Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2018**

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Vorlesung 41

Eine Bilinearform oder eine Sesquilinearform auf einem n-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum V wird bezüglich einer Basis durch ihre Gramsche Matrix beschrieben. Ebenso wird eine lineare Abbildung von V nach V durch eine Matrix beschrieben. Insgesamt liegt also eine Korrespondenz (bei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

$$\operatorname{Bilin}(V) \longleftrightarrow \operatorname{Mat}_n(\mathbb{R}) \longleftrightarrow \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(V)$$

vor. Auf der linken Seite sind Eigenschaften wie symmetrisch, hermitesch, positiv definit relevant, auf der rechten Seite Eigenwerte, Eigenräume, charakteristisches Polynom. Wie hängen diese zwei Begriffswelten zusammen? Mit solchen Fragen werden wir uns in den nächsten Vorlesungen beschäftigen. Dabei werden wir die Korrespondenz zwischen der linken und der rechten Seite nicht über die Fixierung einer Basis, sondern über die Fixierung eines Skalarproduktes erreichen.

Adjungierter Endomorphismus

Definition 41.1. Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle -,- \rangle$ und

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

ein Endomorphismus. Man nennt einen Endomorphismus

$$\psi\colon V \longrightarrow V$$

adjungiert zu φ, wenn

$$\langle \varphi(v), w \rangle = \langle v, \psi(w) \rangle$$

für alle $v, w \in V$ gilt.

Beispiel 41.2. Zu einer Isometrie

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

auf einem euklidischen Vektorraum ist die Umkehrabbildung φ^{-1} der adjungierte Endomorphismus. Es ist ja in diesem Fall

$$\langle \varphi(v), w \rangle = \left\langle \varphi^{-1}(\varphi(v)), \varphi^{-1}(w) \right\rangle = \left\langle v, \varphi^{-1}(w) \right\rangle .$$

Beispiel 41.3. Zu einer Streckung $V \to V$ auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V mit Skalarprodukt mit dem Streckungsfaktor $s \in \mathbb{K}$ ist die Streckung mit dem Streckungsfaktor $\overline{s}$ die adjungierte Abbildung. Es ist ja

$$\langle sv, w \rangle = s \langle v, w \rangle = \overline{\overline{s}} \langle v, w \rangle = \langle v, \overline{s} w \rangle .$$

Beispiel 41.4. Die lineare Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

besitze eine Orthonormalbasis (bezüglich des Standardskalarproduktes) $u_1, \ldots, u_n$ aus Eigenvektoren, d.h. die beschreibende Matrix besitzt die Diagonalgestalt

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Dann wird der adjungierte Endomorphismus durch die komplex-konjugierte Matrix

$$\psi = \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \overline{\lambda_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \overline{\lambda_{n-1}} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \overline{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

beschrieben. Es ist ja einerseits

$$\langle \varphi(u_i), u_j \rangle = \langle \lambda_i u_i, u_j \rangle = \lambda_i \langle u_i, u_j \rangle$$

und andererseits

$$\langle u_i, \psi(u_j) \rangle = \left\langle u_i, \overline{\lambda_j} u_j \right\rangle = \lambda_j \langle u_i, u_j \rangle .$$

Bei $i \neq j$ ist dies beides gleich 0 und bei $i = j$ steht beidseitig λ_i.

Lemma 41.5. *Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ und sei*

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

ein Endomorphismus. Dann existiert der adjungierte Endomorphismus zu φ und ist eindeutig bestimmt.

Beweis. Es sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

gegeben und $w \in V$ fixiert. Dann ist die Abbildung

$$V \longrightarrow \mathbb{K},\, v \longmapsto \langle \varphi(v), w \rangle ,$$

eine Linearform auf V. Daher gibt es (nach Korollar 38.6 im reellen Fall, für den komplexen Fall siehe Aufgabe 41.14) einen durch φ und w eindeutig bestimmten Rechtsgradienten $r = \hat{\varphi}(w)$ aus V mit

$$\langle v, \hat{\varphi}(w) \rangle = \langle \varphi(v), w \rangle .$$

Wir müssen zeigen, dass die Zuordnung

$$w \longmapsto \hat{\varphi}(w)$$

linear ist. Es ist

$$\begin{aligned}\langle v, \hat{\varphi}(w_1 + w_2)\rangle &= \langle \varphi(v), w_1 + w_2\rangle \\ &= \langle \varphi(v), w_1\rangle + \langle \varphi(v), w_2\rangle \\ &= \langle v, \hat{\varphi}(w_1)\rangle + \langle v, \hat{\varphi}(w_2)\rangle \\ &= \langle v, \hat{\varphi}(w_1) + \hat{\varphi}(w_2)\rangle \,.\end{aligned}$$

Da dies für alle $v \in V$ gilt, muss

$$\hat{\varphi}(w_1 + w_2) = \hat{\varphi}(w_1) + \hat{\varphi}(w_2)$$

sein. Ferner ist

$$\begin{aligned}\langle v, \hat{\varphi}(sw)\rangle &= \langle \varphi(v), sw\rangle \\ &= \overline{s}\,\langle \varphi(v), w\rangle \\ &= \overline{s}\,\langle v, \hat{\varphi}(w)\rangle \\ &= \langle v, s\hat{\varphi}(w)\rangle \,.\end{aligned}$$

Da dies für alle $v \in V$ gilt, ist

$$\hat{\varphi}(sw) = s\hat{\varphi}(w).$$

□

Wie im Beweis dieses Satzes wird der adjungierte Endomorphismus mit $\hat{\varphi}$ bezeichnet. Wenn man die Zuordnung, die einem Vektor $w \in V$ die Linearform $v \mapsto \langle v, w\rangle$ zuordnet, mit Θ bezeichnet, so ist

$$\hat{\varphi} = \Theta^{-1} \circ \varphi^* \circ \Theta,$$

wobei

$$\varphi^* \colon V^* \longrightarrow V^*$$

die duale Abbildung bezeichnet.

Lemma 41.6. *Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$. Es sei*

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

ein Endomorphismus, der bezüglich der Orthonormalbasis $u_1, \ldots, u_n$ durch die Matrix M beschrieben werde. Dann wird der adjungierte Endomorphismus $\hat{\varphi}$ bezüglich dieser Basis durch die Matrix $\overline{M}^{tr}$ beschrieben.

Beweis. Es sei $u_1, \ldots, u_n$ die Orthonormalbasis und es seien

$$M = (a_{ij})_{ij}$$

bzw.

$$N = (b_{ij})_{ij}$$

die Matrizen von φ bzw. $\hat{\varphi}$ bezüglich dieser Basis. Dann ist insbesondere

$$\varphi(u_i) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} u_k$$

und

$$\hat{\varphi}(u_i) = \sum_{k=1}^{n} b_{ki} u_k.$$

Aufgrund der Adjungiertheit gilt die Beziehung

$$\begin{aligned}
a_{ji} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ki} \langle u_k, u_j \rangle \\
&= \left\langle \sum_{k=1}^{n} a_{ki} u_k, u_j \right\rangle \\
&= \langle \varphi(u_i), u_j \rangle \\
&= \langle u_i, \hat{\varphi}(u_j) \rangle \\
&= \left\langle u_i, \sum_{k=1}^{n} b_{kj} u_k \right\rangle \\
&= \langle u_i, b_{ij} u_i \rangle \\
&= \overline{b_{ij}}.
\end{aligned}$$

D.h.

$$\overline{N}^{\text{tr}} = M$$

und umgekehrt. $\square$

Lemma 41.7. *Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$. Dann erfüllt der adjungierte Endomorphismus folgende Eigenschaften (dabei seien $\varphi . \psi$ Endomorphismen).*

(1)
$$(\varphi + \psi)\hat{} = \hat{\varphi} + \hat{\psi}.$$

(2)
$$(s\varphi)\hat{} = \overline{s}\hat{\varphi}.$$

(3)
$$(\hat{\varphi})\hat{} = \varphi.$$

(4)
$$(\varphi \circ \psi)\hat{} = \hat{\psi} \circ \hat{\varphi}.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 41.5. $\square$

Selbstadjungierte Endomorphismen

Definition 41.8. Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt und sei

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

ein Endomorphismus. Dann heißt φ *selbstadjungiert*, wenn

$$\langle \varphi(u), v \rangle = \langle u, \varphi(v) \rangle$$

für alle $u, v \in V$ gilt.

Die Selbstadjungiertheit bedeutet also einfach

$$\varphi = \hat{\varphi}.$$

Eine Streckung ist genau dann selbstadjungiert, wenn der Streckungsfaktor reell ist.

Satz 41.9. *Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ und es sei*

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

ein Endomorphismus. Dann ist φ genau dann selbstadjungiert, wenn er bezüglich einer (jeden) Orthonormalbasis von V durch eine hermitesche Matrix beschrieben wird.

Beweis. Wenn φ selbstadjungiert ist, so folgt die Aussage aus Lemma 41.6. Wenn umgekehrt φ bezüglich einer Orthonormalbasis durch eine hermitesche Matrix M beschrieben wird, so wird, wiederum nach Lemma 41.6, der adjungierte Endomorphismus $\hat{\varphi}$ bezüglich der Basis durch

$$\overline{M}^{\text{tr}} = M$$

beschrieben, stimmt also mit φ überein. □

Lemma 41.10. *Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt und sei*

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

ein selbstadjungierter Endomorphismus Dann gelten folgende Aussagen.

1. *Zu einem φ-invarianten Untervektorraum $U \subseteq V$ ist auch das orthogonale Komplement $U^{\perp}$ φ-invariant.*
2. *Alle Eigenwerte sind reell.*
3. *Die Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.*
4. *Sei V endlichdimensional. Dann zerfällt das charakteristische Polynom zu φ in Linearfaktoren.*

Beweis. (1). Sei $v \in U^{\perp}$ und $u \in U$. Wegen der Invarianz von U ist auch $\varphi(u) \in U$. Daher ist

$$\langle \varphi(v), u \rangle = \langle v, \varphi(u) \rangle = 0.$$

Also steht $\varphi(v)$ senkrecht auf U und gehört damit zu $U^{\perp}$, was dessen Invarianz bedeutet.

(2). Dies ist nur bei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ relevant. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert und $v \in V$ ein Eigenvektor, also

$$\varphi(v) = \lambda v.$$

Wir können diesen Eigenvektor als normiert annehmen. Dann ist

$$\lambda = \langle \lambda v, v \rangle = \langle \varphi(v), v \rangle = \langle v, \varphi(v) \rangle = \langle v, \lambda v \rangle = \overline{\lambda},$$

also ist λ reell.

(3). Sei v_1 ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_1 und v_2 ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 \neq \lambda_1$. Dann ist

$$\begin{aligned} \lambda_1 \langle v_1, v_2 \rangle &= \langle \lambda_1 v_1, v_2 \rangle \\ &= \langle \varphi(v_1), v_2 \rangle \\ &= \langle v_1, \varphi(v_2) \rangle \\ &= \langle v_1, \lambda_2(v_2) \rangle = \overline{\lambda_2} \langle v_1, v_2 \rangle = \lambda_2 \langle v_1, v_2 \rangle . \end{aligned}$$

Dies ist nur bei

$$\langle v_1, v_2 \rangle = 0$$

möglich.

(4). Wir können annehmen, dass $V = \mathbb{K}^n$ mit dem Standardskalarprodukt vorliegt. Bei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist die Aussage bekannt, sei also $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Wir können die Abbildung auch als Abbildung von $\mathbb{C}^n$ nach $\mathbb{C}^n$ auffassen, wobei die Selbstadjungiertheit erhalten bleibt und wobei sich das charakteristische Polynom nicht ändert. Es zerfällt daher in Linearfaktoren, wobei die Nullstellen nach (2) reell sind. □

Die folgende Aussage heißt *Spektralsatz für selbstadjungierte Endomorphismen.*

SATZ 41.11. *Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt und sei*

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

ein selbstadjungierter Endomorphismus. Dann gibt es eine Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren zu φ.

Beweis. Wir führen Induktion über die Dimension von V. Nach Lemma 41.10 (4) besitzt φ einen Eigenvektor v, den wir als normiert voraussetzen können, und nach Lemma 41.10 (1) ist das orthogonale Komplement

$$W = \mathbb{K}v^{\perp}$$

dazu ebenfalls invariant. Daher liegt eine direkte Summenzerlegung

$$V = \mathbb{K}v \oplus W$$

vor. Die Einschränkung von φ auf W ist ebenfalls selbstadjungiert und daher liefert die Induktionsvoraussetzung die Behauptung. □

Insbesondere ist ein selbstadjungierter Endomorphismus diagonalisierbar.

Selbstadjungierte Endomorphismen und hermitesche Formen

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt. Ein Endomorphismus

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

induziert dann mit Hilfe des Skalarproduktes eine Form Ψ_{φ}, die durch

$$\Psi_{\varphi}(v, w) = \langle \varphi(v), w \rangle$$

definiert ist. Dafür gelten die folgenden Eigenschaften.

LEMMA 41.12. *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Durch die Zuordnung*

$$\mathrm{End}\,(V) \longrightarrow \mathrm{Sesq}\,(V)\,,\ \varphi \longmapsto \Psi_\varphi,$$

wird einem Endomorphismus eine Sesquilinearform zugeordnet.

(2) *Diese Zuordnung ist linear und bei endlichdimensionalem V bijektiv.*

(3) *Sei V endlichdimensional. Der Endomorphismus ist genau dann bijektiv, wenn Ψ_φ nicht ausgeartet ist.*

(4) *Sei V endlichdimensional. Der Endomorphismus ist genau dann selbstadjungiert, wenn Ψ_φ hermitesch ist.*

Beweis. (1). Es ist

$$\begin{aligned} \psi_\varphi(av_1 + bv_2, w) &= \langle \varphi(av_1 + bv_2), w \rangle \\ &= \langle a\varphi(v_1) + b\varphi(v_2), w \rangle \\ &= a \langle \varphi(v_1), w \rangle + b \langle \varphi(v_2), w \rangle \\ &= a\psi_\varphi(v_1, w) + b\psi_\varphi(v_2, w) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \psi_\varphi(v, aw_1 + bw_2) &= \langle \varphi(v), aw_1 + bw_2 \rangle \\ &= \overline{a} \langle \varphi(v), w_1 \rangle + \overline{b} \langle \varphi(v), w_2 \rangle \\ &= \overline{a}\psi_\varphi(v, w_1) + \overline{b}\psi_\varphi(v, w_2), \end{aligned}$$

also ist die Zuordnung in der ersten Komponente linear und in der zweiten Komponente semilinear. Daher ist Ψ_φ eine Sesquilinearform.

(2). Die Linearität ergibt sich aus der Linearität des Skalarproduktes in der ersten Komponente. Im endlichdimensionalen Fall stehen links und rechts Vektorräume der Dimension $(\dim(V))^2$, es genügt also, die Injektivität zu zeigen. Bei $\Psi_\varphi = 0$ ist $\langle \varphi(v), w \rangle = 0$ für alle v, w, so dass insbesondere $\langle \varphi(v), \varphi(v) \rangle = 0$ und somit $\varphi(v) = 0$ gilt.

(3). Wenn φ nicht bijektiv ist, so sei $v \in \mathrm{kern}\,\varphi$, $v \neq 0$. Dann ist $\Psi_\varphi(v, -)$ die Nullabbildung in der zweiten Komponente und die Form ist ausgeartet. Sei umgekehrt $\Psi_\varphi(-, -)$ ausgeartet. Dann gibt es einen Vektor $v \in V$, $v \neq 0$, derart, dass $\langle \varphi(v), - \rangle$ die Nullabbildung ist. Da ein Skalarprodukt nicht ausgeartet ist, folgt $\varphi(v) = 0$ und damit ist φ nicht bijektiv.

(4). Im selbstadjungierten Fall ist

$$\Psi_\varphi(v, w) = \langle \varphi(v), w \rangle = \langle v, \varphi(w) \rangle = \overline{\langle \varphi(w), v \rangle} = \overline{\Psi_\varphi(w, v)}.$$

Die Umkehrung folgt aus

$$\langle \varphi(v), w \rangle = \Psi_\varphi(v, w) = \overline{\Psi_\varphi(w, v)} = \overline{\langle \varphi(w), v \rangle} = \langle v, \varphi(w) \rangle\,.$$

$\square$