Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2016/2017**

Grundkurs Mathematik I

Vorlesung 18

Drei Schritte vor und zwei zurück, so kommt der Mensch voran

Petra Pascal

Die ganzen Zahlen

Wir haben in der letzten Vorlesung gesehen, dass die Gleichung

$$a + x = b$$

mit $a, b \in \mathbb{N}$ formulierbar ist, aber es dort bei $a > b$ keine Lösung gibt. Wir würden gerne von dieser Gleichung links und rechts a „abziehen“, um links

$$a + x - a = x$$

und rechts die Lösung $b - a$ für x zu erhalten. Um dies durchführen zu können, müssen wir die natürlichen Zahlen zu einem größeren Zahlbereich erweitern, nämlich zur Menge der ganzen Zahlen. Solche Zahlbereichserweiterungen ziehen sich durch die gesamte Mathematik, egal ob in der Schule oder auf der Hochschule. Wir werden noch die Erweiterung von den ganzen Zahlen zu den rationalen Zahlen und von den rationalen Zahlen zu den reellen Zahlen kennenlernen. Eine wichtige Motivation ist dabei, so wie hier, dass man Lösungen für gewisse Gleichungen finden möchte, für die es im Ausgangszahlbereich keine Lösung gibt, und dass man diese Lösungen auch rechnerisch auffinden und handhaben möchte. Zugleich möchte man mit den neuen Zahlen möglichst viel machen können, was man im Ausgangsbereich kann, also beispielsweise nach wie vor addieren und multiplizieren, wobei auch die gleichen Gesetzmäßigkeiten weiter gelten sollen.

Da wir von nun an mit verschiedenen Zahlbereichen arbeiten, wird es wichtig, zu betonen, in welchem Zahlbereich wir uns befinden. Die Gleichung

$$5 + x = 2$$

besitzt in $\mathbb{N}$ keine Lösung. Diese Tatsache bleibt unabhängig davon bestehen, dass es in anderen Bereichen eine Lösung gibt.

Wir führen jetzt die Menge der ganzen Zahlen ein, auf denen wir dann bald die Verknüpfungen festlegen und die zugehörigen Rechengesetze nachweisen werden.

Definition 18.1. Die Menge der *ganzen Zahlen* $\mathbb{Z}$ besteht aus der Menge aller positiven natürlichen Zahlen $\mathbb{N}_+$, der 0 und der Menge $\{-n | \, n \in \mathbb{N}_+\}$, deren Elemente die negativen ganzen Zahlen heißen.

Diese Definition hat den Vorteil, dass sie direkt ist und ohne mengentheoretische Überlegungen (Äquivalenzrelationen) auskommt. Jede ganze Zahl gehört unmittelbar zu genau einem der drei Typen (positiv, 0 , negativ). Der Nachteil ist, dass die Verknüpfungen darauf, nämlich die Addition und die Multiplikation, die diese Verknüpfungen auf den natürlichen Zahlen fortsetzen sollen, nicht unmittelbar ersichtlich sind, sondern auf eine Weise festgelegt werden müssen, die zumindest auf den ersten Blick etwas willkürlich aussieht. Zugleich ist der Nachweis der Gesetzmäßigkeiten, wie beispielsweise das Assoziativgesetz, recht aufwändig, da man alle Kombinationen der möglichen Fälle untersuchen muss.

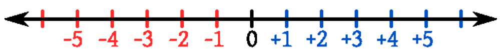
Bemerkung 18.2. Wie verhalten sich die ganzen Zahlen bezüglich der Zählvorstellung für die natürlichen Zahlen, die wir in der fünften Vorlesung kennengelernt haben? Die richtige Vorstellung ergibt sich, wenn man die Nachfolgerabbildung auf $\mathbb{Z}$ fortsetzt, indem man für eine negative Zahl $y = -a$ den Nachfolger als das Negative des Vorgängers von a definiert, also

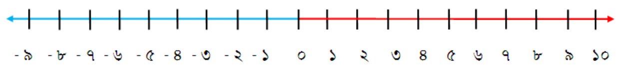
$$y' = -(a-1)$$

(bei $a = 1$ ist dies als 0 zu lesen). Die natürlichen Zahlen werden somit auf der Zahlengeraden von 0 aus nach links mit $-1, -2, ...$ fortgesetzt. Der Nachfolgerschritt ist dann immer noch der eine Schritt nach rechts. Beispielsweise ergeben sich die Reihenfolgen

(1)
$$..., -|||, -||, -|, 0, |, ||, |||... .$$
(2)
$$..., -NNN0, -NN0, -N0, 0, N0, NN0, NNN0, ...$$
(3)
$$..., \text{minus drei}, \text{minus zwei}, \text{minus eins}, \text{null}, \text{eins}, \text{zwei}, \text{drei}, ...$$
(4)
$$..., -c, -b, -a, 0, a, b, c, ...$$
(5)
$$..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...$$

Es entsteht hier eine Symmetrie am Nullpunkt, wobei die negative Zahl $-a$ der positiven Zahl a gegenüber liegt. Diese Symmetrie gilt insbesondere auf der Zahlengeraden.





Wenn man die ganzen Zahlen dynamisch als (gleichlange) Schritte nach rechts bzw. nach links (oder nach vorne bzw. nach hinten oder nach oben bzw. nach unten) interpretiert, so sehen die negativen Zahl so „natürlich“ wie die positiven Zahlen aus.

Der Apfelkorb G

Der Apfelkorb H

Welche Objekte bzw. Strukturen kann man mit den ganzen Zahlen zählen? Es gibt keine Mengen mit negativ vielen Elementen! Dennoch gibt es viele Situationen, wo man mit ganzen Zahlen sinnvoll zählen kann. Sobald es einen Prozess zusammen mit einem zugehörigen gegenläufigen Prozess gibt, wie etwa einen Schritt nach rechts bzw. einen Schritt nach links zu machen, oder wenn man zwei sehr große Haufen (oder Körbe) an Äpfeln hat, und der Prozess ist, einen Apfel von dem einen Haufen zu dem anderen Haufen zu transportieren (mit dem umgekehrten Transport als dem gegenläufigen Prozess), so kann man die möglichen (hintereinander ausgeführten) Prozesse durch die ganzen Zahlen beschreiben: 7 (oder deutlicher $+7$) bedeutet 7 Äpfel von Haufen G nach Haufen H, -3 bedeutet drei Äpfel von Haufen H nach Haufen G. Hierbei muss man willkürlich festlegen, welche Prozessrichtung man als positiv ansehen möchte. Auch in der Hauswirtschaft werden die Einnahmen positiv und die Ausgaben negativ verbucht. Damit zusammenhängend werden negative Zahlen häufig als Schulden und positive Zahlen als Guthaben interpretiert.

Definition 18.3. Auf den ganzen Zahlen wird folgendermaßen eine Verknüpfung, genannt *Addition*, eingeführt (dabei bezeichnen a, b natürliche Zahlen). Es ist

$$a + b \, := \, a + b,$$
$$a + (-b) \, := \, \begin{cases} a - b, \text{ falls } a \geq b \,, \\ -(b - a), \text{ falls } a < b \,, \end{cases}$$

$$(-a)+b \;:=\; \begin{cases} b-a, \text{ falls } b \geq a\,, \\ -(a-b), \text{ falls } b < a\,, \end{cases}$$

$$(-a)+(-b) \;:=\; -(a+b).$$

Bemerkung 18.4. Die in Bemerkung 18.2 besprochenen Interpretationen für ganze Zahlen passen sehr gut zur Addition der ganzen Zahlen. Die Addition einer Reihe von Ausgaben oder Einnahmen führt zur Gesamteinnahme bzw. Gesamtausgabe; wenn man hintereinander mehrfach nach vorne bzw. nach hinten geht, so beschreibt die Addition den Gesamtbewegungsvorgang; wenn die einen Äpfel von G nach H und die anderen von H nach G schmeißen, so beschreibt die Addition den Gesamttransport. Hierzu muss man sich nur davon überzeugen, dass die über die Fallunterscheidung definierte Addition genau das macht, was im (Bewegungs-)Prozess geschieht. Wenn man beispielsweise zuerst a Äpfel von G nach H transportiert und dann b Äpfel ebenfalls von G nach H, so transportiert man insgesamt $a+b$ Äpfel von G nach H. Wenn man hingegen zuerst a Äpfel von G nach H transportiert und dann b Äpfel in die andere Richtung, also von H nach G transportiert, so hängt der Gesamtprozess wesentlich davon ab, ob a oder ob b größer (oder gleich) ist. Bei $a \geq b$ transportiert man insgesamt $a-b$ Äpfel von G nach H (vergleiche Satz 10.11), andernfalls transportiert man $b-a$ Äpfel von H nach G. Mit diesen Interpretationen werden auch die algebraischen Gesetze für die Addition ganzer Zahlen einsichtig.

Statt $a+(-b)$ schreiben wir auch $a-b$. Es ist sinnvoll, diesen Ausdruck und speziell $-b$ für beliebige ganze Zahlen zur Verfügung zu haben. Wir setzen daher

$$-x \;=\; \begin{cases} -x\,, \text{ falls } x \in \mathbb{N}\,, \\ y\,, \text{ falls } x \text{ negativ ist mit } x=-y \text{ und } y \in \mathbb{N}\,. \end{cases}$$

Insbesondere ist $-(-z) \;=\; z$ für jede ganze Zahl z.

Bemerkung 18.5. Innerhalb der ganzen Zahlen besitzt die mit den natürlichen Zahlen a,b formulierte Gleichung

$$a+x \;=\; b$$

eine eindeutige Lösung, nämlich $(-a)+b$. Bei $a \leq b$ ist das ja nach Definition die natürliche Differenz $b-a$, und bei $a > b$ ist nach Definition

$$(-a)+b \;=\; -(a-b),$$

und wegen

$$a \;\geq\; a-b \;\geq\; 0$$

ist nach der Definition der Addition und Lemma 10.12 (3)

$$a+(-(a-b)) \;=\; a-(a-b) \;=\; (a+b)-a \;=\; b.$$

Diese eindeutige Lösbarkeit überträgt sich auf eine Gleichung der Form

$$a + x = b$$

mit $a, b \in \mathbb{Z}$, siehe Aufgabe 18.13. Diese Aussage folgt auch aus Lemma 19.8 in Verbindung mit Satz 19.3.

Definition 18.6. Auf den ganzen Zahlen wird folgendermaßen eine Verknüpfung, genannt *Multiplikation*, eingeführt (dabei bezeichnen a, b natürliche Zahlen). Es ist

$$\begin{aligned} a \cdot b &:= a \cdot b, \\ a \cdot (-b) &:= -(a \cdot b), \\ (-a) \cdot b &:= -(a \cdot b), \\ (-a) \cdot (-b) &:= a \cdot b. \end{aligned}$$

Bemerkung 18.7. Wie schon bei den natürlichen Zahlen ist die Vorstellung für die Multiplikation von ganzen Zahlenschwieriger als für die Addition, da bei der Addition beide Summanden die gleiche Rolle spielen (zumindest in der wichtigsten Interpretationen), während dies bei der Multiplikation nicht der Fall ist. Man kann nicht drei Äpfel mal fünf Äpfel ausrechnen. Wie bei den natürlichen Zahlen beschreibt der eine Faktor die Vielfachheit, mit der ein Prozess durchgeführt, den der andere Faktor quantitativ misst. Man kann also dreimal jeweils fünf Äpfel von G nach H transportieren und transportiert dann insgesamt 15 Äpfel von G nach H. Das gleiche erreicht man, wenn man fünfmal drei Äpfel von G nach H transportiert. Ebenso kann man a-mal b Äpfel in die andere Richtung von H nach G transportieren, und transportiert damit insgesamt ab Äpfel von H nach G. Ganze Zahlen (der Apfeltransport samt Richtung) mit einer natürlichen Zahl zu multiplizieren besitzt also eine passende natürliche Interpretation. Schwieriger ist es, wenn beide Zahlen negativ sind. Die Definition sagt, dass dann das Produkt der zugehörigen positiven Zahlen herauskommt. Dies kann man sich so vorstellen: Es sei P ein reversibler Prozess, der gegenläufige Prozess sei mit $-P$ bezeichnet. Für $n \in \mathbb{N}$ ist nP die n-fache Ausführung von P. Für negatives

$$n = -m$$

interpretiert man dann nP als die m-fache Ausführung des gegenläufigen Prozesses. Insbesondere ist

$$(-1)P = -P.$$

Multiplikation mit -1 führt also auf den gegenläufigen Prozess, und von daher ist es einleuchtend, auch

$$(-1)(-P) = P$$

zu setzen, (der gegenläufige Prozess zum gegenläufigen Prozess ist der Prozess selbst).

Auch von den gewünschten algebraischen Gesetzmäßigkeiten her ist die Festlegung Minus mal Minus ist Plus sinnvoll. Es soll

$$0x = 0$$

gelten und es soll das Distributivgesetz gelten. Dann ist für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{Z}$

$$0 = 0x = (n - n)x = nx - nx.$$

Bei negativem $x = -a$ ergibt sich daraus

$$n(-a) - n(-a) = 0.$$

Das Produkt $(-n)(-a)$ muss also bei Addition mit $n(-a)$ Null ergeben, dies ist aber gerade die charakteristische Eigenschaft von na. Also ist

$$(-n)(-a) = na.$$

Lemma 18.8. *Die ganzen Zahlen erfüllen die folgenden Eigenschaften.*

(1) *Die Addition ist eine kommutative assoziative Verknüpfung mit* 0 *als neutralem Element. Zu jedem $x \in \mathbb{Z}$ gibt es ein $y \in \mathbb{Z}$ mit*

$$x + y = 0.$$

(2) *Die Multiplikation ist eine kommutative assoziative Verknüpfung mit* 1 *als neutralem Element.*

(3) *Es gilt das Distributivgesetz.*

Beweis. (1) Die Kommutativität der Addition beweisen wir mit einer Fallunterscheidung, je nachdem, ob die Summanden nichtnegativ (natürliche Zahlen) oder negativ sind. Wenn beide Summanden aus $\mathbb{N}$ sind, ergibt sich dies unmittelbar aus der Kommutativität der Addition in den natürlichen Zahlen. Wenn $x = a$ aus $\mathbb{N}$ ist und $y = -b$ negativ ist, so muss man eine weitere Fallunterscheidung vornehmen. Bei $a \geq b$ ist

$$x + y = a + (-b)$$

nach dem (der ersten Hälfte des) zweiten Teil der Definition, und ebenso ist

$$y + x = (-b) + a = a - b$$

nach dem (der ersten Hälfte des) dritten Teils der Definition. Bei $a < b$ ist wiederum

$$x + y = a + (-b) = -(b - a) = (-b) + a = y + x$$

nach den Definitionen. Wenn beide Zahlen negativ sind ergibt sich die Kommutativität sofort aus dem vierten Teil der Definition.

Dass 0 das neutrale Element ist, folgt unmittelbar aus den ersten beiden Teilen der Definition der Addition. Die Assoziativität nachzuweisen ist aufwändiger, da dann drei Zahlen x, y, z ins Spiel kommen, für die es jeweils mehrere Fälle gibt. Wenn eine der beteiligten Zahlen aber 0 ist, so ist die Aussage wegen der bewiesenen neutralen Eigenschaft der 0 klar. Wir müssen also nur noch die acht Fälle (in denen selbst jeweils wiederum Fallunterscheidungen gemäß der Größenbeziehung der beteiligten Elemente nötig sind) durchgehen, je nachdem, ob x, y, z positiv oder negativ sind.

Wenn beispielsweise $x = a, y = -b, z = -c$ mit positiven Zahlen a, b, c, ist, so ist

$$x + (y + z) \;=\; a + ((-b) + (-c)) \;=\; a - (b + c).$$

Wenn $a \,\geq\, b + c$ ist, so ist dies $a - (b + c)$ (in $\mathbb{N}$), andernfalls ist dies $-((b + c) - a)$. Für die andere Klammerung ergibt sich

$$(x + y) + z \;=\; (a + (-b)) + (-c).$$

Bei $a \,\geq\, b + c$ ist einerseits

$$a \,\geq\, b$$

und andererseits

$$a - b \,\geq\, c.$$

Somit ist die zweite Klammerung in diesem Fall nach Aufgabe 10.17 ebenfalls gleich

$$(a + (-b)) + (-c) \;=\; (a - b) - c \;=\; a - (b + c).$$

Bei $a \,<\, b + c$ unterscheiden wir die Fälle $a \,\geq\, b$ und $a \,<\, b$. Bei $a \,\geq\, b$ ist $c \,\geq\, a - b$ und daher ist unter Verwendung von Lemma 10.12 (3)

$$(a + (-b)) + (-c) \;=\; (a - b) - c \;=\; -(c - (a - b)) \;=\; -((c + b) - a).$$

Bei $a \,<\, b$ ist erst recht $a \,<\, b + c$ und somit ist nach Lemma 10.12 (2)

$$(a + (-b)) + (-c) \;=\; (-(b - a)) + (-c) \;=\; -((b - a) + c) \;=\; -((c + b) - a).$$

Für die anderen Fälle siehe Aufgabe 18.12.

Bei positivem x hat $-x$ die Eigenschaft, dass die Summe

$$x + (-x) \;=\; 0$$

ist, bei negativem x mit $x \;=\; -a$ mit $a \in \mathbb{N}$ erfüllt a die Eigenschaft.

(2) Die Kommutativität der Multiplikation und die Eigenschaft, dass 1 das neutrale Element ist, folgt unmittelbar aus der Definition 18.6. Zum Nachweis des Assoziativgesetzes stellt man zunächst fest, dass 0 herauskommt, sobald ein Faktor 0 ist. Die verbleibenden acht möglichen Fälle kann man einfach abhandeln, da das Vorzeichen des Produktes nur davon abhängt, wie viele Zahlen positiv und wie viele Zahlen negativ sind, siehe Aufgabe 18.17.

(3) Zum Nachweis des Distributivgesetzes

$$x \cdot (y + z) \;=\; x \cdot y + x \cdot z$$

können wir, indem wir bei negativem x mit -1 multiplizieren, annehmen, dass x positiv ist (bei $x \;=\; 0$ gilt die Gleichung sowieso).

Wenn y, z beide aus $\mathbb{N}$ sind oder beide negativ, so ergibt sich die Gleichung unmittelbar. Sei also $y = a$ aus $\mathbb{N}$ und $z = -b$ negativ. Bei $a \geq b$ ist nach Satz 10.5 auch

$$xa \geq xb.$$

In diesem Fall ist somit nach Lemma 10.13

$$x\cdot(y+z) = x\cdot(a+(-b)) = x\cdot(a-b) = x\cdot a - x\cdot b = x\cdot a + x\cdot(-b) = x\cdot y + x\cdot z.$$

Bei $a < b$ ist nach Satz 10.5 auch

$$xa < xb.$$

In diesem Fall ist somit nach dem soeben bewiesenen Fall

$$\begin{aligned} x \cdot (y+z) &= x \cdot (a + (-b)) \\ &= x \cdot (-(b-a)) \\ &= -(x \cdot (b-a)) \\ &= -(x \cdot b - x \cdot a) \\ &= x \cdot a - x \cdot b \\ &= x \cdot a + x \cdot (-b) \\ &= x \cdot y + x \cdot z. \end{aligned}$$

□

Für die Assoziativität der Addition in $\mathbb{Z}$ geben wir noch ein weiteres einleuchtenderes Argument, das sich an der inhaltlichen Beschreibung der Addition von ganzen Zahlen als einen gerichteten Transport von Objekten (zwischen zwei Haufen, also mit Rücktransport) orientiert. Diese Interpretation deckt sich mit den Festlegungen in Definition 18.3. In dieser Interpretation ist aber das Assoziativgesetz unmittelbar einleuchtend, da man die Hintereinanderausführung von drei Transportprozessen als einen Gesamtprozess auffassen kann, aber auch die beiden ersten Prozesse zusammenfassen oder die beiden letzten zusammenfassen kann.

Der Betrag

Definition 18.9. Unter dem *Betrag* $|n|$ einer ganzen Zahl n versteht man die Zahl selbst, falls diese positiv ist, oder aber die Zahl $-n$, falls n negativ (und $-n$ positiv) ist.

Der Betrag ist also stets eine natürliche Zahl.

Abbildungsverzeichnis