

大學叢書

學 線 力 勢

培 著
寶 譯
斯 壽
郎 王

商務印書館發行



525.12
937.

大學叢書
勢力線學

郎斯培著

王壽寶譯

江苏工业学院图书馆
藏书章

商務印書館發行

中華民國二十八年二月初版
中華民國三十七年七月三版

◆(64423.14)

大學叢書
(教本) 勢力線學一册

Das Verfahren der Einflusslinien

平定價國幣伍元

印刷地點外另加運費

Landsberg

原著者 王壽寶

譯述者 王壽寶
上海河南中路

發行人 朱經農

印刷所 商務印書館
各地商務印書館

版 翻
權 印
所 必
有 究

(本書校對者楊靜齋)

譯者序

勢力線爲力學上之重要部份，以圖示結構物之剪力，張力，力矩，攔支力及沉陷等之變遷，用定活動荷重之極限地位，而冀得其正負極限值，庶材料之尺度，結構物之變形，均得以決定，故舉凡工程上一切主要部份，幾舍此而莫由解也。其重要既若是，奈國內尙乏專書，足資應用，此促余編輯一完備勢力線學之動念，迄今亦已有年矣。嘗瀏覽有關各書，而廣事搜集其材料，更請國立同濟大學圖書館，多置勢力線學善本，以備選擇；卒得德國腸城 (Darmstadt) 工業大學教授郎斯培氏 (Landsberg) 所著之勢力線學 (Das Verfahren der Einflusslinien) 一書，不特內容充實，編制有條，爲他本所不及，且以悉本平日在校所授之教材而成，初不問工業大學作教本，工程學者供參考，幾無往而不適用也。溯自是書問世，紙貴洛陽，不數載間，竟達七版，其傳誦之廣，概可知矣。惜郎教授於第六版後，旋即逝世，是書遂成絕作，最近十餘年來，乃無更完善之修正或補充，而繼起者，亦乏其選。

余讀是書竟，覺與其採集各家材料，以編輯一書，不若擇一精良名著，而作忠實之譯述爲有系統有精神也。爰譯斯編，以介紹學者，並示不敢掠美云爾。

書中凡遇比較難解之處，則詳之以例題，就程度而言，似較今日國內大學之所授者略高，甚望學者不憚艱辛，靜心研究，同時國內各大學竟採此以作教本，而與歐陸大學相媲美也。

中華民國二十七年一月 上海喬年王壽寶識

六版原序

勢力線學之著，乃作者希望之成功。俾聽講學子，無需筆錄，而得吸收其有順序有系統之教材。是書出版以後，深蒙學者贊同，不數年間而竟出五版。五版之後，作者旋告退休。年來書業界之詢問該書出版處者，與日俱增，是書之需要，於此益顯。而是書之鉅大銷額，作者得以預為決定也。此次修正內容，增闢新材，而資改進。如新增一級靜力不定式結構物及勢力線之動的意義。此等材料，在其他書中，間或有之。惟作者尚有平面桁結構物變形講義之補充，該講義亦經出數版於茲矣。

是書曾參考 Mohr, Müller-Breslau, Land, Steiner, Ritter 等所著有關係之書籍。

此書既堪稱學者習勢力線學之入門，亦得作工程師實地工作之參考，誠工程界所不可不備之書。

一九一二年五月郎斯培氏識於柏林威爾茂村

七版原序

是書有優越之銷額，足證其材料之構造及性質，二者概與前序之目的相符，故仍保持之。

第六版中有若干文字及圖件之未能盡合者，悉予更正，令其一致，庶字句之不易說明者，得收圖示之效。

更有若干部份，爲書中所未有而於實用上所不可少者，亦酌予補充，而是項增添材料，則由第二署名之作者擔任，列入新目。

內容充分而有條理如是書，其流行之廣，當不讓前版所專美也。

一九二〇年八月郎斯培韓布葛二氏合識於柏林

目 錄

第一章 靜力定式樑架結構物之勢力線

第一節	概說	1
第二節	舉例	2
第三節	應用勢力線法求極限荷重情形	7
第四節	間接荷重之勢力線	10
第五節	應用勢力線法, 求成組單力之極限地位, 其勢力線 由一直線或數直線連接成之	19
第六節	間接荷擔成組單力之極限勢力	24
第七節	間接荷擔每公尺樑長均佈荷重 p 之極限勢力	26
第八節	應用以攔支力 $A=1t$ 及 $B=1t$ 所起之桁條張力, 而求受支於兩支點之桁樑各勢力線法	27
第九節	三關節拱形桁架之桁條勢力線	30
第十節	三關節拱之荷重分界點	38
第十一節	應用“代樑”簡化法, 求三關節拱之勢力線	40
第十二節	實心三關節拱之勢力線	43
第十三節	受樑加固之拱勢力線	46
第十四節	三關節桁構懸樑之勢力線	58

第十五節	應用桁構樑加固之懸樑勢力線	61
第十六節	中孔長而邊孔短之懸樑勢力線	64
第十七節	蓋爾培氏式臂樑之勢力線	68
第十八節	臂樑拱架	69

第二章 靜力不定式樑架結構物之勢力線

第一節	概說	74
第二節	雙關節桁構拱之勢力線	81
第三節	三支點連續桁構樑之勢力線	83
第四節	實心雙關節拱之勢力線	86
第五節	成組單力在拋物線形勢力線之極限勢力	89
第五a節	德國普魯士省國有鐵路之列車重量	94
第六節	一級靜力不定式結構物之逾定值勢力線	95
第七節	對角桁及垂直桁對於彎線之影響	105

第三章 勢力線之動的意義

第一節	概說	121
第二節	平面桁構物變形之動的原理	124
第三節	點及線之移動 直角移動	128
第四節	桁構物部份之極及極旋角	133
第五節	因桁條長度變形而使一桁構物節點之移動	143
	(a) 因一外廓桁條長度變形而產生之沉陷	143
	(b) 因內含桁條長度變形而使節點之沉陷	144

第 六 節 三關節拱之極旋角及其彎線·····	147
(a) 因一外廓桁條之長度變形·····	147
(b) 因一內含桁條之長度變形·····	149

中德英譯名對照表

勢力線學

第一章 靜力定式樑架結構物之勢力線

第一節 概說

凡樑架等結構物，不問受任何單力之作用，對於此結構物各部，均有影響，亦即於各部發生“勢力”。因須知各該部之安全性，故應計算其所起諸靜力值 [擱支力 (Auflagerdrücke; end reactions), 力矩 (Momente; moments), 剪力 (Querkräfte; shears), 正交力 (Normalkräfte; normal forces), 張力 (Spannkräfte; stresses) 及其他等力] 也。

勢力之變遷，常用顯明之圖示法表之。可以簡單之法則，求得由任意合成之力組，在任何地點之勢力，而以在特殊之處，尤關重量。所謂圖示法者，即應用勢力線 (Einflusslinien; Influence line) 是也。該線由數線合成 (直線，折線或曲線)，從而求其一定之靜力值。如採用一直角座標系，則此所求之勢力，繪在各該力垂直下方，作為縱座標，而勢力線即由連接各縱座標點成之。

每一勢力，乃荷重之大小及其他地位之函數。對於樑架本身之自重亦然。

如以 Y 示勢力, G 示荷重, x 示荷重之着力點至座標系零點之距離, C 示與構造物形式有關之定數, 遂成一般公式:

$$Y = \varphi(G, x, C) \dots\dots\dots(1)$$

普通最適宜之法則, 取移動之荷重為單位荷重 (= 1 公噸) 即成:

$$Y = \varphi(x, C) \dots\dots\dots(2)$$

設在公式(1)或(2)中之 x 及 Y , 僅屬一羈者, 則其勢力線係一直線或由數直線連接成之, 而其結構物謂之定式結構物(statisch bestimmte Fachwerke; statically determinate trusses)。

第二節 舉例

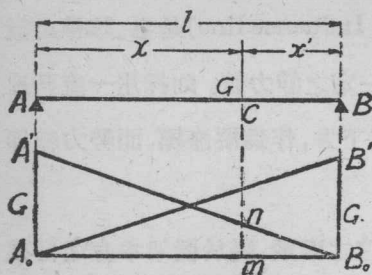
兩端攔支樑之勢力線, 其一端係固定, 而他端可作水平之移動者。

(a) 攔支力 A, B 之勢力線 (第 1 圖)。

C 點受 G 力之作用, 其所生之攔支力為:

$$A = \frac{G x'}{l}; \quad B = \frac{G x}{l}$$

在受力點 C 之垂直下方, 繪 $Y = \frac{G x'}{l}$ ($= \overline{mn}$), 再將 G 力地位, 作



第 1 圖

可能之移動, 即自 $x' = 0$ 至 $x' = l$, 而求 x' 所屬之各值, 連接各該座標點, 即成直線公式:

$$Y = \frac{G x'}{l}$$

之勢力線, 如 $x' = 0$; 則 $Y = 0$, 如 $x' = l$; 則 $Y = G$ 。取 $\overline{A_0 A} = G$, 連結

A' , B_0 兩點, 得 $\overline{A'B_0}$ 線, 是即攔支力 A 之勢力線。同法, 取 $\overline{B_0B'} = G$, 得 $\overline{A_0B'}$ 線, 是即攔支力 B 之勢力線也。

A , B 兩力之比例尺, 可以任意採用, 惟在圖中所有各縱座標, 應具同一之比例尺。

如取 G 為單位荷重 = 1 公噸, 則在 A , B 兩處各繪 1 公噸長度 (比例尺可以任意採用) 可矣。

(b) C 點之力矩 M_c 勢力線。

在下各活動荷重, 概取 1 公噸。

(a) 荷重 1 在 C 點右方, 而介於 B , C 兩點之間。

可成:
$$M_C = A \cdot a = \frac{1 \cdot x'}{l} \cdot a \dots\dots\dots(3)$$

此勢力線公式 $Y = M_C = \frac{a x'}{l}$, 乃一直線。經過 $x' = 0$; $Y = 0$ 之座標點, 即經 B_0 點。及 $x' = l$; $Y = a$, 亦即經 A' 點而行也。

惟 $\overline{A'B_0}$ 線, 為僅在 \overline{CB} 段荷重時所適用之勢力線。因在此範圍內, $M_C = \frac{a x'}{l}$ 之函數, 方可適用也。

(β) 荷重 1 在 C 點左方, 而介於 A , C 兩點之間。

可成:
$$B = \frac{1 \cdot \xi}{l};$$

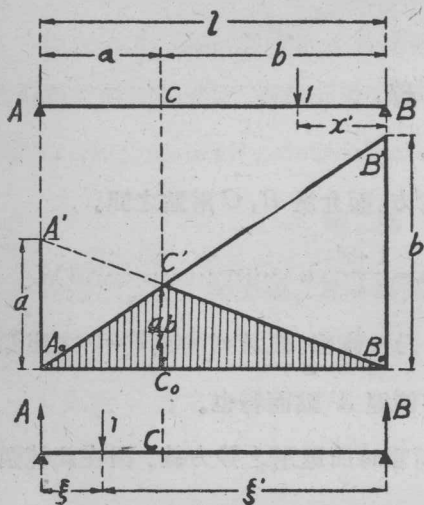
$$M_C = \frac{\xi}{l} b = Y' \dots\dots\dots(4)$$

此直線公式所經之點:

$\xi = 0$; $Y' = 0$ 即經過 A_0 點。

$\xi = l$; $Y' = b$ 即經過 B' 點。

是線乃僅爲 $M_C = \frac{\xi}{l} \cdot b$ 函數範圍內所適用之勢力線，即荷重介於 A, B 之間是也。勢力線之兩支段，當相交於 C 點之垂直下方。由上項二公式得 $\overline{C_0 C'}$ 之長爲 $\frac{a \cdot b}{l}$ ，即公式 (3) 中以 $x=b$ ，得 $M_C = \frac{a \cdot b}{l}$ ，及公式 (4) 中以 $\xi=a$ ，亦得 $M_C = \frac{a \cdot b}{l}$ 也。



第 2 圖

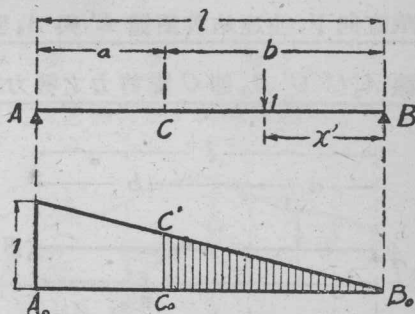
因得定律如次：欲求 C 點力矩之勢力線，法在攔支點 A 之垂直線上作縱座標 a ，與 C 點距 A 之尺寸相等，連結此座標點與 B_0 ，再與經過 C 點之垂直線相交於 C' ，連結 $\overline{C' A_0}$ ，此 $A_0 C' B_0$ 折線，即 C 點力矩之勢力線也。驗： $\overline{A_0 C'}$ 線與右攔支點之垂直線相交，而截成 $\overline{B_0 B'} = b$ 。

劃有並行線之面積 $A_0 C' B_0 A_0$ ，稱爲 M_C 之勢力面 (Einflussfläche; Influence area)。

比例尺：縱座標示力矩，在攔支處非爲 a 公尺或 b 公尺之長度，乃示 1 公噸 $\cdot a$ 公尺 = 1 公尺公噸或 b 公尺公噸之力矩也。是故 a 公尺之長度，示 a 公尺公噸，即在比例尺上 1 公尺之長度，乃示 1 公尺公噸也。如取長度比例尺爲 1 : 100，則 1 公分長即示 1 公尺公噸。如取長度

比例尺為 1 : 200, 則 $\frac{1}{2}$ 公分乃示 1 公尺之長, 而於力矩比例尺, 此 $\frac{1}{2}$ 公分乃示 1 公尺公噸, 即 1 公分示 2 公尺公噸是也。

(c) 在 C 點剪力 Q_c 之勢力線 (第 3 圖)



第 3 圖

(a) 荷重 1 在 C 及 B 之間。

以 $Q_c = A$ 故

$$Q_c = \frac{1 x'}{l} \dots\dots\dots(5)$$

在此函數之適用範圍內, 即自 C 至 B 間, 此勢力線與在 (a) 求攔支力 A 之法則, 完全相符。

(B) 荷重 1 在 A 及 C 之間 (第 4 圖)

可成立 $Q_{c'} = A - 1$ 及 $A = \frac{1 \xi'}{l}$;

$$Q_{c'} = \frac{\xi' - l}{l} = -\left(\frac{l - \xi'}{l}\right) = -\frac{\xi}{l} = -B \dots\dots\dots(6)$$

在 A 及 C 之範圍內, 其勢力線之縱座標為負, 即應向下繪之。

公式 (6) 直線所經之點:

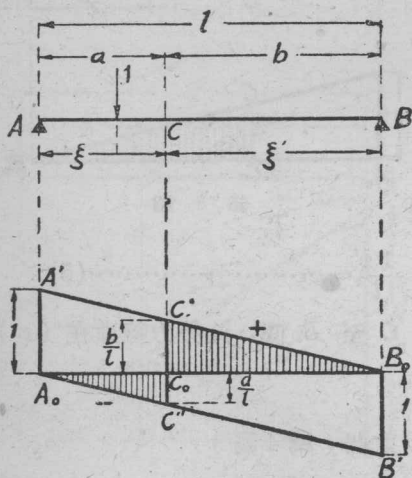
$\xi' = 0, \quad Q_{c'} = -1$ 即經過 B' 點

$\xi' = l, \quad Q_{c'} = 0$ 即經過 A₀ 點

第 4 圖乃示 Q_c 之勢力線, 其勢力面更劃有並行線, 以期醒目。

因得定律如次: 欲求 C 點剪力之勢力線, 法在攔支點 A, 繪單位

力向上，作為縱座標，連結是線之頂端 A' 與 B_0 點；再在 B_0 點繪單位力垂直向下，並連結其頂端 B' 與 A_0 點；經 C_0 點作垂直線 $C'C_0C''$ ；此折線 $A_0C''C'B_0$ 即 C 點剪力之勢力線。應注意者，為 $A'B_0$ 及 A_0B' 兩



第 4 圖

線，對於攔支點 A 及 B 間之任何剖面 C ，均得適用。並依下面之基本原則，其所有正勢力線之縱座標，概行向上，負者向下，一如圖中所示。

比例尺：單位力可以採用任何比例尺而繪之，惟此已經採用之力比例尺，對於勢力線 $A_0C''C'B_0$ 之全部縱座標，均當應用。

結果： $A'B_0$ 及 A_0B' 兩線係並行，故其垂直距離，在梁上各處，均屬相等，由三角形相似之關係而得：

$$\overline{C_0C'} = \frac{b}{l}, \quad \overline{C_0C''} = \frac{a}{l}$$

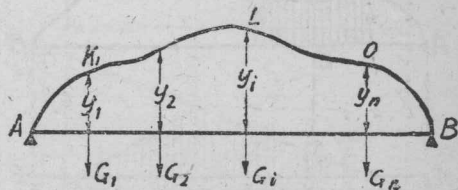
如荷重 1 直接貼靠 C 之左側，則其剪力 $Q = -\frac{a}{l}$ ，而此單位力自右向左移動，經過剖面 C ，則其地剪力之變遷當為：

$$\Delta = -\left(\frac{a}{l} + \frac{b}{l}\right) = -\frac{a+b}{l} = -1$$

第三節 應用勢力線法求極限荷重情形

(a) 成組單力之荷重 (第 5 圖)

今設 $A K_1 L O B$ 線為 AB 樑之任何勢力線，其縱座標以 y 示之，此勢力線由移動之單位力而成，設於 C 點有重力 G_1 ，則由 G_1 所生之勢力，必為單位力 1 所生者之 G_1 倍，是以由 G_1 所生之勢力為：



第 5 圖

$$Y_1 = G_1 \cdot y_1$$

重力 G_2 在 K 所生之勢力為 $Y_2 = G_2 \cdot y_2$ ，其他可依次類推，故成組單力所生之勢力為：

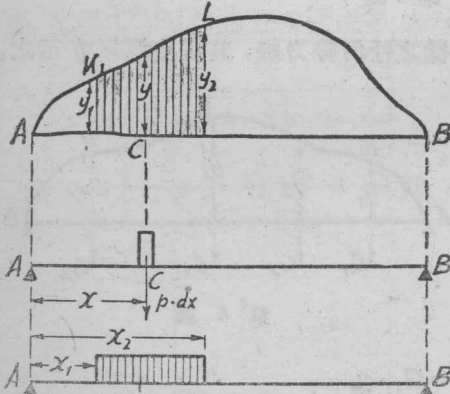
$$Y = \sum_1^n (G \cdot y) \dots \dots \dots (7)$$

如將此成組單力向右或向左移動，則可就既成之勢力線，應用公式 (7) 易得 Y 各勢力值，並得其極限勢力 Y_{\max} 或 Y_{\min} 之荷重地位，與 Y_{\max} 及 Y_{\min} 各值。 Y_{\max} 乃示 Y 之最大正值，而 Y_{\min} 乃 Y 之最大負值也。

(b) 均佈荷重 (第 6 圖)

設於 C 處 dx 長度間每單位長度受有均佈力 p 而成 $p \cdot dx$ 力之作用，則生勢力 $p \cdot y \cdot dx$ ，單位長度之 p 荷重，若自 $x = x_1$ 展至 $x = x_2$ ，則由此所生之全部勢力當為：

$$Y = \int_{x_1}^{x_2} p y dx = p \int_{x_1}^{x_2} y dx \dots\dots\dots(8)$$



第 6 圖

此積分 $\int_{x_1}^{x_2} y \cdot dx$ 在第 6 圖中以劃有並行線之面示之，其面積由橫軸，勢力線及二縱座標 y_1 及 y_2 所圍成，而以 $F_{y_1}^{y_2}$ 表示，若是則成：

$$Y_{y_1}^{y_2} = p F_{y_1}^{y_2} \dots\dots(8a)$$

例題：1. AB 樑之全長，均受荷重 p ，求其攔支力 A 及

B (第 7 圖)

$$F_0^l = \frac{1}{2} l, \text{ 即 } A = p \cdot F = \frac{pl}{2}$$

同理

$$B = \frac{pl}{2}$$

2. 樑之全長，均受單位長度 p 力之作用，求 C 點之力矩 M_c ：

$$F_0^l = \frac{a \cdot b}{l} \cdot \frac{l}{2} = \frac{a \cdot b}{2}$$

故

$$M_c = p F_0^l = \frac{p a b}{2}$$

$$b = l - a$$

$$M_c = \frac{p a (l - a)}{2}$$

3. 樑之全長 均受單位長度 p 力之作用，求 C 點之剪力 Q_c ：

其正面積爲：

$$F_1 = \frac{b}{l} \cdot \frac{b}{2} = \frac{b^2}{2l}$$

負面積爲：

$$F_2 = -\frac{a}{l} \cdot \frac{a}{2} = -\frac{a^2}{2l}$$

樑上荷重，既達全長，則得

$$Q_c = p(F_1 + F_2)$$

$$Q_c = \frac{p}{2l}(b^2 - a^2)$$

$$= \frac{p}{2l}(b-a)(b+a)$$

$$= \frac{p}{2l}(b-a)l$$

因 $b-a = l-a-a = l-2a$,

$$\text{故 } Q_c = \frac{p}{2}(l-2a)$$

若僅在樑上正面積之 CB 一

段荷重，則得 $Q_{c \max}$ 爲：

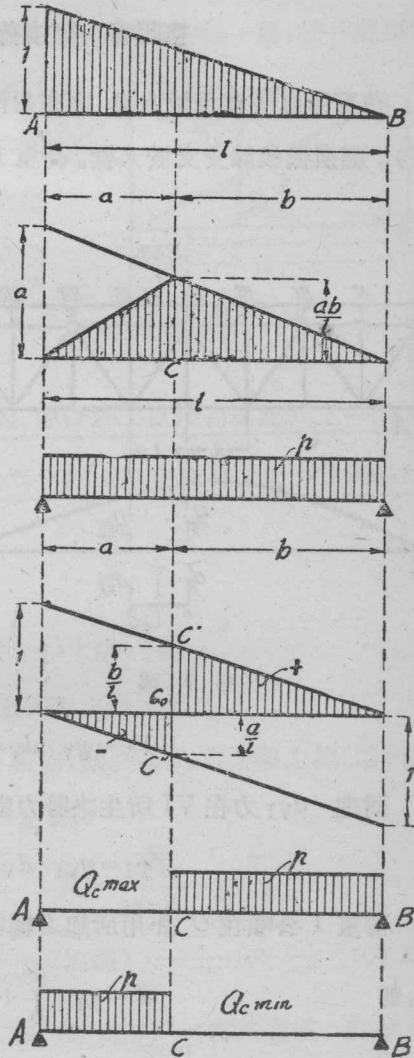
$$Q_{c \max} = p \cdot F_1 = \frac{pb^2}{2l}$$

若僅在樑上負面積之 AC 一

段荷重，則得其最大負 $Q_c = Q_{c \min}$

爲：

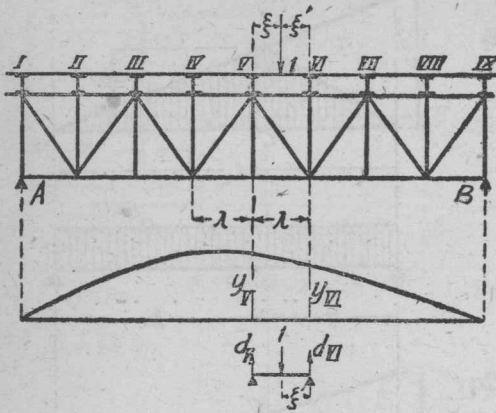
$$Q_{c \min} = p F_2 = -\frac{pa^2}{2l}$$



第 7 圖

第四節 間接荷重之勢力線

荷重非直接作用於大樑，而在短樑上，此短樑復攔支於橫樑（第 8 圖），經橫樑後始受支於大樑。荷重 1 公噸在 \overline{VVI} 區中，而距 VI 為



第 8 圖

ξ' ，對於大樑之 V 及 VI 兩點，起壓力 d_V 及 d_{VI} ，

其值當為：

$$d_V = \frac{1 \cdot \xi'}{\lambda}$$

$$d_{VI} = \frac{1 \cdot \xi}{\lambda}$$

設荷重 1 在 V 作用所生之勢力為 y_V ，在 VI 作用為 y_{VI} ，則 d_V 力在 V 所

生之勢力當為：

$$Y_V = y_V \cdot d_V = y_V \cdot \frac{\xi'}{\lambda};$$

同理 d_{VI} 力在 VI 所生之勢力當為

$$Y_{VI} = y_{VI} \cdot d_{VI} = y_{VI} \cdot \frac{\xi}{\lambda}$$

荷重 1 公噸在 C 作用所起之總勢力為 d_V 及 d_{VI} 所生兩勢力之

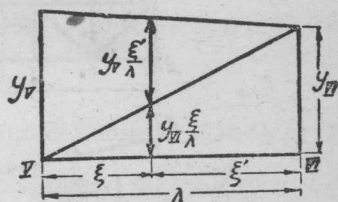
和，即

$$Y = y_V \cdot \frac{\xi'}{\lambda} + y_{VI} \cdot \frac{\xi}{\lambda} \quad (\text{參閱第 8a 圖})$$

$$Y = \frac{1}{\lambda} [y_V (\lambda - \xi) + y_{VI} \cdot \xi] \dots\dots\dots(9)$$

如將各 ξ 所屬之 Y 為各該地之縱座標，則得在 V VI 區間荷重之勢力線，按公式 (9) 知 Y 與 ξ 為惟一之變值，且均係一幂，故各縱座標點必連成一直線。已知此直線之兩點：

如荷重適位於 V 及 VI 者，則此二類情形，屬於直接荷重，其地勢力值之縱座標，可依第一及第二兩節之法則求得。



第 8 圖 a

因得結果如次：

凡二節點間之間接荷重勢力線，即位於二直接荷重點間之一段，為一直線。法就二節點 (Knotenpunkte; joints) 所原有之勢力座標點，以直線連結之便得。

而公式

$$Y = \frac{1}{\lambda} [y_V(\lambda - \xi) + y_{VI} \cdot \xi]$$

之適用範圍，一如前述，並不限於直線形之勢力線也。

例題 1. 求並行桁樑之 III 4 桁條，其所受 D_3 力之勢力線 (第 9 圖)

(a) 荷重在右側節點 IV 之右方

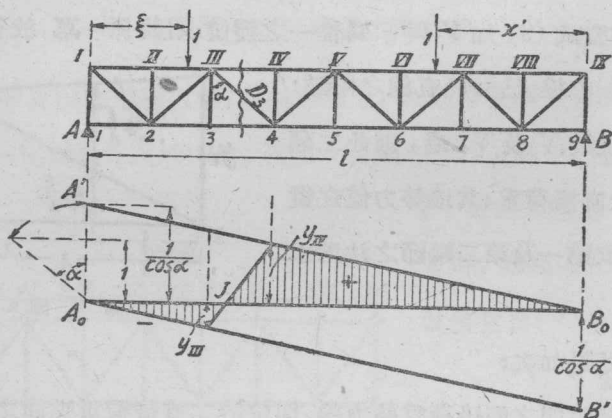
$$Q_{III}^{IV} = A = \frac{1 \cdot x'}{l} \quad D_3 = \frac{Q_{III}^{IV}}{\cos \alpha} = \frac{x'}{l \cdot \cos \alpha}$$

$$D_3 = \frac{x'}{l \cdot \cos \alpha} \text{ (直線) } \dots\dots\dots (10)$$

設 $x' = l$ 則 $D_3 = \frac{1}{\cos \alpha}$ ，故在 A_0 處 $\frac{1}{\cos \alpha}$ 當為正值，再 $x' = 0$

則 $D_3 = 0$

$A'B_0$ 乃其勢力線，適於 IV 及 B 兩點間荷重之用。



第 9 圖

(b) 荷重在左側節點 III 之左方

$$Q_{III}^{IV} = -B = -\frac{\xi}{l} \qquad D_s = \frac{Q_{III}^{IV}}{\cos \alpha}$$

故

$$D_s = -\frac{\xi}{l \cdot \cos \alpha} \text{ (直線) } \dots\dots\dots(11)$$

其直線所經之點：

$$\xi = 0, \qquad D_s = 0 \qquad \text{經過 } A_0 \text{ 點}$$

$$\xi = l, \qquad D_s = -\frac{1}{\cos \alpha} \text{ 經過 } B' \text{ 點}$$

此勢力線適於 III 點左方荷重之用，而對於 III IV 區中之勢力線，可援用前法，即於 y_{III} 與 y_{IV} 之頂端，以直線連結之便得，圖中劃有並行線之面，即勢力面是也。

設活動荷重，適在 J 點，則其勢力之縱座標為零，即示荷重在該處產生之力 $D_s = 0$ ，如荷重由左移來，經過此點，則其桁條所受之力，勢必

由壓力而變成拉力矣。

J 點謂之荷重分界點 (Belastungsscheide; load divide)。

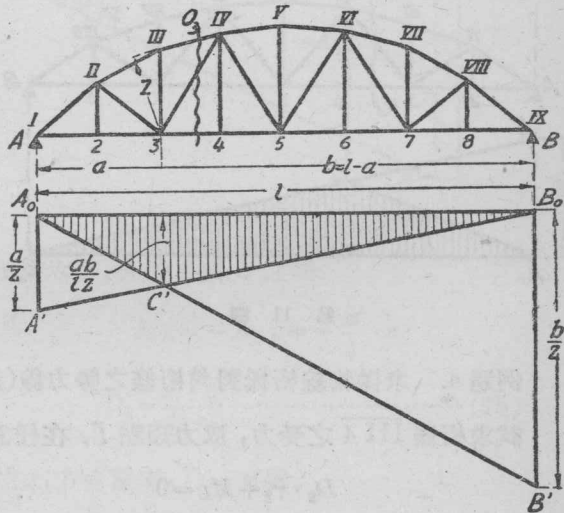
例題 2. 求拋物線桁樑之 III IV 桁條, 其所受 O_3 張力之勢力線 (第 10 圖)。

取 3. 為力矩點 (Momentpunkt; moment center), 以求 O_3 力, 設 M_3 為外力之力矩, 係經過 O_3 所置剖線之一方諸力, 對於力矩點 3 所成之力矩也。遂成 $O_3 \cdot z + M_3 = 0$

$$O_3 = -\frac{M_3}{z} \dots \dots \dots (12)$$

式中 z 示力矩點

3 對於 O_3 力之臂長, 當各單力荷重之移動也, O_3 力僅隨 M_3 而變化, z 之臂長, 則恆定不變, 故 O_3 之勢力線與 M_3 之勢力線, 互相一致, 祇以定值 z 除各縱座標而已。在第二節 (b) 所示 M 勢力線, 可以直接應用,



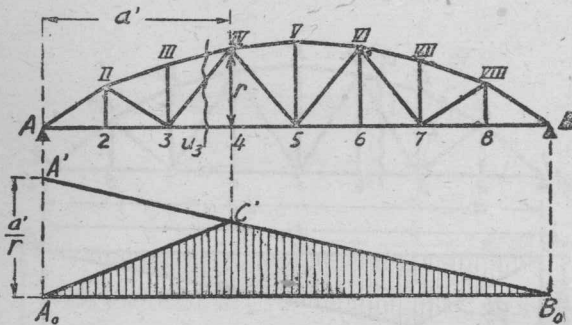
第 10 圖

僅將攔支處之垂直線 a 及 b 兩值, 代以 $\frac{a}{z}$ 及 $\frac{b}{z}$ 可矣。各縱座標均應向下, 以示其負。尚須特別申述者, 即 $\frac{a}{z}$ 及 $\frac{b}{z}$, 以有重力 1 公噸相乘, 故

$\frac{a}{z}$ 及 $\frac{b}{z}$ ，均示重力，而一切重力所用之比例尺，可以任意選用。

因得定律如次：欲求 O_3 之勢力線，法在左側擱支點，可以任擇比例尺繪 $\frac{a}{z}$ 值，其頂端與 B_0 相連結，由此所得之 $A'B_0$ 線與經過力矩點 3 之垂直線相交，再以其交點 C' 與 A_0 相連接。勢力線之兩支段，相交於經過力矩點之垂直線上。

例題 3. 下桁條張力之勢力線，按第 11 圖，一如例題 2，依法求之，其力矩點為 IV。



第 11 圖

因成：

$$U_3 = \frac{M_{IV}}{r} \quad (13)$$

在例題 2 及例題 3，二節點 (Knotenpunkte; joints) 間之一段勢力線，均係一直線。

例題 4. 求拋物線桁樑對角桁條之勢力線(第 12 圖)。

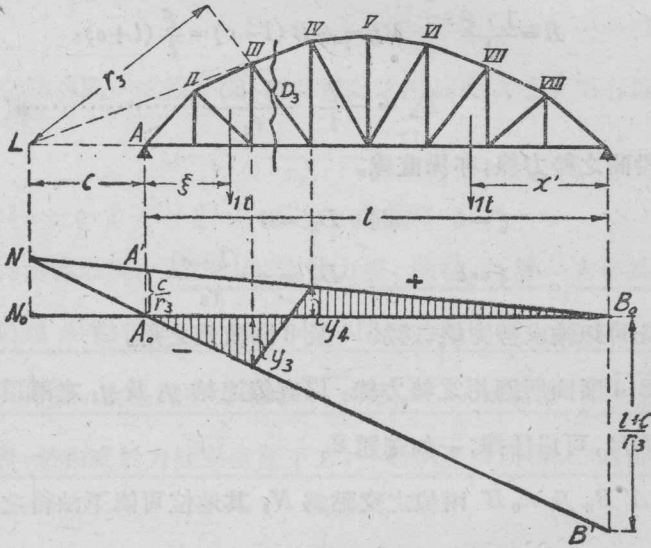
試求桁條 III 4 之受力，取力矩點 L ，在任意荷重時可成

$$D_3 \cdot r_3 + M_L = 0$$

$$D_3 = -\frac{M_L}{r_3} \dots\dots\dots(14)$$

式中 M_L 為外力之力矩，係經過 D_3 所置剖線之一方諸力，對於力矩點 L 所成之力矩。如在剖線左方之桁樑部份，起向右旋轉者（與鐘錶

指針同向)，或在剖線右方之桁樑部份，起向左旋轉者（與鐘錶指針反向），則此力矩為正。



第 12 圖

(a) 荷重在 4 之右方，介於 4 與 B 之間

$$A = \frac{1 \cdot x'}{l} \qquad M_L = -A \cdot c = -\frac{x'}{l} \cdot c$$

$$D_3 = \frac{x' \cdot c}{l \cdot r_3} \dots \dots \dots (15)$$

D_3 勢力線適於 4 之右方荷重者，乃一直線。

設 $x' = 0$ 則 $D_3 = 0$ 得 B_0 點

$x' = l$ $D_3 = \frac{c}{r_3}$ 得 A' 點

在 A_0 繪 $\frac{c}{r_3} \cdot 1$ ，其頂端復與 B_0 相連接，是乃適於 4 與 B 間之勢力

線也。

(β) 荷重在 3 之左方

$$B = \frac{1 \cdot \xi}{l} \quad M_L = +B(l+c) = \frac{\xi}{l}(l+c)$$

$$D_3' = -\frac{\xi}{l} \frac{(l+c)}{r_3} \dots \dots \dots (16)$$

是段間之勢力線，亦係直線。

設 $\xi=0$ 則 $D_3'=0$

$$\xi=l \quad D_3' = -\frac{(l+c)}{r_3}$$

依此可以繪成勢力線，適於 A 及 3 間荷重之用。

至 3 4 區間所適用之勢力線，以直線連結 y_3 及 y_4 之兩頂端便得，力之比例尺，可以任擇，一如例題 2。

設 $A'B_0$ 及 A_0B' 兩線之交點為 N，其地位可依下法得之：可以成立

$$\frac{\overline{NA'}}{\overline{NB_0}} = \frac{\frac{c}{r_3}}{\frac{l+c}{r_3}} = \frac{c}{l+c} = \frac{\overline{N_0A_0}}{\overline{N_0A_0} + \overline{A_0L_0}} = \frac{\overline{N_0A_0}}{\overline{N_0A_0} + l}$$

即 $\frac{\overline{N_0A_0} + l}{\overline{N_0A_0}} = \frac{l+c}{c}$ 或 $1 + \frac{l}{\overline{N_0A_0}} = \frac{l}{c} + 1$,

因得 $\overline{N_0A_0} = c$ ，即勢力線之兩支段相交於經過 L 點之垂直線上，亦即相交於力矩點之垂直下方。

至 D_3 勢力線兩支段之交點，位於 L 點之垂直下方也，亦可由 (15) 及 (16) 勢力線兩支段之公式得之，設 A 為座標系之起點，則此二

公式當爲：

$$D_3 = (l - \xi) \frac{c}{l \cdot r_3} \dots \dots \dots (15a)$$

$$D_3' = -\frac{\xi}{l} \cdot \frac{(l+c)}{r_3} \dots \dots \dots (16a)$$

在交點有同一之縱座標，設此交點之橫座標爲 ξ'' ，則必爲：

$$(l - \xi'') \frac{c}{l \cdot r_3} = -\frac{\xi''}{l} \frac{(l+c)}{r_3},$$

即 $l \cdot c - c \cdot \xi'' = -\xi'' \cdot l - \xi'' \cdot c$ 由是得 $\xi'' = -c$

因得定律如次：欲求 D_3 之勢力線，法在 A_0 繪 $\frac{c}{r_3}$ 力作爲縱座標，連結其頂端 A' 點與 B_0 ，引長此 $\overline{A'B_0}$ 線至力矩點 L 之垂直下方而達 N 點，繪 $\overline{NA_0}$ 線；由是得勢力線之 $\overline{B_0A'}$ 及 $\overline{NA_0}$ 兩支段。而桁條勢力線之兩支段，必相交於力矩點垂直下方，一如例題 2 所得，二者理由，完全相同。

例題 5. 垂直桁 \overline{IV} 4 張力之勢力線 (第 13 圖)。

桁樑經傾斜剖開，1 公噸荷重在剖面右方，其距攔支點 B 爲 x ，因得：

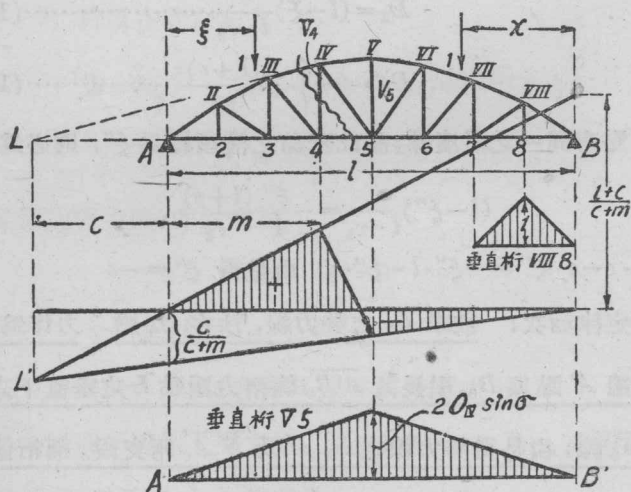
$$V_4 = -\frac{x}{l} \cdot \frac{c}{c+m} \dots \dots \dots (17)$$

1 公噸荷重在剖線之左方，其距攔支點 A 爲 ξ ，可得：

$$V_4 = \frac{\xi}{l} \cdot \frac{(l+c)}{(c+m)} \dots \dots \dots (18)$$

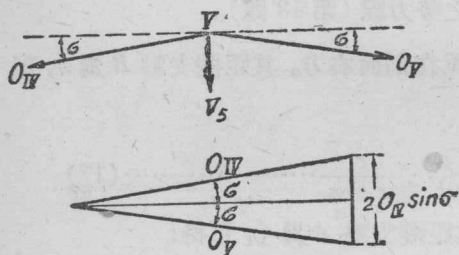
至勢力線之繪成，按第 13 圖，自易明瞭，相交於力矩點垂直下方之勢力線二支段，其連接直線，恆位於剖面所經之擔負荷重桁條之分區間，(第 23 圖亦然)，所有公式及求法，僅適於如第 13 圖所示之剖開法，

而 $\overline{V5}$, $\overline{II2}$ 及 $\overline{VIII8}$ 等垂直桁, 乃其例外。



第 13 圖

$\overline{V5}$ 桁條之勢力線, 可由觀察節點 V 求之, 得成立 (第 13a 圖):



第 13 圖 a

$$O_{IV} \cos \sigma - O_V \cdot \cos \sigma = 0$$

$$O_{IV} = O_V$$

$$V_5 + 2 \cdot O_{IV} \sin \sigma = 0.$$

$$V_5 = -2 O_{IV} \sin \sigma, \text{ 即示}$$

$\overline{V5}$ 桁條之勢力線, 可自 O_{IV} 勢力線得之, 祇須將 O_{IV} 之縱座

標各值, 乘以 $(-2 \sin \sigma)$ 可矣。

按第四節例題 2 法則, O_{IV} 之勢力面係一負三角形, 其頂角位於 $\overline{V5}$ 之垂直下方, 今以 $2 \sin \sigma$ 乘之, 自亦易於繪得 (第 13a 圖)。

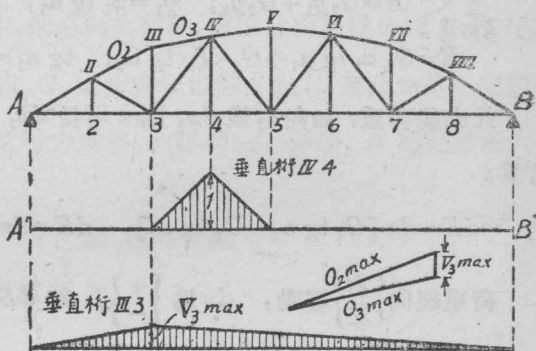
再以是值置之樑中央，繪成正值，而連結其頂端與 A' , B' 兩點便成 (第 13 圖)。

桁條 $\overline{VIII 8}$ 之勢力線，可由觀察節點 8 之平衡 (Gleichgewicht; equilibrium) 得之，一如第 13 圖所示，僅在節點 8 之左右二區中荷重，垂直桁得受(拉)力耳。

在節點 8 之下方繪單位力 1，此縱座標之頂端，與荷重在 7 及 B 二地所生勢力縱座標之頂端相連接，而後者為零，遂得第 13 圖中垂直桁 $\overline{VIII 8}$ 之三角形勢力面。

依同法可以求得垂直桁 $\overline{II 2}$ 之勢力線。

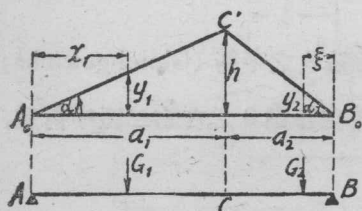
第 14 圖所示之樑，其間 $\overline{II 2}$, $\overline{IV 4}$, $\overline{VI 6}$, $\overline{VIII 8}$ 諸垂直桁之勢力線，可依桁條 $\overline{VIII 8}$ 之求法得之，對於 $\overline{III 3}$, $\overline{V 5}$, $\overline{VII 7}$ 諸垂直桁，則可依 $\overline{V 5}$ 桁條之求法得之， $\overline{III 3}$ 桁條之求法，詳第 14 圖。



第 14 圖

第五節 應用勢力線法，求成組單力之極限地位，其勢力線由一直線或數直線連接成之

設勢力線為 $A_0 C' B_0$ (第 15 圖)：

(a) 一個單力 G 之荷重

第 15 圖

G 力在任何地位之勢力 $E = G \cdot y$ 。

事極顯明，其最大勢力 $E_{\max} = G \cdot y_{\max} = G \cdot h$ ，是即一個單力能達之最大勢力值，當位於三角形頂角之上方也。

(b) 二個單力 G_1 及 G_2 之荷重，兩力互有一定之距離 (第 15 圖)。

荷重在任何地位可成：

$$E = G_1 y_1 + G_2 y_2; \quad y_1 = x_1 \operatorname{tg} \alpha_1; \quad y_2 = \xi \cdot \operatorname{tg} \alpha_2$$

$$E = G_1 x_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + G_2 \cdot \xi \cdot \operatorname{tg} \alpha_2; \quad \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{h}{a_1}; \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{h}{a_2}$$

此成組荷重，如向右移 dx ，則 x 增長 dx ， ξ 減短 dx ，而 E 之增加

當爲：

$$dE = dx [G_1 \operatorname{tg} \alpha_1 - G_2 \operatorname{tg} \alpha_2], \quad dE = dx \cdot h \left[\frac{G_1}{a_1} - \frac{G_2}{a_2} \right]$$

荷重經向 $\left\{ \begin{array}{l} \text{右} \\ \text{左} \end{array} \right\}$ 移動， dx 爲 $\left\{ \begin{array}{l} + \\ - \end{array} \right\}$ ，即 dE 之正負性質與括弧值之

性質相 $\left\{ \begin{array}{l} \text{同} \\ \text{反} \end{array} \right\}$ 也。

如向右移動而得 dE 爲正，即示若括弧值爲正，則勢力有所增加，

亦即

$$\frac{G_1}{a_1} > \frac{G_2}{a_2}$$

反是，如向右移動 dE 爲負，則必

$$\frac{G_1}{a_1} < \frac{G_2}{a_2}; \quad \text{由是得結果如次：}$$

設 $\frac{G_1}{a_1} > \frac{G_2}{a_2}$, 則如欲增大 E 值, 必須向右移動 $\xrightarrow{+}$ 。

設 $\frac{G_1}{a_1} < \frac{G_2}{a_2}$, 則如欲增大 E 值, 必須向左移動 $\xleftarrow{+}$, 此即示應向

桁樑之某側移動, 須擇其在單位長度間受力 (受力以每公尺長計算) 之較少者。此等移動, 可隨 E 函數之適宜性而繼續前進, 如荷重越過 C 點, 或 A 及 B 之攔支點, 則其函數即起變更矣。

設在第 15 圖中

$$\frac{G_1}{a_1} < \frac{G_2}{a_2}$$

則必向左移動, 直至 G_2 達 C 點而止, 此荷重地位, 可以產生 E_{\max} 。

反是若 $\frac{G_1}{a_1} > \frac{G_2}{a_2}$, 則必向右移動, 直至此函數變更為止, 在 G_1 未達 C 點之前, 按第 15 圖, G_2 之力當早抵攔支點 B , 至是尙適上項規律, 然在此荷重地位, G_2 之勢力爲零, 如繼續向右移動, E 值勢必漸大, 直至 G_1 力達 C 點爲止。

數值例題

求剖面 C 之力矩 (第 16 圖)

$$a_1 = 8 \text{ m} \quad a_2 = 2 \text{ m}$$

$$\frac{G_1}{a_1} = \frac{10}{8} = 1.25 \quad \frac{G_2}{a_2} = \frac{2}{2} = 1 \quad \text{故當} \xrightarrow{+}$$

如第 16 圖所示之荷重地位, 當爲:

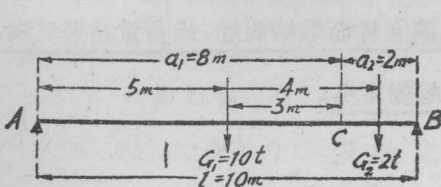
$$M_C = \frac{5 \cdot 10}{10} \cdot 2 + \frac{2 \cdot 1}{10} \cdot 8 = 11.6 \text{ tm}$$

如向右移動, 直至 G_2 力抵達 B 點 (第 17 圖) 則成:

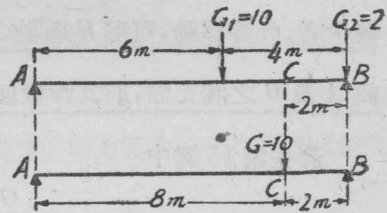
$$MC' = \frac{10 \cdot 6}{10} \cdot 2 = 12 \text{ tm}$$

如更向右移動，而使 G_1 力在 C 點之上，則得：

$$MC'' = \frac{8 \cdot 10}{10} \cdot 2 = 16 \text{ tm} = MC \text{ max}$$



第 16 圖

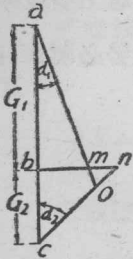


第 17 圖

應用圖解法求荷重之極限地位

繪 G_1 及 G_2 二力，使其上下連接（第 18 圖）

$$G_1 = \overline{ab}, \quad G_2 = \overline{bc}$$



第 18 圖

在 G_1 之 a 端作 α_1 角，在 G_2 之 c 端作 α_2 角，二角均自第 15 圖得之，於是 $\overline{bn} = G_2 \operatorname{tg} \alpha_2$ ； $\overline{bm} = G_1 \operatorname{tg} \alpha_1$

設 $G_2 \operatorname{tg} \alpha_2 > G_1 \operatorname{tg} \alpha_1$ ，則該力組應向左移動，圖中 $\overline{bn} > \overline{bm}$ ，即示向左移動，必致增大其值，直至 G_2 力達剖面 c 為止，如 $\overline{bn} > \overline{bm}$ ，則由 a 及 c 所引出二線之交

點 o ，當位於 G_2 之對方。

二力之一，位於交點 O 之對方者，應令其直接作用於剖面上，必可得最大 E 值。

(c) 任意多力之荷重（第 19 圖）

成立：

$$E = (G_1 y_1 + G_2 y_2) + (G_3 y_3 + G_4 y_4)$$

今設

$$R_1 = G_1 + G_2 = C \text{ 點左方諸力之合力}$$

$$R_2 = G_3 + G_4 = C \text{ 點右方諸力之合力}$$

再設

$$G_1 x_1 + G_2 x_2 = R_1 \xi_1; \quad x_1 = \frac{y_1}{\operatorname{tg} \alpha_1}; \quad x_2 = \frac{y_2}{\operatorname{tg} \alpha_1}$$

$$G_1 y_1 + G_2 y_2 = R_1 \xi_1 \operatorname{tg} \alpha_1 \quad \text{故} \quad G_1 y_1 + G_2 y_2 = R_1 \eta_1$$

η 乃合力 R_1 之勢力線縱座標，亦

即 $\Sigma(G y)$ 之總值，可以其合

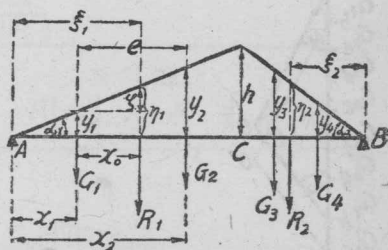
力與所屬勢力線縱座標之乘積代

之，此僅適於勢力線同一支段上

之諸荷重，如每支段在二力以上，

則上法亦適於用，因可將二力合

一，後再與第三力相併，而完成其全部也。



第 19 圖

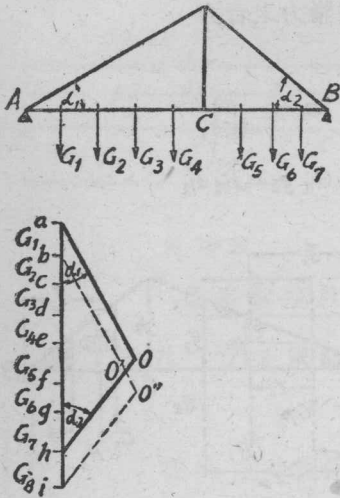
依同法，可適用於右側：

$$G_3 \cdot y_3 + G_4 \cdot y_4 = R_2 \cdot \eta_2$$

由此證實，在 (b) 對於二力所得之定律，不論任何多力均適用之，祇有合力 R_1 及 R_2 與 A 及 B 之距離為 ξ_1 及 ξ_2 ，餘與前同，是欲增大勢力，其應移動之方向如次：

$$\text{在} \quad \frac{R_1}{a_1} > \frac{R_2}{a_2} \text{ 時爲 } \xrightarrow{+} \quad \frac{R_1}{a_1} < \frac{R_2}{a_2} \text{ 時爲 } \xleftarrow{+}$$

應用圖解法，亦可求得最大 E 值所需某力之置於剖面上，一如 (b) 所示，由 a 及 h 引出之線，在其交點 O 對方之力，須置之 C 點 (第 20 圖)。此種圖解，應加注意者，即其關係屬跳躍之變遷，如有某力越過此剖面



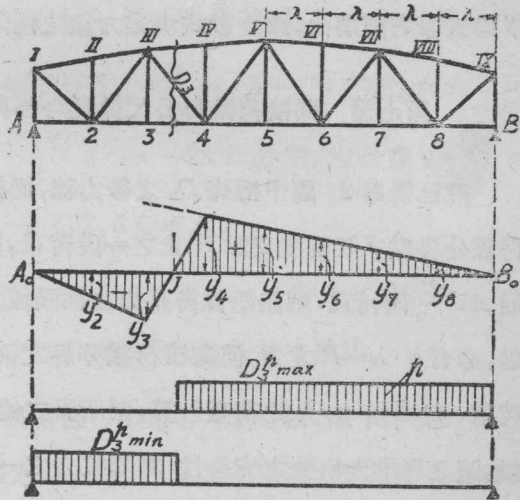
第 20 圖

矣，有某力離開此樑矣，或更有他力上樑矣，均當變更其關係，依諸附圖所示之例， G_5 力應位於 C 點，即該力組應向左移動，但當 G_5 力抵達 C 點之前， G_1 力早已離開樑身，故須更向左移，以應向單位長度受力較小之一側移動也。而今者樑之左側單位長度受力，較前更小，現在適用之點線 $bO'h$ 之 O' 點，其位如較圖中尤低，此 G_6 力自應位於剖面之上，但其時更有 G_8 力越 B 點上樑，是當以 O'' 點為標準，而應令 G_6 位於剖線上也。——遇不湊巧時，力組地位，須反復試驗後，方可求得其勢力值，例如此處可置 G_5 於 C ， G_6 於 C 及 G_7 於 C 等是，其最大勢力值，即作為計算之結果。

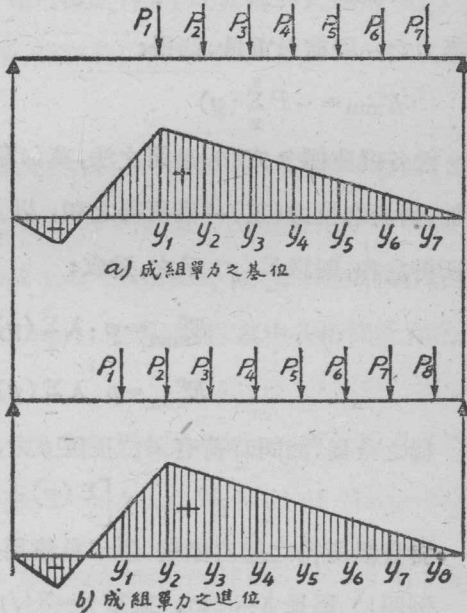
第六節 間接荷擔成組單力之極限勢力

如以某內含桁條 (Füllungsstab; Web) 之勢力面 (例如第 21 圖中 D_3 之勢力面)，劃成正負兩部份，而求 D_3 所受拉力之成組荷重極限地

位，祇須將其正勢力面（正段 B_0J ）荷重，大概以所謂成組單力之“基位”（grundstellung）（第 22a 圖），可求得其勢力之極限值，法將最前一力置於三角形之最大縱座標，其他諸力，則沿三角形較坦之邊，而依次置之，如樑之跨度較廣，或其最前一力較小者，則可改取其“進位”（vorgezogene Stellung）（第 22b 圖）而求極限值，所謂進位者，即更有一力或多力加入此研究之樑段也。其間一力，自必位於勢力三角形之頂尖。最後決定之簡捷法則，可由試算各 $\Sigma (P \cdot y)$ 比較得之，或



第 21 圖



第 22 圖

依第五節之圖解法，或立數式決定力組之極限地位均可。

第七節 間接荷擔每公尺樑長均佈荷重 p 之極限勢力

設已得第 2 圖中桁條 D_3 之勢力線，而桁樑之一定區長為 λ ，如自荷重分界點 J 起至攔支點 B 止之一段荷重，則該桁條得拉力之極限值，如 AJ 一段荷重，則該桁條得壓力之極限值。在每一承受完全荷重之節點，必有 $p \cdot \lambda = P$ 之力，僅鄰接荷重分界之兩節點，則有較 $p \cdot \lambda$ 為小之荷重，荷亦作 $p \cdot \lambda$ 之荷重計算，則所得之值，較實際所有為大，此其差數，適足以增大桁樑之安全性，其起拉力之一段，如荷以重量，則得：

$$F_{\max} = P \cdot y_4 + P \cdot y_5 + P \cdot y_6 + P \cdot y_7 + P \cdot y_8 + P \cdot \sum_4^8 (y)$$

起壓力之一段荷以重量，則得：

$$E_{\min} = -P \sum_2^3 (y)$$

求各縱座標 y 之和，最簡之法，莫如應用兩腳規，將各縱座標，逐一相加，對於起拉力(正)一段所得之和，以 $\sum_+ (y)$ 示之，而起壓力(負)一段所得之和，則以 $\sum_- (y)$ 示之，遂成：

$$\left. \begin{aligned} E_{\max}^p &= p \cdot \lambda \sum_+ (y) \\ E_{\min}^p &= p \cdot \lambda \sum_- (y) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

樑之全長，如同時荷有單位長度 g 力，一如樑之自重者，則當為

$$E^g = g \cdot \lambda \left[\sum_+ (y) + \sum_- (y) \right] \dots\dots\dots (20)$$

自負段所得之總座標值，應以負號用入上式。

例題：區長 $\lambda = 4 \text{ m}$ ；益重 $p = 3 \text{ t/m}$ ；設勢力之縱座標依 5 公分

= 1 公噸之力比例尺繪成，而得 $\Sigma_+(y) = 30$ 公分，則此 30 公分即示 6 公噸之重，故 $\Sigma_+(y) = 6$ 公噸及 $E_{\max}^p = \frac{30}{5} \cdot 4 \cdot 3 = 72$ 公噸，此外 $\Sigma_-(y) = -12$ 公分，故 $E_{\min}^p = -\frac{12}{5} \cdot 3 \cdot 4 = -28.8$ 公噸，設自重 $g = 4 \text{ t/m}$ ，則得 $E^g = 4 \cdot 4 \cdot \frac{(30-12)}{5} = +57.6$ 公噸矣。

第八節 應用以擱支力 $A = 1 \text{ t}$ 及 $B = 1 \text{ t}$ 所起之桁條張

力，而求受支於兩支點之桁樑各勢力線法。

擱支於兩端之桁樑，其桁條勢力線所用之求法，迄今悉依堅實結構之平衡定律，是故某桁條之勢力線，應依其所屬之力矩或剪力為標準，且對於樑之形式亦有關係，即桁條之臂距，或其傾斜角是也（註 1）。

此外尙有其他簡易法則，為滿勒白萊斯勞氏（Müller-Breslau）所發明，述之如次：

如移動力 P 在剖開分區之右側，則於剖線左側之惟一外力，即為擱支力 A ，而所剖斷各桁條之受力 S ，與荷重所生之擱支力 A 成比例，試一觀克來馬拿法（Verfahren von Cremona），以 A 開始所繪成之力圖（Cremona plan; Stress diagram），自易明瞭，其中各桁條受力之大小，均與 A 值成比例。

如取荷重 P 值，令其適產生擱支力 $A = 1 \text{ t}$ ，而再求桁條 S 之受力 $S_A = 1$ {用烈透法（Rittersches Verfahren; Method of Moments）或克

（註 1）在第四節例題 1 所以不用力矩公式而用平衡定律 $\Sigma(V) = 0$ 者，以在此對於 D_3 所屬之力矩點，位於無窮遠也。

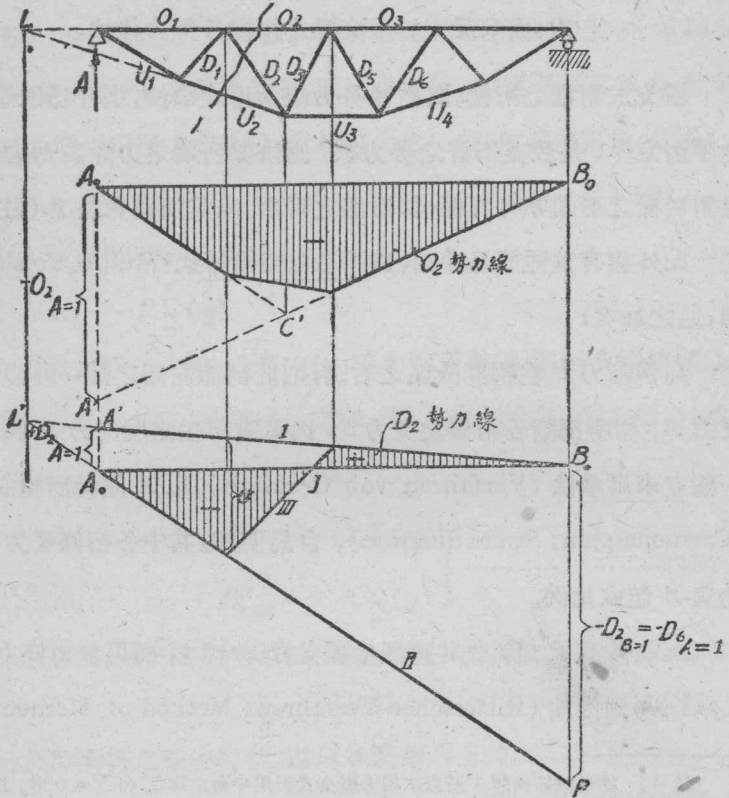
來馬拿圖均可},則按上述情形爲:

$$S : S_{A=1} = A : 1$$

即

$$S = A \cdot S_{A=1} \dots\dots\dots(21)$$

依公式 (21) 知 P 力無論在剖線右方之任何地位,其 S 之勢力線,乃攔支力 A 之勢力線,以 $S_{A=1}$ 乘之便得。故對於勢力線之該支段,僅於左攔支點之垂直下方,繪以 $\overline{A_0 A'}$ 用示 $S_{A=1}$ 而代 1 值,此 $S_{A=1}$ 值,



第 23 圖

可得之克來馬拿圖，而可將桁樑各桁條，一次盡行決定也。

(由計算法而求 $S_A=1$ 值，可應用烈透氏之力矩公式，即以往曾用之法則，此更足證實其適用也)。

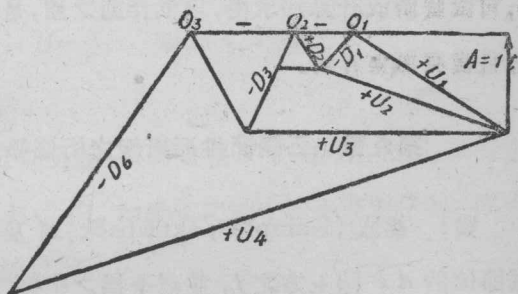
依同法適於剖線左側任何地點之荷重 P_1 其公式為：

$$S = B \cdot S_{B=1} \dots\dots\dots(22)$$

勢力線之該支段，其攔支點 B 之勢力線，當亦以 $S_{B=1}$ 倍之比例尺繪成，而作 $\overline{B_0 B'}$ 線，以示 $S_{B=1}$ 用代 1 值也。

在第 23 及第 23a 兩圖中之 O_2 及 D_2 勢力線，即依是法成之。

任何外廓桁條 (Gurtstäbe; Chord) 之勢力線，如得 $S_A=1$ 或 $S_B=1$ 二者之一，即可繪成，因勢力線兩支段之交點 (C' 位於力矩點之垂直下方)，可以預定，而內含桁條 (Füllung-



第 23 圖 a

stäbe; Web) 之求法 (最簡捷之法，亦以應用克來馬拿圖)，尚須得 $S_B=1$ ，以定右側攔支點垂直下方之勢力線，至所繪勢力線之性質及勢力面之正負，則可依克來馬拿圖中 $S_A=1$ 及 $S_B=1$ 之符號定之。

對於中央垂直線對稱之任何桁樑系統，其 $B=1$ 之克來馬拿圖，乃與 $A=1$ 所成者，互成鏡像，故 (如在第 23 圖) 祇繪二圖之一，已足求得 $S_A=1$ 及 $S_B=1$ 之二值矣。

附 誌

1. $A=1$ 及 $B=1$ 之克來馬拿圖，不能恆作閉合式，以其並非示實際之平衡情形，僅一理想之荷重而已，故繪是圖直至矛盾為止，然已儘足求得其所需各值矣。

2. 內含桁條亦可於任何情形，以得 $S_A=1$ 或 $S_B=1$ 二者之一為已足。繪勢力線時，可應用力矩點 L ，在其橫座標地位，（證明按前），勢力線之 I 及 II 兩直線，必相交於此（參閱第 23 圖），有時求荷重分界點之地位，而得勢力線之零點 J ，卒將 I 及 II 二直線任何地點之垂直距離 v ，可依圖解或計算法求得，以供作圖之用，是項研究，已超越範圍之外，他日當有專書詳論。

第九節 三關節拱形桁架之桁條勢力線（第 24 圖）

設：拱底（Kämpfer; skewback） A 及 B 之地位互為等高，拱頂關節位於 \overline{AB} 線上方之 f ，並居全拱之中央。拱底之垂直分力，以 A 及 B 示之，其水平分力，則以 H 及 H_1 示之，當拱架受垂直荷重時必成：

$$H_1 = H \dots\dots\dots(23)$$

(a) 拱底分力之勢力線

荷重 1 位於右半拱。

則成：

$$A = \frac{x}{l} \quad B = \frac{l-x}{l} \dots\dots\dots(24)$$

按此知拱底之垂直分力，適與兩端攔支樑具跨度 l 之攔支力相等，

A 及 H 之合力，即為 A 之拱壓力，必由所設之荷重經拱頂關節 C 而來，故在 C 點之靜力矩為零，是以：

$$A \cdot \frac{l}{2} - H \cdot f = 0$$

由是得：

$$H = \frac{A \cdot l}{2f}$$

取公式 (24) 中之 A 值代入得：

$$H = \frac{x}{2f} \dots\dots\dots(23a)$$

故 H 勢力線係一直線，其所經之點為：

$$x=0; \quad H=0 \quad \text{即經過 } B_0 \text{ 點}$$

$$x = \frac{l}{2}; \quad H = \frac{l}{4f} \quad \text{即經過 } C' \text{ 點}$$

荷重 1 位於左半拱。

因係對稱拱，故此段 H 勢力線，與荷重在 C 之右方者相同，其所求 H 勢力線之左支段，即為 A_0C' 線。如拱架之於中線不作對稱者，則 H 勢力線，按照上法，亦可易於求得，

$$\frac{l}{4f} \text{ 係示一力 (原來 } \frac{l}{4f} \cdot 1t)$$

至力之比例尺，可以任意採用。

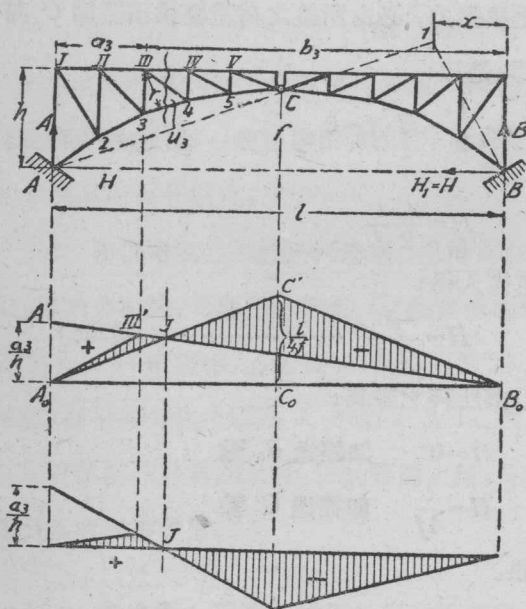
設 $l=48 \text{ m}$, $f=6 \text{ m}$, 則得 $\frac{l}{4f} = 2t$

(b) 下桁條 34 受張力 U_3 之勢力線 (第 24 圖)

經過 U_3 與同區中諸桁條，置一剖線，其力矩點為 III。

在剖線一側拱架上所作用之力，對於力矩點 III 之力矩公式為：

$$0 = M_{III} - U_3 \cdot r$$



第 24 圖

式中 M_{III} 為剖線一側所有外力之力矩，如以剖線一側諸外力之垂直分力之力矩為 M_{vIII} ，水平分力之力矩為 M_{hIII} ，則 $M_{III} = M_{vIII} + M_{hIII}$ ，故其力矩公式為：

$$U_3 \cdot r = M_{vIII} + M_{hIII}$$

再因 $M_{hIII} = -H \cdot h$ ，故成： $U_3 = \frac{1}{r} (M_{vIII} - H \cdot h)$ 是式作適宜之寫法為：

$$U_3 = \frac{h}{r} \left(\frac{M_{vIII}}{h} - H \right) \dots\dots\dots(25)$$

式中 $\frac{h}{r}$ 係一不名數，僅與拱樑之形式有關，對於各桁條，均有定值；故稱之為勢力線縱座標之乘數，而以 μ 示之。 U_3 勢力線與括弧內之值相符，祇以 μ 值乘之而已。括弧中之勢力縱座標，為第一項 $\frac{M_{vIII}}{h}$ 與第二項 H 之差值，第二項之勢力縱座標 H 值，前經求得，而 $\frac{M_{vIII}}{h}$ 之值，亦屬預知。

是以祇需求外力之垂直分力之力矩勢力線，再以所得各值，用定值 h 除之。垂直力之力矩，與兩端擱支樑之具跨度 l 者，完全相同，因此拱

底之垂直分力，一如攔支樑，而與垂直荷重，互成平衡，故可繪 M_{vIII} 勢力線與第二節中之 M 相同，而除數 h 則可按照第四節例題 2 之法則求得，惟在攔支點之垂直下方，不繪 a 及 b ，而繪 $\frac{a}{h}$ 及 $\frac{b}{h}$ 也。因得定律如次：

法於左攔支點以任何比例尺繪 $\frac{a_3}{h}$ ，連結其頂端 A' 與 B_0 ，令 $\overline{A'B_0}$ 線與經過力矩點之垂直線相交，乃得交點 III' ，再連結 $\overline{A_0III'}$ ，遂得 $\overline{A_0III'B_0}$ 為 $\frac{M_{vIII}}{h}$ 之勢力線，該勢力線之各縱座標，尚須減去 H 勢力線各值，故就同一橫座標軸 $\overline{A_0B_0}$ ，以同一比例尺，繪成 H 勢力線，法在中央作 $\frac{l}{4f} = C_0C'$ ，再將 C' 連接 A_0 及 B_0 ，即得 H 勢力線 $A_0C'B_0$ ，兩勢力面之差，如第 24a 圖劃有並行線之 $A_0III'J$ 及 $JC'B_0$ ，為 U_3 之勢力面。前者為正，後者為負。

J 為其荷重分界點。

此處應特殊注意者，即以上法所得之值，尚須以乘數 μ 乘之耳。

為便於成組單力之移動起見，各勢力線值，可就水平之橫座標軸繪起，勢力線改成是形，事極顯易，第 24b 圖示其簡明之構造，而將正值向上，負值向下。

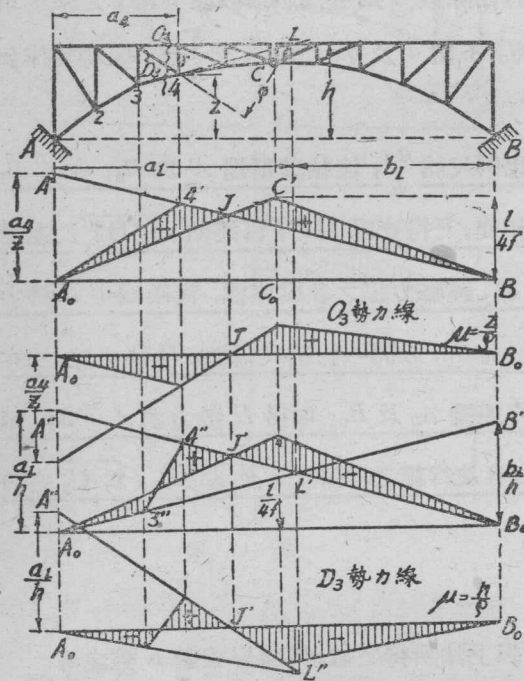
(c) 上桁條張力 O_3 之勢力線

以 4 為力矩點 (第 25 圖)，一如在 (b) 所得：

$$O_3 \cdot r + M_{v_4} + M_{h_4} = 0 \quad M_{h_4} = -H \cdot z$$

$$O_3 = -\frac{z}{r} \left(\frac{M_{v_4}}{z} - H \right) \dots\dots\dots (26)$$

一如 (b) 所示法則，在 A 點之垂直下方取 $\overline{A_0 A'} = \frac{a_1}{z}$ ，繪 $A' B_0$



第 25 圖

線，令與經過力矩點 4 之垂直線相交，其交點為 $4'$ ，連結 $A_0 4'$ 線，然後依已得之座標值，作 H 勢力線，法用與 $\frac{a_1}{z}$ 之同一力比例尺繪 $\frac{l}{4f} = \overline{C_0 C'}$ ，連結 $A_0 C'$ 及 $B_0 C'$ ，今其乘數為 $\mu = \frac{z}{r}$ ，圖中劃並行線之面，即為所求之勢力面，至乘數之負號，在第 25 圖中業已注意及之。勢力線改就水平軸繪起，亦可按 (b) 所示之法則行之。

(d) 對角桁張力 D_3 之勢力線 (第 25 圖)

設其力矩點為 L ， D_3 之臂長為 ρ ，而在剖線左側所作用之垂直外力，對於力矩點 L 之力矩為 $M_v L$ ，則得力矩公式如次。

$$0 = -D_3 \cdot \rho + M_v L - H \cdot h$$

$$D_3 = \frac{h}{\rho} \left(\frac{M_v L}{h} - H \right) \dots \dots \dots (27)$$

$\frac{M_v L}{h}$ 勢力線之求法如次：在 A_0 取 $\frac{a_L}{h}$ 力，得 A'' 點，與 B_0 相連結，此線即 $\frac{M_v L}{h}$ 之勢力線，而適於節點 4 右側荷重之用，即 $B_0 A''$ 一段是也。再於 B 之垂直下方取 $\frac{M_v L}{h} = B_0 B''$ 力，連結 $B'' A_0$ ，是線為適於節點 3 左側荷重之勢力線，亦即 $A_0 B''$ 一段是也。

至 3 4 分區間之勢力線，可按前法，連結 $B'' A''$ 兩點即得。驗： $A_0 B''$ 及 $A'' B_0$ 兩線，必相交於力矩點 L 之垂直下方，即 L' 點是，吾人亦可應用此交點 L' 而作勢力線，法令 $A'' B_0$ 線與 $L L'$ 垂直線相交，連結交點 L' 與 A_0 便成。所應留意者，即 $A_0 B''$ 線適用於 3 之左側，而 $A'' B_0$ 線則適用於 4 之右側也。

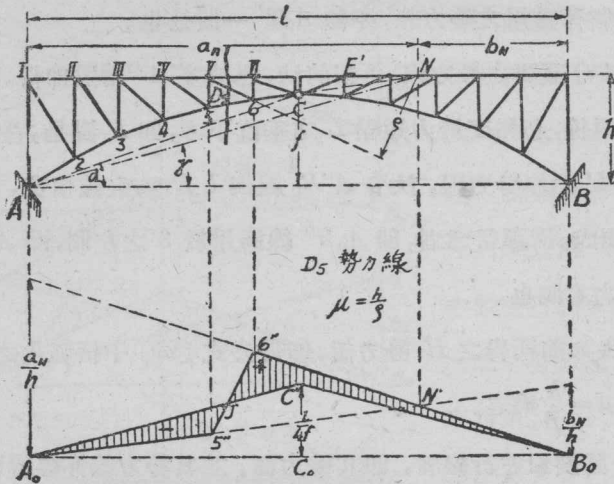
再減去如前所得之 H 勢力值，即得公式 (27) 中括弧內之勢力面，卒以乘數 $\mu = \frac{h}{\rho}$ 乘之。

第 25 圖劃以並行線者，即其勢力面，並其勢力線亦經變更而由水平軸繪起。

D_3 勢力面 (第 25 圖) 有荷重分界點二，其一位於 D_3 桁條之分區間，尚有若干桁條，尤以位於拱頂附近之分區間者，則其另一荷重分界點，恆告烏有，第 26 圖示其例，如前之 D_3 桁條者，今繪 D_5 桁條之勢力線，其力矩點為 N (第 26 圖)，得 $M_v L$ 勢力線為 $A_0 5'' 6'' B_0$ ，及 H 勢力線為 $A_0 C'' B_0$ ，其二值之差，即第 26 圖中劃有垂直線之勢力面者是也。位於 J 之左側為負面積，右側為正面積。至第二荷重分界點付闕如之條件為：

$$\frac{l}{4f} < \frac{a_N}{2h} \quad \text{即} \quad \frac{f}{l} > \frac{h}{a_N}$$

亦即 $\text{tg } \alpha > \text{tg } \lambda$, 意指力矩點 N 位於上桁條與 AC 線交點 E' 之右方也。此係適於左半拱之情形。



第 26 圖

(e) 垂直桁 III 3 之張力 V_3 勢力線 (第 27 圖)

今斜置其剖開面, 並設力矩點為 L , V_3 之臂長為 t , 則得力矩公式

如次:

$$0 = M_{vL} + M_{hL} + V_3 \cdot t \quad V_3 = -\frac{M_{vL} + M_{hL}}{t}$$

$$M_{hL} = -H \cdot h \quad \text{故成:}$$

$$V_3 = -\frac{h}{t} \left(\frac{M_{vL}}{h} - H \right) \dots\dots\dots (28)$$

其勢力線一如第 27 圖所示, 繪法自易明瞭, 以此與 (d) 之對角桁

勢力線完全相同也。

(f) μ 值之意義

設某簡單桁樑之擱支點 A 爲固定, B 點可作水平移動, 二擱支點上有水平力 $H=1$ 由外向內作用, 則在一下桁條 (第 28 圖) 所產生之力爲:

$$U_3 = -\frac{h}{r}$$

在一上桁條爲:

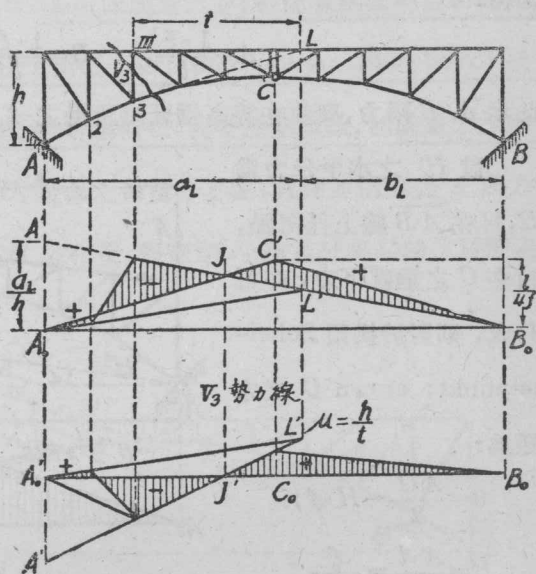
$$O_3 = \frac{z}{r'}$$

在一對角桁條爲:

$$D_3 = -\frac{h}{\rho}$$

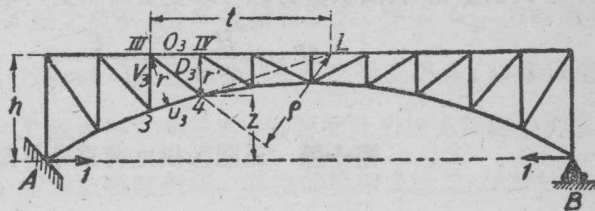
在一垂直桁條爲:

$$V_3 = \frac{h}{t}$$



第 27 圖

上列諸值, 悉等於公式(25), (26), (27), (28) 中之乘數 μ , 僅其符號相反耳。是故此等桁



第 28 圖

條之受力, 可謂由 A 及 B 所作用之 $H=1$ 自內向外也。吾人亦可應用

圖解法將 μ 值求得，法在克來馬拿圖中，以 $H=1$ 而自內向外作用。

(g) 三關節拱樑之具不等高拱底者 (第 29 圖)。

如以拱底壓力分成 AB 連結線上之 H' 分力，及垂直分力 A, B ，則得：

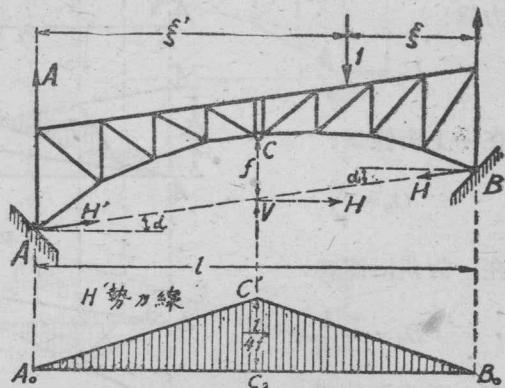
$$A = \frac{1 \cdot \xi}{l}, \quad B = \frac{1 \cdot \xi'}{l}$$

此示 A, B 兩力，與前在等高拱底時所得之 A, B ，互為相等。

設 H' 之水平分力為 H ，可在 \overline{AB} 線上任何點，自在 C 之垂直下方，亦可分成，則對於拱頂 Scheitelpunkt; crown C 之力矩為：

$$0 = \frac{A \cdot l}{2} - H \cdot f;$$

$$H = \frac{A \cdot l}{2f} = \frac{\xi}{2f}$$



第 29 圖

得 H 與前值相同，故其勢力線可以定全依照上列結果繪之，卒成：

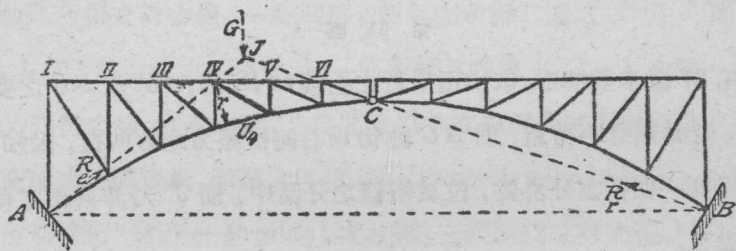
$$H = \frac{H}{\cos \alpha} = \frac{\xi}{2f \cdot \cos \alpha}$$

第十節 三關節拱之荷重分界點

在第九節中既知荷重分界點對於計算若干桁樑有特殊之重要性矣。然如求作勢力線也 (參閱第九節)，檢驗其正確與否也，在在均須應

用荷重分界點之知識，故其價值甚大。普通在桁樑某處之荷重，對於某一桁條，不起任何張力者，是謂該桁條之荷重分界點。

求三關節拱 (Dreigelenkbogen; Three hinged arch) 桁條之荷重分界點一般法則如次：某桁條所屬之半拱，將其拱底與某桁條力矩點相連接，此線與他半拱之拱底 (Kämpferpunkte; Skewback) 拱頂 (Scheitelpunkte; crown) 連結線相交，其交點垂直線，即荷重分界點之所在地。第 30 圖乃求 U_4 桁條之荷重分界點，其法連結拱底 A 與力矩點 IV ，令 \overline{AIV} 線與 \overline{BC} 線相交，得交點 J ，荷重分界點即位於經過 J 之垂直線上。

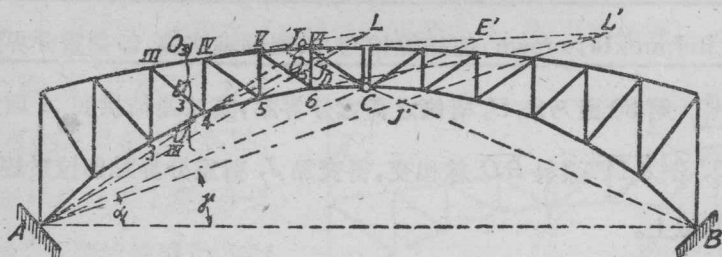


第 30 圖

證明：位於 J 點之荷重，在 B 之拱底壓力，係依 BC 方向產生，在 A 之拱底壓力，乃沿 AJ 方向產生，以 A 之拱底壓力，須當作諸外力 R_r , G , R_l 。在 J 點平衡之第三力，按圖知此力之方向經過力矩點 IV ，切開桁條 U_4 所設之垂直剖線，其左側拱架部份之力矩公式為 $-U_4 \cdot r = 0$ ；以 G 荷重之 R_l 分力，經過力矩點 IV ，故其力矩為零，由是得 $U_4 = 0$ ，此即依上法所得之點，其荷重不使該桁條起任何張力也。

第 31 圖示上桁及對角桁荷重分界點之求法。

有時按照上法求得左半拱桁條之荷重分界點，位於拱頂之右側，則此荷重分界點 並無實用。僅充圖形上之一種意義而已（見第十一節）。對於上項求法，應行假設右側拱底壓力，取 BC 之方向，欲達此目的，勢非將荷重位於左半拱不可，惟有此等荷重地位，庶得適用上項法則也。



第 31 圖

第 31 圖示其情形，取拱頂附近之桁條如 D_5 者， AL' 及 BC 之交點為 J' ，設其地有一荷重，則 BC 非仍為右側拱壓力之方向矣。因知 D_5 桁條僅具一個荷重分界點，位於桁條之分區中，而 J' 乃非真正之荷重分界點也。

由第 31 圖更知力矩點 L' 如位於交點 E' 之右方，則 J' 點亦必位於拱頂之右側， E' 點乃 AC 線與剖線所經之上桁 O_5 延長線之交點，如 $\text{tg } \gamma < \text{tg } \alpha$ ，則此荷重分界點，即告烏有，或無實用，前曾依其他方法（第 26 圖），亦得同一結果。

第十一節 應用“代樑”簡化法，求三關節拱之勢力線。

第 32a 圖示一三關節拱，其節點 m 之力矩勢力線，依前所述，其公

式自易瞭解：

$$M_m = M_{v m} + M_{h m}$$

而以

$$M_{h m} = -H \cdot z_m$$

故

$$M_m = M_{v m} - H \cdot z_m$$

$M_{v m}$ 線之繪法，可按第九節所示，而在左擱支點之垂直線上取 a_m 值。至 H 勢力線則須按第 29 圖，在關節 C 之垂直線上取 $\frac{l}{4f}$ 值，而乘以 z_m 之 H 值，當更以 $\frac{l \cdot z_m}{4f}$ 代之。

第 32b 圖示該勢力線改由水平軸繪起，應用已知法則，求得其所屬之荷重分界點 J_m ，以之再考驗 J_0 及 J' 兩零點地位之準確與否。

如此所得之勢力線，一經觀察，即知在所得二圖之 A' 及 J' 間（或 A_0 及 J_0 間）勢力線之一部份，與一簡單樑具跨度 $A' J' = \lambda$ 在同一地位 m 之力矩勢力線，完全一致，此自擱支點垂直線起至其所屬荷重分界點止完全理想之簡單樑，即謂之代樑 (Stellvertretender Balken)，按諸滿勒白萊斯勞氏 (Müller Breslau) 之法則，三關節拱之勢力線，可以直捷了當繪於水平軸上也。

應用此法繪 M_m 勢力線時，務須先求其所屬之荷重分界點 J_m ，然後再依常用之法則（第二節）繪代樑上 m 點之勢力線 $A' D' J'$ （第 32b 圖），欲完成其勢力線也，更當引長 $\overline{D' J'}$ 線至關節之垂直下方為止，由是得交點 C' ，再與 B' 相連結，此延長直線，試一比較第 32a 及第 32b 二圖之形式，即不難知其是否合理矣，於第三章且可應用動的方法，以引證是法之不謬。

之下方者，非為零點，而 J_n' 點僅存圖形上之一種意義，藉以求得 M_n 勢力線之用耳。對於 $\overline{A''J_n'} = \lambda_n$ 長度代樑上 M_n 線（第 32c 圖）之繪法，一如前例，連結在關節下方之 C'' 與 B'' ，在此則 C'' 位於 $\overline{D''J_n'}$ 線也。

因桁條受力之勢力線，可由其所屬力矩點之力矩勢力線得之，故求桁條之受力也，自可應用同法，例如第 32 圖對於下桁條受力 U 為：

$$-U \cdot r + M_m = 0$$

$$U = \frac{M_m}{r}$$

在第 32b 圖所繪之 M_m 勢力線，同時亦即為 U 之勢力線，僅須以乘數 $\mu = \frac{1}{r}$ 乘之耳。欲令 U 線之不另需乘數也，則須於攔支點之垂直下方，用 $\frac{a_m}{r}$ 以代 a_m 繪之。

對角桁之受力 D ，依第 32 圖為：

$$-D \cdot \rho + M_L = 0$$

$$D = \frac{M_L}{\rho}$$

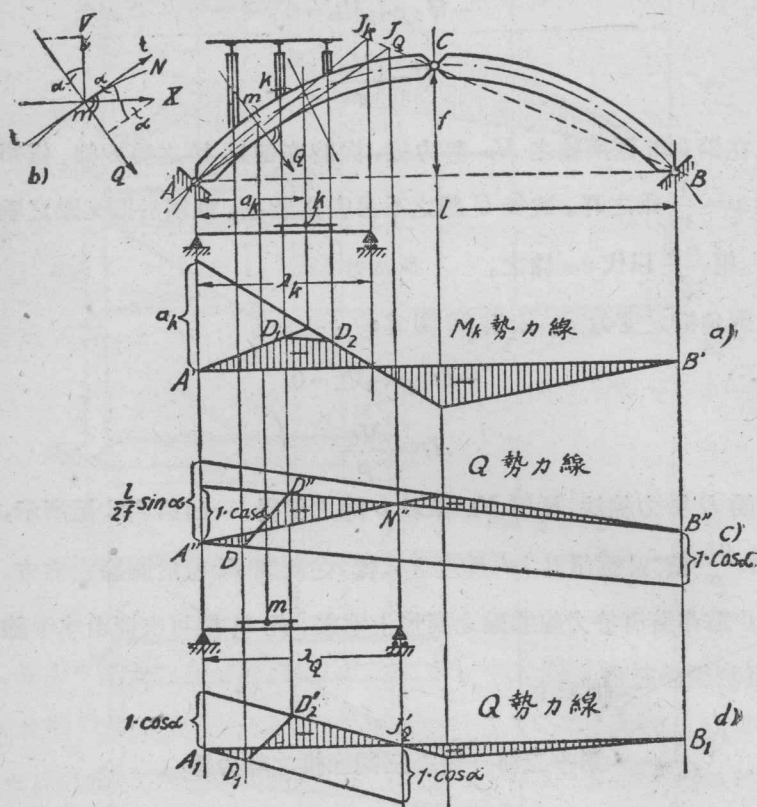
繪 D 勢力線法，可用 M_L 線以 ρ 除之即得，一如第 32d 圖所示，在 A_1 繪 $\frac{a_L}{\rho}$ 值，並應用具 λd 長度之代樑，在此則 Jd 位於關節之右方，是故 Jd 點亦僅有勢力線零點之圖形上意義，此 D 線可直捷由水平線繪起，且無須乘數也。

第十二節 實心三關節拱之勢力線

心核點力矩之勢力線：第 33a 圖示一實心三關節拱心核點 k 力

矩之勢力線，至所屬之荷重分界點之如何求得也， λ_k 長度之代樑若何利用也，勢力線之從何繪起也，均毋容解說，即易明瞭，以今爲間接荷重，一如第 33 圖所示，而 k 位於二節點之間，故依第四節中所得方法，尙須添繪 $\overline{D_1 D_2}$ 直線也。

m 點之剪力勢力線：拱樑之剪力 Q ，乃剖線一側諸外力對於彎曲



第 33 圖

半徑方向之分力。設拱軸 m 點上所置之切線 $t-t$ ，其對於水平線之傾斜角為 α ，則按 33b 圖所示力之分解為：

$$Q = V \cdot \cos \alpha - H \cdot \sin \alpha \dots\dots\dots (29)$$

設在 m 點左側諸力之垂直分力為 V ，則上式可適於任何荷重之用，按此更知 V 值與簡單樑之具跨度 \overline{AB} 在同一地點 m 之剪力 Q_0 者相同，故公式 (29) 可變更如次：

$$Q = Q_0 \cdot \cos \alpha - H \cdot \sin \alpha$$

如於 AB 長之簡單樑 Q_0 面，乘以 $\cos \alpha$ ，再將乘有 $\sin \alpha$ 之 H 面減去，即得 Q 之勢力面，此業於第 32c 圖詳示，而不必其他解說矣，惟其荷重須經橫樑之傳達，成間接荷重，故應斜置其勢力線 $\overline{D'D'}$ ，此當特殊注意者也。

依同法亦可求得拱切線 $t-t$ 方向之正交力 N 勢力線，再照第 33b 圖所示力之分解得下式：

$$N = V \sin \alpha + H \cos \alpha$$

如總勢力面之零點 N' (第 33c 圖) 為已知，則由 Q 勢力線知自 $Q_0 \cdot \cos \alpha$ 面立可繪成 $H \cdot \sin \alpha$ 面。

剪力 Q 之荷重分界點：依前述拱樑剪力之標準，知荷重 $1t$ 所產生之左側拱底壓力，如對於 Q 之方向無分力，而垂直於彎曲半徑者，則其地剪力 Q 為零。若令此左側拱底壓力與右側拱底壓力 \overline{BU} 線相交，則得荷重分界點 J_0 ，而第 33c 圖所示勢力面之零點 N' ，乃位於其垂直下方。

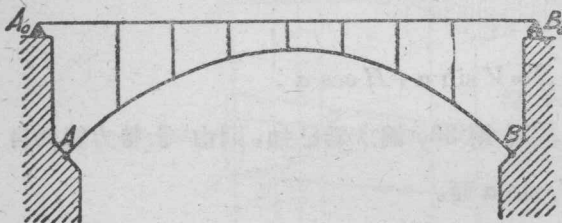
吾人亦可應用代樑方法以求 Q 勢力線，祇須繪 $\overline{A_1 J Q'} = \lambda Q$ 長之代樑，作其上 m 點乘以 $\cos \alpha$ 之 Q_0 面（第 33d 圖），再延長 $\overline{D_2' J Q'}$ 線與關節之垂直線相交，其交點再與 B_1 相連結，此勢力零點 $J Q'$ ，今位於關節垂直線與 B_1 之間，故亦僅具圖形上之意義而已。

第十三節 受樑加固之拱勢力線

AB 桁條拱（第 34 圖）受樑之加固，並用直柱互相固結。如其結構欲成靜力學上之定式，則此加固樑，必具關節（Gelenk; hinge）。

對於靜力上的形勢

A, B 兩拱底（第 34 圖）係固定，故每拱底各具二個未知值，設中部節點之數為 x ，則拱條之數為 $x+1$ ，而拱柱之數為 x 。 $A_0 B_0$ 樑有一固定攔支點 A_0 ，及一可作水平移動之攔支點 B_0 ，二攔支點共具三個未知



第 34 圖

值，而樑係一體，可供三個平衡條件，拱之每個中部節點，則可供二個平衡條件，其未知值之總數為：

拱底未知值

$$2 \cdot 2 = 4$$

樑攔支點未知值

$$2 + 1 = 3$$

拱條及拱柱之受力

$$x + 1 = x + 1 + 2x$$

$$\text{未知值之總數} = 8 + 2x$$

其可供之公式為：

x 個節點有	$2x$ 公式
2 個拱底節點有	4 公式
1 根 $A_0 B_0$ 樑有	3 公式

總數 $7+2x$ 公式

共具 $8+2x$ 數之未知值，而僅有 $7+2x$ 公式，相與對持，故此結構屬諸一級之靜力不定式 (einfach statisch unbestimmt; statically indeterminate to the 1 degree)。

設於 C 處裝一

關節(第 35 圖)，則

劃分樑為二體，共

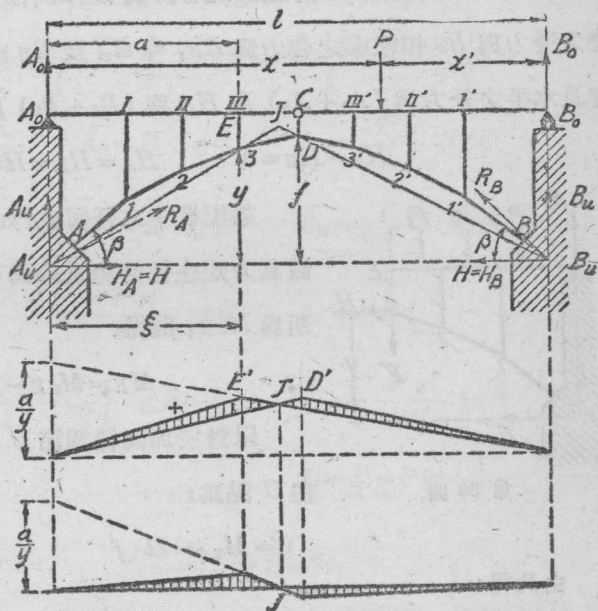
有 6 個可供之公

式，以在 C 處裝有

關節，而增加其未

知值之數為 2，是

故未知值之總數今

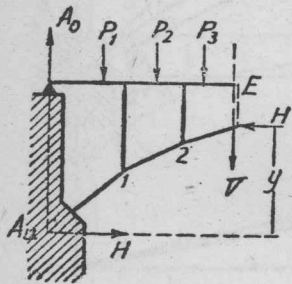


第 35 圖

之定式結構，作為將來計算之標準。

外力：荷重對於加固樑之攔支點 A_0 及 B_0 ，僅起垂直之攔支力，以 B_0 乃一可作水平移動之攔支點，故僅能產生垂直攔支力，而 A_0 攔支力之水平分力亦須為零，良以加固樑上所作用之力，務成平衡也。樑上有 P, B_0, A_0 ，拱柱之頂力，及在 A_0 攔支力所或有之水平分力，因其末一種力，乃加固樑上所作用之惟一水平力，欲維持其平衡，勢非為零不可。——在 A, B 兩處對於桁條拱起反壓力，易知其方向與末根桁條相一致(在 $\overline{A1}$ 及 $\overline{B1'}$)，而於末根桁條 $\overline{A1}$ 與攔支點 A_0 之交點，以由 $\overline{A1}$ 桁條之受力與攔支力 A_0 所組成之合力為 R_A ，同法於右側以由 $\overline{B1'}$ 桁條之受力與 B_0 相組成之合力為 R_B ，今 R_A 及 R_B 成拱架之支力，其垂直及水平之分力為 $(A_0 + A_u)$ 及 H_A 與 $(B_0 + B_u)$ 及 H_B ，遂成下式：

$$H_A - H_B = 0 \quad H_A = H_B = H$$



第 36 圖

加固樑上之任何處，如 E 點(第 36 圖)，設其力矩在任何荷重時為 M_E ，其垂直力之力矩為 M_{vE} ，則得：

$$M_E = M_{vE} - H \cdot y$$

以對於加固樑關節 C 之力矩必為零，故在 C 點為：

$$0 = M_{vc} - H \cdot f$$

由此得：

$$H = \frac{M_{vc}}{f} = \frac{M_v(\text{中央})}{f} \dots\dots\dots(30)$$

此與第 24 圖所示三關節拱之值相同，故其勢力線之作法，亦與第 24a 圖相同，尚須作特別申述者，即計算 H 值時，不以關節 C 位於加固樑上，而以其垂直下方桁條拱之 D 點，作為頂關節之用。且 y 及 f 之尺寸，非自拱底之連結線，而自 A_u, B_u 之連結線起量。

所求之外力為：

$$H, A_u, A_o, B_u, B_o$$

(a) 荷重 P 在關節 C 之右部 (第 25 圖)

$$(A_o + A_u) l = P x' \quad (\text{以 } B_u \text{ 為力矩點})$$

$$(B_o + B_u) l = P x \quad (\text{以 } A_u \text{ 為力矩點})$$

$$M_v(\text{中央}) = \frac{P x'}{l} \cdot \frac{l}{2} \quad H = \frac{M_v(\text{中央})}{f} = \frac{P x'}{2f}$$

$$\text{tg } \beta = \frac{A_u}{H} \quad A_u = H \cdot \text{tg } \beta \quad A_u = \frac{P x'}{2f} \text{tg } \beta$$

$$B_u = H \cdot \text{tg } \beta \quad B_u = \frac{P x'}{2f} \text{tg } \beta$$

$$A_o = \frac{P x'}{l} - A_u = \frac{P x'}{l} - \frac{P x'}{2f} \text{tg } \beta \quad A_o = P x' \left(\frac{1}{l} - \frac{1}{2f} \text{tg } \beta \right)$$

$$B_o = \frac{P x}{l} - B_u = \frac{P x}{l} - \frac{P x'}{2f} \text{tg } \beta = P - \frac{P x'}{l} - \frac{P x'}{2f} \text{tg } \beta$$

$$B_o = P - P x' \left(\frac{1}{l} + \frac{1}{2f} \text{tg } \beta \right)$$

$$\left. \begin{aligned} H &= \frac{P x'}{2f} & A_u &= \frac{P x'}{2f} \text{tg } \beta = B_u \\ A_o &= P x' \left(\frac{1}{l} - \frac{1}{2f} \text{tg } \beta \right) & B_o &= P - P x' \left(\frac{1}{l} + \frac{1}{2f} \text{tg } \beta \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots (31)$$

(β) 荷重 P 在關節 C 之左部

$$\left. \begin{aligned} H &= \frac{Px}{2f} & A_u &= H \operatorname{tg} \beta = \frac{Px}{2f} \operatorname{tg} \beta = B_u \\ A_o &= \frac{Px'}{l} - A_u = \frac{Px'}{l} - \frac{Px}{2f} \operatorname{tg} \beta = P - Px \left(\frac{1}{l} + \frac{1}{2f} \operatorname{tg} \beta \right) \\ B_o &= \frac{Px}{l} - \frac{Px}{2f} \operatorname{tg} \beta & B_o &= Px \left(\frac{1}{l} - \frac{1}{2f} \operatorname{tg} \beta \right) \end{aligned} \right\} (32)$$

外力之勢力線：此 H 勢力線（見第 37 圖）與三關節拱所得之法則在第 24 圖所繪者，完全相符，而以 A_u 及 B_u 兩點為拱底， D 為第三關節（頂關節），依從來研究之結果，證實此由樑加固之桁條拱，其對於外力情形，一如三關節拱之具 A_u ， B_u 及 D 等之關節者。

A_u 及 B_u 之勢力線，可以援用公式 (31) 及 (32)，而繪於第 37 圖，即無其他申說，亦易瞭解。

A_o 勢力線：

$$\begin{aligned} \text{荷重在 } C \text{ 之右方：} & \quad \text{如 } x' = 0 & \quad \text{則 } A_o = 0 \\ & \quad \quad \quad x' = l & \quad A_o = P \left(1 - \frac{l}{2f} \operatorname{tg} \beta \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{荷重在 } C \text{ 之左方：} & \quad \text{如 } x = 0 & \quad \text{則 } A_o = P \\ & \quad \quad \quad x = l & \quad A_o = -\frac{Pl}{2f} \operatorname{tg} \beta \end{aligned}$$

二直線相交於關節 D 之垂直線上，在此二種荷重情形之公式中，如 $x' = \frac{l}{2}$ 及 $x = \frac{l}{2}$ ，則可得同值： $A_o = \frac{P}{2} \left(1 - \frac{l}{2f} \operatorname{tg} \beta \right)$ 。

零點 J_1 位於距頂點 ξ 處，故此荷重分界點可直接得之如次：左半拱之任何荷重在 B_u 所產生之拱底壓力，必經過 D 點，以 D 按前有拱

頂關節之作用也。設荷重在 K ，則 A_u 之拱底壓力，必經 P 力與右側拱底壓力 R_B 之交點 L 而行，在 123 力圖中，如 $\overline{12} = P$ ，則是圖即示該力之大小， R_A 之拱底壓力，由於未根桁條之受力 S_A 與 A_o 相合成，自力圖之 1，作線與拱底桁條 S_A 並行，再由 3 作垂線，即得 R_A 之分力在 $\overline{34} = A_o$ 及 $\overline{41} = S_A$ ，荷重 P 如經移動，則 L 交點亦必沿 $\overline{B_u D}$ 線而遷移，力圖中 $\overline{23}$ 線之方向，恆定不變，而 $\overline{31}$ 線則否，其他荷重地位，如力圖之點線 123'4'1 所示，荷重愈向右移動，則 R_A 拱底壓力之方向與拱底桁條，愈相逼近，而其分力 A_o 則愈小。如荷重在 J 點，則拱底壓力之方向與拱底桁條，互相疊合，而桁條乃承受拱底壓力之全部。 A_o 之為零，亦可自力圖中得之，如荷重地位越過 J 點，例如 N ，則 A_o 為負，而成 123'4'1 之力圖矣。

由是得求 A_o 勢力線之簡易法則如次：延長拱底桁條之方向而與 $\overline{B_u D}$ 線相交，亦即達荷重分界點 J ，由 J 作垂線迄勢力線之橫座標軸，再繪代樑 $\overline{A J_1}$ 之 A 線，並完成此勢力線，一如前法(第 37 圖)。

B_o 勢力線：與 A_o 勢力線之求法，完全相同(第 37 圖)。

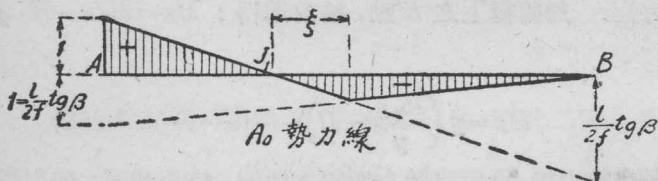
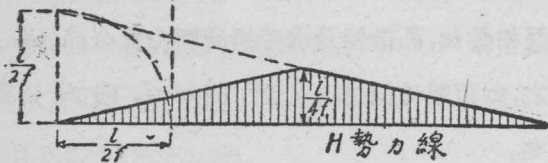
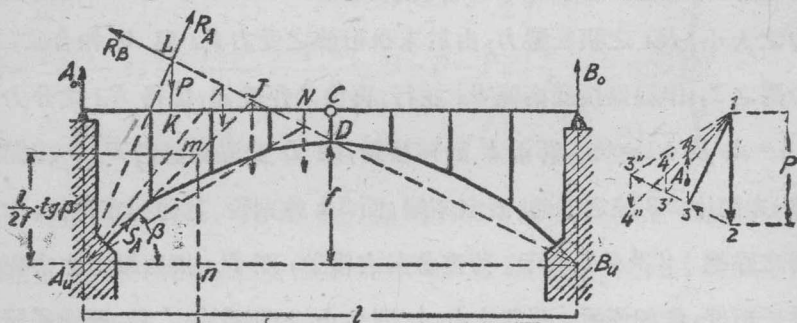
加固樑之力矩：加固樑上之 E 點，按前則得： $M_E = M_v E - H \cdot y$ (第 36 圖)。

$$M_E = y \left(\frac{M_v E}{y} - H \right) \dots\dots\dots (33)$$

依此公式求作勢力線，得與前數次所繪之法則，完全相同，即以括弧中兩部份之勢力值，分別繪之，然後相加，而卒以乘數 $\mu = y$ 乘之耳。

第 35 圖示加固樑上 E 點之力矩勢力線，其勢力面並劃以並行線。

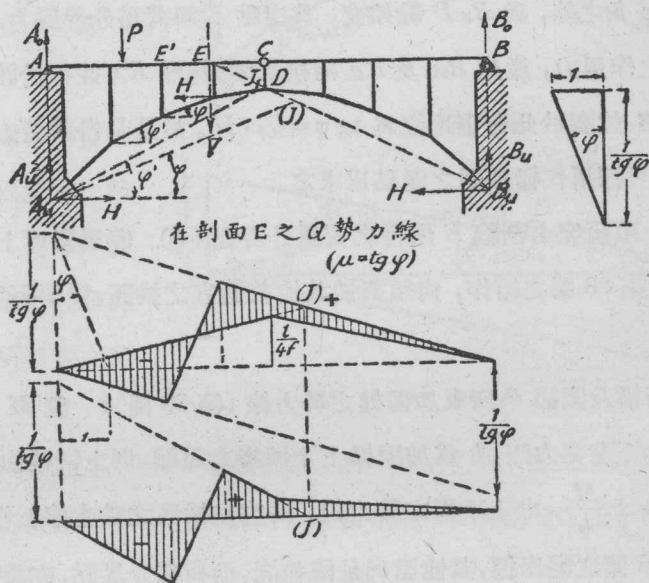
M_E 爲零之荷重地位, 當 $M_{vE} - H \cdot y = 0$ 時, 亦即在剖線右側荷重時, $A \cdot \xi - H \cdot y = 0$ 或 $A : H = y : \xi$ 是也。吾人僅須求橫樑各點之勢力



第 37 圖

線，亦即拱柱之所在地，例如求第 35 圖之 $\overline{III 3}$ 拱柱，連結 A_u 與 3，與 $\overline{B_u D}$ 線相交於 J 點，此 J 即為加固樑上 III 點力矩之荷重分界點，如荷重在 J ，則產生 R_A 及 R_B 之拱底壓力，如設剖線貼靠 $\overline{III 3}$ 之左側，則拱底壓力 R_A 行經點 3，而成 $A : H = y : \xi$ 。

加固樑之剪力及其勢力線：對於 E 剖線之任何荷重，按第 38 圖其剪力為： $Q = (A_o + A_u) - P - V$ 。



第 38 圖

式中 V 示剖線 E 剖開之拱桁條，其受力之垂直分力。如 $A_o + A_u = A$ ，則 $Q = A - P - V$ 。

$A - P$ 係一簡單攔支樑 AB 之剪力，如 $Q_o = A - P$ ，則 $Q = Q_o - V$ ，

復因 $\operatorname{tg} \varphi = \frac{V}{H}$, 故 $V = H \cdot \operatorname{tg} \varphi$ 而成:

$$Q = \operatorname{tg} \varphi \left(\frac{Q_0}{\operatorname{tg} \varphi} - H \right) \dots\dots\dots (34)$$

第 38 圖顯示 Q 勢力線, 其乘數為 $\mu = \operatorname{tg} \varphi$ 。

如括弧值為零, 則 Q 亦必為零, 即 $\operatorname{tg} \varphi = Q_0 : H$ 。由是得求荷重分界點之法則如次: 由拱底 A_u 作與研究有關之桁條並行線, 即作一與水平成 φ 角之線, 與 $\overline{B_u D}$ 線相交, 其交點 J 即荷重分界點也。因在 J 垂線上之作用力, 產生 R_A 及 R_B 兩拱底壓力, 而 R_A 並行於該研究有關之桁條, 故對於此荷重地位為 $\operatorname{tg} \varphi = Q_0 : H$ 。於是易得其剪力之勢力線, 且亦可採用代樑法則之優點以求之。

依上項研究由割線 E 所得之荷重分界點 (J), 僅屬圖形上之重要意義, 故第 38 圖之繪作, 尚須對於其他較適宜之拱區, 從事研究, 而得 J_1 點。

由桁構及關節 C 所成加固樑之勢力線 (第 39 圖): 設 M 為某桁條所屬力矩點之力矩, h 為加固樑上下兩桁之距離, 則上桁條或下桁條之受力為 $\pm \frac{M}{h}$, 求上下桁之勢力線, 法在左拱底之垂直線上作 $\frac{a}{h y}$, 以代第 35 圖之縱座標, 其他悉與是圖相同, 而荷重分界點, 亦復一如其所屬之力矩也。

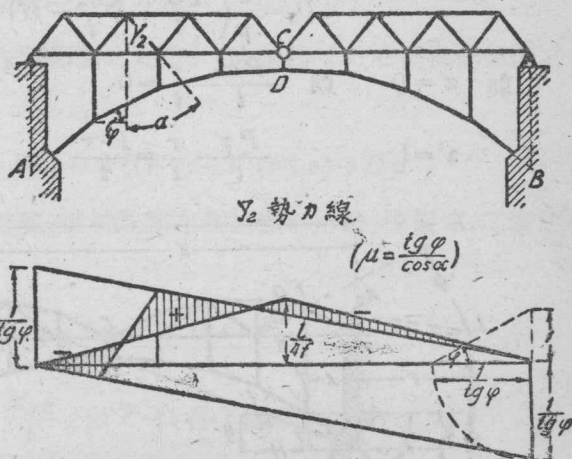
對角桁及垂直桁之勢力線求法, 在並行桁樑與弧形桁樑各異。

加固樑之屬於並行式且為水平者, 其中某對角桁之受力為 $Y_2 = Q_2 \cos \alpha$, 而該桁條與垂直線所成之角為 α 。

故 Y_2 勢力線與 Q_2 勢力線相同，各縱座標僅須除以 $\cos \alpha$ 而已。參閱公式(34)成：

$$Y_2 = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos \alpha} \left(\frac{Q_0}{\operatorname{tg} \varphi} - H \right) \dots \dots \dots (35)$$

Q 之乘數如以 $\cos \alpha$ 除之，即成此處適用之乘數 $\mu = \operatorname{tg} \alpha : \cos \alpha$ ， Q 勢力線如應用今所得之 μ ，則成 Y_2 勢力線矣(第39圖)。



第 39 圖

加固樑之上下桁，一屬於弧線，而一屬於直線，或二者均屬於直線(第40圖關節在C)，其對角桁 D_2 ，由割線 II 所割開之上下兩桁條之交點為 L 。

荷重在右半拱：拱底壓力 A 必經 D 點，在 A_u 處與攔支力 A_0 相合，而成垂直分力 $A_0 + A_u = \frac{P \cdot x'}{l} = A$ 及水平分力 H 。

在割線 II 左側拱樑部份之作用力，除 D_2 ， O 與 U ，及 A 與 H 而外，尚有割線所及之拱桁條，其分力為 H 及 V ，而 $V = H \cdot \operatorname{tg} \varphi$ ，以 L

爲旋點之力矩公式如次：

$$D_2 \rho - A \cdot r + V_1 (r+e) - H \cdot y = 0$$

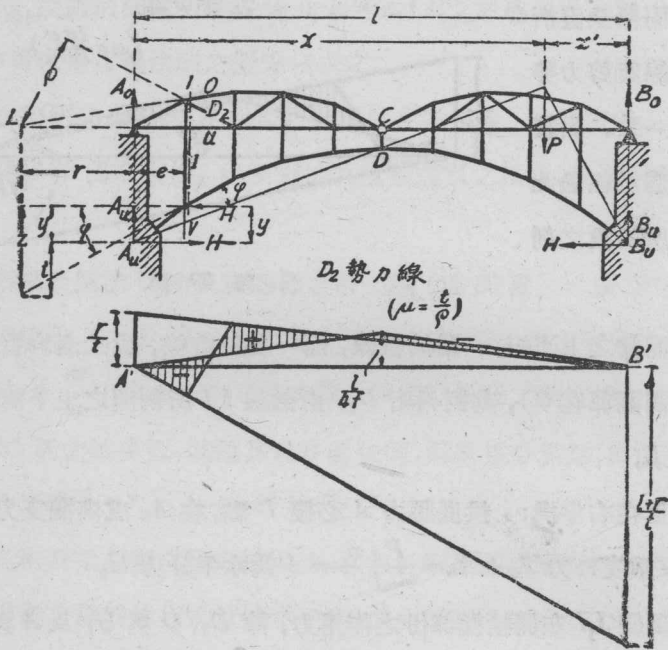
$$D_2 = \frac{1}{\rho} \{ A \cdot r - H [(r+e) \operatorname{tg} \varphi - y] \}$$

按第 40 圖 $z = (r+e) \operatorname{tg} \varphi$ 及 $z-y=t$ 故

$$D_2 = \frac{t}{\rho} \left(\frac{P x'}{l} \cdot \frac{r}{t} - H \right) \dots \dots \dots 36)$$

如 $x' = 0$ 則 $\frac{P x'}{l} \cdot \frac{r}{t} = 0$

$x' = l$ $\frac{P x'}{l} \cdot \frac{r}{t} = \frac{P \cdot r}{t}$



第 40 圖

是線限用於 $x' = \frac{l}{2}$ ，以 $P=1$ 而於 A 之垂直下方繪 $\frac{r}{t}$ ，連結頂端與在 B 之零點便成。

荷重在左半拱， D_2 分區右側節點之右方：在剖線 II 左側拱樑部份之作用力，一如前述，僅 A 拱底壓力之方向及大小，起有變更，吾人仍得同一之 D 公式及同一之勢力線。

荷重在 D_2 分區左側節點之左方：在剖線 II 右側拱樑部份之力矩為：

$$0 = -D_2 \rho - B(l+r) - V(r+e) + Hy$$

V 及 H 自共有一種符號，但於觀察左側拱樑部份時，依假定，二者適得其反，而成：

$$D_2 = \frac{t}{\rho} \left[-\frac{Px}{l} \frac{(l+r)}{t} - H \right] \dots \dots \dots (37)$$

括弧中之第一項 = $-\frac{M_v L}{t}$ ，以 $P=1$ 得下值：

如 $x=0$ 則 $-\frac{x}{l} \left(\frac{l+r}{t} \right) = 0$

$x=l$ $-\frac{x}{l} \left(\frac{l+r}{t} \right) = -\frac{l+r}{t}$ 依此繪作第 40 圖之勢力線而具

乘數 $\mu = \frac{t}{\rho}$ 。

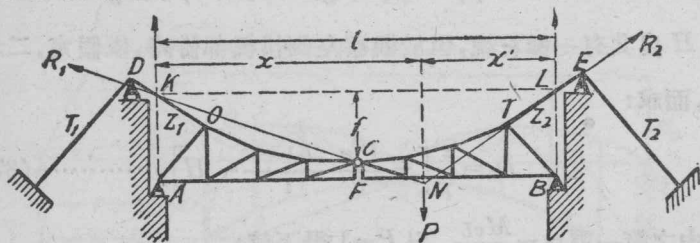
該桁條所在之分區間，按第四節定律，連結左右兩節點下所屬之勢力值便成。

所有加固樑下之垂直柱，其原理與對角桁相同，僅其剖線抵達加固樑者，須作傾斜，或取一節點為根據，惟此節點上無對角桁，而由上下桁

及垂直柱所成。其原理可應用第四節所示之法則證實之。

第十四節 三關節桁構懸樑之勢力線

桁構懸樑 (Hängeträger; suspended truss) (第 41 圖) 非他, 依原理言, 實一倒拱耳。A, B 兩擱支點可作水平移動, C 為關節, D, E 亦為可作水平移動之擱支點, 用鐵索攀着, 以維平穩, 其水平分力由高險之 D, E 點, 傳達下座, 一如第十三節之方法, 於此亦殊易證明其屬於靜力之定式結構也。



第 41 圖

其未知值之數：在 A, B, D, E 有 4 個擱支點未知值, 在 C 有 2 個關節未知值, 2 桁條之受力 Z_1 及 Z_2 , 2 鐵索之拉力 T_1 及 T_2 , 總計共有 10 個未知值。

可供之公式：2 個桁構部份 (AOCF 及 BTCF) 各有 3 個公式, 2 個節點 (D 及 E) 各有 2 個公式, 因得 $2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 10$ 個公式。

A, B 兩擱支點, 須得活動, 庶因彈性及寒暑關係而所起節點之移動, 不受阻礙。

外力：活動荷重 P 位於懸樑之任何部份, 在 A, B 產生垂直之擱

支力，於 K, L 兩點復與 \overline{DKO} 及 \overline{TLE} 兩桁條之拉力，即 Z_1 及 Z_2 相合。此剖成之理想樑上所作用之外力，僅存三個：即 $P, R_1 (=Z_1$ 與 A 之合力) 及 $R_2 (=Z_2$ 與 B 之合力) 是也。而 K, L 兩點則相當於三關節拱之拱底。不載荷重之半邊樑，其支力 R_1 之方向，依諸成律，除經 K 而外，尚須過關節 C, R_2 之地位，亦由此定奪，以 R_2 必經 L 及 N 也。

如以 $P = 1t$ ，則得下式，一如在拱：

$$A = \frac{x'}{l}, \quad B = \frac{x}{l}, \quad \frac{Al}{2} - Hf = 0, \quad \text{故 } H = \frac{Al}{2f} = \frac{x'}{2f}$$

在第 42 圖所示 H 及其他桁條之勢力線，得自下列簡法求之：

上桁 O_4 ：以 4 為力矩點，成 $O_4 \cdot r + M_{v4} - H(c+f) = 0$ 由此得：

$$O_4 = -\left(\frac{c+f}{r}\right) \left[\frac{M_{v4}}{(c+f)} - H\right] \dots \dots \dots (38)$$

在左擱支點之垂直下方繪 $\left(\frac{x_1}{c+f}\right) = \overline{A_0A'}$ ， A' 與 B_0 相連結，此 $\overline{A'B_0}$ 線與力矩點之垂直線，相交於 $4'$ ，此交點 $4'$ 復與 A_0 相連結，由此所得之折線 $A_04'B_0$ ，即 $\frac{M_{v4}}{(c+f)}$ 之勢力線，其各縱座標上尚須減去 H 之勢力值，遂得公式 (38) 之括弧值，亦即在圖中劃以並行線之勢力面，其乘數為 $\mu = -\frac{c+f}{r}$ 。

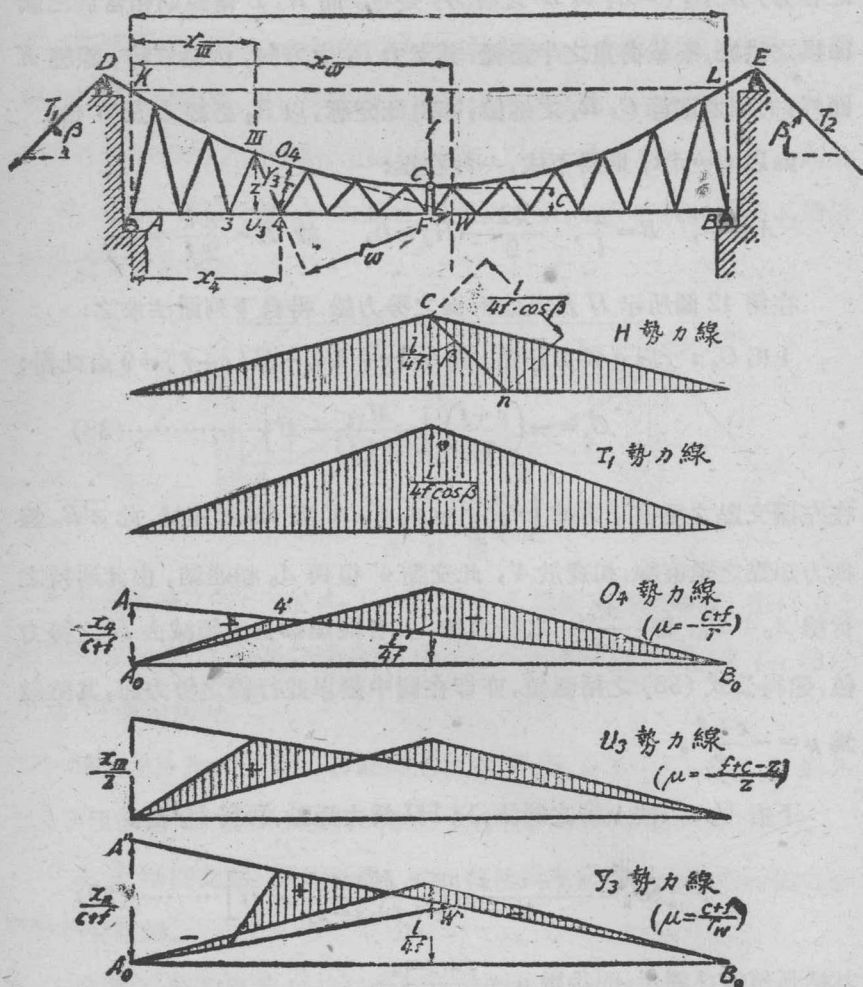
下桁 U_3 ：按上桁之同法，以 III 為力矩點，可得 U_3 值。

$$U_3 = \frac{(f+c-z)}{z} \left[\frac{M_{vIII}}{(f+z-z)} - H\right] \dots \dots \dots (39)$$

其括弧值業已圖示，而乘數 $\mu = \frac{f+c-z}{z}$ ，

對角桁 Y_3 ：以 W 為力矩點，易得：

$$Y_u = \left(\frac{c+f}{r_w} \right) \left(\frac{M_v w}{(c+f)} \right) - H \dots\dots\dots(40)$$



第 42 圖

在 A 垂直線上繪 $\frac{xw}{c+f} = A_0 A''$ ，而將 A'' 點與 B_0 相連結，是線之適用範圍，至 Y_0 桁條所屬之分區中直接擔荷重量桁條之右側節點 4 為止，此 $A''B_0$ 線與力矩點 W 之垂直線相交，得交點 W' ，復作 $W'A_0$ 線，介於 A_0 及對角桁所在分區左側節點 3 為止之一段，為括弧中第一項所適用之勢力線範圍。至於該分區之本身，則連結 3, 4 兩點勢力值之頂端便成。(見第四節)，此外一切，悉如他桁。

如另置乘數，則應注意其正負性，在此亦宜特別謹慎。

荷重分界點亦可應用代樑法則求之（見第十一節），與桁構拱無異。

第 42 圖中內含桁條之構造，雖故意擇其與第 41 圖相互異者，然其求法則無稍區別。

第十五節 應用桁構樑加固之懸樑勢力線

由桁構樑加固之懸樑（第 43 圖），在力學上與第 39 圖及第 40 圖所示之加固拱樑適相反，裝有中關節 F ，其樑遂為定式結構，而同時門架作為關節支柱之用矣。此結構原則，與前無異，以 E, D 兩點祇得作水平之移動，而其可能移動之尺寸亦甚小。加固樑 A, B 兩擱支點，其一必屬固定，否則與車行道並行之水平力，將不得傳遞至其下之基礎。如 A 為固定擱支點，則於 A 有 2 個未知值，即擱支力之垂直與水平兩分力是，（如祇有垂直荷重者，則其水平分力為零），設 x 為垂直懸柱之數，則可計之如次：5 個擱支點未知值（在 A, B, D, E ），2 根鐵索之拉力（ T_1 及

T_2), 2 個關節未知值(在 F), x 根柱之受力, $x+1$ 根鐵索條之受力, 總計未知值為 $2x+10$ 個。

其可供公式, 計之如次: 懸架之二部份有 3 個公式, x 個鐵索條節點有 $2x$ 個公式, 一對門架 (D 及 E) 可各供 2 個公式, 故可供之公式共計為: $6+2x+2 \cdot 2=2x+10$ 個, 足證其結構之為定式也。

此由樑加固之懸樑, 求證殊易, 一如第十四節之引證桁構懸樑, 法以最外之鐵索條與攔支點 A, B 之交點 K 及 L 作為底關節, 而鐵索之 C 點, 作為中關節, 於是對於加固樑之任何力矩點 J , 即可引證之, 一如第十三節之加固樑: $M_J = M_{vJ} - M_{hJ} = M_{vJ} - H \cdot y$ (式中 M_{vJ} 及 M_{hJ} 為經 J 所置之剖線 $\overline{m m}$ 一側諸外力之垂直分力及水平分力對於力矩點 J 之力矩) 關節點 F 之力矩為零, 故成: $0 = M_{vF} - Hf, H = \frac{M_{vF}}{f}$ 由單力 P 產生 $H = P \frac{x}{l} \frac{l}{2f} = P \frac{x}{2f}$, 以 $P=1t$, 則 $H_{(\text{中央})} = \frac{l}{4f}$, 因知 H 力之勢力線, 一如拱樑。第 43 圖所示之勢力線, 其求法按前易得如次:

$A_0 = H \cdot \text{tg } \beta$ 即對於 A_0 勢力線之中央縱座標為 $\frac{l}{4f} \text{tg } \beta$; 其圖解法則, 如第 43 圖所示, 左右兩端之縱座標為零。

$A_u = A - H \cdot \text{tg } \beta$ 荷重 $1t$ 在中線之右方, 如距 B 為 x , 則

$$A = \frac{x}{l}, \quad H = \frac{x}{2f}, \quad A_u = x \left(\frac{1}{l} - \frac{\text{tg } \beta}{2f} \right).$$

如 $x=0$, 則 $A_u=0$; $x=l$, $A_u = 1 - \frac{l}{2f} \text{tg } \beta$ (在第 43 圖, 如 $x=l$, 則 A_u 為負)。

荷重在中線之左方，距 A 為 x' ：

$$A_u = \frac{l-x'}{l} - \frac{x'}{2f} \operatorname{tg} \beta. \quad \text{以 } x=0, \quad A_u=1$$

$$x=l, \quad A_u = -\frac{l}{2f} \operatorname{tg} \beta.$$

故與拱樑之 A_0 值相當。

下桁 U_{III} 之受力：以 III 為力矩點，

$$U_{III} \cdot h = M_{l_{III}} - H y_{III}$$

$$U_{III} = \frac{y_{III}}{h} \left(\frac{M_{l_{III}}}{y_{III}} - H \right) \dots\dots\dots(41)$$

上桁 O_3 之受力：以 3 為力矩點。

$$O_3 \cdot h = -(M_{v_3} - H y_3)$$

$$O_3 = \frac{y_3}{h} \left(-\frac{M_{v_3}}{y_3} + H \right) \dots\dots\dots(42)$$

對角桁 $\overline{II}3$ 之受力： $Y_3 \cdot \cos \gamma - Q_0 + V = 0$ 式中 Q_0 乃屬具跨度 l 之兩端擱支樑在 $\overline{2, 3}$ 受剖開之分區間之剪力， V 乃剖線所及鐵索條之垂直分力，其與水平成 φ 角，故為：

$$V = H \operatorname{tg} \varphi, \quad Y_3 \cdot \cos \gamma = Q_0 - V = Q_0 - H \operatorname{tg} \varphi$$

$$Y_3 = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos \gamma} \left(\frac{Q_0}{\operatorname{tg} \varphi} - H \right) \dots\dots\dots(43)$$

第 43 圖所示之 Y_3 勢力線，係上式中之括弧值。

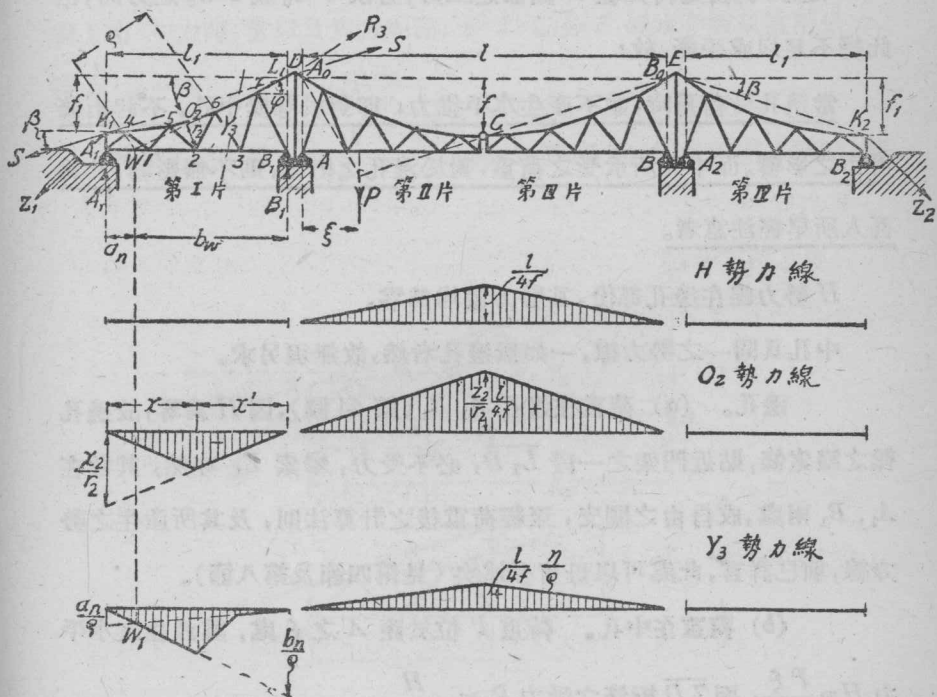
最後務須乘以在括弧外之係數，不可忽略！

第十六節 中孔長而邊孔短之懸樑勢力線

如地位適宜，常令懸樑之攀索，復使樑身伸長，而支攀索於門架，另

有較低之支點，較行車道稍高，位於鐵索攀着處之近旁。如懸樑之中孔，乃一三關節樑，則其結構屬於力學上之定式，按第 44 圖所示內含桁條之構造，其較低之支柱，須能作水平活動，門架支點亦然，故於第 44 圖即以擺柱成之。其未知值之數，6 個在擺支點，2 個在擺柱，2 個在攀索，2 個在關節，此外 4 個未知值為門架頂鐵索之受力，故其總數為 16 個未知值。

懸樑之 I, II, III, IV 四部份，可供 $4 \cdot 3 = 12$ 個公式，二座門架頂 (D 及 E) 各供 2 個公式，即得 $2 \cdot 2 = 4$ 個公式，其總數為 16 個公式。



第 44 圖

水平推力 H 勢力線：中孔如受活動之單力荷重，則其情形一如第十四及第十五兩節中之懸樑，故中孔之 H 勢力面亦如前例（第 42 圖）。如二邊孔之一，承受荷重，則不起水平推力 H 。縱令左側邊拱，荷有重量而能產生 H 者，則靠近門架之鐵索條受力，於懸樑第 II 部份之 A_0 點，與其攔支力 A 必組成合力，以中孔未有荷重，故除上力外，在第 II 部份中僅有 C 點之關節力，惟此二力須同在 $\overline{A_0 C}$ 或 $\overline{C A_0}$ 方向時，庶有平衡之可能，第 III 部份亦然，即在該部份所作用之二力，須於 $\overline{C B_0}$ 或 $\overline{B_0 C}$ 之方向，由是得知在 C 關節之二力，必依 $\overline{C A_0}$ 或 $\overline{C B_0}$ 之方向，但此絕不足以成平衡，故：

當邊孔受荷重時，並不產生水平推力，即對於懸樑中孔，不起桁條受力之影響。而中孔所承受之荷重，對於邊孔之桁條，則不無影響，此為吾人所早經注意者。

H 勢力線在邊孔部份，其勢力值均為零。

中孔具同一之勢力線，一如無邊孔者然，故無須另求。

邊孔。(a) 荷重在邊孔 $A_1 B_1$ (第 44 圖)，因 H 為零，故邊孔樑之鐵索條，貼近門架之一段 $\overline{L_1 D}$ ，必不受力，攀索 Z_1 亦然，其樑在 A_1, B_1 兩處，成自由之攔支，至經荷重後之計算法則，及其所產生之勢力線，前已詳言，此處可以毋庸多述矣（見第四節及第八節）。

(b) 荷重在中孔。荷重 P 位於距 A 之 ξ 處，其產生之水平力 $H = \frac{P \xi}{2f}$ ，而 $\overline{7 D}$ 桁條之受力 $R_2 = \frac{H}{\cos \varphi}$ 。

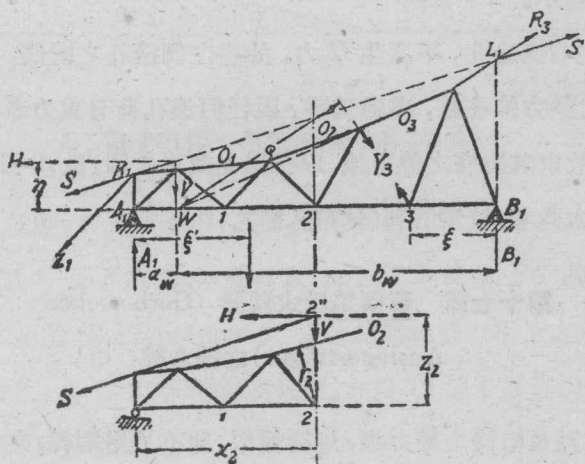
在左側邊樑上之作用力為 R_3, B_1, Z_1 , 及 A_1 , 於 L_1 及 K_1 兩點可併成二合力, 為樑上惟一之外力, 此二合力 S 之方向, 依 $K_1 L_1$ 連結線而行, $S = \frac{H}{\cos \beta}$ 及 $\text{tg } \beta = \frac{f_1}{l_1}$, A_1 為負攔支力, B_1 為正攔支力:

$$A_1 = -\frac{H f_1}{l_1}, \quad B_1 = \frac{H f_1}{l_1}.$$

右側邊樑, 如經荷重, 則所產生之 $H=0$, 故於左側邊樑各桁條, 不生影響。

邊樑上桁 O_2 之勢力線 (第 45 圖): 中孔一經荷重, 即產生 H 值, 求上桁 O_2 力時, 當以 2 為力矩點, 於 $2''$ 點分 S 為水平與垂直兩分力, 得 $H \cdot z_2 = O_2 \cdot r_2$, $O_2 = H \frac{z_2}{r_2}$ 。

於中孔之中線上繪 $\frac{l}{4f} \frac{z_2}{r_2}$, 連結其頂端與 A, B 兩處之零點, 第



第 45 圖

44 圖兼示左側邊樑受荷重之 O_2 勢力面。

下桁條之勢力線，可以同法求之。

邊樑對角桁之勢力線（第 45 圖）：

荷重在左側邊樑：其勢力線一如 $A_1 F_1$ 樑。

$$\text{荷重在剖線之右方： } Y_3 = -\frac{\xi a_w}{l_1 \rho}。$$

$$\text{荷重在剖線之左方： } Y_3 = -\frac{\xi' b_w}{l \rho}。$$

此二枝段相交於力矩點之垂直下方 W' 處（第 44 圖）。

荷重如在中孔，則產生 H 力，故：

$$Y_3 \rho = H \eta, \quad Y_3 = \frac{H \eta}{\rho}$$

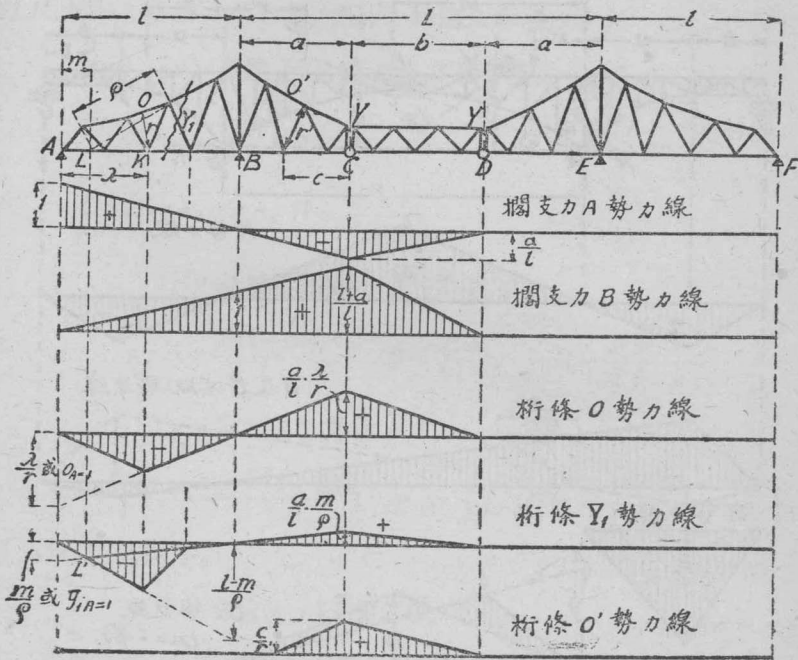
按此，知在中孔之勢力面，係一三角形，其中央高度為 $\frac{l}{4f} \cdot \frac{\eta}{\rho}$ ，一如第 44 圖所示。

荷重在右側邊孔，不產生 H 力，故在左側邊孔之桁條，不受力量，而該段間之勢力線各值，處處為零，因任何邊孔荷有重力者，其作用一如簡單樑，故求其桁條之勢力線，以採用克萊馬拿圖，設 $A=1t$ 得 $S_A=1$ 值，而用作力圖者，較為便利（見第八節）。

第十七節 蓋爾培氏式臂樑 (Gerber'scher

Auslegerträger) 之勢力線

其攔支點及桁條之勢力線，理極簡單，即不另用解釋，亦易明瞭（第 46 圖）。

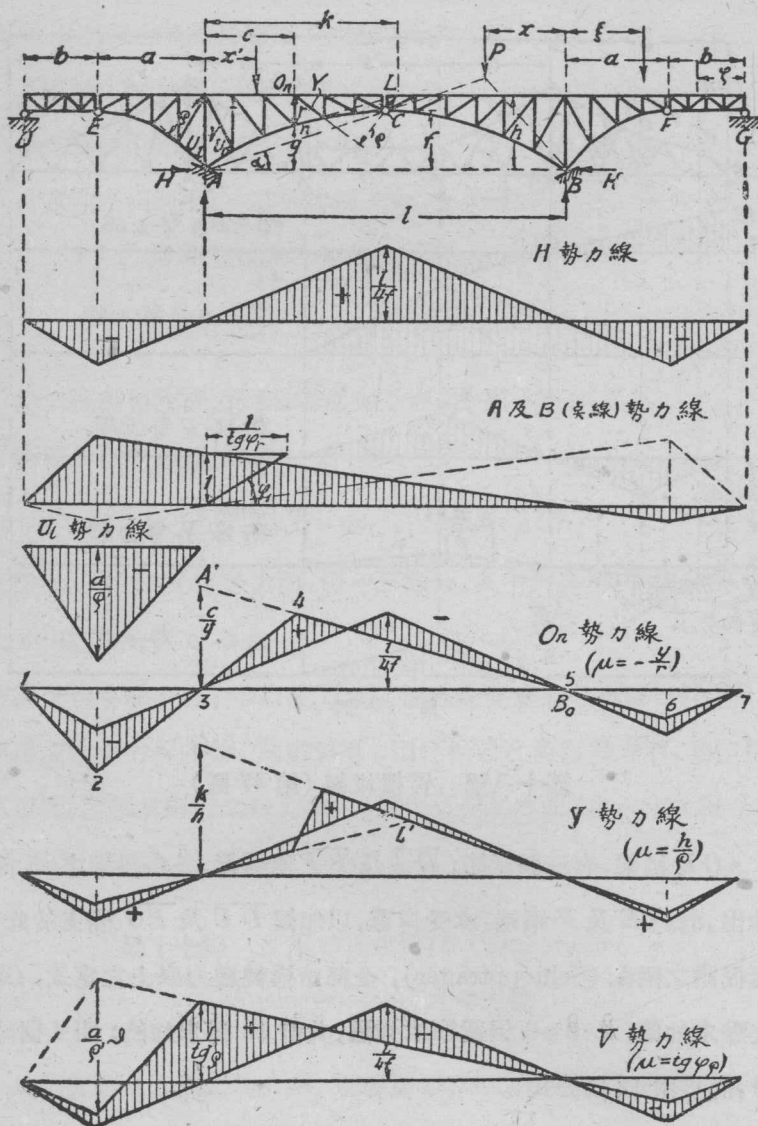


第 46 圖

第十八節 臂樑拱架 (第 47 圖)

ACB 拱架, 有三個關節, \overline{EA} 及 \overline{BF} 兩臂樑, 各由拱架之側, 向左右伸出, 而於 E 及 F 兩端, 承受荷重, 以短樑 \overline{DE} 及 \overline{FG} 欄支於此也。此短樑謂之附樑 (Schlepptträger), 全部結構純屬力學上之定式, (6 個欄支點未知值, $2 \cdot 3 = 6$ 個關節未知值, 共計 12 個未知值; 而 4 個結構部份, 計可供 12 個公式)。

求勢力線之法則, 由三關節拱出發, 較為適宜, 其所得拱之水平推



第 47 圖

力 H 及中孔諸桁之受力勢力線，一如第九節所示。

(α) 荷重 P 位於中孔之右半拱。

$$A = \frac{Px}{l}, \quad B = \frac{P(l-x)}{l}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2f}{l} = \frac{A}{H}$$

$$H = A \cdot \operatorname{ctg} \alpha, \quad H = \frac{Px l}{l \cdot 2f} \quad H = \frac{Px}{2f}$$

(β) 荷重位於中孔之左半拱。

$$A = \frac{P(l-x')}{l}, \quad B = \frac{Px'}{l}, \quad H = \frac{Px'}{2f}$$

(γ) 荷重位於臂樑 \overline{BF}

$$A = -\frac{P\xi}{l}, \quad B = \frac{P(l+\xi)}{l}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{A}{H}, \quad H = -\frac{P\xi l}{lf \cdot 2} = -\frac{P\xi}{2f}$$

H 為負值，故向外。

(δ) 荷重位於附樑 \overline{FG} 。

對於臂樑在 F 點上起有壓力，乃附樑 \overline{FG} 之左攔支點，其值為 $\frac{P\xi}{b}$ ，由上式所得 P 在 F 之勢力值，乘以 $\frac{\xi}{b}$ ，即可續得附樑上之勢力線矣。

(ε) 荷重位於附樑 \overline{DE}

與附樑 \overline{FG} 之求法相同。

A, B, H 諸勢力線，由此完成，對於臂樑部份之勢力線，祇須將中孔部份之勢力線，作直線之引長，所不同者，乃中孔部份之橫座標為 $+x$ ，而臂樑部份則為 $-x$ 耳。依據此有規律之法則，而從事勢力線之繪作，可謂簡易多矣。第三章第十節中當應用普通動學法則，再行證明也。

外廓桁條勢力線： O_n 桁條之力矩點為 n ，經過 O_n 所設剖線一側之垂直外力之力矩為 M_{vn} ，其水平外力之力矩為 $-Hy$ ，故成：

$$O_n \cdot r + M_{vn} - Hy = 0 \quad O_n = -\frac{y}{r} \left(\frac{M_{vn}}{y} - H \right)$$

今以 $-\frac{y}{r} = \mu$ 則得：

$$O_n = \mu \left(\frac{M_{vn}}{y} - H \right) \dots \dots \dots (44)$$

於 A 之垂直下方繪 $\frac{1 \cdot c}{y}$ 力，連結其頂端 A' 與 B_0 ，即成 $\frac{M_{vn}}{y}$ 勢力線之基礎， $\overline{A'B_0}$ 線後與力矩點 n 之垂線相交於 4，連結 $\overline{34}$ ，再向後引長與臂樑端 E 之垂線相交於 2，連結 $\overline{21}$ ，對於右側臂樑，亦復如是，由此所得之縱座標值，再減去 H 勢力線，即得圖中劃有並行線之勢力面。

對角桁 Y 勢力線：其力矩點為 L

$$-Y \cdot \rho + M_{vL} - H \cdot h = 0 \quad Y = \frac{h}{\rho} \left(\frac{M_{vL}}{h} - H \right)$$

$$Y = \mu \left(\frac{M_{vL}}{h} - H \right) \dots \dots \dots (45)$$

上式括弧值之勢力線，依已知法則，繪成第 47 圖。

垂直桁之勢力線，可以同法求之，僅其剖線則示傾斜耳。對於中孔諸桁之勢力線，亦可應用代樑法則求之，一如第十一節所示，且其勢力線，直接由水平線上繪成，而於臂樑及附樑部份，則依上述原則，而由直線引長完成之。

拱底 A 及 B 上之垂直桁：在節點 A 上 V ， U_r ， U_l ， H 及 A 諸力成平衡(第 48 圖)，各桁之受力，如假定其為正(拉力)，則得：

$$V + U_r \cdot \sin \varphi_r + U_l \cdot \sin \varphi_l = -A \dots \dots \dots (46)$$

$$H = U_l \cdot \cos \varphi_l - U_r \cdot \cos \varphi_r \dots\dots\dots(47)$$

由公式 (47) 得：

$$U_r = U_l \cdot \frac{\cos \varphi_l}{\cos \varphi_r} - \frac{H}{\cos \varphi_r}$$

如將上值代入公式 (46) 中，則得：

$$V = -\operatorname{tg} \varphi_r \cdot \left[\frac{A}{\operatorname{tg} \varphi_r} + U_l \cdot \underbrace{\frac{\cos \varphi_l}{\operatorname{tg} \varphi_r} (\operatorname{tg} \varphi_r + \operatorname{tg} \varphi_l)}_{=\delta} - H \right] \dots\dots(48)$$

按此則 V 勢力線，可由 A ， U_l 及 H 各勢力線得之。

如左側臂樑及其附樑無荷重者，則 U_l 為零，荷重在中孔及右邊孔之公式為：

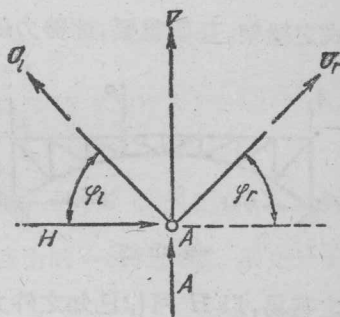
$$V = -\mu \left(\frac{A}{\operatorname{tg} \varphi_r} - H \right) \dots\dots\dots(49)$$

式中 $\mu = \operatorname{tg} \varphi_r$

公式 (49) 繪於第 47 圖中，長及全樑，公式之右項有負號者，意即指吾人前所假定之 V 非拉力而為壓力也。在第 47 圖所示乃業經改正符號而成之勢力面。

各值須連同其原有之符號而入公式 (46) 至 (49)，故於右邊拱所應注意者，乃 A 為負值，即 $\frac{A}{\operatorname{tg} \varphi_r}$ 亦為負，而 H 亦係

負值也。惟在勢力面內，可作減去 H 值觀，故 H 之實有符號為正，而得圖中劃以並行線之正勢力面。至於公式 (48) 在樑左側 U_l 之負值，第 47 圖中亦經補繪其勢力線（位於圖之左側， A 及 O_n 兩勢力線間）。

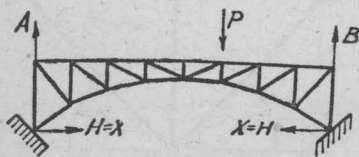


第 48 圖

第二章 靜力不定式樑架結構物之勢力線

第一節 概說

靜力學上之不定式結構物，其勢力線係曲線，大部為拋物線或曲線之可由拋物線替代而成者。結構物可供之公式，不足以應付其未知值者，是謂該結構物有“逾定數”（Überzählige Größen; redundant members）。有若干值（力，力矩），非專賴固體之平衡條件，足以求得，卻須由荷重而起之變形着手。構造物之有一個逾定數者，為一級之靜力不定式，有 n 個逾定數者，為 n 級之靜力不定式。在實用上，一級靜力不定式之樑架，甚屬重要，而勢力線法則，對此尤多利益。



第 49 圖

一級靜力不定式之樑架結構物，例如雙關節拱（第 49 圖），其拱底之水平推力 H ，非觀察其變形，不足以求得。但如 H 一經求得，則所有桁條之受力，得之甚易，以 H 可作已知之外力觀也。 H 勢力線，亦即逾定數之值，作為計算之基礎，普通以 X, Y, Z, \dots 示各逾定值，在一級之靜力不定式結構，一如此處，以 X 示之。而規定 X 值，應足以維持樑架之形式，可在樑架之 B 處，經該力作用後，易以可作水平移動之攔支點。如是即成靜力不定式之基本結構，係一兩端攔支樑，除荷重而外，尚有堪充外力之逾定

值作用也。

單由荷重作用於靜力定式之基本結構，其所產生之桁條張力，以 S_0 示之， S_0 之值極易求得，而可作外力觀之逾定值 X 所起之桁條張力，則為 $S_1 \cdot X$ ，以 S_1 示由外力 $X=1 t$ ，所產生桁條之張力， S_1 值易自計算或圖解法得之，於是知任何桁條之實有張力 S ，應為此二理想局部情形所起張力之和，即：

$$S = S_0 + S_1 \cdot X \dots\dots\dots(50)$$

式中除 S 外，尚有逾定值 X 為未知值。

應用虛移定律 (Satz der virtuelle Verrückung) 或工作原則 (Grundgesetz der Arbeit) 對於第 49 圖所示之拱樑，不難求得，而設 A, B 為固定攔支點，其溫度之變遷對於逾定值之影響 (恆有) 另計之，則：

$$X = - \frac{\Sigma \left(\frac{S_1 S_0 s}{E F} \right)}{\Sigma \left(\frac{S_1^2 s}{E F} \right)} \dots\dots\dots(51)$$

式中分子分母之積數符號，應推及全部桁條， F 為剖面積， E 為材料之彈性係數， s 為桁條之長，如所有桁條由同一材料成者，則在分子分母之 E 值，可以互相消除，而成：

$$X = - \frac{\Sigma \left(\frac{S_1 S_0 s}{F} \right)}{\Sigma \left(\frac{S_1^2 s}{F} \right)} \dots\dots\dots(52)$$

X 式之分母中，不含 S_0 ，即示與活動荷重之地位無關，其值恆定不

變，分子中之 S_0 ，乃指 1 t 荷重在定式之基本結構各桁條所產生之張力，故欲得 X 之勢力線，則必令 1 t 荷重在任何可能地位，先求 S_0 值，所得分子之總數，再以分母之總數除之。如結構物之節點過多，則其工作，甚感繁雜，惟可採用虛移定律，較為簡捷，苟欲達此目的，須作下列之研究：

(a) 互相移動。

$$X = - \frac{\Sigma \left(\frac{S_1 S_0 s}{E F} \right)}{\Sigma \left(\frac{S_1^2 s}{E F} \right)}$$

公式示 S_1 與 S_0 間之存有關係，分子中有二者之乘積，設分子為 $\delta m'$ ，則：

$$\delta m' = \Sigma \left(\frac{S_1 S_0 s}{E F} \right) \quad \text{即} \quad 1 \cdot \delta m' = \Sigma \left[\left(\frac{S_1 s}{E F} \right) \cdot S_0 \right]$$

$$1 \cdot \delta m' = \Sigma [(\Delta s)' \cdot S_0] \dots \dots \dots (53)$$

式中 $\frac{S_1 s}{E F} = (\Delta s)'$ 乃依呼克定律 (Hookesches Gesetz; Hooke's law) 桁條因由 $X=1$ t 所產生之張力 S_1 而起彈性延長。

至彈性移動乃由虛移定律所得之結果：吾人可得任何節點 m 之移動，對任意方向之投影，先求桁條張力 S ，此係節點 m 上依所欲方向之一個理想力 1 所產生，此 S 值復以正或負之桁條伸縮 Δs 乘之，該項伸縮由荷重所產生，而求此荷重以使 m 點之移動。

在公式 (53) 中之桁條張力 S_0 ，由於節點 m 上之垂直力 1 所產生，其當以 $(\Delta s)'$ 乘之，此即在 B 點受有水平力 $X=1$ 作用而起之伸縮也。

故在公式 (53) 中之 $1 \cdot \delta_m'$ 乃節點 m 之垂直移動 (與 $P=1$ 同一方向), 良由 B 點作用之水平力 1 使然。

惟 δ_m' 亦可寫作:

$$1 \cdot \delta_m' = \Sigma \left[\left(\frac{S_0 s}{E F} \right) S_1 \right]$$

而以 $\frac{S_0 s}{E F} = \Delta s_0$, 此即桁條因受 S_0 力而起彈性伸縮, 依諸上式, 亦得寫成:

$$1 \cdot \delta_m' = \Sigma [(\Delta S_0) \cdot S_1] \dots\dots\dots (54)$$

因節點 m 上受 $P=1t$ 力之關係, $X=1t$ 力之着力點乃起水平移動, 遂得下律:

在 B 點上之水平作用力 $X=1t$, 使節點 m 起垂直移動, 與節點 m 上之垂直作用力 $P=1$ 所起之水平移動相等。

節點 m 乃任意擇定, 而所得之法則, 對於任何荷重點均適用之。

因此: 設於定式之基本結構之二擱支點 A 及 B , 受 $X=1t$ 力之作用, 則其荷重點 m 移動 δ_m' , 此值相當於公式 (51) 及 (52) X 式之分子, 由節點 m 所作用之垂直力 $1t$ 所產生。欲求 X 值也, 僅須將 δ_m' 之縱座標以 $-\frac{1}{\Sigma \left(\frac{S_1^2 s}{E F} \right)}$ 乘之, 此係一恆定不變而易於求得之值。於求

δ_m' 時, 如採用 $X=-1t$, 則可將上式中之負號去除, 即成

$$X = \frac{\delta_m'}{\Sigma \left(\frac{S_1^2 s}{E F} \right)} \dots\dots\dots (55)$$

故得結果：由 $X = -1$ 力之作用，而求其沉陷 δ_m' 。此沉陷所成之線，是謂行車道桁條之彎線 (Biegungslinie der Fahrbahngurtungen)。

(b) 分母 $\Sigma \left(\frac{S_1^2 s}{EF} \right)$ 之意義。

分母簡以 Δ 示之，則成：

$$\Delta = \Sigma \left(\frac{S_1 S_1 s}{EF} \right) = \Sigma [S_1 (\Delta s)']$$

即 $1 \cdot \Delta = \Sigma [S_1 (\Delta s)'] \dots\dots\dots(56)$

式中 S_1 示由 B 點作用力 $X=1$ 所起之桁條張力， $(\Delta s)'$ 示桁條之伸縮，由於張力 S_1 使然，亦即起自 $X=1$ 之力。而其積 $[S_1 (\Delta s)']$ 之和，依上項定律，乃由 $X=1$ 力使 B 點之水平移動，如昔對於節點 m 所作之研究，此處所異者，乃 m 與 B 兩點間關係，集合於 B 點，故 $\Delta = \Sigma \left(\frac{S_1^2 s}{EF} \right)$ 即 B 點之水平移動（定式之基本結構），由於水平力 $X=1$ 產生，亦即 Δ 為其絕對移動值，依 X 方向量之，遂成：

$$X = \frac{\delta'}{\Delta} \dots\dots\dots(57)$$

因得結果如次：

逾定值 X 之勢力線，乃由 $X = -1$ 所成之行車道桁條之彎線，其縱座標尚須以變值 Δ 除之， Δ 係 $X = -1$ 力之着力點在力方向之移動。

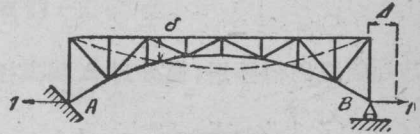
對於規定荷重所起彎線之求法，詳第六節。

$X = - \left[\Sigma \left(\frac{S_1 S_0 s}{EF} \right) : \Sigma \left(\frac{S_1^2 s}{EF} \right) \right]$ 公式，普通適用於一級靜力之不
定式結構物，亦即其勢力線所用之公式。

一級靜力不定式結構物之例題

1. 雙關節拱(第 50 圖)。以一個攔支點設想可作水平移動,用時用 X 力補其缺陷,而使成原來之情形,其基本結構,乃一兩端攔支樑,受

$X = -1$ 力之作用(第 50 圖),而求其行車道桁條之彎線,及跨距 AB 之伸長 Δ , 設圖中以虛線所示者為彎線,如縱座標以 Δ 除之,



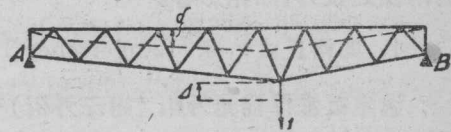
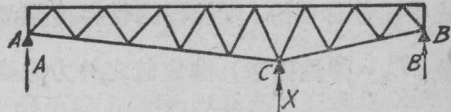
第 50 圖

即得 X 值,此其結果,亦可自選擇適宜之比例尺得之,而無庸再除也。故曰:彎線亦即 X 之勢力線。

2. 攔支於三點之連續樑 (Durchgehender Träger; continuous beam) (第 51 圖)。

今擇中部支點 C 為逾定值,而求 $X = -1$ 之荷重情形,即等於在定式結構樑 AB 上 C 點受荷重 $1t$ 作用時之行車道桁條之彎線及 C 點之沉陷 Δ 值。其彎線同時亦即 X 之勢力線,而於

$$X = - \frac{\Sigma \left(\frac{S_0 S_1 s}{E F} \right)}{\Sigma \left(\frac{S_1^2 s}{E F} \right)}$$



第 51 圖

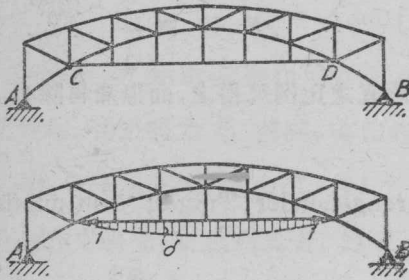
公式對於正在計算之桁樑,應假定逾定值之着力點,恆定不移。此例題中設中部支點係一彈性支柱,則經受力後之縮短

當爲 $\Delta \lambda = \frac{X \lambda}{E_0 F_0}$ (式中 $\lambda =$ 柱長, $E_0 =$ 彈性係數, $F_0 =$ 柱之橫剖面)。

其式遂成:

$$X = - \frac{\Sigma \left(\frac{S_0 S_1 s}{E F} \right)}{\Sigma \left(\frac{S_1^2 s}{E F} \right) + \frac{\lambda}{E_0 F_0}} \dots\dots\dots (58)$$

乃知前式仍得適用, 僅分母 Δ 異其值耳。



第 52 圖

3. 有拉桿之拱樑 (Bogenträger mit Zugband) (第 52 圖)。

今擇拉桿 \overline{CD} 之張力爲逾定值, 而求 $X = -1$ 時之行車道變線, 並假定行車道即位於拉桿 \overline{CD} 上。如在例 2 之有彈性支柱者, 此處則有彈性拉桿:

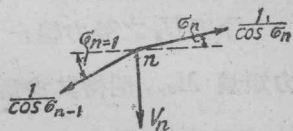
$$X = - \frac{\Sigma \left(\frac{S_0 S_1 s}{E F} \right)}{\frac{\lambda}{E_0 F_0} + \Sigma \left(\frac{S_1^2 s}{E F} \right)} \dots\dots\dots (59)$$

式中僅分母部份, 受拉桿彈性長度變遷之影響。($\lambda =$ 長度, $F_0 =$ 剖面積, $E_0 =$ 彈性係數)。逾定值之勢力線祇限於 \overline{CD} 一段, \overline{CD} 之外, X 對於桁條之張力, 無稍影響。

4. 郎格氏式桁樑 (Langerscher Träger) (第 53 圖及第 54 圖)。

逾定值當擇補充外桁 (第三外桁) 張力之水平分力任之, 如以補充外桁及吊桁 (Hängestäbe), 悉數去除, 即成定式之基本結構, 具 $X = -1$

力之作用，而求其行車道桁條之彎線，亦即 X 之勢力線也。設第三外桁之末根桁條與水平所成之角為 σ ，則因 $X = -1$ 力之作用，在 C, D 兩點各有 $\frac{1}{\cos \sigma}$ ，由 $X = -1$ 力作用所起之吊桁張力，可觀



第 53 圖

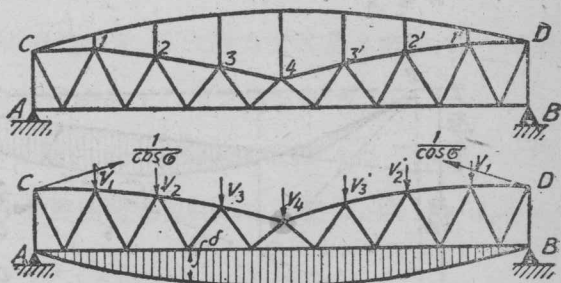
察吊桁之上節點得之，例如在節點 n 為 (第 53 圖)：

$$V_n + \frac{1}{\cos \sigma_{n-1}} \cdot \sin \sigma_{n-1} - \frac{1}{\cos \sigma_n} \cdot \sin \sigma_n = 0$$

$$V_n = -\operatorname{tg} \sigma_{n-1} + \operatorname{tg} \sigma_n = -(\operatorname{tg} \sigma_{n-1} - \operatorname{tg} \sigma_n) \dots (60)$$

於是知 V_n 為壓力。

此基本結構在 $X = -1$ 時所受力之作用，如第 54 圖所示，而行車道桁條之彎線，即由是項荷力決定之。



第 54 圖

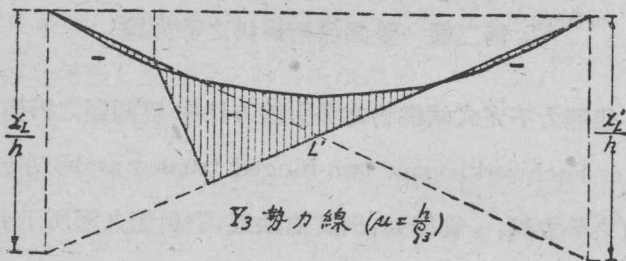
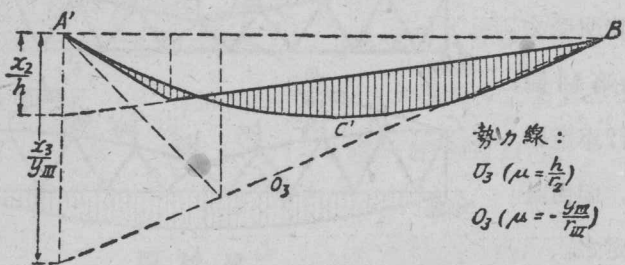
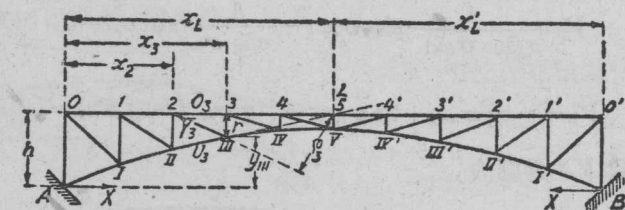
第二節 雙關節桁構拱之勢力線

在一級靜力不定式結構物之勢力線方法中，雙關節之桁構拱 (Zweigelenkiger Fachwerkbogen; two-hinged trussed arch) 亦包括於內，如逾定值之勢力線，一經得知，則其他法則，概與第九節所示者無異。吾人變更其勢力線公式，而以所含之逾定值，作為增添或減除之項目也。

逾定值之勢力線假定作已知而為 $A' C' B'$ (第 55 圖)。

下桁 U_3 之勢力線：力矩點為 2，經 U_3 所設剖線一側垂直外力之力矩為 M_{v_2} ，則得其式為 $-U_3 r_2 + M_{v_2} - X h = 0$ (式中 r_2 為 2 對於 U_3 之垂直線，圖內未曾繪入)，由此成：

$$U_3 = \frac{h}{r_2} \left(\frac{M_{v_2}}{h} - X \right) \dots\dots\dots(61)$$



第 55 圖

上桁 O_3 之勢力線：力矩點為 III，得 $0 = O_3 \cdot r_{III} + M_{vIII} - X \cdot y_{III}$ ，

由此成：

$$O_3 = -\frac{y_{III}}{r_{III}} \left(\frac{M_{vIII}}{y_{III}} - X \right) \dots\dots\dots(62)$$

對角桁 Y_3 之勢力線：力矩點為 L （在第 55 圖中適與 5 相疊合），而得：

$$Y_3 = \frac{h}{\rho_3} \left(\frac{M_{vL}}{h} - X \right) \dots\dots\dots(63)$$

第三節 三支點連續桁構梁之勢力線（第 56 圖）

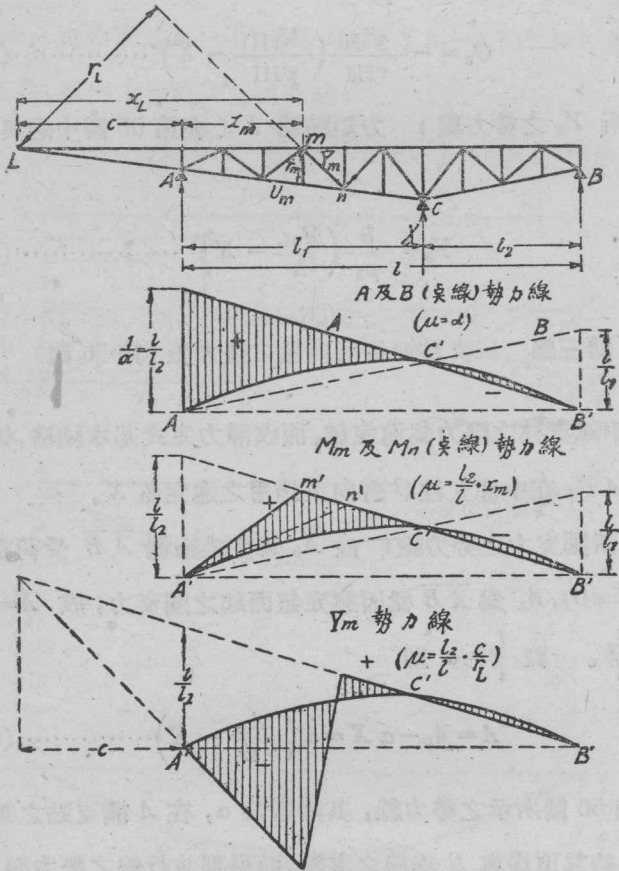
今擇中部支柱之壓力為逾定值，而成靜力定式基本結構，係一簡單之桁構梁 AB ，在中部支柱 C 有向上作用之逾定值 X 。

A, B 兩擱支之力勢力線：設 A_0 為定式桁梁 \overline{AB} 受荷重後之擱支力（以 $X=0$ ）， A_x 為 \overline{AB} 梁因逾定值而起之擱支力，成 $A = A_0 + A_x = A_0 - X \frac{l_2}{l}$ 。設 $\frac{l_2}{l} = \alpha$ 則

$$A = A_0 - \alpha X = \alpha \left(\frac{A_0}{\alpha} - X \right) \dots\dots\dots(64)$$

依此，繪第 56 圖所示之勢力線，其乘數為 α ，在 A 擱支點之垂直線上取 $\frac{1}{\alpha} \frac{A_0}{\alpha}$ ，連結其頂端與 B 垂線之零點，而得割並行線之勢力面。其力比例尺應與 X 勢力線相同，在應用時，此比例尺量得之縱座標值，當再以乘數乘之。荷重 1 在 C 點時，則必 $A=0$ ，故 X 勢力線上之 C' 點，亦必位於 $\frac{A_0}{\alpha}$ 勢力線上， B' 點亦然。其 B', C' 兩點之連結線，即 $\frac{A_0}{\alpha}$ 之勢

力線也。驗：在 A 點垂直線上必截取 $\frac{1}{a} = \frac{l}{l_2}$ 。



第 56 圖

同理得 B 勢力線 (虛線繪成); 以 $\frac{l_1}{l} = \beta$ 則

$$B = B_0 - X \frac{l_1}{l} = B_0 - \beta X = \beta \left(\frac{B_0}{\beta} - X \right) \dots\dots (65)$$

力矩點 m 之力矩勢力線：設 M_{0m} 爲簡單樑 \overline{AB} 之 C 點因荷重而起之力矩，則得：

$$M_m = M_{0m} - X \frac{l_2}{l} x_m = \frac{l_2}{l} x_m \left(\frac{M_{0m}}{\frac{l_2}{l} x_m} - X \right) \dots \dots \dots (66)$$

式中 $\frac{l_2}{l} x_m$ 值爲其乘數 μ 。

欲求括弧中第一項值之勢力線也，必於 A 垂直線上取 $\frac{x_m}{\frac{l_2}{l} x_m} = \frac{l}{l_2}$
 $= \frac{1}{a}$ ，以其頂端與 B' 相連結，此直線復與力矩點垂直線相交於 m' ，連結此交點與 A' 點，則 $A' m' B'$ 即係括弧中第一項之勢力線，再減去 X 之勢力值，遂得劃有並行線之勢力面。以 A, B 兩點，亦可應用此求得之線，蓋在任何力矩點 m ，盡適用之，祇其乘數 μ ，於不同地點 m ，異其值耳。

外廓桁條張力之勢力線：法將力矩勢力線之各值，在其所屬之力矩點，以臂長 r 除之即得。最簡之法，莫如將其勢力線之乘數除以 r ，例如對於 U_m 之乘數爲：

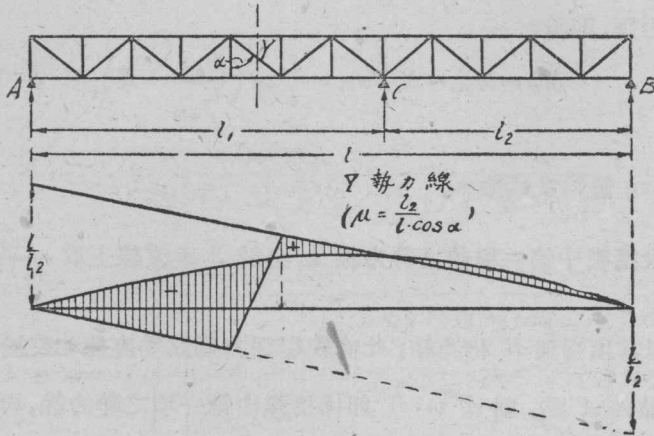
$$\mu' = \frac{l_2}{l} \frac{x_m}{r_m}$$

對角桁之勢力線： L 爲桁條 Y_m 之力矩點，故成 $Y_m r_L - A_0 c + X \frac{l_2}{l} c = 0$ ，即得：

$$Y_m = \frac{c}{r_L} \left(A_0 - X \frac{l_2}{l} \right) = \frac{c a}{r_L} \left(\frac{A_0}{a} - X \right) \dots \dots \dots (67)$$

其乘數爲 $\mu = \frac{c \cdot a}{r_L}$ ，括弧值之勢力線，可由括弧中第一項值 $\left(\frac{A_0}{a} \right)$ 內減

除 X 值得之。在 A 處 ($A_0 : a$) 之座標為 $1 : a = l : l_2$, 在 B 處為零。



第 57 圖

並行桁樑 (第 57 圖) 之公式為 $Y = \frac{Q}{\cos \alpha}$, 而 $Q = Q_0 - X \frac{l_2}{l}$

故得:

$$Y = \frac{l_2}{l \cos \alpha} \left(Q_0 \frac{l}{l_2} - X \right) \dots \dots \dots (68)$$

在 A, B 兩點之垂直線上取 $\frac{l}{l_2}$, 其 $\mu = l_2 : l \cos \alpha$, α 角可自第 57 圖中得之。

第四節 實心雙關節拱之勢力線

設兩拱底為等高, 拱軸作拋物線形, 以拱底之水平分力為逾定值, 荷重 P 在任何地點 (第 58 圖), 令距 A 為 a , 距 B 為 b , 則成:

$$A = \frac{P b}{l} \qquad B = \frac{P a}{l}$$

H 值可由觀察一相等厚度之鐵皮拱變形得之，

$$H = \frac{3}{4} \frac{P a b}{f l} \nu \dots\dots\dots(69)$$

在 H 公式中之

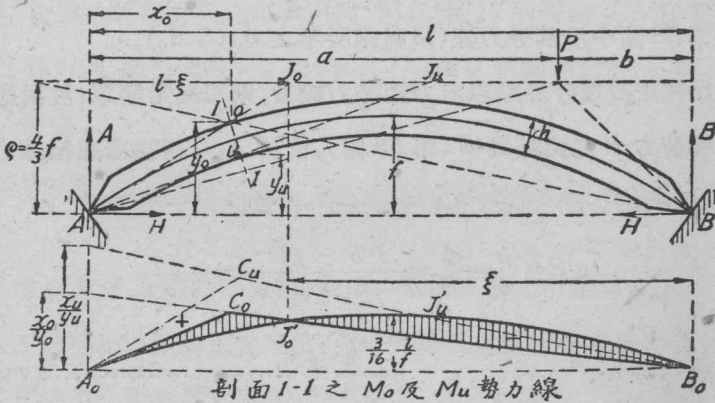
$$\nu = \frac{1}{1 + \frac{15 h^2}{32 f^2}} \dots\dots\dots(70)$$

此值與 1 甚相近，如以 $P=1$ 及 $\nu=1$ ，則成：

$$H = \frac{3}{4} \frac{a b}{f l} \dots\dots\dots(71)$$

設荷重位於離拱頂 ζ 處，則為：

$$a = \frac{l}{2} + \zeta, \quad b = \frac{l}{2} - \zeta, \quad H = \frac{3}{4} \left(\frac{l^2}{4} - \zeta^2 \right) \frac{1}{f l}$$



第 58 圖

乃知 H 勢力線係一拋物線，其中央高度在 $\zeta=0$ 處為：

$$H_{\text{中央}} = \frac{3}{16} \frac{l}{f} \dots\dots\dots(72)$$

已知此中央座標及在兩端 $\zeta = \pm \frac{l}{2}$ 處爲零，即不難繪成其作拋物線形之勢力線矣。比較準確之拋物線，則有中央高度(矢度) $\frac{3}{16} \cdot \frac{l}{f} \cdot \nu$ 。

剖線 \overline{II} 之上心核點 O 之力矩勢力線。設 M_{vX_0} 爲垂直外力之力矩，則其值爲：

$$M_0 = M_{vX_0} - H y_0 = y_0 \left(\frac{M_{vX_0}}{y_0} - H \right) \dots\dots\dots (73)$$

式中 y_0 爲乘數 μ ，括弧值之勢力線，可援用第三節所用方法，由兩項座標相加便得，在第 58 圖中之所示，不難理會也。圖中 $A_0 C_0 B_0$ 係 $\frac{M_{vX_0}}{y_0}$ 之勢力線。對於下心核點 u 之力矩爲：

$$M_u = y_u \left(\frac{M_{vXu}}{y_u} - H \right) \dots\dots\dots (74)$$

亦在第 58 圖中示其勢力線(以虛線所示之 $A_0 C_u B_0$)。

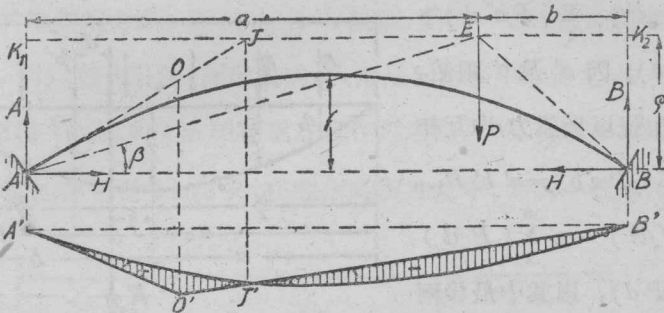
如利用荷重分界點以求力矩勢力線者，則可異常簡單，設拱底壓力與單獨荷力 P 之交點爲 E (第 59 圖)，位於 A, B 兩拱底連結線之上部爲 ρ ，則成：

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\rho}{a} = \frac{A}{H} = \frac{P b}{l \frac{3}{4}} \frac{f l}{P a b \nu} = \frac{4 f}{3 a \nu},$$

故
$$a = \frac{4}{3} \frac{f}{\nu} \dots\dots\dots (75)$$

按公式 (75) 知 ρ 爲定值，約 $= \frac{4}{3} f$ ，荷重 P 之地位雖遷，而其兩拱底壓力之交點，則恆在此水平線上移動，此水平線位於 AB 線之上方 $\frac{4}{3} f$ 處，謂之拱底壓力線 (Kampferdrucklinie; reaction locus)，在剖

線 \overline{II} (第 58 圖) 一側所作用諸外力之合力, 如經過 O 點, 則其對於 O 點之力矩為零, 連結 A, O 兩點之直線, 與拱底壓力線之交點為 J , 欲使 M_0 值為零, 則所作用之單力, 必位於其地, 易言之, 即 J 為荷重分界點



第 59 圖

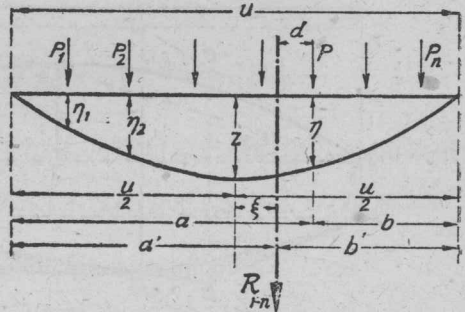
是也。設冀立得勢力線之正負兩段(第 59 圖), 則可由 J 點作垂直線下達 H 勢力線, 而得交點 J' , 連結 $B'J'$, 與 O 垂線相交於 O' 點, 再連結 $A'O'$ 便成。

第五節 成組單力在拋物線形勢力線之極限勢力

成組荷重 P 之總勢力值, 依第一章第三節之引證為 $Y = \sum_1^n (P \eta)$, 吾人不妨移動成組荷重之地位, 而求各荷重地位之勢力值 Y 之極限值, 以採用滿勒白萊斯勞之法則, 較為便利, 其法如次:

成組荷重(第 60 圖)如由荷重 P_1, P_2, \dots, P_n 所成, 其所屬之勢力面, 有水平長度 u 及垂直中央高度 z , 以 η 示縱座標, 其橫座標為 a 及 b , 則得 $Y = \sum_1^n (P \eta)$, 按拋物線公式 $\eta = \frac{4z}{u^2} ab$, 則成 $Y = \frac{4z}{u^2} \sum_1^n (P ab)$,

P_1 至 P_n 諸荷重之合力, 以 R_{1-n} 示之, 即 $R_{1-n} = \sum_1^n (P)$, 又以合力 R_{1-n} 之地位, 距 u 之兩端為 a' 及 b' , 而荷重 P 更距 R_{1-n} 為 $\pm d$, 則 $\sum (P d) = 0$, 此外 (第 60 圖) $a = a' + d$; $b = b' + d$, 故 $\sum_1^n (P a b) = \sum_1^n (P a' b') - \sum_1^n (P d^2) - \sum_1^n (P a' d) + \sum_1^n (P b' d)$, 因 a' 及 b' 兩值, 對於在和號以後諸力, 均互相等, 故 $\sum_1^n (P a b) = a' b' R_{1-n} - \sum_1^n (P d^2) - a' \sum_1^n (P d) + b' \sum_1^n (P d)$, 以其中最後兩項各為零, 且 $\sum_1^n (P d^2)$ 項可



第 60 圖

作荷重之惰率 (Trägheitsmoment; moment of inertia) 觀, 故 $\sum_1^n (P d^2)$ 亦可以 J_n 示之, 即成:

$$Y = \frac{4z}{u^2} (R_{1-n} a' b' - J_n) \dots\dots\dots (76)$$

成組荷重, 雖經移動, 如在 u 勢力段上, 無一荷重離去或加入者, 則 J_n 恆不變, 故 Y 之最大值, 依 $R_{1-n} a' b'$ 值而定, 設合力 R_{1-n} 距 u 段之中央為 ξ , 則 $a' = \frac{u}{2} + \xi$; $b' = \frac{u}{2} - \xi$; 因得 $a' b' = \frac{u^2}{4} - \xi^2$, 即 $R_{1-n} a b = R_{1-n} \left(\frac{u^2}{4} - \xi^2 \right)$, 如以 $\xi = 0$, 則可得上式之最大值, 意即合力 R_{1-n} 與 u 段之中線, 互相疊合也。由此得 $Y_{\max} = \frac{4z}{u^2} \left(R_{1-n} \cdot \frac{u^2}{4} - J_n \right)$, 即

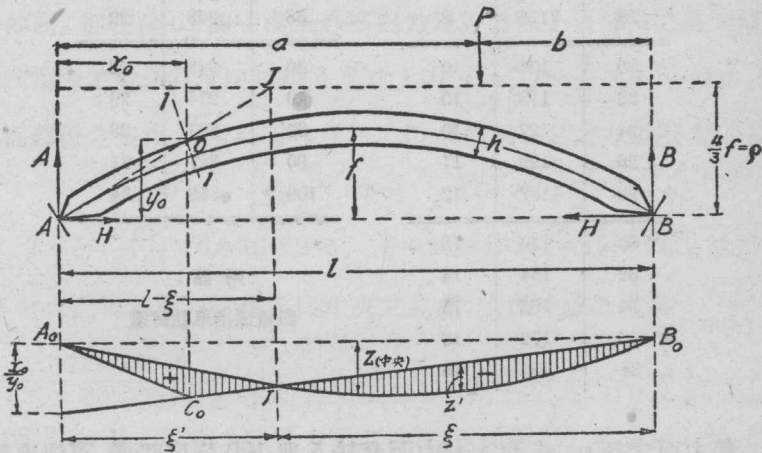
$$Y_{\max} = z \left(R_{1-n} - J_n \frac{4}{u^2} \right) \dots\dots\dots (77)$$

樑之中央如受單力作用, 適足產生 Y_{\max} 者, 是單力用 P_i 示之, 則

P_i 值之條件必為： $P_i \cdot z = z \left(R_{1-n} - \frac{4}{u^2} J_n \right)$

$$P_i = R_{1-n} - \frac{4}{u^2} J_n \dots\dots\dots(78)$$

上式之價值殊多，因 R_{1-n} 及 J_n 兩值，對於一定之成組荷重及各種長度 u ，可以預作計算，而列成表格，如是則由表中取得之 P_i 值，置之 $\frac{u}{2}$ 處，便得 Y_{max} ，與受成組荷重直接作用者無異，僅須以勢力面之中央座標 z 乘之，即可得 Y_{max} 矣。在應用時須注意者，即同一機車，煤水車，



第 61 圖

及貨車等，因地位及順序之不一，可排列成各種不同之成組荷重，德國普魯士 (Preussen) 海森 (Hessen) 兩省國有鐵路之 A 號列車重量 (見第 5a 節)，路局中計算成表格，於此亦利用之，由 A 號列車所組成之極限荷重情形之各種表格，而得 P_i 值表如次：

u 公尺	P_i 公噸	n 荷重數目	u 公尺	P_i 公噸	n 荷重數目
5	43.3	3	40	188	17
6	49.5	4	42	195	17
7	55.5	4	44	202	18
8	61.1	5	46	208	19
9	66.1	5	48	214	19
10	69.7	5	50	220	20
12	74.4	5	52	226	20
14	77.2	6	54	232	21
16	83.6	7	56	238	21
18	91.8	8	58	243	22
20	101	10	60	248	22
22	113	10	70	275	26
24	122	10	80	301	28
26	129	11	90	327	31
28	137	12	100	352	34
30	146	13			
32	154	14			
34	163	15			
36	172	16			
38	180	16			

附 註：

表值係指單軌荷重

勢力面之長 u ，未列入表中而介於 5 與 100 公尺間者，可依直線之比例得之。

如勢力面由拋物線及一直線合成者，或由拋物線及二直線合成者，凡諸情形，則應另作個別研究，以其與前例互異也。

一直線與一拋物線所圍成之勢力面。其情形依第四節之雙關節實心拱之勢力面，一如第 61 圖所示。拱之跨度 $l=36\text{m}$ ，矢度 $f=4.5\text{m}$ ，

拱厚 $h=1.0$ m 得 $\nu = \frac{1}{1 + \frac{15}{32} \left(\frac{1}{4.5}\right)^2} = 0.978$, 拱第四節水平推力 H 勢

力線之中央橫座標為:

$$z_{(\text{中央})} = \frac{3}{16} \frac{l}{f} \nu = \frac{3}{16} \cdot \frac{36}{16} \cdot 0.978 = 1.467$$

查表得在 $u=36$ m 時, $P_i=172$ t, 故 $H_{\max}=172 \times 1.467=252.3$ t 取整數則為 $H_{\max}=252$ t。

在此規定之勢力面上承受荷重部份, 如僅及樑長之 ξ 者, 則其計算亦如前, 即在第 61 圖中求上心核點力矩勢力面上負部份之最大值。其拱底壓力線位於拱底連結線 AB 之上方 $\rho = \frac{4}{3}f = \frac{4}{3} \times 4.5 = 6$ m, 負勢力方面部份之長度, 知由荷重分界點 J 起, 求對於 O 點之力矩, 是點有座標:

$$x_0 = 10 \text{ m} \quad y_0 = 3.61 \text{ m} \quad (l - \xi) : \rho = x_0 : y_0$$

$l - \xi = \frac{10}{3.61} \times 6 = 16.62$ m, $\xi = 36 - 16.62 = 19.36$ m, 故得 $\xi = 19.4$ m, 拋物線勢力面在 ξ 段中央之高度, 依拋物線公式為 $\frac{z'}{z_{(\text{中央})}} = \frac{\xi^2}{l^2}$
 $z' = \frac{1.467 \times 19.4^2}{36^2} = 0.425$, 以 $\xi = 19.4$ m, 由表得 $P_i = 91.8 + 1.4 \times \frac{9.2}{2} = 98.2$ t, 其心核點力矩勢力面之乘數(依第四節)為 $y_0 = 3.61$, 故得:

$$M_{\min} = P_i z' y_0 = -98.2 \times 0.425 \times 3.61 = -150.7 \text{ tm}$$

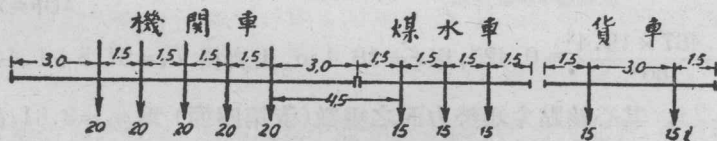
一拋物與二直線所圍成之勢力面。其情形與第 61 圖所示心核點力矩之正段勢力面相當, 表中各值非如前例之仍得應用, 以其假定於此未能符合也。吾人可擇成組荷重中較重之一力, 置於勢力面之頂處, 其他諸重力, 則位於近旁, 依此荷重地位而計 $P \eta$ 之積, 再總計其各值。

然後另擇其他較重之力，置於頂處，同法進行，遇有必要，再求第三次荷重地位之 $\Sigma(P\eta)$ ，一經比較，即不難求得 $\Sigma(P\eta)$ 之最大值矣。經滿勒白萊斯勞氏之引證，尚有計算方法，足資應付，且仍須利用以前之表值也。

附誌：勢力線如與拋物線形相似者，則表值 P_i 仍可應用，因於圓弧線之勢力面中，求成組荷重之極限地位，常致耗時過多，故是法於此尤多利益，法將其他形式之勢力面，以同面積之拋物線面代之，其中央高度，則由計算得之，於是即可應用表值矣。

第五a節 德國普魯士省國有鐵路之列車重量

第五節中所言普魯士海森兩省國有鐵路之 A 號列車重量，係由位於最大勢力座標處之二輛機車及一端掛有無限輛數之貨車所組成，其軸距及軸重，依第 62 圖所示，列車之組成，因二輛機車相互間之地位



第 62 圖

及貨車之所在，可成四種不同情形，在各路局所應用之表及工程手冊 Hütte 第三本中，載有長達 $u = 300$ m 之樑，而對於求 P_i 時所擬之機車地位，另作說明。

計算較矩之橋樑及橫樑，小樑等，應採用較第 62 圖所示機車更大

之荷重，其值規定如次：

容一軸者以 20 t 之荷重，

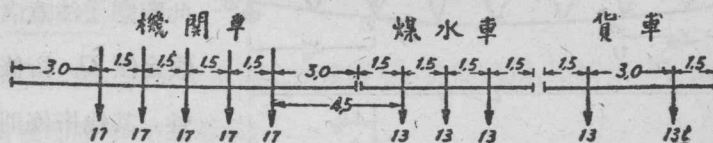
容二軸者以 20 t 之荷重，

容三軸者以 19 t 之荷重，

容四軸者以 18 t 之荷重。

所有軸距各為 1.5 公尺，是項規定，表中亦嘗注意及之。

在交通繁盛之高速度行駛段中，自 1910 年 12 月 31 日起，應用 B 號列車，重量計算，其與 A 號列車所不同者，僅加高列車重量百份之二十而已（見第 63 圖）。



第 63 圖

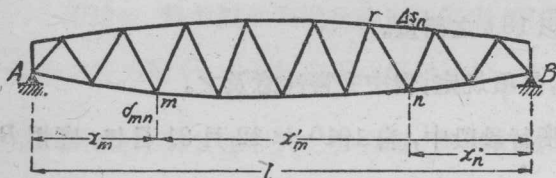
對於計算較短之橋樑，在 A 號列車另有規定如前，於此則並不再事增大各機車車輛之重量矣。

第六節 一級靜力不定式結構物之逾定值勢力線

依第一節引證知逾定值之勢力線為組成其他各勢力線之基礎，不得不先事推求，此外更示行車道桁條因 $X = -1$ 力作用所起之彎線，即逾定值 X 之勢力線，故於此之先決問題，即求行車道桁條於 $X = -1$ 時之彎線是矣。

定式之基本結構物上，載有 $X = -1$ 力，而求各桁條所起之張力及桁條之伸縮，從而更求行車道桁條各節點之沉陷。

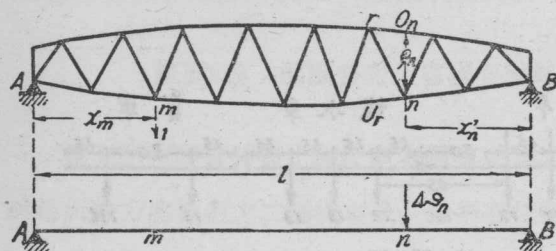
先求一任意節點 m 由於節點 n 相對桁 O_n 之伸縮 $-\Delta s_n$ 而起之沉陷 δ_{mn} (第 64 圖)。依第一節所得之定律，知由 m 點所懸之垂直荷重 1



而使 O_n 桁條產生張力 S_{mn} ，復乘以因是力而起之伸縮 Δs_n ，遂得 m 點之沉陷 δ_{mn} ，故

$$\delta_{mn} = -(S_{mn} \Delta s_n),$$

此際應予注意者，乃假定僅 O_n 桁條有彈性，其他桁條則均屬非彈性體，故：



第 64 圖

$$S_{mn} = -\frac{x_m \cdot x'_n}{l \cdot \rho_n}, \text{ 即 } \delta_{mn} = \left(-\frac{x_m \cdot x'_n}{l \cdot \rho_n} \right) (-\Delta s_n) = \frac{x_m \cdot x'_n \cdot \Delta s_n}{l \cdot \rho_n}$$

$$\delta_{mn} = \frac{\Delta s_n}{\rho_n} \frac{x_m \cdot x'_n}{l} \dots\dots\dots(79)$$

如桁條 O_n 收縮 Δs_n ，其作用一如由 O_n 中截去 Δs_n 段後，復將其二部份重行合併，於力矩點 n 之角度變形，以 $\Delta \delta_n$ 示之，則 $\rho_n \cdot \Delta \delta_n =$

Δs_n

$$\Delta \delta_n = \frac{\Delta s_n}{\rho_n} \dots\dots\dots(80)$$

以是值完成 δ_{mn} 公式：

$$\delta_{mn} = \Delta \delta_n \cdot \frac{x_m \cdot x_n'}{l} \dots \dots \dots (81)$$

如在跨度 l 之樑上，桁條 O_n 之力矩點處，荷以 $\Delta \delta_n$ 重量，則 A 處之攔支力為 $\Delta \delta_n \cdot \frac{x_n'}{l}$ ，而對於 m 點之力矩為(第 64 圖)：

$$(M_m) = \frac{\Delta \delta_n \cdot x_n'}{l} \cdot x_m = \delta_{mn} \dots \dots \dots (82)$$

因得結果如次：欲求節點 m 因任何桁條 O_n 之收縮 $\Delta \delta_n$ 而起之沉陷也，可於該桁條 O_n 之力矩點地位，荷以由於該桁條 O_n 之收縮 $\Delta \delta_n$ 而起之角度變形 $\Delta \delta_n$ 重量，此重量在節點 m 所產生之力矩值，即 m 點所求之沉陷也。

是項原則，對於下桁條之長度變形，亦能適用，下桁條 U_r 之伸長 $\Delta \delta_r$ 有使節點 m 之沉陷為：

$$\delta_{mr} = S_{mr} \cdot \Delta \delta_r = \frac{x_m \cdot x_r'}{l \cdot \rho_r} \cdot \Delta \delta_r \quad \text{以 } \Delta \delta_r = \frac{\Delta s_r}{\rho_r}$$

$$\delta_{mr} = \Delta \delta_r \cdot \frac{x_m \cdot x_r'}{l} \dots \dots \dots (83)$$

上桁縮短及下桁伸長，必起沉陷 δ_m ，反之，上桁伸長及下桁縮短，則必現升高 δ_m 。

吾人以角度變形 $\Delta \delta$ 為彈性重量 (elastische Gewichte)，乃係理想重量，由其所成之力矩，自亦理想力矩，以 (m) 及 (M) 示之，藉與實有力矩知所區別也。

實際上，所有全部桁條(O_n 及 U_r)，均係彈性體，故在各力矩點相對之桁條，以其長度變形所起之角度變形 $\Delta\delta$ ，作為重量，由此 $\Delta\delta$ 重量在行車道桁條各節點 m 所起之力矩，遂得此荷重情形之沉陷，亦即其彎線也。

因外廓桁條之長度變形而起之沉陷，較之因內含桁條之長度變形所起者，為大遠甚。故後項所起之影響，常遭忽略，以在初步約計時為尤甚，而將詳細之計算，待諸異日。故應以對角線桁條及垂直桁條之影響，暫事忽略，而作非彈性體觀其所起之影響，在後節中當再繼續研究之。

逾定值 X 勢力線所得結果之彙合

1. 於 $X = -1$ 時行車道桁條之彎線，即係 X 勢力線，而 X 勢力值，可由彎線之縱座標 δ_{mc} ，以 $X = -1$ 力之着力點之移動 δ_{cc} 除之便得，即 $X = \frac{\delta_{mc}}{\delta_{cc}}$

2. 求 X 勢力線之問題，因此變成在 $X = -1$ 時求行車道桁條之彎線問題矣。

3. 設由 $X = -1$ 力所起之各桁條長度變形為 $\pm \Delta s'$ ，在桁條之力矩點所起角度變形為 $\pm (\Delta\delta)'$ ，而令角度變形 $(\Delta\delta)'$ 作為在兩端攔支樑上之荷重，求行車道各節點因荷重 $(\Delta\delta)'$ 而起之力矩，此力矩值即係行車道各節點之沉陷值，其力矩線亦即彎線是也。今 $(\Delta s)' = \frac{S_1 s}{E F}$ ，式中 S_1 係由 $X = -1$ 力所起之桁條張力， s 為桁條之長， F 為其剖面積及 E 為材料之彈性係數。 $(\Delta\delta)' = \frac{(\Delta s)'}{\rho} = \frac{S_1 s}{E F \rho}$

例題

1. 雙關節拱。其定式之基本結構，在 B 處應有水平移動之支座（第65圖），更於其地置 $X = -1$ 力，意即向外作用也。 A 處因亦產生相同

之向外力 1，由此

荷重而起之桁條張

力 S_1 ，可用計算（烈

透氏之力矩法）或

圖解（力圖）法求得

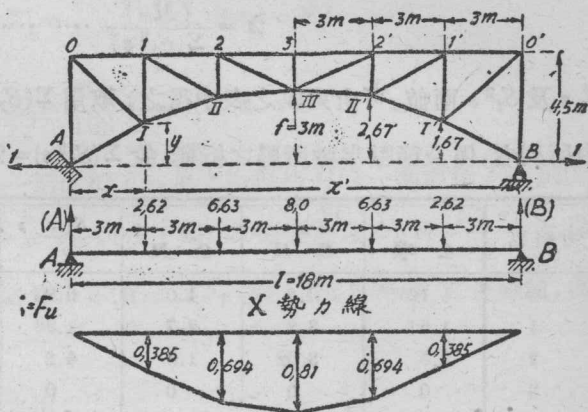
之，而將所得之值，

與桁條長度 s 及臂

長 ρ ，一併列成表

格，在初步計算，此

等未能預知之外廓桁條之剖面積，可以假定其為相等，即 $F_o = F_u = F$ 是也。



第 65 圖

設拱之下桁條作拋物線形，跨度 $l = 18$ 尺，矢度 $f = 3.0$ 公尺，以 A 為座標軸之始點，對於 \overline{AB} 橫軸之縱座標為：

$$y = \frac{4f}{l^2} (lx - x^2) =$$

$$\frac{4f}{l^2} (xx'), \text{ 如以數值代入之，則得： } y = \frac{4 \times 3}{18^2} (xx') = \frac{xx'}{27}$$

因之，在 $x = 3 \quad 6 \quad 9 \quad 12 \quad 15$ 公尺處

則 $y = 1.67 \quad 2.67 \quad 3.0 \quad 2.67 \quad 1.67$ 公尺

依假定，諸桁條之 E 及 F 均相等，故於 \overline{AB} 樑之荷重 $(\Delta \delta)' =$

$\frac{S_1 s}{E F \rho}$, 可以 $E F (\Delta \delta)' = \frac{S_1 s}{\rho}$ 代之, 而所得之力矩值, 即成行車道桁條 $E F$ 倍之沉陷, 故 X 公式之分子為 $E F (M_m)$, 欲求 X 之勢力線時, 祇須將分母 $\Sigma \left(\frac{S_1^2 s}{E F} \right)$ 以同值乘之, 故其分母為 $\Sigma (S_1^2 s)$, 因成

$$X = \frac{(M_m)}{\Sigma (S_1^2 s)} \dots\dots\dots (84)$$

$S_1 s$ 及 $S_1^2 s$ 兩值, 可由列成之表中得之, 取用 $\Sigma (S_1^2 s)$ 值時, 須注意表中所列者, 僅及節點半數所屬之桁樑, 故 $\Sigma (S_1^2 s) = 2 \times 51.6 = 103.2$ 也。

力矩點	S_1 公 噸	s 公 尺	ρ 公 尺	$\frac{S_1 s}{\rho}$	S_1^2	$S_1^2 s$
0	1.125	3.4	4.0	0.93	1.27	4.32
1	1.67	3.2	2.7	1.98	2.79	8.93
2	2.5	3.02	1.8	4.2	6.25	18.88
3	0	0	0	0	0	0
I	-0.6	3.0	28.3	-0.64	0.36	1.08
II	-1.46	3.0	1.8	-2.43	2.13	6.39
III	-2.0	3.0	1.5	-4.0	4.0	12.00
						51.60

附註：力矩點 0 至 3 之各桁條張力 S_1 值, 係下桁條之拉力, 而力矩點 I 至 III 者, 則係上桁條之壓力, 其所屬之角度變形, 具相反符號, 按前說知荷重之符號, 對於 $A B$ 樑之沉陷無關, 故可不必注意。

以 $E F \Delta \delta'$ 值為荷重之樑 (第 65 圖), 得攔支力 (A) 及 (B) 為:

$$(A) = (B) = 2.62 + 6.63 + 4 = 13.25$$

其所產生之力矩為:

$$(M_I) = 13.25 \times 3 = 39.75$$

$$(M_{II}) = 13.25 \times 6 - 2.62 \times 3 = 71.64$$

$$(M_{III}) = 13.25 \times 9 - 2.62 \times 6 - 6.63 \times 3 = 83.64$$

因得：

$$X_1 = \frac{39.75}{103.2} = 0.385 \text{ t} = X_1'$$

$$X_2 = \frac{71.64}{103.2} = 0.694 \text{ t} = X_2'$$

$$X_3 = \frac{83.64}{103.2} = 0.81 \text{ t}$$

如下桁條均有同一剖面積 F_u ，及上桁條均有同一剖面積 F_o ，則其比 $\frac{F_o}{F_u} = \alpha$ ，此即 $F_o = \alpha \cdot F_u$ 而成下法：其彈性重量 $\Delta \delta' = \frac{(\Delta s)'}{\rho}$ 如以 $E F_u \Delta \delta'$ 值代之，則其分母亦須以 $E F_u$ 乘之，庶可得 X 之正確值，由是得其分子作為：

上部諸節點荷重之用

$$E F_u \Delta \delta' = \frac{E F_u}{\rho} \cdot \frac{S_1 s}{E F_u} = \frac{S_1 s}{\rho}$$

下部諸節點荷重之用

$$E F_u \Delta \delta' = E F_u \frac{S_1 s}{E F_o \rho} = \frac{S_1 s}{\rho} \left(\frac{F_u}{F_o} \right) = \frac{S_1 s}{\rho \alpha}$$

以此荷重而求力矩值 (M)，其分子為 $E F_u \Sigma \left(\frac{S_1^2 s}{E F} \right)$

對於上部節點之分母值為：

$$E F_u \Sigma_o \left(\frac{S_1^2 s}{E F_u} \right) = \Sigma_o (S_1^2 s)$$

對於下部節點之分母值為：

$$E F_u \Sigma_u \left(\frac{S_1^2 s}{E F_o} \right) = \Sigma_u \left(\frac{S_1^2 s}{\alpha} \right)$$

是以此公分母爲 $\Sigma_o(S_1^2 s) + \Sigma_u \left(\frac{S_1^2 s}{a} \right)$

第 65 圖所示之拱樑，如 $\frac{F_o}{F_u} = \alpha = \frac{3}{4}$ ，則得下表各值。

力 矩 點	$\frac{S_1 s}{\rho}$	$\frac{S_1 s}{\rho \alpha}$	$S_1^2 s$	$\frac{S_1^2 s}{a}$
0	0.96		4.32	
1	1.98		8.93	
2	4.20		18.88	
3	0		—	
4	4.20		18.88	
5	1.98		8.93	
6	0.96		4.32	
I	-0.64	-0.85	1.08	1.44
II	-2.43	-3.24	6.39	8.52
III	{ -4.0 -4.0	-10.67	{ 12.0 12.0	32.0
IV	-2.43	-3.24	6.39	8.52
V	-0.64	-0.85	1.08	1.44

其公分母爲：

$$(4.32 + 8.93 + 18.88) \times 2 + (1.44 + 8.52) \times 2 + 32 = 116.18$$

如第 66 圖所示之荷重，爲：

$$(A) = (B) = 2.83 + 7.44 + 5.33 = 15.60$$

$$(M_1) = 15.6 \times 3 = 46.8 = (M_1)', (M_2) = 15.6 \times 6 - 28.3 \times 3 = 85.11 = (M_2)',$$

$$(M_3) = 15.6 \times 9 - 2.83 \times 6 - 7.44 \times 3 = 101.1$$

$$X_1 = \frac{46.8}{116.18} = 0.40 \text{ t}, \quad X_2 = \frac{85.11}{116.18} = 0.73 \text{ t}$$

$$X_3 = \frac{101.1}{116.18} = 0.87 \text{ t}$$

依前假定 $F_o = F_u = F$ 所得之值，與此互作比較，知上下兩桁條剖面面積之相差，雖達百分之二十五之鉅，但對於 X 值之影響，仍極微小也。

2. 三個支點之連續樑 設上下桁條均有相等之剖面積 F ，各項應需之數值，列成次表，

而以 $E F \Delta \delta' = \frac{S_1 s}{\rho}$ 為荷重，再經 $\Sigma (S_1^2 s)$ 除之，即得 X 值。

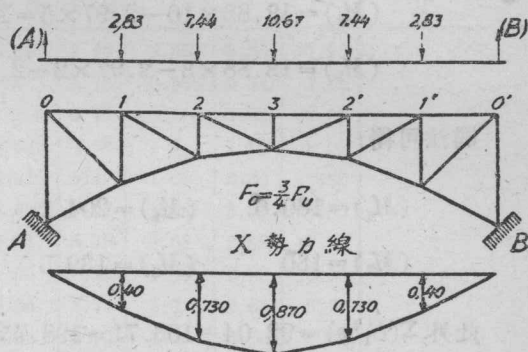
以 $E F (\Delta \delta')$ 為荷重之樑，計在：

節點 1 因桁條 U_1 及 U_2 而得	2 × 0.838
節點 I 因桁條 Y_1 而得	1.29
故在 $\overline{1I}$ 之垂線上有	2 × 0.838 + 1.29 = 2.966
節點 2	無
節點 II 因桁條 O_2 及 O_3 而得	2 · 1.25 = 2.5
節點 3 因桁條 U_3 及 U_4 而得	2 · 1.5 = 3.0
節點 III	無

依次前進，遂成第 67 圖所示之荷重情形，而得：

$$(A) = \frac{5.8 + 2.96 \times 2 + 3.36 \times 3 + 3.34 \times 4 + 3.36 \times 5 + 3.2 \times 6 + 3.0 \times 7 + 2.5 \times 8 + 2.97 \times 9}{10} = 13.88$$

$$(B) = \frac{5.8 \times 9 + 2.96 \times 8 + 3.36 \times 7 + 3.34 \times 6 + 3.36 \times 5 + 3.2 \times 4 + 3.0 \times 3 + 2.5 \times 2 + 2.97 \times 1}{10} = 16.85$$



第 66 圖

$$(M_1) = 13.88 \times 5 = 69.40$$

$$(M_2) = 13.88 \times 10 - 2.97 \times 5 = 124$$

$$(M_3) = 13.88 \times 3 - 2.97 \times 2 - 2.5 \times 1) \cdot 5 = 166.05$$

同法可得：

$$(M_4) = 180.6 \quad (M_5) = 204.1 \quad (M_6) = 198.35$$

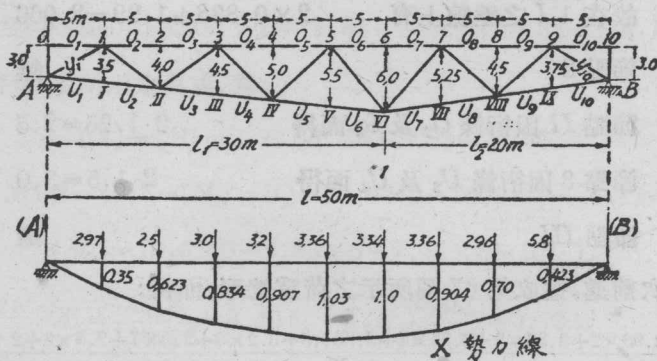
$$(M_7) = 180 \quad (M_8) = 139.5 \quad (M_9) = 84.25$$

$$\text{此外 } \Sigma(S_1^2 s) = 92.04 + 106.71 = 198.75 \sim 199$$

$$X_1 = \frac{69.4}{199} = 0.35 \text{ t} \quad X_2 = \frac{124}{199} = 0.623 \text{ t} \quad X_3 = \frac{166}{199} = 0.834 \text{ t}$$

$$X_4 = \frac{180.6}{199} = 0.907 \text{ t} \quad X_5 = \frac{204.1}{199} = 1.03 \text{ t} \quad X_6 = \frac{198.35}{199} = 1 \text{ t}$$

$$X_7 = \frac{180}{199} = 0.904 \text{ t} \quad X_8 = \frac{139.5}{199} = 0.70 \text{ t} \quad X_9 = \frac{84.25}{199} = 0.423 \text{ t}$$



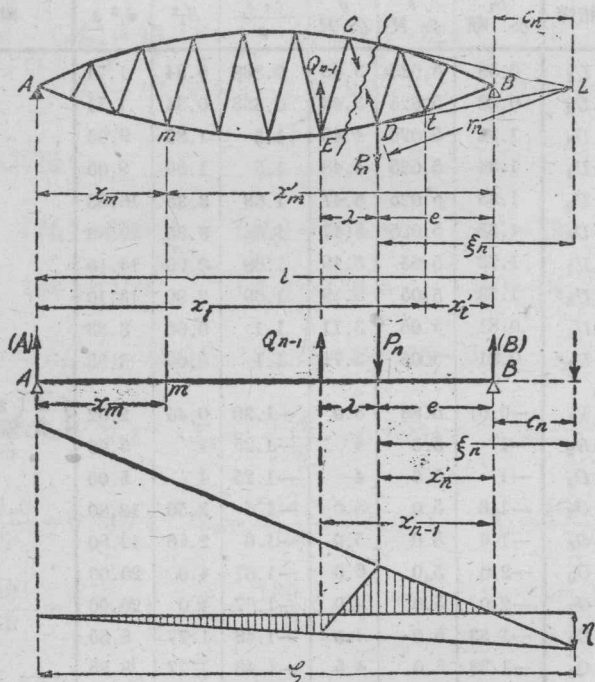
力矩點	桁條	S_1 公噸	s 公尺	ρ 公尺	$\frac{S_1 s}{\rho}$	S_1^2	$S_1^2 s$	附註
1	U_1	0.58	5.025	3.48	0.838	0.34	1.71	
1	U_2	0.58	5.025	3.48	0.838	0.34	1.71	
3	U_3	1.34	5.025	4.48	1.5	1.80	9.05	
3	U_4	1.34	5.025	4.48	1.5	1.80	9.05	
5	U_5	1.83	5.025	5.47	1.68	3.35	16.83	
5	U_6	1.83	5.025	5.47	1.68	3.35	16.83	
7	U_7	1.73	5.05	5.19	1.68	2.99	15.10	
7	U_8	1.73	5.05	5.19	1.68	2.99	15.10	
9	U_9	0.81	5.05	3.71	1.1	0.66	3.33	
9	U_{10}	0.81	5.05	3.71	1.1	0.66	3.33	
I	Y_1	-0.67	5.83	3.0	-1.29	0.45	2.62	A 1 桁條以 Y_1 示者，係外廓桁條。
II	O_2	-1	5.0	4	-1.25	1	5.00	
II	O_3	-1	5.0	4	-1.25	1	5.00	
IV	O_4	-1.6	5.0	5.0	-1.6	2.56	12.80	
IV	O_5	-1.6	5.0	5.0	-1.6	2.56	12.80	
VI	O_6	-2.0	5.0	6.0	-1.67	4.0	20.00	
VI	O_7	-2.0	5.0	6.0	-1.67	4.0	20.00	
VIII	O_8	-1.33	5.0	4.5	-1.48	1.77	8.85	
VIII	O_9	-1.33	5.0	4.5	-1.48	1.77	8.85	
IX	Y_{10}	-1.36	5.83	2.2	-3.6	1.85	10.79	B 9 桁條以 Y_{10} 示者，係外廓桁條。

以所得之 X 值，繪入第 67 圖，遂成 X 勢力線， X_6 必等於 1，其分子 (M_6) 即示節點 VI (或 6) 之沉陷，故與分母 $\Sigma(S_1^2 s)$ 相等。

第七節 對角桁及垂直桁對於彎線之影響

第六節所研究之例題，乃限於外廓桁條之影響，須知對角桁及垂直桁之於彎線，亦不無影響，此與逾定值 X 之大小有關，事前當注意者，此研究所得之結果。其原則悉與外廓桁條相一致，而其間逐項細目，則

有重要之區別。



第 68 圖

第 68 圖所示下桁條之節點，與行車道作固定之連結，而與行車道各節點具同一之沉陷。

(a) 對角桁之影響 $\overline{C'D'}$ 桁條如經伸長 Δs_n ，則求 m 節點因其伸長而起之沉陷。

依第一節及第六節所得之規律，其垂直移動 $\delta_{mn} = \Delta s_n \cdot S'_{mn}$ ，式中 S'_{mn} 示 \overline{CD} 桁條因節點 m 有垂直力 1 之作用而起之張力。

$$\text{故 } S'_{mn} \cdot r_n + \frac{x_m}{l} \cdot c_n = 0, \quad S'_{mn} = -\frac{x_m c_n}{l r_n} \text{ 因得:}$$

$$\delta_{mn} = -\frac{x_m c_n}{l r_n} \Delta s_n \dots\dots\dots (85)$$

如 Δs_n 示伸長，即為正，則依公式 (85) 其沉陷 δ_{mn} 為負，即昇高是也。如 Δs_n 示縮短，即為負，則 δ_{mn} 為正，即沉陷是也。 \overline{CD} 桁條之力矩點 L ，其處角度變形 $\Delta \delta_n$ 之絕對值為： $\Delta \delta_n = \Delta s_n : r_n$ ，此值用於公式 (85) 遂成：

$$\delta_{mn} = -\Delta \delta_n \frac{x_m c_n}{l} \dots\dots\dots (86)$$

力矩點 L 如荷以重量 $+\Delta \delta_n$ ，向下作用，則得 A 之擱支力為：

$$(A) = -\frac{\Delta \delta_n c_n}{l} \text{ 及在節點 } m \text{ 之力矩為：}$$

$$-(M_n) = -\Delta \delta_n \cdot \frac{x_m c_n}{l} = -\frac{\Delta \delta_n}{r_n} \cdot \frac{x_m c_n}{l} = \delta_{mn}$$

力矩點 L 上荷以角度變形 $\Delta \delta$ ，則在經過 \overline{CD} 桁條之剖線左側節點所產生之力矩，與由於 \overline{CD} 桁條之長度變形 Δs 所產生之彎線縱座標值相等。

此亦可引用與前相似之法則證明之，因對於經過 \overline{CD} 桁條之剖線右側節點 t ，適用同一律也。僅剖線兩側之動向，互相反對，如剖線左側諸節點昇高，則右側諸節點沉陷，否則反是，而以伸長 Δs_n 作為力矩點 L 之正荷重 $\Delta \delta_n$ ，縮短 Δs_n 作為力矩點 L 之負荷重 $\Delta \delta_n$ 是也。

以力矩點 L 並非在桁樑之上，故其他荷重 $\Delta \delta_n$ ，不得直接造成，祇可就 \overline{AB} 桁樑上實有之荷重點，荷以重量 $\Delta \delta$ ，而令其結果與 L 點上荷以重量 $\Delta \delta_n$ 者相等。此等替代重量，可以 Q_{n-1} 及 P_n 示之，而其合力則

必爲 $\Delta\delta_n$ ，且位於 L 點也。今設節點 E 作用之力爲 Q_{n-1} ，節點 D 作用者爲 P_n ，其着力點在經過桁條 \overline{CD} 之剖線兩側行車道節點上，復因 $\Delta\delta_n$ 位於 P_n 及 Q_{n-1} 兩力之外側，故是二力之性質必相反，如 $\Delta\delta_n$ 爲 P_n 及 Q_{n-1} 二力之合力，應成：

$$Q_{n-1}\lambda = \Delta\delta_n\xi_n \quad P_n\lambda = \Delta\delta_n(\xi_n + \lambda),$$

$$\text{即} \quad Q_{n-1} = \Delta\delta_n \frac{\xi_n}{\lambda} \text{ 向上作用} \dots\dots\dots (87)$$

$$P_n = \frac{\Delta\delta_n}{\lambda} (\xi_n + \lambda) \text{ 向下作用} \dots\dots\dots (88)$$

此荷重所產生之攔支力爲：

$$(A) = P_n \frac{x_n'}{l} - Q_{n-1} \frac{(x_n' + \lambda)}{l} = \frac{\Delta\delta_n}{\lambda} (\xi_n + \lambda) \frac{x_n'}{l} - \Delta\delta_n \frac{\xi_n}{\lambda} \frac{(x_n' + \lambda)}{l} = -\frac{\Delta\delta_n}{l} c_n$$

$$(B) = \frac{\Delta\delta_n}{l} (l + c_n)$$

經 \overline{CD} 桁條之剖線左側行車道諸節點之力矩爲：

$$(M_m) = (A) x_m = -\frac{\Delta\delta_n}{l} c_n x_m \dots\dots\dots (89)$$

此 (M_m) 與求 δ_{mn} 之公式 (86) 完全一致，對於 t 點之力矩爲：

$$(M_t') = (B) \cdot x_t' = \frac{\Delta\delta_n}{l} (l + c_n) x_t' \dots\dots\dots (90)$$

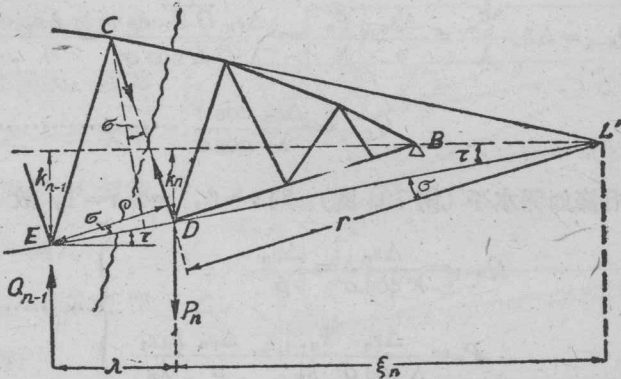
亦與因桁條 \overline{CD} 伸長 Δs 而使 t 點之沉陷者相同，因 \overline{CD} 桁條之伸長 Δs_n 而起之行車道彎線各縱座標值，乃示由於經是桁條之剖線左右兩側二節點上荷重 $-Q_{n-1}$ 及 P_n 所產生各節點之力矩也。

Q 值更可用簡捷法表示之，按第 69 圖為：

$$\frac{\rho}{r} = \frac{\overline{ED} \cos \sigma}{LD \cos \sigma} = \frac{\overline{ED}}{LD}, \quad \frac{\rho}{r} = \frac{\lambda}{\xi_n}, \quad \rho = \frac{\lambda}{\xi_n} \cdot r$$

因 $\Delta \delta = \frac{\Delta s_n}{r}$ ，故 $Q_{n-1} = \frac{\xi_n}{\lambda} \frac{\Delta s_n}{r} = \frac{\Delta s_n}{\rho}$

$$Q_{n-1} = \frac{\Delta s_n}{\rho} \dots \dots \dots (91)$$



第 69 圖

在 E 點作用之力 Q，實係 \overline{CD} 桁條之長度變形 Δs_n ，對於其對角之角度變形也。

依公式 (91) 之 Q_{n-1} 值為：

$$P_n = Q_{n-1} \frac{(\xi_n + \lambda)}{\xi_n} = \frac{\Delta s_n (\xi_n + \lambda)}{\rho \xi_n} = \frac{\Delta s_n}{\rho} + \frac{\Delta s_n \lambda}{\rho \xi_n} = \frac{\Delta s_n}{\rho} + \frac{\Delta s_n}{r}$$

$$P_n = \frac{\Delta s_n}{\rho} + \frac{\Delta s_n}{r} \dots \dots \dots (92)$$

復以 $\frac{\lambda + \xi_n}{\xi_n} = \frac{k_{n-1}}{k_n}$ ，故

$$P_n = \frac{\Delta s_n}{\rho} \frac{k_{n-1}}{k_n} \dots \dots \dots (93)$$

因力矩點 L 地位之不同，可就上列二式擇一較易者，以求 Q_{n-1} 及 P_n 。

力矩點 L 如位於擱支點 B 以外之遠處，則以採用角度數值為宜，故成：

$$Q_{n-1} = \Delta s_n \frac{\xi_n}{\lambda} = \frac{\Delta s_n}{r} \frac{\xi_n}{\lambda} = \frac{\Delta s_n \overline{DL} \cos \tau}{\lambda \overline{DL} \cos \sigma} = \frac{\Delta s_n \cos \tau}{\lambda \cos \sigma}$$

$$Q_{n-1} = \frac{\Delta s_n \cos \tau}{\lambda \cos \sigma} \dots \dots \dots (94)$$

下桁條如係水平（第 70a 圖），則 $\tau=0$ ， $\cos \tau=1$ ，故

$$\left. \begin{aligned} Q_{n-1} &= \frac{\Delta s_n}{\lambda \cos \sigma} = \frac{\Delta s_n}{\rho} \\ P_n &= \frac{\Delta s_n}{\lambda \cos \sigma} \frac{k_{n-1}}{k_n} = \frac{\Delta s_n}{\rho} \frac{k_{n-1}}{k_n} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (95)$$

上桁條如係水平（第 70b 圖），則 $Q_{n-1} = \frac{\Delta s_n}{r} \frac{\xi_n}{\lambda}$ ，在向上作用之正 Δs 為：

$$P_n = \frac{\Delta s_n}{r} \left(\frac{\lambda + \xi_n}{\lambda} \right), \quad \rho = \frac{\lambda}{\lambda + \xi_n},$$

即
$$P_n = \frac{\Delta s_n}{\rho} \dots \dots \dots (96)$$

意即此彈性重量 $\frac{\Delta s_n}{\rho}$ 由於長度變形 Δs_n 對於節點 n 之角度變形所起者，重復納於有關之行車道節點上，在行車道上之其他諸節點為負荷重：

$$Q_{n-1} = \frac{P_n \xi_n}{(\lambda + \xi_n)} = \frac{\Delta s_n}{\rho} \frac{\xi_n}{\lambda + \xi_n} = \frac{\Delta s_n}{\rho} \frac{k_n}{k_{n-1}} \dots\dots(97)$$

故力矩點 L 縱遠在圖紙之外，而 P_n 及 Q_{n-1} 兩值，仍易求得也。

設桁樑由垂直及對角桁條構成，且其外廓桁之一為水平者，則其計算，尤為簡捷(第 70c 圖)。

其在 C 點向上作用之力為：

$$Q_{n-1} = P_n \left(\frac{\xi_n}{\lambda + \xi_n} \right)$$

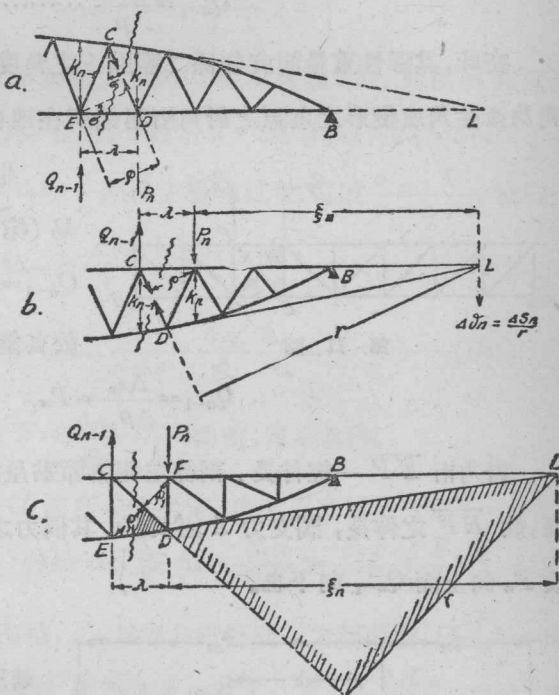
在 F 點向下作用之力為：

$$P_n = \frac{\Delta s_n}{\rho_1}, \text{ 故}$$

$$Q_{n-1} = \frac{\Delta s_n}{\rho_1} \frac{\xi_n}{(\lambda + \xi_n)} \dots\dots(98)$$

由第 70c 圖得：

$$\frac{\rho_1}{r} = \frac{\lambda}{\lambda + \xi_n}, \quad \frac{\rho}{r} = \frac{\overline{DE}}{\overline{DL}} = \frac{\lambda}{\xi_n}, \text{ 故成:}$$

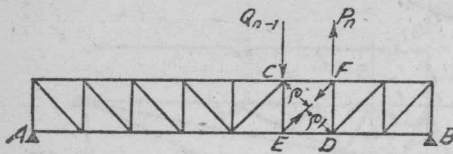


第 70 圖

$$\frac{\rho}{\rho_1} = \frac{(\lambda + \xi_n)}{\xi_n}, \quad \rho = \rho_1 \frac{(\lambda + \xi_n)}{\xi_n} \quad \text{即}$$

$$Q_{n-1} = \frac{\Delta s_n}{\rho} \dots\dots\dots (99)$$

在此，其彈性重量簡直即係二節點上之角度變形，是二節點乃受剖開及產生角度變形之泉源之對角桁兩端所在地也。

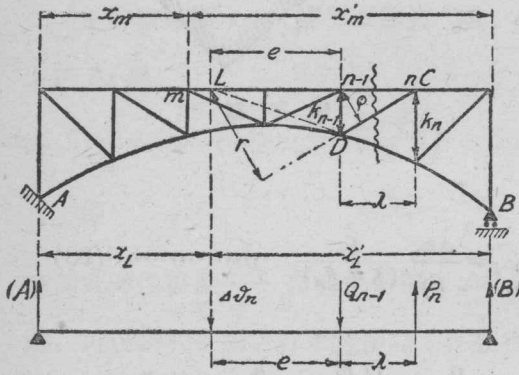


第 71 圖

並行桁樑之求法，最為簡易（第 71 圖），於此情形則成 $Q_{n-1} = P_n$ ，以 $\frac{\xi}{\lambda + \xi}$ 中之 $\xi = \infty$ ，故其值為 1，

$$Q_{n-1} = \frac{\Delta s_n}{\rho} = P_n$$

對角桁 \overline{EF} 一經伸長，剖線左側諸節點呈沉陷，右側諸節點則升高，故 \overline{EF} 之伸長，擱支力 A 必為正，其偶力之力矩 $P_n \lambda$ 向左旋轉，故 P_n 向上而 Q_{n-1} 向下也。



第 72 圖

應用於雙關節拱 於前所得之結果，對於雙關節拱之對角桁條，自亦適用，以求靜力定式基本結構物之逾定值。設對角桁 \overline{CD} 伸長 Δs （第 72 圖），則節點 m 之沉陷為：

$$\delta_{mn} = \frac{\Delta s x_m x'_m}{r l}$$

復因 $\frac{\Delta s}{r} = \Delta \delta_n$, 故

$$\delta_{mn} = \Delta \delta_n \frac{x_m x_L'}{l}$$

[參閱公式(85)及(86)], 如於力矩點 L 荷以重量 $\Delta \delta_n$, 則在 m 點所產生之力矩, 即等於沉陷 δ_{mn} 是也。今設於 $n-1$ 點, 荷以 $Q_{n-1} = \Delta \delta_n \left(\frac{\lambda + e}{\lambda} \right)$

及於 n 點荷以 $-P_n = \Delta \delta_n \frac{e}{\lambda}$ 而代上項荷重者, 復因 $\frac{\rho}{r} = \frac{\lambda}{\lambda + e}$, 則得:

$$Q_{n-1} = \frac{\Delta s_n}{r} \left(\frac{\lambda + e}{\lambda} \right) = \frac{\Delta s_n}{\rho} \dots \dots \dots (100)$$

及(絕對值)
$$P_n = Q_{n-1} \frac{e}{\lambda + e} = \frac{\Delta s_n}{\rho} \frac{k_{n-1}}{k_n} \dots \dots \dots (101)$$

至 $Q = \frac{\Delta s_n}{\rho}$ 及 $P = \frac{\Delta s_n}{\rho} \frac{k_{n-1}}{k_n}$ 兩值, 殊易求得。

數值例題: 如第 65 圖所示之拱架, 其 A, B 兩拱底受有 $X = -1$ 力之作用, 使對角桁 $II' 1'$ 伸長 Δs , 而 $\Delta s = \frac{S_1 s}{E F_D} = \frac{S_1 s}{E F_u} \left(\frac{F_u}{F_D} \right)$ 。式中

F_u 為下桁條同一之剖面積, F_D 為對角桁條同一之剖面積, 以 $\frac{F_u}{F_D} = 2$,

則 $\Delta s = \frac{S_1 s}{E F_u} \cdot 2$, 如荷以 $E F_u \Delta \delta_n = E F_u \frac{\Delta s}{r} = \frac{2 S_1 s}{r}$ 重量, 而

$E F_u \frac{\Delta s}{\rho} = \frac{2 S_1 s}{\rho}$, 則得其分母, 亦以 $E F_u$ 倍之, 是故該桁條之分母

為 $E F_u S_1^2 s$ 。由計算得: $S_1 = 1.02 t$, $s = 3.51 m$, $2 S_1 s = 7.16$

$= \Delta s E F_u$ 。作為荷重用之彈性重量 Q 及 P 為: $Q = \frac{(E F_u \Delta s)}{\rho}$ 及

$P = Q \frac{k_{n-1}}{k_n} = Q \cdot \frac{1.83}{2.83}$, 按第 72 圖為(依第 65 圖所示之尺寸):

$\frac{\rho}{1.83} = \frac{3}{3.51}$, $\rho = 1.56 m$, 故 $Q = 7.16 : 1.56 = 4.6$, $P = (4.6 \cdot 1 \times 83) :$

2.83=3.0, 以是重量而求行車道各節點之力矩, 即因對角桁 II' 1' 之伸長, 而使此等節點之沉陷, 遂得:

$$(A) = \frac{4.6 \times 6 - 3.0 \times 3}{18} = 1.03 \quad (B) = \frac{4.6 \times 12 - 3 \times 1.5}{18} = 0.57$$

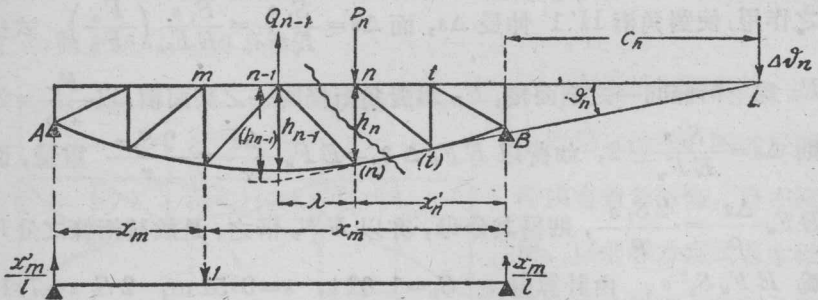
$$(M_1) = 1.03 \times 3 = 3.09 \quad (M_2) = 1.03 \times 2 \times 3 = 6.18 \quad (M_3) = 9.27$$

$$(M_4) = 12.36 \quad (M_5) = 0.57 \times 4 = 1.71$$

(b) 垂直桁之影響 垂直桁 n (n) (第 73 圖) 如伸長 Δs_n , 則經過垂直桁 n (n) 之剖線左側之節點 m , 其沉陷為 $\delta_{mn} = S'_{mn} \cdot \Delta s_n$, 式中 S'_{mn} 示節點 m 荷有重量 1 時, 其垂直桁 n (n) 所產生之張力。

$$S'_{mn} = \frac{x_m c_n}{l (x'_n + c_n)} \text{ 因得:}$$

$$\delta_{mn} = \frac{x_m c_n \Delta s_n}{l (x'_n + c_n)} \dots \dots \dots (102)$$



第 73 圖

由公式 (102) 知, 如 $\left\{ \begin{matrix} \text{伸長} \\ \text{縮短} \end{matrix} \right\} \Delta s_n$, 則經過垂直桁之剖線左側之 m 節點起 $\left\{ \begin{matrix} \text{正} \\ \text{負} \end{matrix} \right\} \delta_{mn}$, 即 $\left\{ \begin{matrix} \text{沉陷} \\ \text{昇高} \end{matrix} \right\}$ 是也。而於剖線右側之節點 t 則相反, 力矩點 I'

如荷以 $\Delta\delta_n = \frac{\Delta s_n}{(x_n' + c_n)}$ ，即於 L 點荷以因伸長 Δs_n 而起之角度變形，由是得節點 m 所產生之 (M) 為：

$$(M_m) = -\frac{\Delta s_n}{(x_n' + c_n)} \frac{c_n}{l} \cdot x_m \dots \dots \dots (103)$$

是即 (M_m) 依絕對值與 δ_{mn} 相等，其符號如欲成一致也，則當垂直桁伸長時，須令力矩點 L 荷以向上作用之 $\Delta\delta_n$ ，當垂直桁縮短時，則荷以向下作用之 $\Delta\delta_n$ ，因垂直桁趨向於彈性之縮短，而在力矩點之角度變形 $\Delta\delta_n$ ，應向下作用也。在力矩點 L 之荷重 $\Delta\delta_n$ ，復應以 Q_{n-1} 及 P_n 兩力代之，同作用於行車道節點上，是二節點，位於經過垂直桁 n (n) 之各一方。如對角桁條之所示，得：

$$Q_{n-1} = \Delta\delta_n \frac{(c_n + x_n')}{\lambda} = \frac{\Delta s_n}{\lambda}$$

$$P_n = \Delta\delta_n \frac{[(c_n + x_n') + \lambda]}{\lambda} = \frac{\Delta s_n}{\lambda} + \Delta\delta_n$$

$$P_n = Q_{n-1} \frac{(c_n + x_n' + \lambda)}{c_n + x_n'} = Q_{n-1} \frac{(h_{n-1})}{h_n} \quad P_n = \frac{\Delta s_n}{\lambda} \cdot \frac{(h_{n-1})}{h_n}$$

(h_{n-1}) 示在垂直桁 $(n-1)$ 之垂直長度，自上桁線起至經 (n) 引出之 L (n) 線切斷為止，故得：

$$\left. \begin{aligned} Q_{n-1} &= \frac{\Delta s_n}{\lambda} \text{ 向上作用} \\ P_n &= \frac{\Delta s_n}{\lambda} \frac{(h_{n-1})}{h_n} \text{ 向下作用} \end{aligned} \right\} \text{ 在垂直桁縮短時} \dots \dots (104)$$

是以在垂直桁相對之行車道節點 $n-1$ 荷以角度變形 $Q_{n-1} = \frac{\Delta s_n}{\lambda}$ ，

在垂直桁分區中之第二節點，荷以 $P_n = Q_{n-1} \frac{(h_{n-1})}{h_n}$ ，當垂直桁 $\left\{ \begin{array}{l} \text{縮短} \\ \text{伸長} \end{array} \right\}$ 時，則 Q_{n-1} 向 $\left\{ \begin{array}{l} \text{上} \\ \text{下} \end{array} \right\}$ 作用，及 P_n 向 $\left\{ \begin{array}{l} \text{下} \\ \text{上} \end{array} \right\}$ 作用也。

經此荷重在各節點所產生之力矩，即為因垂直桁縮短或伸長 Δs_n 而成各節點之沉陷值，因得：

$$(A) = \frac{P_n x_n' - Q_{n-1} x_{n-1}'}{l}, \quad (M_m) = (A) x_m \quad [\text{式中以 } x_{n-1}' = (x_n' + \lambda)],$$

以上值用於 Q_{n-1} 及 P_n 中得： $(M_n) = -\frac{\Delta s_n x_m c_n}{l (x_n' + c_n)}$ ，此與公式 (102) 之求 δ_{mn} 者，完全一致，在彼以伸長為 Δs_n ，在此則以縮短為 Δs_n ，此即應用負值是也。如取 Δs 為負值，則可與求 δ_{mn} 公式 (102) 之符號，互相一致。

此外 $(B) = \frac{-Q_{n-1} x_{n-1} + P_n (x_{n-1} + \lambda)}{l}$ 及 $(M_t) = (B) x_t'$ (式中 x_{n-1} 示 $n-1$ 點與攔支點之距離)，如以上值用於 Q_{n-1} 及 P_n ，則得：

$$(M_t) = \frac{x_t' \Delta s_n (l + c_n)}{l (c_n + x_n')} = \delta_{tn}$$

例題：設仍以第 65 圖所示桁構拱之一桁條 $\overline{2II}$ ，作為數值例題之用，而將 $E F_u \Delta \delta$ 值去代 $\Delta \delta$ ，一如前法。得 $\Delta s_n = \frac{S s}{E F_{Pf}} = \frac{S s F_c}{E F_c F_{Pf}}$ ，式中 F_{Pf} 示垂直桁之剖面積， F_c 示拱桁條所擇取之恆定剖面積，一如第六節中以 F_u 表之。設 $\frac{F_c}{F_{Pf}} = 1.5$ 則 $\Delta s_n = \frac{S s}{E F_c} \times 1.5$ 及 $E F_c \Delta s_n = 1.5 S s$ 。

以荷重 $X = -1$ (第 74 圖) 得：

$$s = -0.27$$

$$s = 1.83 \text{ m}$$

$$S_s = -0.494 \quad E F_c \Delta s_n = 1.5 S_s = -0.74$$

作為彈性荷重者為：

$$Q_{n-1} = \frac{F_c E \Delta s_n}{\lambda} = \frac{1.5 S_s}{\lambda} = \frac{0.74}{3}$$

$$Q_{n-1} = 0.25 \text{ 向上作用} \quad P_n = \frac{Q_{n-1}(h_{n-1})}{h_n}$$

$$h_n = 1.83 \quad (h_{n-1}) = h_n + (1.83 - 1.5) \quad (h_{n-1}) = 1.83 + 0.33 = 2.16$$

$$P_n = \frac{0.25 \times 2.16}{1.83} = 0.29$$

對於其他垂直及對角桁條之彈性重量，可依此及上項之同法得之，以其計算殊值吾人之認識，故取雙關節拱（第 65 圖）詳之，表中則示各項確切之數值也。

桁條	S	s	$\frac{F_c}{F(\text{對角桁})} = \frac{1}{A}$	$\frac{F_c}{F(\text{垂直桁})} = \frac{1}{B}$	$\frac{S s}{A}$	$\frac{S s}{B}$	$\frac{S_1^2 s}{A}$	$\frac{S_1^2 s}{B}$
	在 $X = -1$ 時							
Y_1	0.822	4.12	2	—	6.77	—	5.57	—
Y_2	1.02	3.51	2	—	7.16	—	7.3	—
Y_3	0.6	3.35	2	—	4.0	—	2.41	—
							15.28	
V_0	-0.56	4.5	—	1.5	—	-3.78	—	2.1
V_1	-0.53	2.83	—	1.5	—	-2.32	—	1.19
V_2	-0.27	1.83	—	1.5	—	-0.75	—	0.18
V_3	0	1.5	—	1.5	—	0	—	0
								3.47

對角桁 Y_1 其在 1 點之彈性重量為：

$$E F_c \frac{\Delta s}{\rho_1} = \frac{S s}{A \rho_1} \quad \rho_1 = 1.92$$

$$Q_1 = \frac{6.77}{1.92} = 3.53 \text{ 向下作用}, \quad P_0 = Q_1 \frac{k_{n-1}}{k} = \frac{3.53 \times 4.5}{2.83} = 5.6 \text{ 向上作用}$$

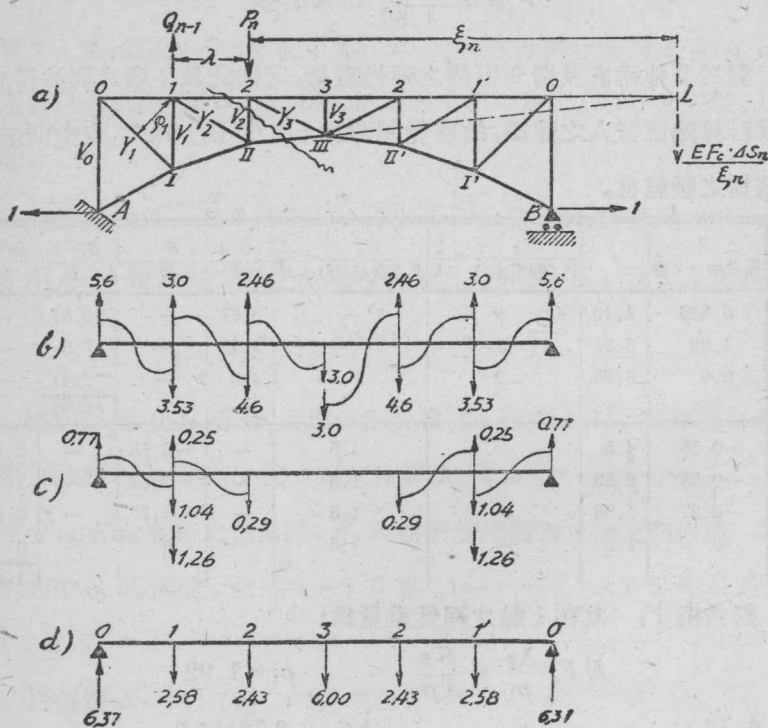
$$Y_2 (\text{參閱上項計算}) \quad Q_2 = E F_0 \frac{\Delta s}{\rho_1} = \frac{7.16}{\rho_1} = \frac{7.16}{1.56} = 4.6 \text{ 向下作用}$$

$$P_1 = Q_2 \frac{1.83}{2.83} = 3.0 \text{ 向上作用}$$

$$Y_3 \quad E F_0 \Delta s = 4.0, \quad \rho_1 = 1.34, \quad Q_3 = \frac{4.0}{1.34} = 3.0 \text{ 向下作用}$$

$$P_2 = Q_3 \frac{1.5}{1.83} = \frac{3.0 \times 1.5}{1.83} = 2.46 \text{ 向上作用}$$

由此得因對角桁而產生之彈性重量，一如第 74b 圖所示。



第 74 圖

垂直桁 V_0 作為上桁計算，在節點 1 荷有向下作用之彈性重量

$$\frac{3.78}{3} = 1.26$$

V_1 . 按表值為 $\frac{Ss}{B} = E F_c \Delta s = 2.32$ ，在節點 0 荷有向上作用之角度變形 $E F_c \Delta s = \frac{2.32}{3} = 0.77 = Q_0$ ，在節點 1 荷有向下作用之力：

$$P_1 = Q_0 \frac{(h_0)}{h_1} \quad (h_0) = h_1 + (h_1 - h_2) = 2.83 + 1 = 3.83 \quad h_1 = 2.83$$

$$P_1 = 0.77 \times \frac{3.83}{2.83} = 1.04 \text{ 向下作用}$$

$$V_2. \quad Q_1 = \frac{0.75}{3} = 0.25 \text{ 向上作用}$$

$$P_2 = \frac{Q_1 (h_1)}{h_2}, \text{ 而 } (h_1) = h_2 + (h_2 - h_1), \quad (h_1) = 1.83 + 0.33 = 2.16$$

$$P_2 = 0.25 \times \frac{2.16}{1.83} = 0.29 \text{ 向下作用}$$

V_3 . 無影響

至其荷重情形，如第 74c 圖所示。

其力矩（在 0 及 0' 兩處不起影響之荷重，可以忽視之），因 $(A) = (B)$

$$= 2.58 + 2.43 + 3.00 = 8.01, \text{ 故為：}$$

$$(M_1) = 8.01 \times 3 = 24.03$$

$$(M_2) = 48.06 - 3 \times 2.85 = 39.51$$

$$(M_3) = 72.09 - 2.58 \times 6 - 2.43 \times 3 = 72.09 - 22.87 = 49.22$$

其分子亦可如對角桁及垂直桁之以同一數值倍之，在數值表中末二項為對角桁之積 $2 S_1^2 s$ 及垂直桁之積 $\frac{3}{2} S_1^2 s$ ，因各桁條在拱構造中重復出現，故其分母之增大為 $2 \times 15.28 + 2 \times 3.47 = 37.5$

前於第六節中，曾將 F_u 及 F_c 異值計算而得分母為 166.18，今更得其分母為 $166.18 + 37.5 = 153.7$ 。

由對角桁及垂直桁之彈性變形所得之值，其於逾定值之影響為：

$$\Delta X_1 = \frac{(M_1)}{153.7} = \frac{24.03}{153.7} = 0.156 \text{ t} \quad \text{前得 } X_1 = 0.40 \text{ t}$$

$$\Delta X_2 = \frac{(M_2)}{153.7} = \frac{39.51}{153.7} = 0.257 \text{ t} \quad \text{前得 } X_2 = 0.73 \text{ t}$$

$$\Delta X_3 = \frac{(M_3)}{153.7} = \frac{49.22}{153.7} = 0.320 \text{ t} \quad \text{前得 } X_3 = 0.87 \text{ t}$$

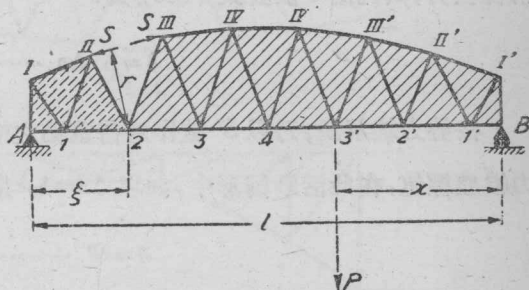
觀此所增之數值，如將對角桁及垂直桁之彈性變形，任其忽略者，則 X 值必起顯著之差誤，至少對於本題為然也。

第三章 勢力線之動的意義

第一節 概說

設有一樑荷以重量，則起彈性變形，而各節點間亦互移其位。如將各節點之沉陷，就一水平軸在各節點之下方，作為縱座標值，再連結其頂端，即得其彎線。荷重

P 如沿 AB 樑而移動 (第 75 圖)，則對於桁條 $\overline{II\ III}$ 即產生張力 S ，如將此桁條 $\overline{II\ III}$ 除去，而在節點 II 及 III ，各加以 S 力，則仍可維持



第 75 圖

其平衡之勢，節點 2 成其力矩點，如荷重 P 距攔支點 B 為 x' ，則必為：

$$S = \frac{P x'}{l} \frac{\xi}{r} \dots\dots\dots(105)$$

公式 (105) 之負號，業經捨去，因 S 力在圖中已作為壓力計算矣。以其平衡，故所為工作之和必為零。如將桁條 $\overline{II\ III}$ 除去，則此樑遂成一活動構造，僅可由替代桁條之兩力 $S S$ ，令其平衡，是謂一強制式之動鏈 (zwangläufige kinematische Kette)。 P 力之着力點，依其力之方

向所行之路程 δ 而言，對於 $\overline{\text{II III}}$ 桁條之長度變形，具一定之圖形關係，設其長度變形為 $-\Delta s$ ，則按工作定律為： $0 = P \delta - S \Delta s$ ，即

$$\delta = \frac{S}{P} \Delta s \dots\dots\dots(106)$$

此 $\frac{S}{P}$ 之商，按公式 (105) 具有定值，如以 S' 表之，則成：

$$S' = \frac{x'}{l} \frac{\xi}{r} \dots\dots\dots(107)$$

即示 S' 僅與樑之形式及荷重 P 之地位有關， S' 係由荷重 1 所產生之桁條張力，其沉陷 δ 依公式 (106) 為：

$$\delta = S' \Delta s \dots\dots\dots(108)$$

按勢力線解說，乃以 S' 值作為荷重點之桁條 $\overline{\text{II III}}$ 所起張力之勢力縱座標值，在此活動圖形中，如以 $\Delta s = 1$ ，則成：

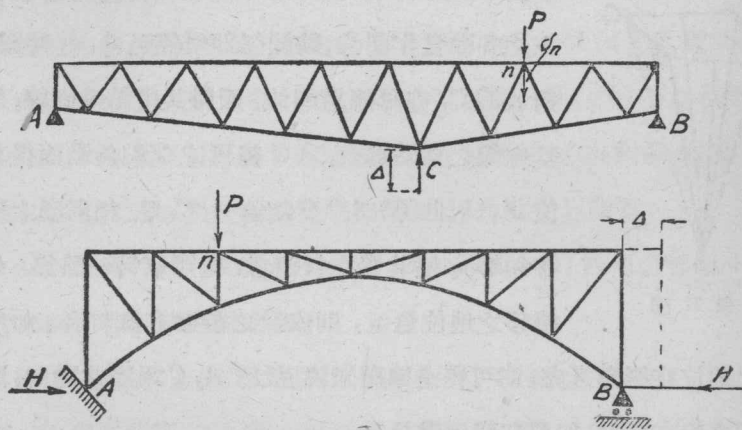
$$\delta = S' \dots\dots\dots(109)$$

此即桁條張力之勢力座標值，與其產生桁條長度變形 $\Delta s = 1$ 之荷重點之沉陷相等也。

求此活動圖形行車道節點之沉陷，如由一桁條之長度變形 $\Delta s = 1$ 所致者，則其沉陷，即為該桁條張力之勢力線也。

是故勢力線亦得應用動的方法以求之，此其方法，不獨明顯，且獲實益。須知此勢力線實係沉陷線，更可引得一般適用之勢力線形式之定律，中以在靜力定式結構物之勢力線支段之數目，支段交點之地位及其零點等處，尤為顯著。似非先將動的基本源理，作簡略之伸說不可。

上項研究，即對於靜力不定式之結構物，亦適用之。如將攔支力依一般方法，以一逾定值代之。此逾定值實係一力，則必於移動之荷重 P 時可成： $P\delta - C\Delta = 0$ ，式中 δ 乃 P 着力點之沉陷， Δ 乃逾定值 C 着力點之沉陷，而適當荷重 P 位於節點 n 時也。故 $\delta = \frac{C}{P}\Delta$ ， $\frac{C}{P}$ 乃 $P=1$ 之逾定值之大小，如以 $C' = \frac{C}{P}$ ，則成 $\delta = C'\Delta$ 。



第 76 圖

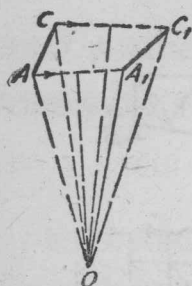
如得荷重 1 在各地位之 C' 值，而繪作荷力點下之縱座標，即得 C' 勢力線。如以 $\Delta = 1$ ，則成 $\delta = C'$ ，故：

求靜力定式的圖形各節點之沉陷，如由逾定值之着力點之移動 $\Delta = 1$ 所致者，則此沉陷值，即逾定值之勢力線。設取雙關節拱為例，而以 $\frac{H}{P} = H'$ ， $P\delta - H\Delta = 0$ ， $\delta = \frac{H}{P}\Delta = H'\Delta$ ，如 $\Delta = 1$ ，則得 $\delta = H'$ (第 76 圖)。

第二節 平面桁構物變形之動的原理

1. 在平面上一圖形(一薄片)之任何動作,可作依某一點之旋轉觀,其點謂之剎那間旋點或瞬息間中點(Momentanzentrum)。

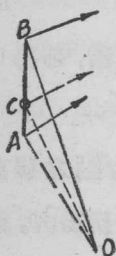
證明: 在第 77 圖中之 AC , 移至新位 A_1C_1 , 當移動時, AC 之



第 77 圖

形,恆定不變。由 $A A_1$ 作中點之垂直線,以在此線上之各點當作圓心,繪圓弧即可經過 A, A_1 兩點也。對於 $C C_1$ 亦可適用同法,而得其中點垂直線,是二垂直線之交點為 O , AC 線可依 O 點旋動而得其新位 A_1C_1 也 ($\triangle ACO \cong \triangle A_1C_1O$, 相對應之三邊各相等)。惟其實在行經者,儘可取另一路徑。如所遷移之地位愈近,則依 O 之旋動亦愈符合。如所

遷移之地位在無窮近處,則可完全準確無誤。故依 A, C 兩點之動向,而作其垂直線之交點,即剎那間旋點是也。



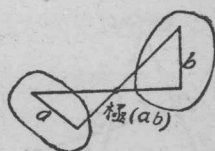
第 78 圖

2. 由已知二點之動向,求其瞬息間中央(第78圖)。

各作經過一點之直線與該點之動向成垂直,此二垂直線之交點 O (第 78 圖),即為所求瞬息間中點。如更欲知其他任意點 C 之動向,則可連結 OC , 其所求之方向,即與 OC 相垂直。

3. 一平面上二薄片(圖形)之移動。設有二薄片(第 79 圖),例如桁條 a 及 b , 在一平面上移動,其動作可分為單獨之行

動如次：先令二部份，即 a 及 b 起同一之動作，待二者之一，例如 a 完成其動作，而達其新位後。再使 b 單獨續動，俟亦得其新位為止，如是則二者均得達其移至新位之目的。 b 之第二步動作，乃 b 對 a 之相對運動，此等相對運動，其所經之路程，如無窮之近或極近，

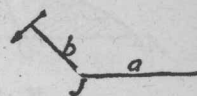


第 79 圖

則亦可當作對於瞬息間中點之旋轉觀。當此運動也， a 係靜止。而其剎那間旋點亦然，此旋點謂之相對極 (ab) [Relativpol (ab)]，因此極實係 b 對 a 作相對運動用也。以在無窮小之運動，極 (ab) 不起移動，故可視作與 a 相固結，而與 b 亦可假定其互為固結，以其對於 b ，亦不起移動也。 b 之移動，對於極點僅起旋轉而已，由此得以證實：

a, b 二薄片相互間之相對運動，其相對極 (ab) 既可當作與 a ，復可當作與 b 作固結之假定也。

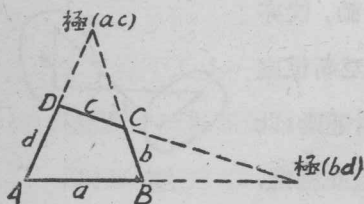
3a. 經關節連結之二薄片（或為桁條）之相對極，即為該關節。 b 對 a 惟一之相對運動，係依關節 J 而旋轉，故此關節乃其極（第 80 圖）， a 及 b 如以薄片桁構物代之，亦無稍異。



第 80 圖

3b. 在具有關節之四邊形結構，其 a, c 兩對桁之相對極，位於其他二桁 b, d 之交點（第 81 圖）。 C 桁之二點，對 a 桁之相對運動為已知（此可假定其為暫時之固定），得從 C, D 二點移動之可能性而決定之。 D 點之對 a ，僅可依 A 為中心作圓弧， C 點僅可依 B 為中心，以 b 為半徑所作圓弧而行，故 C 對 a 之相對極，必位於 C, D 二點動向之

垂直線上，是即其一在 d 線上，以其對於 D 之動向相垂直也。他一則

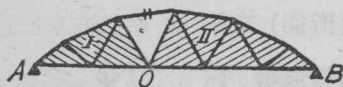


第 81 圖

在 b 線上，以其對於 C 之動向相垂直也。 d, b 兩線之交點，因此成爲相對極 (ac) ，同理 b 對 d 之可能動作，依 a, c 之交點而旋轉 [相對極 (bd)]。此 (ac) 及 (bd) 之二

相對極，或稱關節四邊形之虛關節 (imaginäre Gelenke)。

由上研究得結果如次：設一桁構物之一外廓桁條起伸縮，則其一部份即與他部份呈相對之移動，此起彼縮之桁條，如經除去，而桁構物之二部份，仍相繫連於一點，是點即運動之極 O (第 82 圖)，圖中以 I 代 a 部份，以 II 代 b 部份。



第 82 圖



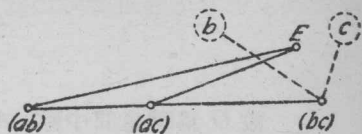
第 83 圖

設一桁梁之一內含桁條 \overline{MO} 起伸縮 (第 83 圖)，則可將是桁條作截斷設想，而成一段爲正，他段爲負，因得一活動之四邊形 $(LMNO)$ 。其一部份 II 對他部份 I 之相對動作，乃一依相對極 $(I II)$ 之旋轉，此極點可就其活動四邊形之二外廓桁條之交點得之，以是點在活動四邊形中乃 LM 及 NO 之相對極。復因 I, II 兩部份，與上項二桁條，互相固結，故同時亦即相對極 $(I II)$ 也。

此在桁構物所得之相對極，同時亦即依據烈透氏之力矩法求該桁條張力所必擇之旋點也。以該點之垂直下方，即係勢力線支段或其引長線之交點所在地，一如以前第一章所示，故亦位於經過相對極之垂直線上也。

4. 一平面上三薄片(圖形)之移動。互相移動之任意三薄片之極，共位於一直線(三極定律)。設此三薄片為 a, b, c ，則極 (ab) ，極 (bc) 及極 (ac) 共位於一直線(第 84 圖)。

證明：設極 (ab) 及極 (ac) 為已知，求極 (bc) 。極 (bc) 乃一點， b 對 c 依之作相對移動，在求此相對極時，可不問其時 a 之動作為何，仍得同一之結果。故在求此極時，簡直假定其為零，亦無不可。 a 既不起動作，則極 (ab) 及極 (ac) ，當亦靜止。

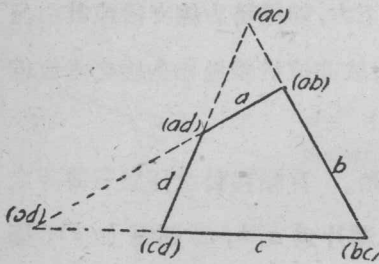


第 84 圖

因極與薄片，依在(3)之研究，視若固結。在移動時，則薄片 b 依極 (ab) ，薄片 c 依極 (ac) 而旋轉。 b, c 兩薄片，共屬於一點，即極 (bc) 是也。而極與薄片，復可假定其為固結。以其屬 b ，此極必依極 (ab) 而旋，以其屬 c ，同時亦依極 (ac) 而旋。其惟一之可能，即與 (ab) 及 (ac) 在同一直線上，如第 84 圖所示。至其他地位如 E 點者，則同時不能依兩極而旋轉，因 $(ab), (ac), E$ 所成之三角形，係一不易之圖形也。

此定律如用於具有關節之四邊形，則對於在(3b)所得之定理，又可多一證明矣。此關節四邊形(第 85 圖)，共有四部份或四段： $a, b, c,$

d 。 a, b 之極為 (ab) 。 b, c 之極為 (bc) 。 故 a, c 之極位於經過 (ab)



第 85 圖

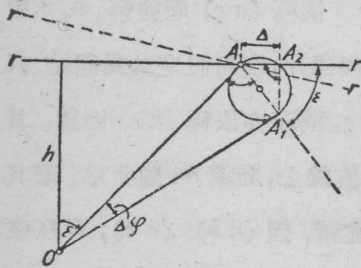
及 (bc) 之直線上，即在 b 是也。如經觀察 a, d, c 三者，則 a, d 之極為極 (ad) ， c, d 之極為極 (cd) 。故 a, c 之極位於 (ad) ， (cd) 之直線上，即在 d 是也。極 (ac) 既位於 b ，復位於 d ，故非位於 b, d 之交點不

可，亦即關節四邊形其他二邊之交點也。

第三節 點及線之移動。

直角移動。

1. 設 O 為瞬息間中點， A 屬一任意圖形 (第 86 圖)。求 A 在任意方向之路程，例如在 rr 方向，由該圖形旋轉 $\Delta\varphi$ 角所成。



第 86 圖

經無窮小之旋轉 $\Delta\varphi$ 角，使 A 移 A_1 ，而 $\overline{AA_1} = \overline{OA} \Delta\varphi$ ，如由 A_1 作 rr 之垂直線 $\overline{A_1A_2}$ ，則 $\overline{AA_2} (= \Delta)$ 即所求 A 點在 rr 方向所經之路程，故 $\Delta = \overline{AA_2} = \overline{AA_1} \cos \epsilon = \overline{OA} \Delta\varphi \cos \epsilon$ ，而 $\overline{OA} \cos \epsilon = h$ ，即 $\Delta = h \Delta\varphi$

故 A 點在 rr 方向所作之移動，僅與其旋轉角 $\Delta\varphi$ ，及由瞬息間中點對於經過 A 點所作 rr 並行線之垂直長度有關。

討論：對於一其他任意之方向 $r' r'$, A_2 可以同法得之, 字 $A A_2 A_1$ 係一直角, A_2 之軌跡, 乃一以 $A A_1$ 為直徑之圓周, 是謂軌跡環 (Ver-schiebungskreis)。

Δ 得最大值之 r 方向, 係與 \overline{OA} 相垂直, 其最小值之 r 方向, 則與 \overline{OA} 相疊合。

應用：按第一節知任何勢力線, 可作一活動圖形之行車道節點之沉陷線觀。其沉陷值由上項求得之一般公式為 $\Delta = h \Delta\varphi$, 因與吾人研究有關之移動, 乃在垂直方向 (當作“沉陷”)。故自瞬息間中點起量此荷以 $P=1$ 之節點之橫座標值 x 去代 h , 在此堅實薄片上各點之旋轉角 $\Delta\varphi$, 均屬相同, 故對於此結構物, 其因除去正在研究中之桁條所分成堅定之任何部份, 盡適用之:

$$\Delta = \Delta\varphi x = C x$$

由此直線式得:

(a) 一個定式結構物之任何勢力線, 概由直線成之, 所分成堅定之任何薄片部份, 造成各個已有之勢力區。且各具一專有之直線, 作為其勢力線 (堅實薄片之定律)。

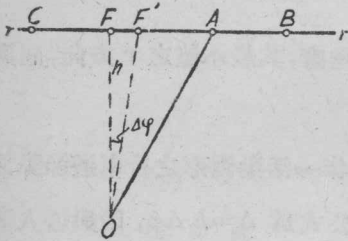
以由荷重之外廓桁條所規定之堅實薄片部份為標準。

(β) 各薄片部份之瞬息間中點之垂直下方, 乃為其所屬勢力線之零點。

因 $x=0$, 則 $\Delta=0$, 故其地勢力線之值, 遂亦為零。

此等定律如與第二節(3)所得對於相對極之結果連合之, 則可能將

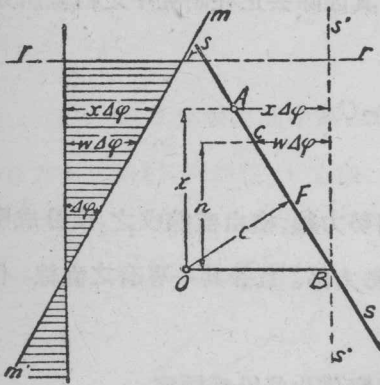
靜力定式結構之勢力線形式，直接求得。作圖時祇需專求一個縱座標值或一支段對於橫座標軸之角度已足矣。



第 87 圖

2. 位在一 rr 直線上各點，向 rr 直線方向作移動，其移動之距離則互相等。吾人如注視 A 或 B 或 C 等點（第 87 圖），此各點均具同值 $\Delta = h \Delta\phi$ ，故所求之移動值，等於基點 F' 之於臂長 \overline{OF} ，即 $\Delta = \overline{FF'}$ 是也。

3. 一堅定之直線 ss 如作移動（第 88 圖）， O 為其瞬息間中點，



第 88 圖

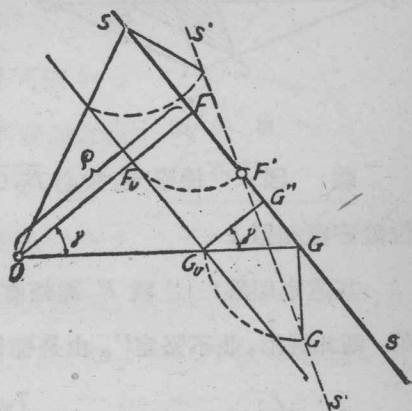
在該直線上之任意點 A ，對於 rr 方向之移動為 $x \Delta\phi$ ， x 相當於以前之 h 值，等於經 A 作 rr 方向直線之臂長，如取 rr 之垂直線作橫軸，各 x 所具之 $x \Delta\phi$ 值作為縱座標，則此各縱座標值之頂端，均位於 $m'm'$ 直線上。以 $x=0$ ，即在 B 點，其對於 rr 方向之移動為 0，以 $x=w$ ，則其值為 $w : \Delta\phi$ 。

$m'm'$ 線謂之軌跡線 (Verschiebungslinie)，乃與橫軸夾 $\Delta\phi$ 角成之。

4. 直角移動。 ss 直線新位之求法。先求其上二點之新位，然後

再以直線連結之便得。如由 O 點作 ss 線之垂直線 \overline{OF} ，則 F 點之移動，當由 ss 之原位量之，因 F 點僅向 ss 方向移動，故得 $\overline{FF'} = \rho \Delta\varphi$ (第 89 圖)。再求 G 之新位，法於 \overline{OG} 之垂直線上，由 G 取 $\overline{GG'} = \overline{OG} \Delta\varphi$ ，其 F' 與 G' 之連結線，即 \overline{ss} 線之新位 $\overline{s's'}$ 是也。

將此所有各點之移動，如依同一方向旋轉 90° 而繪於向瞬息間中點之射線上，即得各點之直角移動 (senkrechte Verschiebungen)。在第 89 圖中 $\overline{FF_0} = \overline{F'F'}$ 乃 F 之直角移動，及 $\overline{GG_0} = \overline{G'G'}$ 乃 G 之直角移動也。



第 89 圖

堅定直線之原位相並行之直線上，按第 89 圖為： $\overline{F'F_0} = \overline{F'F} = \rho \Delta\varphi$ ；

此外 $\overline{G'G_0} = \overline{OG} \Delta\varphi$ (按前) $= \frac{\overline{OF}}{\cos \gamma} \Delta\varphi = \frac{\rho \Delta\varphi}{\cos \gamma} = \frac{\overline{F'F_0}}{\cos \gamma}$ ，

$$\overline{F'F_0} = \overline{G'G_0} \cdot \cos \gamma$$

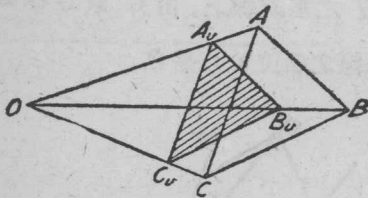
如經 G_0 作 $\overline{G_0G''}$ 線與 \overline{OF} 相並行，則為：

$$\overline{G_0G''} = \overline{G'G_0} \cdot \cos \gamma = \overline{G'G_0} \cos \gamma \quad \text{即} \quad \overline{G_0G''} = \overline{F'F_0}$$

同理，對於 G 點之任何地位，均適用之，故 F_0 及 G_0 皆位於一與 ss 相並行之線上也。

6. 一堅定之圖形，如起移動，則連結此作直角移動之各角點，得

一 F' 圖，其與起運動之原圖，不特形式相似，且其位置亦復相似也（第 90 圖）。其瞬息間中點為 O ， \overline{AB} 係堅定，設 $A A_v$ 為 A 之直角移動，則

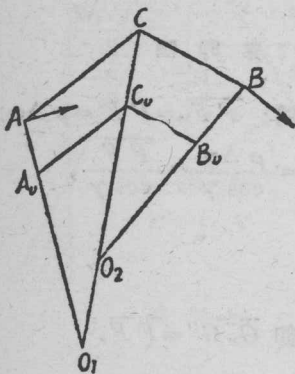


第 90 圖

B_v 必位於經 A_v 所作 \overline{AB} 之並行線上，同時亦位於 \overline{OB} 線上。 B_v 點由是決定。 C 與 A 作堅定之連結，故 C_v 必位於經 A_v 所作 \overline{AC} 之並行線，同時亦位於 OC 線上，而 C_v 點因得決定。

驗：因 \overline{BC} 係堅定，故必 $\overline{B_v C_v} // \overline{BC}$ ， $\triangle A_v B_v C_v \sim \triangle ABC$ ，即位置亦復相似。

其逆定理為：“設 F 圖經直角移動而產生一與原形不相似之圖 F' ，則此圖形，並不堅定”。由是即得證實關節四邊形之動性矣。



第 91 圖

7. 經一關節連結之二桁條（薄片或半拱等） \overline{AC} 及 \overline{BC} 互作移動（第 91 圖），各桁條上一點之移動值及方向為已知，例如 A 及 B ，而求關節 C 之移動。

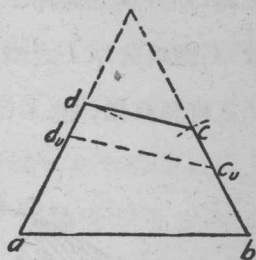
與移動方向垂直作 $\overline{A A_v}$ ，則 \overline{AC} 之極，位於 $\overline{A A_v}$ 線上。依同法，與 B 之移動方向垂直作 $\overline{B B_v}$ ； \overline{BC} 之極，位於 $\overline{B B_v}$ 線上。 \overline{AC} 既係堅定不易，則必 $\overline{A_v C_v} // \overline{AC}$ ，故

C_v 當位於經 A_v 而與 \overline{AC} 相並行之線上。同理 \overline{BC} 亦係堅定，故 C_v 自亦位於經 B_v 而與 \overline{BC} 相並行之線上，而 C_v 地位，因得決定。是以

在 $\overline{CC_0}$ 線上，既有 \overline{AC} 移動之極 O_1 ，復有 \overline{CB} 移動之極 O_2 也。

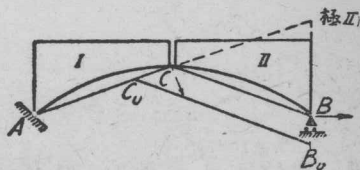
8. 強制式之平面鏈或簡稱動鏈 (kinematische Kette) 係一在同一平面上之桁條或薄片部份之連結，其各部份互相連結之方式，乃令一薄片部份各點，對於其他薄片部份，成一定之動的路徑，其最簡者為關節四邊形。

\overline{ab} 如經箝住 (第 92 圖)，則 c 僅可依 b ， d 僅可依 a 而旋，設 $\overline{d d_0}$ 為 d 之直角動向之速度，則 $\overline{c c_0}$ 為 c 之速度，而必 $\overline{d_0 c_0} // \overline{dc}$ 也。



第 92 圖

靜力定式結構物之一桁條，或其攔支力之一分力，如經除去，即成一所謂強制式之鏈矣。設令三關節拱之一拱底作水平移動 (第 93 圖)，即足顯示其用度。如 $I (AC)$ 依 A 而旋，則 $\overline{CC_0}$ 乃 C 點之直角移動。 B 僅呈水平運動，故 B_0 必位於 B 之垂直下方，因 \overline{CB} 既係堅定，亦必 $\overline{C_0 B_0} // \overline{CB}$ ，而直角移動 $\overline{B B_0}$ ，由是決定，即 C, B 兩移動值之比，因亦求得。



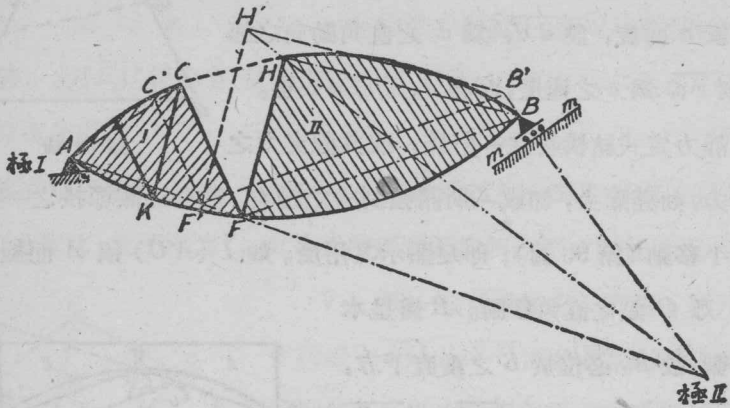
第 93 圖

第四節 桁構物部份之極及極旋角

吾人對於桁構物各部份之瞬息間中點(極)之地位及該極所旋角度(極旋角)之大小，如已求得，則桁構物之變形，因亦決定。

(a) 極

1. 設桁樑之一外廓桁條起伸長或縮短(第 94 圖), 求當此變形時各節點所依而旋轉之極 (Pole), 若擱支點 A 爲固定, 而擱支點 B 在 $\overline{m m}$ 直線上可起移動。如將正在研究中之桁條 CH 除去, 則樑即變成動鏈, 而分爲二薄片 I 及 II 矣, 公有之節點係極 $(I II)$ 因 A 係固定, 故 A 點爲薄片 I 之瞬息間中點。求薄片 II 之瞬息間中點時, 法先假定 C 之直角移動, 在 \overline{AC} 線上取一任意值如 $\overline{CC'}$, F 直角移動值之頂點



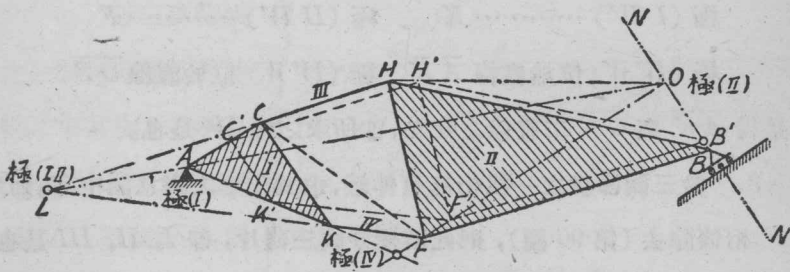
第 94 圖

F' , 必位於 \overline{AF} 線上。因 \overline{CF} 乃一堅定之直線, 故同時亦必位於經過 C' 而與 \overline{CF} 相並行之線上, F' 因以求得。 B 僅可與 $\overline{m m}$ 作並行之移動, 故其直角移動 $\overline{BB'}$ 當繪於 $\overline{m m}$ 線之垂直方向。 \overline{FB} 係堅定, 故 B' 亦必位於經過 F' 而與 \overline{FB} 相並行之線上, B' 因亦決定。 F 之移動與 $\overline{FF'}$ 相垂直, 故 II 之極位於 $\overline{FF'}$, B 之移動與 $\overline{m m}$ 成並行, 故 II 之極, 亦必位於經過 B 而與 $\overline{m m}$ 軌道相垂直之線上, 其由 $\overline{FF'}$ 或 \overline{AF} 線與軌道 m 之垂直線之交點, 即所求之瞬息間中點 II 。 \overline{BH} 既亦堅定,

故 H' 位於經過 B' 而與 \overline{BH} 相並行之線上。同理 H' 亦即位於經過 F' 而與 \overline{FH} 相並行之線上。

驗： $\overline{HH'}$ 必經過極 II 。吾人可將瞬息間中點，即極 (II) 依下法迅速求得： I 對固定攔支點之極為 A ， II 對 I 之相對極為 F ，如以固定攔支點作一薄片觀，并假定該薄片為 W ，則極 (WI) 為 A ，極 (III) 為 F ，按諸三極定律 [第二節 (4)]，極 (IIW) 必位於其他二極所定之直線上，即在 \overline{AF} 上，同時亦必位於經過 B 點而與 \overline{mm} 相垂直之線上也。 \overline{CH} 桁條如起伸縮，則薄片 I 依 A 而旋，薄片 II 依極 II 而旋， \overline{mm} 軌道，設係水平，如一般情形者，則 $\overline{BB'}$ 必成垂直。

2. 設某桁構物之一內含桁條起有伸縮，求其變形之瞬息間中點 (第 95 圖)，桁條 \overline{CF} 一經除去，則此桁構物遂成一動鏈，而分為堅定



第 95 圖

之四薄片 I 至 IV ，組成一關節四邊形。與該內含桁條同區內之二外廓桁條之交點 L 為相對極 (II) (作 $CHFK$ 關節四邊形之虛關節設想)。薄片 I 之瞬息間中點為 A ，薄片 II 之極，必位於經過 B 而與 B 軌道相垂直之線 $\overline{NN'}$ 上。再以攔支點作另一薄片 W 設想，則按第二節

(4), 其所求之極 II 位於 \overline{LA} 線上, 而可於 \overline{LA} 與 \overline{NN} 兩線之交點 O 得之。諸極之地位, 既已決定, 則其直角移動, 自易求得。其間一移動值如 $C'C'$ 者, 可以任意假定, $K'K'$ 亦可從而決定。 F' 位於經過 K' 而與 KF 相並行之線上, 且亦位於 \overline{OF} 線上。 H' 位於經過 C' 而與 CH 相並行之線上, 同時亦位於經過 F' 而與 FH 相並行之線上也。

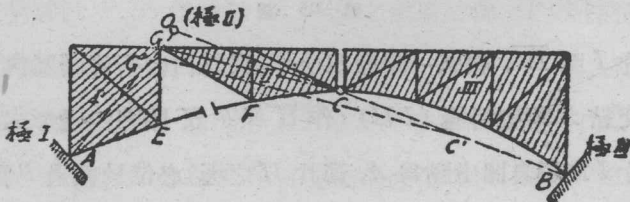
驗: $\overline{HH'}$ 必經過極 O 。

如欲直接繪作 \overline{CF} 桁條張力之勢力線 [按第三節 (1) 所述之方法], 則必再將薄片 III 或 IV (依荷重之地位在上桁抑在下桁而定) 之瞬息間中點求得, 例如下桁之極, 應用三極定律, 其求法如次 (仍可假定 A, B 二攔支點各與其固定之支座相連結而成薄片 W):

極 ($I W$) A 極 ($II W$) O
 極 ($I IV$) K 極 ($II IV$) F
 極 ($IV W$) 位於直線 \overline{AK} 極 ($IV W$) 位於直線 \overline{OF}

由是得 \overline{AK} 與 \overline{OF} 二直線之交點, 即所求之極 IV 是也。

3. 設三關節拱之一拱桁起有伸縮, 求其變形之瞬息間中點。如將 EF 桁條除去 (第 96 圖), 則此桁樑分成三薄片, 即 I, II, III 是也。



第 96 圖

I 之極為 A , III 之極為 B , 如任取其直角移動值 $\overline{GG'}$, 則 $\overline{G'C'}$ 線必與 \overline{GC} 線並行, 而 C' 亦必位於 \overline{BC} 線上, 因 C 屬於薄片 III 也。是故 C' 為經過 G' 點而並行 \overline{GC} 之線與 \overline{BC} 線相交之點, 殊易求得。薄片 II 之 G, C 兩點之動向, 於焉決定。故薄片 II 之瞬息間中點, 位於 $\overline{GG'}$ 或 \overline{AG} 及 $\overline{C'C'}$ 或 \overline{BC} 二線上, 而 \overline{AG} 與 \overline{BC} 兩線之交點 O 為極 II 。而此瞬息間中點 O , 亦係 \overline{EF} 桁條之荷重分界點, 一如依據一般方法所得。薄片 II 之極 II , 如按 (2) 求極 IV 之同法, 亦可得之如次:

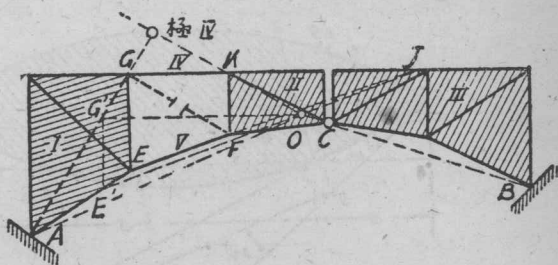
極 (IW) A 極 ($IIIW$) B

極 (II) G 極 (III) C

極 (IIW) 位於直線 \overline{AG} 極 (II) 位於直線 \overline{BC}

故極 (IIW) 位於 \overline{AG} 與 \overline{BC} 二直線上, 其交點 O 即薄片 II 之極也。

4. 設三關節拱之一對角桁條起有伸縮, 求其變形之瞬息間中點(第 97 圖)。如將 \overline{GF} 桁條除去, 則此桁樑分成五薄片,



第 97 圖

就中 I, II, III, IV 四薄片, 為荷重之外廓桁所屬。如以與固定支點相連結之支座, 作薄片 W 設想, 則為:

極 (WI) A 極 ($IIIW$) B

極 (II) J 極 (III) C

極 (II W) 位於直線 \overline{AJ} 極 (II W) 位於直線 \overline{BC}
 故 \overline{AJ} 與 \overline{BC} 二線之交點 O , 即所求薄片 II 之瞬息間中點也。

薄片 IV 之瞬息間中點得之如次:

極 (I W) A 極 (II W) O

極 (IIV) G 極 (II IV) K

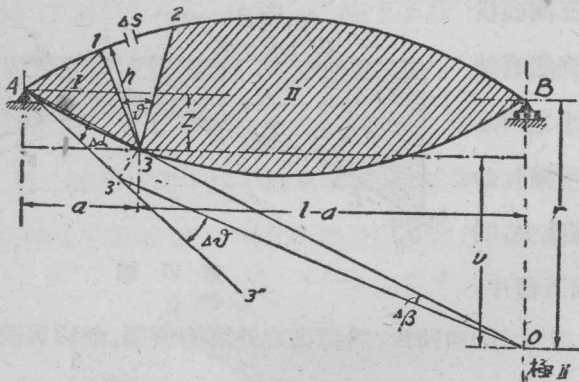
極 (IV W) 位於直線 \overline{AG} 極 (IV W) 位於直線 \overline{OK}

故 \overline{AG} 與 \overline{OK} 二線之交點, 即薄片 IV 之瞬息間中點 (極 IV)。

其直角移動, 至此已易求得。

(b) 極旋角

1. 因一外廓桁條之長度伸縮, 而起極旋角 (Poldrehwinkel), 設外廓桁 $\overline{12}$ 之長度變遷為 Δs , 則 (第 98 圖) $\Delta\delta = \frac{\Delta s}{h}$, A 屬固定, 而



第 98 圖

B 則對於一任意之方向, 可作移動, 并設 B 之軌道為水平, 點 3 係薄片 I 及 II 之極, 即 $P(I II)$, 薄片 I 依 A 而旋。故 A 為 P_I , 薄片 II 依 O

而旋，故 O 爲 P_{II} ，而薄片對於極點所旋成之角度，如 $\Delta\alpha$ 及 $\Delta\beta$ ，謂之極旋角。點 3 既屬兩薄片所共有，故其垂直及水平之移動也必相等，吾人一經觀察薄片 I 或薄片 II 之旋轉可矣。

點 3 之垂直方向移動爲：

以其屬於薄片 I ： $\eta_3 = a \Delta\alpha$

以其屬於薄片 II ： $\eta_3 = (l-a) \Delta\beta$

按此則必：

$$a \Delta\alpha = (l-a) \Delta\beta \qquad \frac{\Delta\beta}{\Delta\alpha} = \frac{a}{l-a}$$

點 3 之水平方向移動，依同法得下式：

$$z \Delta\alpha = v \Delta\beta \qquad \frac{\Delta\beta}{\Delta\alpha} = \frac{z}{v}$$

薄片 I, II 之極，即點 3 ，因外廓桁 $\overline{12}$ 之長度起伸縮關係，自 3 遷移至 $3'$ ，以其既依 P_I (即 A)，復依 P_{II} (即 O) 起旋轉，此新位 $\overline{A3'}$ 與 $\overline{3'0}$ 二線所夾之角，乃由薄片 II 對於薄片 I 之相對旋轉成之，故 $P_{II} 3' 3''$ 角即 $\Delta\delta$ 必爲： $\Delta\delta = \Delta\alpha + \Delta\beta$ ，如以前值代替 $\Delta\beta$ ，則成：

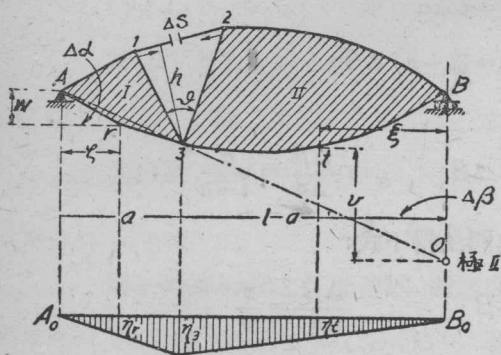
$\Delta\delta = \Delta\alpha + \frac{\Delta\alpha a}{(l-a)}$ 由此得：

$$\left. \begin{aligned} \Delta\alpha &= \frac{\Delta\delta(l-a)}{l} \\ \Delta\beta &= \Delta\delta \frac{a}{l} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(110)$$

此 $\Delta\alpha$ 及 $\Delta\beta$ 二式，乃示一值得注意之規律。吾人如於該桁條之力矩點 $P_{(I,II)}$ 荷以重量 $\Delta\delta$ ，則 $\frac{\Delta\delta(l-a)}{l}$ 及 $\Delta\delta \frac{a}{l}$ 乃 A, B 之攔支

力，因得結果如次：極 P_I 及 P_{II} 之旋轉角（極旋角），與由該桁條之力矩點上，荷以角度變形 $\Delta\delta$ 所產生之 A, B 二攔支力相等。

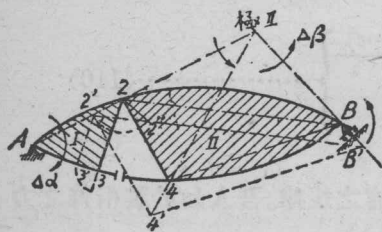
2. 因一外廓桁條之長度伸縮而起極旋角之方向。以鐘錶指針之旋向為正，上桁條 $\overline{12}$ 如起收縮（第 99 圖），則活動攔支點 B 即向左移



第 99 圖

動；因 B 之移動係屬雙層關係；既依 A （當作 P_I ）與薄片 I 同旋，再依點 3 （當作 P_{II} ）而旋，在第二種旋動時，點 2 起有移動，而使 B 點向左推移，其第一種旋動，並不使 B 點起水平之推移，以 B 與 A 互為等高。故 B 之連合運動，乃一向左之推移，即依 P_{II} 旋轉而為負值。 $\Delta\beta$ 角在此為負的旋向。同時點 3 亦屬於 I ，因該點與薄片 II 依 P_{II} 作向左之移動，故依 A 所起 $\Delta\alpha$ 之旋向為正，一如第 99 圖所示。

下桁條 $\overline{34}$ 如起伸長（第 100 圖），則 B 與薄片 II 依 A （當作 P_I ）及依 2 （當作 P_{II} ）而旋轉，在第二種旋轉時，點 4 即起移動，而 B 亦向右。在第一種旋轉時， B 點既不向右亦不向左移動，因 B 與 A 互為



第 100 圖

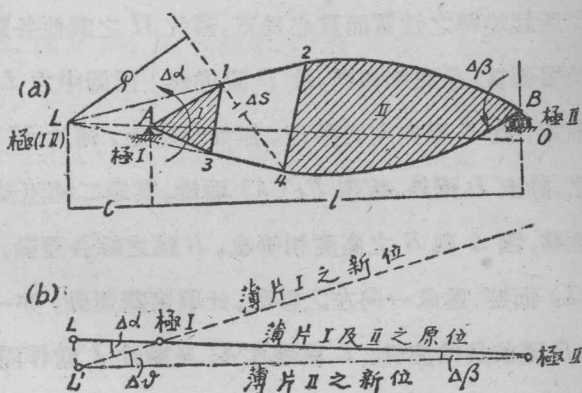
等高。由此得 B ，亦即薄片 II 依 P_{II} 所起者為負的旋轉也。點 2 如移至 $2''$ ，而 I 依 A 之旋轉為正，一如圖中 $\Delta\alpha$ 所示。

3. 因對角桁之長度伸縮 Δs 而起之極旋角(第101圖)。設薄片 I 對 II 之相對極 $P_{I II}$ 為 L ，薄片 I 對 II 所旋成之角度為 $\Delta\delta$ ，則 $\Delta\delta = \frac{\Delta s}{\rho}$ ，而求由薄片 I 及 II 對於其瞬息間中點所旋成 $\Delta\alpha$ 及 $\Delta\beta$ 之二角度。

二薄片相互間作相對運動之極，即 L 是也，以其屬於該二部份，故可假定其與薄片 I 及薄片 II 各作相互間之連結，其依 P_I 之旋動與依 P_{II} 之旋動，對於任何方向所起之移動(例如在垂直方向)必相等，因 L 既與薄片 I 相連結，故 $\Delta\alpha$ 作向下之旋轉而為 $c\Delta\alpha$ ，再因 L 復與薄片 II 相連結，故亦作向下之移動為 $(l+c)\Delta\beta$ ，此二移程必相等，即為：

$$c\Delta\alpha = (l+c)\Delta\beta \dots\dots\dots(111)$$

在依 P_I 之旋轉而使 L 移至 L' ，第 101 b 圖中之點線所示者，為薄片 I 之新位，其由 L' 向 P_{II} 所作之割點線，即示薄片 II 之新位，二薄片於 L'



第 101 圖

點互相夾成之角，乃由一薄片對於另一薄片所旋成，即 $\Delta\delta$ 是也。按第 101b 圖得： $\Delta\alpha = \Delta\delta + \Delta\beta$ ， $\Delta\delta = \Delta\alpha - \Delta\beta$ 。

由公式 (111) 得： $\Delta\beta = \frac{c \Delta\alpha}{l+c}$ 因成：

$$\Delta\delta = \Delta\alpha \left(1 - \frac{c}{l+c}\right) = \Delta\alpha \left(\frac{l}{l+c}\right)$$

由此得：

$$\left. \begin{aligned} \Delta\alpha &= \left(\frac{l+c}{l}\right) \Delta\delta \\ \Delta\beta &= \frac{c}{l} \Delta\delta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(112)$$

其結果與外廓桁條，完全相符。故於瞬息間中點 P_I 及 P_{II} 之旋角，與其在力矩點 L 荷以 $\Delta\delta$ 重量所產生之 A, B 二攔支力相等。

4. 因一對角桁之長度伸縮所起極旋角之性質 (第 101 圖)。桁條 $\overline{14}$ 如經伸長，并假定薄片 I 與 $P_{I, II}$ (即 L) 係固結而堅定，則點 4 依 L 所起旋轉之性質而言必為正，薄片 II 之其他各點，依 L 所起旋轉之性質而言，必與此相同，故 B 點亦然。因圖中之 L 位於 \overline{AB} 水平線之上方，故 B 呈向左之移動。無如實際上，薄片 II 依 P_{II} 而旋，設分言之，除依 L 而外，復依 $P_I (A)$ 而旋。其第二種運動對於 B 不作水平之推移，因 A 與 B 之高度相等也。 B 點之綜合運動，乃依 $P_I (A)$ 及 $P_{I, II} (L)$ 而旋，遂成一向左之移動，此項實際運動，亦一依 $P_{II} (O)$ 之旋轉， $\Delta\beta$ 因成負的旋性。 L 與薄片 II 及薄片 I 當作固定之結合。在依 P_{II} 旋轉時， L 乃向下移。此其運動，實令 L 起旋轉，亦即薄片 I 依 A 起負性旋轉 (一如圖中 $\Delta\alpha$ 所示)。在變形時，薄片 II 作向下移動，而薄片 I 則向上耳。

第五節 因桁條長度變形而使一桁構物節點之移動

(a) 因一外廓桁條長度變形而產生之沉陷(第 99 圖)。

設外廓桁條 $\overline{12}$ 經縮短 $\Delta s = h \Delta \delta$, A 為極 I , O 為極 II , 更有:

$$\Delta \alpha = \Delta \delta \frac{(l-a)}{l} \quad \Delta \beta = \Delta \delta \frac{a}{l}$$

在薄片 I 之邊際任何處, 例如 r 點之沉陷為: $\eta_r = \zeta \Delta \alpha = \zeta \frac{(l-a)}{l} \Delta \delta$;

在薄片 II 之邊際任何處, 例如 t 點之沉陷為: $\eta_t = \xi \Delta \beta = \xi \frac{a}{l} \Delta \delta$,

此沉陷值與跨度 l 樑上之點 3 , 荷以 $\Delta \delta$ 重量所產生 r 及 t 兩處之力矩, 完全相符。如在點 3 (桁條之力矩點) 荷以重量 $\Delta \delta$, 其所成之力矩面, 即示各地之沉陷值, 點 3 之沉陷當為:

$$\eta_3 = a \frac{(l-a)}{l} \Delta \delta$$

如於點 3 之下方取任意比例尺繪 $\eta_3 = a \frac{(l-a)}{l} \Delta \delta$, 其頂端復與 A , B 下方之零點相連結, 即與 A_0 , B_0 兩點相連 (第 99 圖), 即得一劃有垂直並行線之三角形, 各線之高, 乃示其上方各節點之沉陷值。如以 $\Delta s = 1$, 即 $\Delta \delta = \frac{1}{h}$ 所成之沉陷, 為桁條張力之勢力線 (參閱第一節)。

茲有 $\Delta \delta = \frac{\Delta s}{h}$ 及 $s = \frac{S s}{E F}$, 式中 S 示桁條之張力, s 為長, F 為剖面積, E 為彈性係數, 因成:

$$\Delta \delta = \frac{S s}{E F h} = \frac{S s h}{E F h^2}$$

如應用烈透氏 (Ritter) 方法, 以 $\frac{S}{E F h^2} = \Delta G$ (ΔG 對於同桁條或相等桁條為定值), 則成: $\Delta \delta = S h \Delta G$, $S h$ 係對於力矩點 3 之外

力力矩，爲造成桁條之張力者，因屬預知，故可成：

$$\Delta\delta = M \cdot \Delta G \left\{ \begin{array}{l} \Delta\alpha = M \Delta G \frac{(l-a)}{l} \\ \Delta\beta = M \Delta G \frac{a}{l} \end{array} \right\} \dots\dots\dots(113)$$

故吾人如在桁條 $\overline{12}$ 之力矩點 3，荷以 $M \Delta G$ (第 99 圖)，則 A, B 所產生之攔支力，即係極旋角之值，而此荷重在各點所產生之力矩，乃該點之沉陷值是也。

(b) 因內含桁條長度變形而使節點之沉陷。

如對角桁 D 一經伸長 (第 102 圖)，則其左部份，即薄片 I 依極 A ，其右部份即薄片 II 依極 P_{II} 而旋轉，極旋角 (絕對值) 爲：

$$\left. \begin{array}{l} \Delta\alpha_b = \Delta\delta_b \left(\frac{l+c}{l} \right) \\ \Delta\beta_b = \Delta\delta_b \frac{c}{l} \end{array} \right\} \dots\dots\dots(114)$$

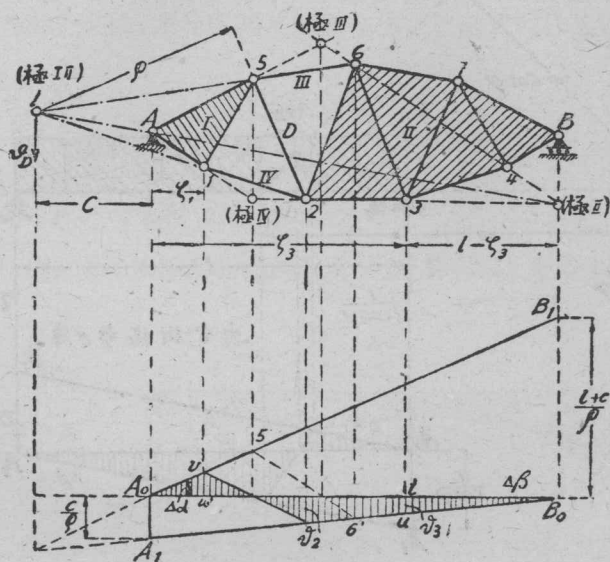
$\Delta\delta_b$ 係因 D 對角桁之長度變形而令薄片 I 對於薄片 II 之旋轉，故 $\Delta\delta_b = \frac{\Delta s_b}{\rho}$ ，以 $\Delta s_b = 1$ ，即成 $\Delta\delta_b = \frac{1}{\rho}$ ，得：

$$\left. \begin{array}{l} \Delta\alpha_b = \frac{1}{\rho} \frac{(l+c)}{l} \\ \Delta\beta_b = \frac{1}{\rho} \frac{c}{l} \end{array} \right\} \dots\dots\dots(115)$$

A 之垂直線上，如向下取 $1 \frac{c}{\rho}$ 一段，其末端復與 B_0 相連結，則此所得之 $\overline{A_1 B_0}$ 線與橫軸 $A_0 B_0$ 夾成之角，即極旋角 $\Delta\beta_b$ 是也。依同法在 B_0

之垂直線上，向上取 $\frac{1}{\rho}(l+c)$ 一段，其頂端 B_1 與 A_0 相連結，即得 Δa_b 。

薄片 II 所屬之點 3，其沉陷為： $\delta_3 = (l - \zeta_3) \Delta \beta_0 = \frac{(l - \zeta_3)}{l} \frac{c}{\rho}$
 $= \overline{tu}$ ，薄片 I 所屬之點 1，其沉陷為： $\delta_1 = \zeta_1 \Delta a_b = \frac{\zeta_1}{\rho} \frac{(l+c)}{l}$ ，在第 102 圖中 $\overline{wv} = \delta_1$ ，如將 1, 2 兩點沉陷值之頂端，互相連結，即得桁條 12 各點之沉陷(正及負)。而該下桁條之沉陷線，因以求得。如行車道

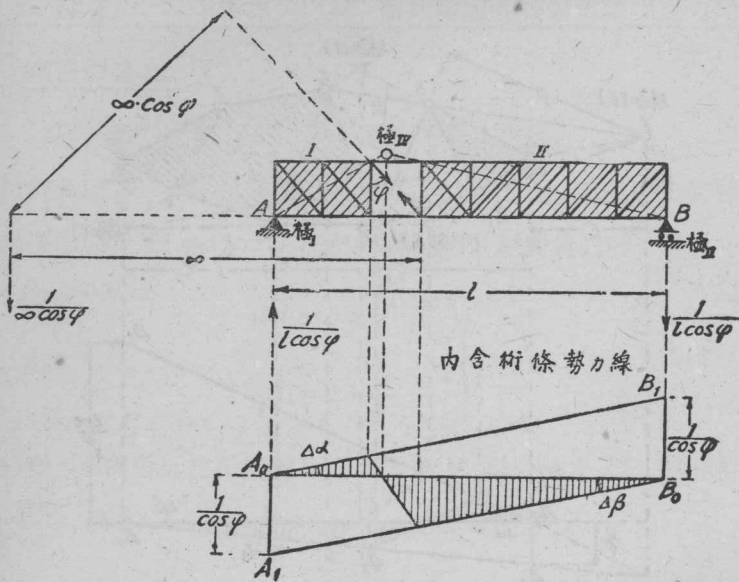


第 102 圖

位於下桁者，則是圖同時亦即對角桁 D 之勢力線，而上桁條之沉陷線，亦易求得，即為折線 $A_0 5' 6' B_0$ 所圍成者是也。如應用第三節(1)所得之方法，而直接繪作勢力線之形式者，則祇需依上法計算其中之一值，藉定圖形之比例尺。

並行桁樑 (第 103 圖) 之 c 段, 長達無限, 薄片 I 之極為 A , 而薄片 I 與薄片 II 之極為 P_{II} , 乃上下二桁條之交點, 位於無窮遠處, 是故薄片 II 之極, 當在經過 A 而與外廓桁條相並行之線上, 即 B 為 P_{II} 是也。此無窮遠之點, 如荷以 Δs , 並設 $\Delta s=1$ 得:

$$\Delta \delta = \frac{\Delta s}{\infty \cos \varphi} = \frac{1}{\infty \cos \varphi}$$



第 103 圖

此 (彈性) 重量, 對於 A, B 兩點所產生之力矩為:

$$(M_A) = \frac{1}{\infty \cos \varphi} \infty = \frac{1}{\cos \varphi} = (M_B)$$

因力矩而得之攔支力為:

$$(A) = \frac{1}{l \cdot \cos \varphi} = \Delta \alpha \text{ 及}$$

$$(B) = \frac{1}{l \cos \varphi} = \Delta \beta$$

A 及 B 之垂直下方，如向下（在 A）及向上（在 B）各取 $\frac{1}{\cos \varphi}$ 一段長度，再將其頂端 B_1 及 A_1 與 $A_0 B_0$ 各相連結，即得沉陷線，是二線與水平所夾之角為 $\Delta \alpha$ 及 $\Delta \beta$ ；第 103 圖以垂直線所劃之面，即係伸長 $\Delta s = 1$ 之桁條，其張力之勢力面；同時示行道各節點之垂直移動，因二薄片相互間之移動，宛如依其共同而在無限遠處之點作旋轉，故其移動，互成並行。

第六節 三關節拱之極旋角及其變線

(a) 因一外廓桁條之長度變形

第 104 圖之極，依據第四節法則及第 96 圖得之，如外廓桁條之長度變形為 Δs ，則

該桁條之力矩點

上角度之變遷為

$$\Delta \delta = \frac{\Delta s}{h}$$

薄片 I, II, III 之瞬息

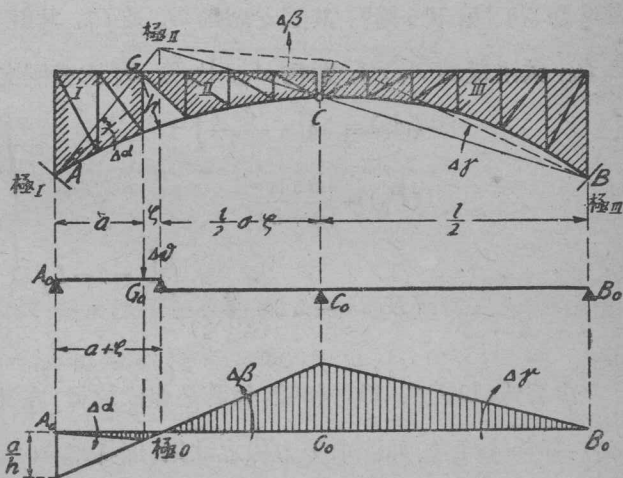
間中點為 A, P_{II}

及 B，其地之旋

角為 $\Delta \alpha$, $\Delta \beta$,

$\Delta \gamma$ 。以其屬於薄

片 I，故 G 點之



第 104 圖

沉陷爲： $\eta_g = a \Delta\alpha$ ，以其屬於薄片 *II*，故 G 點之沉陷亦爲： $\eta_g = \zeta \Delta\beta$ ，依此必成：(1) $a \Delta\alpha = \zeta \Delta\beta$ 。關節點 C 屬於薄片 *II* 及 *III*，其昇起爲：(2) $\left(\frac{l}{2} - a - \zeta\right) \Delta\beta = \frac{l}{2} \Delta\gamma$ 。 G 點之角度變形 $\Delta\delta$ ，殊易計算，乃其有關係之薄片 *I* 及 *II* 二旋角之和，即：(3) $\Delta\delta = \Delta\alpha + \Delta\beta$ 。依此(1)至(3)三公式，即足求得三未知值 $\Delta\alpha$ ， $\Delta\beta$ ， $\Delta\gamma$ ，遂成：

$$\left. \begin{aligned} \Delta\alpha &= \Delta\delta \left(\frac{\zeta}{a+\zeta} \right) \\ \Delta\beta &= \Delta\delta \left(\frac{a}{a+\zeta} \right) \\ \Delta\gamma &= \Delta\delta \frac{\left(\frac{l}{2} - a - \zeta \right) a}{\frac{l}{2} (a+\zeta)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(116)$$

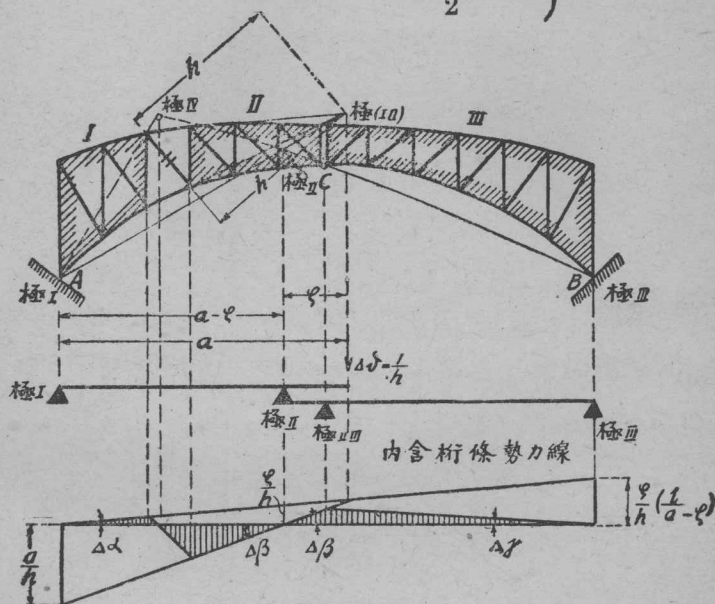
如在一臂樑 (Auslegerbalken, cantilever beam) 上之 G_0 點，荷以重量 $\Delta\delta$ (第 104 圖)，其攔支點爲 B_0 及 C_0 ，其由 C_0 伸出之臂段爲 $\overline{C_0 P_0}$ ，其附樑爲 $\overline{A_0 P_0}$ ，則在 A_0 ， P_0 及 B_0 之三攔支力爲：

$$\left. \begin{aligned} (A_0) &= \Delta\delta \left(\frac{\zeta}{a+\zeta} \right) \\ (P_0) &= \frac{\Delta\delta a}{(a+\delta)} \\ (B_0) &= -\Delta\delta \frac{a}{(a+\zeta)} \frac{\left(\frac{l}{2} - a - \zeta \right)}{\frac{l}{2}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(117)$$

由公式(116)與(117)相較，知若是組成之樑，在其瞬息間中點之攔支力，即係極旋角，如依求勢力線之法則，而採取 $\Delta s = 1$ 所屬之旋轉，則當引用 $\Delta\delta = \frac{1}{h}$ 。

而其極旋角遂爲：

$$\left. \begin{aligned} \Delta\alpha &= \frac{\zeta}{h(a+\zeta)} \\ \Delta\beta &= \frac{a}{h(a+\zeta)} \\ \Delta\gamma &= -\frac{a}{h(a+\zeta)} \left(\frac{l}{2} - a - \zeta \right) \frac{1}{\frac{l}{2}} \end{aligned} \right\} \dots\dots(118)$$



第 105 圖

第 104 圖之解法，可直接求得其旋角，而行車道桁條之沉陷，亦即該正在研究中之下桁條勢力線，因亦求得。

(b) 因一內含桁條之長度變形

一切計算法則，可與 (a) 完全相同。其極也，極旋角也，荷重桁條之沉陷線也，以及對角桁條之勢力線等等也，概詳諸第 105 圖。

中德英譯名對照表

一 畫	
一級靜力不定式	einfach statisch unbestimmt; statically indeterminate to the 1 degree.
二 畫	
力矩	Momente; moments.
力矩點	Momentpunkte; moment center.
三 畫	
工作原則	Grundgesetz der Arbeit; principle of work.
上桁條 (上桁)	Obergurtstäbe; top chord.
下桁條 (下桁)	Untergurtstäbe; bottom chord.
三關節拱	Dreigelenkbogen; three hinged arch.
四 畫	
內含桁條	Füllungsstäbe; web.
五 畫	
代樑	Stellvertretender Balken.
平衡	Gleichgewicht; equilibrium.
正交力	Normalkräfte; normal force.
外廓桁條	Gurtstäbe; chord.
六 畫	
吊桁	Hängestäbe.
有拉桿之拱樑	Bogenträger mit Zugverband

行車道桁條之彎線

Biegungslinie der Fahrbahngurtungen.

七 畫

沉陷

Senkungen; deflection.

均佈荷重

gleichmässig verteilte Last; uniform distributed load.

克來馬拿法

Verfahren von Cremona.

克來馬拿圖

Cremonaplan; stress diagram.

八 畫

附樑

Schleppträger.

呼克定律

Hookesches Gesetz; Hooke's Law.

直接荷重

unmittelbare Belastung; direct loading.

九 畫

拱

Bogen; arch.

拱頂

Scheitelpunkte; crown.

拱底

Kämpferpunkte; skewback.

垂直桁

Pfosten; vertical.

軌跡線

Verschiebungslinie.

軌跡環

Verschiebungskreis.

相對極

Relativpol.

拱底壓力

Kämpfer drücke; skewback reaction.

拱底壓力線

Kämpfer drucklinie; reaction locus.

十 畫

剖線

Schnitt; section.

桁樑

Fachwerk; Truss.

桁條

Fachwerkstäbe; member.

烈透氏

Ritter.

烈透法

Rittersches Verfahren; Method of moments.

連續樑	Durchgehender Träger; continuous beam.
桁構懸樑	Hängeträger; suspended Truss.
耶格氏式桁樑	Langerscher Träger.

十一畫

剪力	Querkräfte; shear.
基位	Grundstellung.
進位	vorgezogene Stellung.
動鏈	Kinematische Kette.
虛關節	imaginäre Gelenke.
虛移定律	Satz der virtuelle Verrückung.
間接荷重	mittelbare Belastung; indirect loading
荷重分界點	Belastungsscheide; load divide.

十二畫

樑	Balken; beam.
極	Pole; pole.
張力	Spannkräfte; stresses.
單力	Einzellast; concentrated load.
慣率	Trägheitsmoment; moment of inertia.
逾定值	überzählige Größen; redundant members.
極旋角	Poldrehwinkel.
強制式之動鏈	zwangläufige kinematische Kette.

十三畫

勢力面	Einflussfläche; influence area.
勢力線	Einflusslinie; influence line.

十四畫

節點	Knotenpunkte; joints.
----	-----------------------

對角桁

Diagonale; diagonal.

十五畫

實心拱

vollwandiger Bogen; rib arch.

彈性重量

elastisches Gewicht; elastic weight.

彈性係數

Elastizitätsziffer; modulus of elasticity.

蓋爾培氏式臂樑

Gerberscher Auslegerträger.

滿勒白萊斯勞氏

Müller-Breslau.

十六畫

欄支力

Auflagerdrücke; end reactions.

靜力定式結構物

statisch bestimmte Fachwerke; statically determinate trusses.

靜力不定式結構物

statisch unbestimmte Fachwerke; statically indeterminate trusses.

十七畫

臂樑

Auslegerbalken; cantilever beam.

十八畫

雙關節桁構拱

Zweigelenkiger Fachwerkbogen; two hinged trusses arch.

二十二畫

懸樑

Hängeträger; suspended truss.

二十三畫

關節

Gelenk; hinge.