

Lineare Algebra und analytische Geometrie II**Arbeitsblatt 46****Übungsaufgaben**

AUFGABE 46.1. Sei p eine Primzahl und sei G eine Gruppe der Ordnung p . Zeige, dass G eine zyklische Gruppe ist.

AUFGABE 46.2. Sei G eine endliche Gruppe. Zeige, dass jedes Element $g \in G$ eine endliche Ordnung besitzt, und dass die Potenzen

$$g^0 = e_G, g^1 = g, g^2, \dots, g^{\text{ord}(g)-1}$$

alle verschieden sind.

AUFGABE 46.3.*

Es sei R ein kommutativer Ring mit p Elementen, wobei p eine Primzahl sei. Zeige, dass R ein Körper ist.

AUFGABE 46.4. Bestimme die Untergruppen von $\mathbb{Z}/(15)$.

AUFGABE 46.5. Bestimme die Nebenklassen zu den folgenden Untergruppen von kommutativen Gruppen.

- (1) $(\mathbb{Z}, 0, +) \subseteq (\mathbb{R}, 0, +)$.
- (2) $(\mathbb{Q}, 0, +) \subseteq (\mathbb{R}, 0, +)$.
- (3) $(\mathbb{R}, 0, +) \subseteq (\mathbb{C}, 0, +)$.
- (4) $(\mathbb{Z}n, 0, +) \subseteq (\mathbb{Z}, 0, +)$ ($n \in \mathbb{N}$).
- (5) $(\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}, 1, \cdot) \subseteq (\mathbb{C} \setminus \{0\}, 1, \cdot)$.
- (6) $(\{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}, 1, \cdot) \subseteq (\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}, 1, \cdot)$ ($n \in \mathbb{N}$).

Wann bestehen die Nebenklassen aus endlich vielen Elementen, wann ist der Index endlich?

AUFGABE 46.6. Es sei $G = S_3$ die Permutationsgruppe zu einer dreielementigen Menge. Welche Zahlen treten als Ordnungen von Untergruppen und welche als Ordnungen von Elementen auf?

AUFGABE 46.7. Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}_+$, $\mathrm{GL}_n(K)$ die allgemeine lineare Gruppe der invertierbaren Matrizen und

$$\mathrm{SL}_n(K) \subseteq \mathrm{GL}_n(K)$$

die Untergruppe der Matrizen mit Determinante 1. Zeige, dass die Linksnebenklasse (und auch die Rechtsnebenklasse) zu $M \in \mathrm{GL}_n(K)$ gleich der Menge aller Matrizen ist, deren Determinante mit $\det M$ übereinstimmt.

Zeige auf möglichst viele Weisen, dass $\mathrm{SL}_n(K)$ ein Normalteiler in $\mathrm{GL}_n(K)$ ist.

AUFGABE 46.8.*

Seien G und H Gruppen und sei

$$\varphi: G \longrightarrow H$$

ein Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass das Urbild $\varphi^{-1}(N)$ eines Normalteilers $N \subseteq H$ ein Normalteiler in G ist.

AUFGABE 46.9. Zeige, dass der Durchschnitt von Normalteilern N_i , $i \in I$, in einer Gruppe G ein Normalteiler ist.

AUFGABE 46.10. Seien G und H Gruppen und sei

$$\varphi: G \longrightarrow H$$

ein Gruppenhomomorphismus. Ist das Bild von φ ein Normalteiler in H ?

Die nächste Aufgabe verwendet das Konzept einer exakten Sequenz.

Seien G_0, \dots, G_n Gruppen und $f_i: G_{i-1} \rightarrow G_i$ Gruppenhomomorphismen derart, dass $\ker f_{i+1} = \mathrm{bild} f_i$ für $i = 1, \dots, n$ gilt. Dann heißt

$$G_0 \rightarrow G_1 \rightarrow \dots \rightarrow G_{n-1} \rightarrow G_n$$

eine *exakte Sequenz von Gruppen*.

AUFGABE 46.11. Sei

$$G_0 \rightarrow G_1 \rightarrow \dots \rightarrow G_{n-1} \rightarrow G_n$$

eine exakte Sequenz von Gruppen, wobei alle beteiligten Gruppen endlich seien und $G_0 = G_n$ die triviale Gruppe sei. Zeige, dass dann

$$\prod_{i=0}^n \#(G_i)^{(-1)^i} = 1$$

gilt.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 46.12. (2 Punkte)

Bestimme die Untergruppen von $\mathbb{Z}/(20)$.

AUFGABE 46.13. (3 Punkte)

Sei M eine endliche Menge und sei σ eine Permutation auf M und $x \in M$. Zeige, dass $\{n \in \mathbb{Z} \mid \sigma^n(x) = x\}$ eine Untergruppe von \mathbb{Z} ist. Den eindeutig bestimmten nichtnegativen Erzeuger dieser Untergruppe bezeichnen wir mit $\text{ord}_x \sigma$. Zeige die Beziehung

$$\text{ord}(\sigma) = \text{kgV} \{ \text{ord}_x \sigma \mid x \in M \} .$$

AUFGABE 46.14. (2 Punkte)

Seien G und H Gruppen und sei

$$\varphi: G \longrightarrow H$$

ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass das Bild $\varphi(N)$ eines Normalteilers $N \subseteq G$ ein Normalteiler in H ist.

AUFGABE 46.15. (2 Punkte)

Zeige, dass jede Untergruppe vom Index zwei in einer Gruppe G ein Normalteiler in G ist.

AUFGABE 46.16. (2 Punkte)

Sei G eine Gruppe und sei M eine Menge mit einer Verknüpfung. Es sei

$$\varphi: G \longrightarrow M$$

eine surjektive Abbildung mit $\varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h)$ für alle $g, h \in G$. Zeige, dass M eine Gruppe und φ ein Gruppenhomomorphismus ist.

AUFGABE 46.17. (5 Punkte)

Man gebe ein Beispiel von drei Untergruppen $F \subseteq G \subseteq H$ an derart, dass F ein Normalteiler in G und G ein Normalteiler in H , aber F kein Normalteiler in H ist.