

Zahlentheorie

Arbeitsblatt 2

Übungsaufgaben

AUFGABE 2.1.*

Zeige, dass ein kommutativer Ring genau dann ein Körper ist, wenn er genau zwei Ideale enthält.

AUFGABE 2.2.*

Es seien $x, y \in R$ Elemente in einem kommutativen Ring R . Welche der folgenden Formulierungen sind zu

$$Rx \subseteq Ry$$

äquivalent.

- (1) x teilt y .
- (2) x wird von y geteilt.
- (3) y wird von x geteilt.
- (4) x ist ein Vielfaches von y .
- (5) x ist ein Vielfaches von x .
- (6) y teilt x .
- (7) $Rx \cap Ry = Rx$.
- (8) Jedes Vielfache von y ist auch ein Vielfaches von x .
- (9) Jeder Teiler von y ist auch ein Teiler von x .
- (10) Ein Maikäfer ist ein Schmetterling.

AUFGABE 2.3. a) Zeige, dass ein Ideal in einem kommutativen Ring R eine Untergruppe von R ist.

b) Zeige, dass für $R = \mathbb{Z}$ die Begriffe Untergruppe und Ideal zusammenfallen.

c) Man gebe ein Beispiel für einen kommutativen Ring R und eine Untergruppe $U \subseteq R$, die kein Ideal ist.

2

AUFGABE 2.4.*

Zeige, dass es zu ganzen Zahlen d, n mit $d > 0$ eindeutig bestimmte ganze Zahlen q, r mit $0 \leq r < d$ und mit

$$n = dq + r$$

gibt.

AUFGABE 2.5.*

Zeige, dass der Kern eines Ringhomomorphismus

$$\varphi: R \longrightarrow S$$

ein Ideal in R ist.

AUFGABE 2.6. Zeige, dass $\mathbb{Z}[X]$ und der Polynomring in zwei Variablen $K[X, Y]$ über einem Körper K keine Hauptidealbereiche sind.

AUFGABE 2.7. Es sei $T \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge. Zeige, dass im Ring der stetigen Funktionen

$$R = C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

die Teilmenge

$$I = \{f \in R \mid f(x) = 0 \text{ für alle } x \in T\}$$

ein Ideal in R ist.

AUFGABE 2.8. Wir betrachten das Ideal zu $T = \{0\} \subseteq \mathbb{R}$ im Sinne von Aufgabe 2.7. Ist dies ein Hauptideal?

AUFGABE 2.9. Es sei R ein kommutativer Ring und $a_1, a_2, \dots, a_n, b, f \in R$ Elemente. Zeige die folgenden Aussagen.

- a) Wenn b ein größter gemeinsamer Teiler der a_1, a_2, \dots, a_n ist, so ist auch fb ein größter gemeinsamer Teiler der fa_1, fa_2, \dots, fa_n .
- b) Wenn f ein Nichtnullteiler ist, so gilt hiervon auch die Umkehrung.

AUFGABE 2.10. Es seien $a, b \in R$ zwei irreduzible, nicht assoziierte Elemente in einem Integritätsbereich. Zeige, dass a und b teilerfremd sind.

AUFGABE 2.11. Es sei R ein Integritätsbereich und $p \in R, p \neq 0$. Zeige, dass p genau dann irreduzibel ist, wenn es genau zwei Hauptideale oberhalb von (p) gibt, nämlich (p) selbst und $(1) = R$.

AUFGABE 2.12. Es seien r und s teilerfremde Zahlen. Zeige, dass jede Lösung (x, y) der Gleichung

$$rx + sy = 0$$

die Gestalt $(x, y) = v(s, -r)$ mit einer eindeutig bestimmten Zahl v besitzt.

AUFGABE 2.13. Zeige durch ein Beispiel, dass die in Aufgabe 2.12 bewiesene Aussage ohne die Voraussetzung teilerfremd nicht stimmt.

AUFGABE 2.14.*

Zeige, dass die Untergruppen von \mathbb{Z} genau die Teilmengen der Form

$$\mathbb{Z}d = \{kd \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

mit einer eindeutig bestimmten nicht-negativen Zahl d sind.

Der Begriff des größten gemeinsamen Teilers wird innerhalb der ganzen Zahlen häufig wie folgt definiert.

Es seien a_1, \dots, a_k natürliche Zahlen. Eine natürliche Zahl g heißt *größter gemeinsamer Teiler* der a_1, \dots, a_k , wenn g ein gemeinsamer Teiler ist und wenn g unter allen gemeinsamen Teilern der a_1, \dots, a_k der (bezüglich der Ordnungsrelation auf den natürlichen Zahlen) Größte ist.

AUFGABE 2.15. Es sei a_1, \dots, a_n eine Menge von ganzen Zahlen. Zeige, dass der nichtnegative größte gemeinsame Teiler der a_i (im Sinne der allgemeinen Ringdefinition) mit demjenigen gemeinsamen Teiler übereinstimmt, der bezüglich der Ordnungsrelation \geq der größte gemeinsame Teiler ist.

AUFGABE 2.16.*

Zeige anhand der beiden Gaußschen Zahlen $1 + i$ und 2 , dass bei einem euklidischen Bereich die Division mit Rest nicht eindeutig sein muss. Man gebe vier gleichberechtigte Darstellungen für die Division mit Rest von „ $1 + i$ durch 2 “ an.

AUFGABE 2.17.*

Bestimme in $\mathbb{Z}[i]$ mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler von $5 + 2i$ und $3 + 7i$.

AUFGABE 2.18. Es sei R ein euklidischer Bereich mit euklidischer Funktion δ . Zeige, dass ein Element $f \in R$ ($f \neq 0$) mit $\delta(f) = 0$ eine Einheit ist.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 2.19. (3 Punkte)

Es sei $n \in \mathbb{N}_+$ und seien n (verschiedene) natürliche Zahlen gegeben. Zeige, dass es eine nichtleere Teilmenge dieser Zahlen derart gibt, dass die zugehörige Summe ein Vielfaches von n ist.

AUFGABE 2.20. (3 Punkte)

Alle Flöhe leben auf einem unendlichen Zentimeter-Band. Ein Flohmännchen springt bei jedem Sprung 78 cm und die deutlich kräftigeren Flohweibchen springen mit jedem Sprung 126 cm. Die Flohmännchen Florian, Flöhchen und Carlo sitzen in den Positionen $-123, 55$ und -49 . Die Flohweibchen Flora und Florentina sitzen in Position 17 bzw. 109. Welche Flöhe können sich treffen?

AUFGABE 2.21. (3 Punkte)

Beweise folgende Aussagen für einen kommutativen Ring R .

- (1) Das Element a ist ein Teiler von b (also $a|b$) genau dann, wenn $(b) \subseteq (a)$.
- (2) a ist eine Einheit genau dann, wenn $(a) = R = (1)$.
- (3) Ist R ein Integritätsbereich, so gilt $(a) = (b)$ genau dann, wenn a und b assoziiert sind.

AUFGABE 2.22. (2 Punkte)

Zeige, dass im Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}] = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\sqrt{2}i$ die Norm eine euklidische Funktion ist.

AUFGABE 2.23. (6 Punkte)

Es sei R ein Integritätsbereich. Betrachte die beiden folgenden Bedingungen:

- (1) Es gibt ein Primelement $p \in R$ mit der Eigenschaft, dass sich jedes Element $f \in R$, $f \neq 0$, eindeutig als $f = up^i$ darstellen lässt mit einer Einheit u und $i \in \mathbb{N}$.
- (2) R ist ein euklidischer Bereich mit einer surjektiven euklidischen Funktion $\delta : R \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$, die zusätzlich die beiden folgenden Eigenschaften erfüllt.
 - a) Es gilt $\delta(fg) = \delta(f) + \delta(g)$ für alle $f, g \in R \setminus \{0\}$.
 - b) Es gilt $f|g$ genau dann, wenn $\delta(f) \leq \delta(g)$ für alle $f, g \in R \setminus \{0\}$.

Zeige, dass beide Bedingungen äquivalent sind. Können Sie Beispiele für solche Ringe angeben?

Abbildungsverzeichnis

- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 7
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 7