{A}{2}=\cos\frac{1}{2}(B+C), \quad \cos\frac{A}{2}=\sin\frac{1}{2}(B+C)\text{(何故)}.$$

正弦比例　設用 $a, b, c$ 表三角形各角 $A, B, C$ 的對邊。畫 $\triangle ABC$ 的外接圓，半徑是 $R$，過 $C$ 作直徑 $CD$，如右圖：




若 $A<90°$(左圖)，則 $\angle D=\angle A$(何故)。

若 $A>90°$(右圖)，則 $\angle D=180°-A$(何故)。

故無論如何，$\sin A=\sin D$.　但 $\sin D=\dfrac{a}{2R}$,

$$\therefore \quad 2R=\frac{a}{sinD}=\frac{a}{sinA}.$$

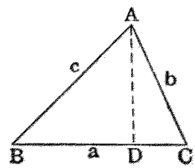
同理，$$2R=\frac{b}{sinB},\ 2R=\frac{c}{sinC}.$$

故 $$\underline{\frac{a}{sinA}=\frac{b}{sinB}=\frac{c}{sinC}=2R.}$$

或　$\underline{a=2RsinA}$，　$\underline{b=2R\,sinB}$，　$\underline{c=2RsinC}$.

此種公式，叫做正弦比例.

餘弦公式　從銳角三角形的頂點 $A$，至對邊 $BC$ 作垂線 $AD$，




則 $$\frac{BD}{c}=cos\ B,\ \frac{CD}{b}=cosC.$$

$\therefore$　$BD=c\ cosB$，　$CD=b\ cosC$.

但　$BD+CD=a$，

故　$\underline{a=c\ cosB+b\ cosC}\cdots\cdots(1)$，

同理，$\underline{b=a\ cosC+c\ cosA}\cdots\cdots(2)$，

$\underline{c=b\ cosA+a\ cosB}\cdots\cdots(3)$.

以上三式，叫做第一餘弦公式，在鈍角三角形亦能成立，請讀者自證.

又用上三式，$(1)\times a-(2)\times b-(3)\times c$；

則得　$a^2-b^2-c^2=-2bc\,cosA$.

$$\therefore\quad \underline{a^2=b^2+c^2-2bc\ cosA}.$$

同理，$\underline{b^2=a^2+c^2-2ac\ cosB}$，　$\underline{c^2=a^2+b^2-2ab\ cosC}$.

或 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$,

$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

以上兩組公式，每組三式，叫做第二餘弦公式。

[注意] 第二餘弦公式，卽畢氏推廣定理，可互相參照。

差角公式 從正弦比例，可得差角公式如下：

$$\frac{b-c}{a}=\frac{2R\sin B-2R\sin C}{2R\sin A}=\frac{\sin B-\sin C}{\sin A}$$

$$=\frac{2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}\text{(何故)}=\frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}.$$

$$\therefore\quad \sin\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{a}\cos\frac{A}{2},$$

同理，
$$\cos\frac{B-C}{2}=\frac{b+c}{a}\sin\frac{A}{2},$$

$$\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}.$$

仿此， $\dfrac{C-A}{2}$, $\dfrac{A-B}{2}$ 亦可得與此類似的公式。

半角公式 用三角形各邊表半角的三角函數，叫做半角公式。

設 $\triangle ABC$ 的半周是 $s$，則

$$a+b+c=2s, \qquad -a+b+c=2(s-a),$$

$$a-b+c=2(s-b), \qquad a+b-c=2(s-c).$$

依半角的三角函數及第二餘弦公式，得

$$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{1-\cos A}{2}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}\right)$$

$$=\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc}=\frac{(s-b)(s-c)}{bc}.$$

故　$$\underline{\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}},$$

同理，$$\underline{\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ac}}},$$

$$\underline{\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}},$$

又　$$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{1+\cos A}{2}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}\right)=\frac{(b+c-a)(b+c+a)}{4bc}$$

$$=\frac{s(s-a)}{bc}.$$

故　$\cos\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{s(s-a)}{bc}}$.

同理，$\cos\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{s(s-b)}{ac}}$.　$\cos\dfrac{C}{2}=\sqrt{\dfrac{s(s-c)}{ab}}$.

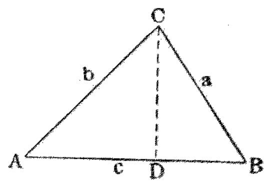
從上列半角正餘弦公式，得半角正切公式如下：

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}},$$

$$\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}},$$

$$\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}.$$

三角形面積公式　設 $\triangle ABC$ 中，$A$ 是銳角，$CD\perp AB$，面積是 $S$，則




$$S=\frac{1}{2}AB\times CD(何故)=\frac{1}{2}cb\sin A.$$

若 $A=90°$，則 $CD=b$. 若 $A>90°$，則 $\sin(180°-A)=\sin A$，故上列結果，無論 $A$ 是直角或鈍角都能成立。又無論用何邊作底，都可得同樣結果，故得二邊及夾角正弦表面積的公式如下：

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C.$$

又依半角三角函數及半角公式，得

$$\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\ \cos\frac{A}{2} = 2\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\ \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

$$= \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

代入上列公式，得三邊表面積的公式如下：

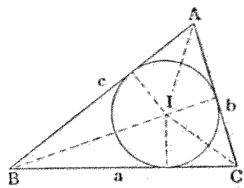
$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

三角形外接圓內切圓半徑公式　(1)依正弦比例，得一邊及對角正弦表外接圓半徑 $R$ 的公式如右：　$R = \dfrac{a}{2\sin A}$.

又從三角形面積公式，得 $\sin A = \dfrac{2S}{bc}$，代入上式，得三邊表外接圓半徑的公式如下：

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}.$$

(2)　設 $\triangle ABC$ 的內心是 $I$，將 $I$ 與三頂點連結所成的三個三角形，底是 $a,b,c$，高都是內切圓半徑，今設 $\triangle ABC$ 的面積是 $S$，半周是 $s$，內切圓半徑是 $r$，則




$$S = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = \frac{1}{2}(a+b+c)r = sr.$$

$$\therefore\ r = \frac{S}{s} = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s}.$$

**三角函數對數表**　依三角形邊角關係求邊或角，算法頗繁，故

常依對數原理,用對數的加減乘除,代眞數的乘除乘方開方,手續較為迅速便利. 因此在對數表外,又依 $0^\circ$ 至 $45^\circ$ 間諸角的三角函數,將其對數的近似値調製成表,叫做三角函數對數表,以備檢用。因從 $0^\circ$ 至 $90^\circ$ 間的正弦餘弦値在 0 與 1 之間, 其對數有負指標,正切從 $0^\circ$ 至 $45^\circ$ 間餘切從 $45^\circ$ 至 $90^\circ$ 間的對數,亦有負指標, 故此表中為避免用負數的不便,特在各對數加 10 改作正數, 載在上列,叫做表對數,常在前面記 $L$, 以示與 $log$ 區別,因此用此表時,宜牢記每次須減 10 方可抵消。又因近於 $0^\circ$ 及 $90^\circ$ 的角度,角度相差小而對數相差大,若用比例計算, 誤差甚大,故此表中近於 $0^\circ$ 及 $90^\circ$ 的對數,另有精密的表。至於查表方法,大致與自然函數表相同,舉例如下:

【例 1】 $log\,tan\,37^\circ\,32'=9.88550-10=\bar{1}.88550.$

【例 2】 求 $log\,cos\,66^\circ\,25'\,\,5''.$

[解] $$\left.\begin{array}{l} log\,cos\,66^\circ\,25'=9.60215-10=\bar{1}.60215 \\ log\,cos\,66^\circ\,25'\,45''=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ log\,cos\,60^\circ\,26'=9.60186-10=\bar{1}.60186 \end{array}\right\}差-29$$

故 $60'':44''=-29:x,\quad x=-22.$

故 $log\,66^\circ\,25'\,45''=\bar{1}.60215-0.00022=\bar{1}.60193.$

【例 3】 求合於 $log\,sinA=\bar{1}.82361$ 的銳角 $A$.

[解] $$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{ll} log\,sin\,41^\circ\,46' & =\bar{1}.82354 \\ log\,sinA & =\bar{1}.82361 \end{array}\right\}差\,7 \\ log\,sin\,41^\circ\,47'\quad =\bar{1}.82368 \end{array}\right\}差14.$$

故　$14:7=60'':x,\quad x=30''\qquad\therefore\quad A=41°46'30''.$

【例 4】 從 $\log\cot A=0.88889$ 求 $A$.

［解］
$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{ll}\log\cot 7°21'&=0.88944\\ \log\cot A&=0.88889\end{array}\right\}\text{差}-55\\ \log\cot 7°22'\;=0.88845\end{array}\right\}\text{差}-99$$

故　$-99:-55=60'':x,\ x=33''\qquad\therefore\quad A=7°21'33''.$

**斜三角形解法**　直角三角形是斜三角形的特例，解法已述於前。至解斜三角形，須應用邊角關係，在六原素中，已知一邊及二原素，卽可求得其餘三原素。但因已知的二原素不同，解法可分作四種如下：解時用眞數或用對數，可看題擇便採用.

(I) 已知一邊 $a$ 及二角　求第三角，用 $A+B+C=180°$. 求其他二邊 $b,c$，用正弦比例：　$b=\dfrac{a\sin B}{\sin A}$，$c=\dfrac{a\sin C}{\sin A}$.

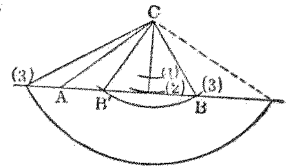
(II) 已知二邊 $a,b$ 及夾角 $C$.　先求　$\dfrac{A+B}{2}$　用　$\dfrac{A+B}{2}=90°-\dfrac{C}{2}$，再求 $\dfrac{A-B}{2}$ 用差角公式：$\tan\dfrac{A-B}{2}=\dfrac{a-b}{a+b}\cot\dfrac{C}{2}$.

再求 $\dfrac{A+B}{2}$，$\dfrac{A-B}{2}$　的和差得 $A$，$B$. 求第三邊 $c$，用差角公式：　$c=(a+b)\dfrac{\sin\dfrac{C}{2}}{\cos\dfrac{A-B}{2}}$.

(III) 已知二邊 $a,b$ 及 $a$ 的對角 $A$　求 $B$ 角用正弦比例：

$sinB=\dfrac{b\,sinA}{a}$，求 $C$ 角用 $C=180°-(A+B)$．求 $c$ 邊用正弦比例：　$c=\dfrac{a sinC}{sinA}$.

但求 $B$ 角時，又發生下列三種情形（看右圖）。




(1)　如 $b\,sinA>a$，則 $sinB>1$，因正弦不能大於 1，故無解．

(2)　如 $b\,sinA=a$，則 $sinB=1$，故 $B=90°$，只有一解。

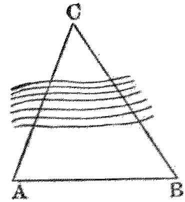
(3)　如 $b\,sinA<a$，則 $sinB<1$，故求得的結果，如 $B<A$（在 $b<a$ 時），則 $B$ 必是銳角；如 $B>A$（在 $b>a$ 時），則 $B$ 是銳角或鈍角，因銳角的 $B$ 與其補角的鈍角，正弦的値相等，故都合於理，卽 $B$ 有二解．此種叫做兩意情形。

(IV) 已知 $a,b\ c$.　先求 $s=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$，次求 $A, B, C$ 三角，用半角正切公式：　$tan\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$，

$$tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}},\quad tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}.$$

但依此法求得 $A,B,C$ 三角的和，未必適等於 $180°$，因對數是近似値，故不免有誤差。又如改用半角正餘弦公式，亦可求得，但用正切公式較便。

**測量問題**　應用直角三角形測距離及高，已述於第二十二章；今再將解一般三角形的方法，可以用於測量問題者，略述於下：



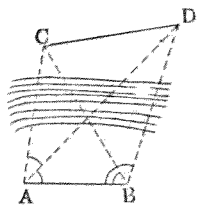

(I) 有不能直達的一點，求此點至測點的距離。

設 $A$ 是測點，$C$ 是不能直達的一點，測定距離 $AC$.

［解］　從 $A$ 至可達的一點 $B$，實測距離 $AB$. 在 $A$ 及 $B$，各測定 $\angle BAC$，$\angle ABC$. 如是則在 $\triangle ABC$ 中，已實測一邊與二角，故可依斜三角形解法 $I$ 算出 $AB$.

［注意］　在第二十二章測量問題 1，是依 $\angle CAB=90°$ 以求 $AC$，卽此處的特別情形。

(II) 有不能直達的二點，求此二點的距離。

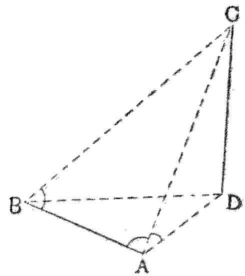



設 $C$，$D$ 是不能直達的二點，測定距離 $CD$.

［解］　在可達範圍內，任擇二點 $A$，$B$，實測距離 $AB$. 又用器械測定 $\angle CAD$，$\angle DAB$，$\angle CAB$，$\angle ABC$，$\angle ABD$(如 $A$，$B$，$C$，$D$ 在同平面上，則 $\angle CAD=\angle CAB-\angle DAB$)．於是在 $\triangle ABC$ 中，實測一邊及 $\angle CAB$，$\angle CBA$，故可算出 $AC$. 在 $\triangle ABD$ 中，實測一邊 $AB$ 及 $\angle DAB$，$\angle ABD$，故可算出 $AD$. 如此在 $\triangle ACD$ 中，已算出 $AC$，$AD$，實測夾角 $\angle CAD$，故可依斜三角形解法 $II$ 算出 $CD$.

(III) 直立體的底脚不能直達，求此體的高。

設直立體 $CD$ 的底脚 $D$ 不能直達，測定高 $CD$.




［解］ 在平地上任取二點 $A, B$, 實測距離 $AB$. 又用器械測定 $\angle CAD$, $\angle CAB$, $\angle CBA$. 於是在 $\triangle ABC$ 中，實測一邊 $AB$ 及 $\angle CAB$, $\angle CBA$, 故可算出 $AC$. 又在 $\triangle ACD$ 中，已知 $\angle ADC$ 是直角，實測 $\angle CAD$, 已算出 $AC$,故可算出 $CD$.

［注意］ 第二十二章測量問題 $II$ 的 2 中所述的方法，是此處的特別情形。又如底脚不在平地上時，可在 $A$ 測定鉛垂線與 $AC$所成的角，依錯角相等，當作 $\angle ACD$ 而計算。

## 本 章 練 習 題

(1) 在 $\triangle ABC$ 中，試證下列恆等式:

(a) $\sin A + \sin B > \sin C$.

(b) $b \cos B + c \cos C = a \cos(B-C)$.

(c) $\dfrac{a-c\cos B}{b-c\cos A} = \dfrac{\sin B}{\sin A}$.

(d) $\dfrac{a-b}{c} = \dfrac{\cos B - \cos A}{1+\cos C}$.

(2) 設 $a=7$, $b=5$, $c=3$, 求最大角。 (答) $120°$.

(3) 設 $r_a, r_b, r_c$ 是 $\triangle ABC$ 中切於 $a, b, c$ 的傍切圓半徑，$s$ 是

半周，$S$ 是面積，試證 $r_a=\dfrac{S}{s-a}$，$r_b=\dfrac{S}{s-b}$，$r_c=\dfrac{S}{s-c}$.

(4) 設 $r$ 是 $\triangle ABC$ 的內切圓半徑，$R$ 是外接圓半徑，$s$，$S$ 同前，證下列各式：

(a) $S=s^2\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}$.

(b) $b\cos^2\dfrac{C}{2}+c\cos^2\dfrac{B}{2}=s$.

(c) $b\sin^2\dfrac{C}{2}+c\sin^2\dfrac{B}{2}=s-a$.

(d) $\dfrac{r}{R}=4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$.

(5) 已知三角形的三邊 $a=6$，$b=8$，$c=10$，求面積 $S$，內切圓半徑 $r$，外接圓半徑 $R$. (答) $R=24$，$r=2$，$R=5$.

(6) 設 $a=265$ 尺，$B=43°20'30''$，$C=67°35'45''$，解此三角形.

(答) $A=69°3'45'$，$b=194.7$ 尺，$c=262.3$ 尺.

(7) 設 $a=61.5$尺，$b=36.7$尺，$C=108°17'30''$，解此三角形.

(答) $A=46°11'49''$，$B=25°30'41'$，$c=80.91$ 尺.

(8) 設 $a=273$，$b=513.5$，$A=31°37'20''$，解此三角形.

(答) $B=80°28'30''$，$C=67°54'10''$，$c=482.4$.

或 $B'=99°31'30''$，$C'=48°51'10''$，$c'=392.1$.

(9) 設 $a=17.3$，$b=22.6$，$c=30.3$，解此三角形.

(答) $A=34°56'52'$，$B=47°42'38''$，$C=97°20'28''$.

(10) 路上有電柱 $B,C$，距離 65 公尺，從 $B, C$ 望一目的物 $A$，測得 $\angle ABC=60°$，$\angle ACB=45°$，求 $AB$ 的距離。

(答) 47.58公尺。

(11) 沿河岸有二點 $A,B$，望對岸敵營據點 $C$，測得 $\angle CAB=45°$，$\angle CBA=60°$，$AB=80$ 丈，求河闊。 (答) 50.72丈。

(12) 距海岸相近，有 $C,D$ 二島。在沿岸一直線上取二點$A,B$，測得 $\angle CAB=105°$，$\angle DAB=30°$，$\angle CBA=45°$，$\angle DBA=135°$，$AB=100$ 丈。求二島距離。 (答) 273 丈。

(13) 平地上有碉堡 頂是 $D$，基是 $C$。今在地上擇相距 30 尺的 $A, B$ 二點，在 $A$ 測得 $\angle DAC=60°$，$\angle CAB=105°$；在 $B$ 測得 $\angle CBA=30°$；求碉堡的高。 (答) 36.74尺.

(14) 在平地上相距 2000 公尺的 $A,B$ 二處，同時觀測飛機的位置 $C$，在 $A$ 測得方位正北，仰角 30°；在 $B$ 測得方位正東，仰角 60°. 求此時飛機離地的高。 (答) 1095公尺。

(15) 高樓 $DE$ 上有旗竿 $CD$. 今在塔基同水平面上擇一點 $A$，測得竿頂的仰角是 $\alpha$，樓頂的仰角是 $\alpha'$. 又依 $AE$ 直線向後退 $d$ 尺至 $B$，再測竿頂的仰角是 $\beta$，試證竿長

$$CD=\frac{d\sin\beta\sin(\alpha-\alpha')}{\sin(\alpha-\beta)\cos\alpha'}.$$

(16) 在塔上 $A$ 點測得地上敵軍礮位 $C$ 的俯角是 $\alpha$ 度，再升 $h$ 尺至塔頂 $B$，測得 $C$ 的俯角是 $\beta$ 度。試證礮位 $C$ 與塔基 $D$ 的距離，等於 $\dfrac{h\cos\alpha\cos\beta}{\sin(\beta-\alpha)}$

# 附錄　中英名詞對照表

## 第　一　章

算術 Arithmetic

代數 Algebra

正數 Positive number

負數 Negative number

正號 Positive sign

負號 Negative sign

性質符號 Sign of opposition

演算符號 Sign of operation

絕對值 Absolute value

代數數 Algebraic number

係數 Coefficient

指數 Exponent

代數式 Algebraic expression

代數和 Algebraic sum

代數式數值 Numerical value of algebraic expression

交換律 Commutative law

結合律 Associative law

分配律 Distributive law

等式 Equality

公式 Formula

## 第　二　章

單項式 Simple expression

多項式 Polynomial expression

項 Term

整式 Integral expression

二項式 Binomial expression

三項式 Trinomial expression

因數，因式 Factor

次數 Degree

同次式 Homogeneous expression

同類項 Like terms

異類項 Unlike terms

昇冪 Ascending power

降冪 Descending power

指數律 Law of indices

分離係數法 Method of detached coefficient

餘式定理 Remainder theorem

## 第　三　章

整數 Integer

倍數，倍式 Multiple

公倍數，公倍式 Common multiple

公因數，公因式 Common factor

最小公倍數 Least common multiple

最大公因數 Greatest common factor

最低公倍式 Lowest common multiple

最高公因式 Highest common factor

質數 Prime

互質數 Mutually prime number

質因數 Prime factor

析因數,析因式 Factorization

## 第 四 章

分數 Fraction

分式 Fractional expression

分子 Numerator

分母 Denominator

眞分數 Proper fraction

假分數 Improper fraction

帶分數 Mixed number

約分 Reduce to lowest terms

通分 Reduce to common denominator

繁分數,繁分式 Complex fraction

## 第 五 章

恆等式 Identical equation

方程 Equation

未知數 Unknown number

已知數 Known number

移項 Transposition of terms

一次方程 Simple equation

二次方程 Quadratic equation

解方程 Solve equation

方程的根 Root of an equation

適合於 To satisfy

聯立方程 Simultaneous equation

加減法 Elimination by addition or substraction

代入法,替代法 Elimination by substitution

比較法,等置法 Elimination by comparison

## 第 六 章

乘根,方根 Root

根號 Radical sign

根指數 Index of the root

平方根 Square root

立方根 Cubic roo

開方 Evolution

開平方 Extraction of square root

開立方 Extraction of cubic root

無理數 Irrational number

有理數 Rational number

不盡根 Surd

根數,根式 Radical

無理式 Irrational expression

有理式 Rational expression

同次根數,同次根式 Radicals of common index

母有理化 Rationalizing denominator

同類根數,同類根式 Similar radicals

## 第 七 章

純二次方程 Pure quadratic equation

完全二次方程,雜二次方程, Complete quadratic equation

虛數 Imaginary number

實數 Real number

虛根 Imaginary roots
實根 Real roots
判別式 Discriminant

## 第 八 章

坐標 Co-ordinates
橫坐標,橫線 Abscissa
縱坐標 縱線 Ordinate
坐標軸 Axis of coordinates
橫軸 Axis of abscissa
縱軸 Axis of ordinate
原點 Origin
圖解 Graph
自變數 Independent variable
因變數 Dependent variable
函數 Function
變數 Variable
常數 Constant
拋物線 Parabola
橢圓 Ellipse
雙曲線 Hyperbola

## 第 九 章

分式方程 Fractional equation
整式方程 Integral equation
增根 Extraneous root
文字方程 Literal equation
無理方程 Irrational equation

## 第 十 章

不等式 Inequality
不等號 Sign of inequality
絕對不等式 Absolutely inequality
條件不等式 Conditional inequality
向 Sense

## 第 十 一 章

比 Ratio
前項 Antecedent
後項 Consequent
反比 Inverse ratio
正比 Direct ratio
複比 Compound ratio
二乘比,平方比 Duplicate ratio
三乘比,立方比 Triplicate ratio
比例 Proportion
外項 Extremes
內項 Means
比例中項 Mean proportional
第三比例項 Third proportional
更迭定理 Proportion by alternation
反轉定理 Proportion by inversion
合比定理 Proportion by composition
分比定理 Proportion by division
合分比定理 Proportion by composition and division
連比 Continued ratio
連比例 Continued proportion
正比例 Direct proportion
正變 Vary directly
反比例 Inverse proportion
反變 Vary inversely

複比例 Compound proportion

聯變 Vary jointly

## 第 十 二 章

級數 Progression

首項 First term

末項 Last tern

等差級數，算術級數 Arithmetical progression

公差 Common difference

等差中項 Arithmetical means

算術平均 Arithmetical average

等比級數，幾何級數 Geometrical progression

公比 Common ratio

等比中項 Geometrical means

幾何平均 Geometrical average

無限等比級數 Infinite geometrical progression

調和級數 Harmonic progression

調和中項 Harmonic means

## 第 十 三 章

對數 Logarithm

底數 Base

眞數 Natural numbers

常用對數 Common logarithm

指標 Characteristic

假數 Mantissa

對數表 Table of logarithm

指數方程 Exponential equation

對數方程 Logarithmic equation

利息 Interest

本金 Principle

利率 Rate of interest

本利和 Amount

單利法 Simple interest

複利法 Compound interest

年金 Annuities

終價 Final value

現價 Present value

## 第 十 四 章

幾何學 Geometry

立體 Solid

面 Surface

平面 Plane surface

曲面 Curved surface

線 Line

直線 Straight line

曲線 Curved line 或 Curve

線段 Line segment

半直線 Ray

圓 Circle

圓心 Centre

半徑 Radius

直徑 Diameter

圓周 Circumference

弧 Arc

度 Degree

分 Minute

秒 Second

角 Angle
邊 Side
頂點 Vertex
直角 Right angle
銳角 Acute angle
鈍角 Obtuse angle
平角 Straight angle
周角 Perigon
鄰角 Adjacent angles
餘角 Complementary
補角 Supplementary
共軛角 Conjugate angles
優角 Reflex angle
劣角 Minor angle
相交 Intersect
平行 Parallel
平行線 Parallel lines
對頂角 Vertical angles
垂線 Perpendicular
斜線 Oblique line
平分線 Bisector
分角線 Angle-bisector
直尺 Straight edge
圓規,兩脚規 Compasses
量角器 Protractor
三角板 Set squares
普通術語 General terms
定義 Definition
公理 Axiom
公法 Postulates
定理 Theorem
系 Corollary
假設,前提 Hypothesis
結論,終結 Conclusion
證明 Proof 或 Demonstration
截線 Transversal
內角 Interior angles
外角 Exterior angles
同位角 Corresponding angles
內錯角 Alternate interior angles
外錯角 Alternate exterior angles
同側內角 Consecutive interior angles
同側外角 Consecutive exterior angles
逆定理 Converse theorem

## 第 十 五 章

直線形 Rectilinear figure
三角形 Triangle
斜三角形 Scalene triangle
正三角形,等邊三角形 Equilateral triangle
等腰三角形,二等邊三角形 Isosceles triangle
底邊 Base
頂角 Vertex angle
腰 Legs
底角 Base angle
直角三角形 Right triangle
鈍角三角形 Obtuse triangle
銳角三角形 Acute triangle
等角三角形 Equiangular triangle
斜邊,弦 Hypotenuse

多角形 Polygon
對角線 Diagonal
周界 Perimeter
凹多角形 Convex polygon
凸多角形 Concave polygon
等邊多角形 Equilateral polygon
等角多角形 Equiangular polygon
正多角形 Regular polygon
邊心距 Apothem
四邊形 Quadrilateral
五角形 Pentagon
六角形 Hexagon
八角形 Octagon
十角形 Decagon
不平行四邊形 Trapezium
梯形 Trapezoid
等腰梯形 Isosceles trapezoid
平行四邊形 Parallelogram
矩形 長方形 Rectangle
正方形 Square
菱形 Rhombus
內心 In-centre
外心 Circum-centre
垂心 Orthocentre
重心 Centre of gravity
共點線 Concurrent lines
傍心 Ex-centre
綜合證法 Synthetic method
疊合證法 Method of superposition
歸謬證法 Reduction to absurdity
窮舉證法 Rule by exhaustion

## 第 十 六 章

弦 Chord
割線 Secant
切線 Tangent
切點 Point of contact
半圓周 Semicircle
劣弧 Minor arc
優弧 Major arc
弓形 Segment of a circle
扇形 Sector
圓周角 Angle at the circumference
弓形角 Angle in the segment
內接多角形 Inscribed polygon
外接圓 Circumscribed circle
外切多角形 Circumscribed polygon
內切圓 Inscribed cirele
切圓 Tangent circles
公切線 Common ta gent
內公切線 Common internal tangent
外公切線 Common external tangent
同心圓 Concentric circles
連心線 Line of centres

## 第 十 七 章

作圖題 Problem of construction

## 第 十 八 章

內分 Internal division
外分 External division
調和列點 Harmonic range

調和共軛點 Harmonic conjugates points
相似形 Similar figure
射影 Projection
相似中心 Center of similar figure
畫圖縮放器 Pantograph
比例規 Proportional compasses

## 第 十 九 章

面積單位 Unit of area
面積 Area
等積形 Equivalent

## 第 二 十 章

軌跡 Locus

## 第 二 十 一 章

三角法 Trigonometry
三角函數 Trigonometric function
正弦 Sine
餘弦 Cosine
正切 Tangent
餘切 Cotangent
正割 Secant
餘割 Cosecant

## 第 二 十 二 章

測量術 Surveying
鉛垂線 Vertical line
鉛垂面 Vertical plane
水平線 Horizontal line
水平面 Horizontal plane
仰角 Angle of elevation
俯角 Angle of depression
角距 Visual angle
測鏈 Chain
卷尺 Tape
經緯儀 Transit
羅盤 Compass

## 第 二 十 三 章

動徑 Radius vertor
原線 Initial line
正角 Positive angle
負角 Negative angle
象限 Quadrant
加法定理 Addition theorem

## 第 二 十 四 章

三角函數對數表 Table of logarithmic trigonometric function
表對數 Tabular logarithms
兩意情形 Ambiguous ca e

世界