Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2017/2018**

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Arbeitsblatt 30

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 30.1. Es sei E ein affiner Raum der Dimension d und es seien $F, G \subseteq E$ affine Unterräume der Dimension r bzw. s. Zeige, dass $F \cap G = \emptyset$ leer ist, oder eine Dimension von zumindest $r + s - n$ besitzt.

Übungsaufgaben

Aufgabe 30.2. Überprüfe, ob die Punkte

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^3$ affin-unabhängig sind.

Aufgabe 30.3.*

Es sei E ein affiner Raum über einem K-Vektorraum V und es sei

$$P_1, \ldots, P_n$$

eine endliche Familie von Punkten aus E. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) Die Punkte $P_1, \ldots, P_n$ sind affin unabhängig.
(2) Für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ ist die Vektorfamilie
$$\overrightarrow{P_iP_1}, \ldots, \overrightarrow{P_iP_{i-1}}, \overrightarrow{P_iP_{i+1}}, \ldots, \overrightarrow{P_iP_n}$$
linear unabhängig.
(3) Es gibt ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ derart, dass die Vektorfamilie
$$\overrightarrow{P_iP_1}, \ldots, \overrightarrow{P_iP_{i-1}}, \overrightarrow{P_iP_{i+1}}, \ldots, \overrightarrow{P_iP_n}$$
linear unabhängig ist.
(4) Die Punkte $P_1, \ldots, P_n$ bilden in dem von ihnen erzeugten affinen Unterraum eine affine Basis.

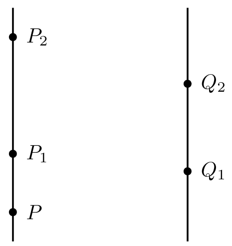
Aufgabe 30.4. Es sei E ein affiner Raum über einem K-Vektorraum V und es sei $P_1, \ldots, P_n$ eine endliche Familie von Punkten aus E. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) Die Punkte bilden eine affine Basis von E.
(2) Die Punkte bilden ein minimales affines Erzeugendensystem von E.
(3) Die Punkte sind maximal affin unabhängig.

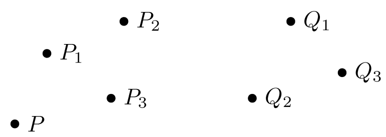
Aufgabe 30.5. Es sei E ein affiner Raum über einem K-Vektorraum V und es sei $P_1, \ldots, P_n$ eine endliche Familie von Punkten aus E. Zeige, dass diese Punkte genau dann eine affine Basis von E bilden, wenn sie sowohl affin unabhängig sind als auch ein affines Erzeugendensystem von E bilden.

Aufgabe 30.6. Bestimme die Polynome $P \in \mathbb{R}[X]$, die eine affin-lineare Abbildung $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definieren.

Aufgabe 30.7. Bestimme zeichnerisch den Bildpunkt von P unter der affinen Abbildung φ, die durch $\varphi(P_i) = Q_i$ festgelegt ist.



Aufgabe 30.8. Bestimme zeichnerisch den Bildpunkt von P unter der affinen Abbildung φ, die durch $\varphi(P_i) = Q_i$ festgelegt ist.



Aufgabe 30.9. Beschreibe die affine Ebene

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

als Urbild über 1 einer affinen Abbildung $\psi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

Aufgabe 30.10.*

Beschreibe die affine Gerade

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}$$

als Urbild über $(1, 0)$ einer affinen Abbildung $\psi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 30.11. Es seien E und F affine Räume über dem Körper K. Zeige, dass die Projektionen $E \times F \to E$ und $E \times F \to F$ affine Abbildungen sind.

Aufgabe 30.12. Es seien E und F affine Räume über dem Körper K. Zeige, dass die Räume genau dann isomorph sind, wenn ihre Dimension übereinstimmt.

Aufgabe 30.13. Es sei E ein affiner Raum und es sei $P_1, \ldots, P_n$ eine endliche Familie von Punkten aus E. Es sei

$$F = \left\{ (a_1, \ldots, a_n) \in K^n | \sum_{i=1}^{n} a_i = 1 \right\} \subset K^n .$$

Zeige, dass durch die Zuordnung

$$(a_1, \ldots, a_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} a_i P_i$$

eine wohldefinierte affin-lineare Abbildung von F nach E gegeben ist.

Aufgabe 30.14. Es sei $\varphi\colon E \to F$ eine affin-lineare Abbildung zwischen den affinen Räumen E und F über K. Zeige, dass zu jedem affinen Unterraum $H \subseteq E$ das Bild $\varphi(H)$ ein affiner Unterraum von F ist.

Aufgabe 30.15. Es sei $\psi\colon E \to E$ eine affine Abbildung auf einem affinen Raum E. Zeige, dass der lineare Anteil ψ_0 genau dann die Identität ist, wenn ψ eine Translation ist.

Aufgabe 30.16. Es sei E ein affiner Raum über dem K-Vektorraum V. Zeige, dass die Abbildung, die einer affinen Abbildung $\psi\colon E \to E$ ihren linearen Anteil ψ_0 zuordnet, folgende Eigenschaften erfüllt.

(1)
$$(\mathrm{Id}_E)_0 = \mathrm{Id}_V$$
(2)
$$(\psi \circ \varphi)_0 = \psi_0 \circ \varphi_0 .$$

Aufgabe 30.17. Es seien E und F affine Räume über dem Körper K, es sei $P_1, \ldots, P_n \in E$ eine affine Basis von E und seien $Q_1, \ldots, Q_n \in F$ Punkte. Es sei $\psi\colon E \to F$ die zugehörige affin-lineare Abbildung mit

$$\psi(P_i) = Q_i .$$

Zeige die folgenden Aussagen.

(1) ψ ist genau dann bijektiv, wenn $Q_1, \ldots, Q_n$ eine affine Basis von F ist.
(2) ψ ist genau dann injektiv, wenn $Q_1, \ldots, Q_n$ affin unabhängig ist.
(3) ψ ist genau dann surjektiv, wenn $Q_1, \ldots, Q_n$ ein affines Erzeugendensystem von F ist.

Aufgabe 30.18. Es sei $\varphi\colon E \to F$ eine affin-lineare Abbildung zwischen den affinen Räumen E und F über K. Zeige, dass die Urbilder $\varphi^{-1}(Q)$ zu allen $Q \in F$ zueinander parallel sind.

Aufgabe 30.19. Vergleiche verschiedene Konzepte für Vektorräume und affine Räume einschließlich ihrer Abbildungen.

Aufgabe 30.20.*

Es sei P ein Punkt in einem affinen Raum E über V. Zeige, dass die folgenden Ausdrücke baryzentrische Kombinationen für P sind (es sei $Q \in E$ und $v \in V$).

(1) P.
(2) $P + Q - Q$.
(3) $(P + v) - (Q + v) + Q$.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 30.21. (3 Punkte)

Es sei $\varphi \colon E \to F$ eine affin-lineare Abbildung zwischen den affinen Räumen E und F über K. Zeige, dass zu jedem affinen Unterraum $G \subseteq F$ das Urbild $\varphi^{-1}(G)$ ein affiner Unterraum von E ist.

Aufgabe 30.22. (3 Punkte)

Beschreibe die affine Ebene

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

als Urbild über 1 einer affinen Abbildung $\psi \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

Aufgabe 30.23. (2 Punkte)

Es sei E ein affiner Raum der Dimension n und $\psi \colon E \to E$ eine affine Abbildung. Es seien $P_1, \ldots, P_{n+1} \in E$ affin unabhängige Punkte, die zugleich Fixpunkte von ψ seien. Zeige, dass ψ die Identität ist.

Aufgabe 30.24. (6 (3+2+1) Punkte)

Es sei $\varphi \colon E \to F$ eine affin-lineare Abbildung zwischen den affinen Räumen E und F über K.

a) Zeige, dass der Graph G von φ ein affiner Unterraum des Produktraumes $E \times F$ ist.

b) Zeige, dass die Abbildung

$$\psi \colon E \longrightarrow G,\ P \longmapsto (P, \varphi(P)),$$

ein Isomorphismus von affinen Räumen ist.

c) Zeige

$$\varphi = p_2 \circ \psi,$$

wobei p_2 die Projektion auf F bezeichne.

Abbildungsverzeichnis

Quelle = PunktLinie2.png , Autor = Benutzer Mgausmann auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0 2
Quelle = Siebenpunkte.png , Autor = Benutzer Mgausmann auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0 2