始

Henri Poincaré
Membre de l'Institut

SCIENCE ET MÉTHODE

アンリ・ポアンカレ著
山本修譯

# 科學と方法

フラマリオン社
自然科學叢書
第四輯

叢文閣版

## 本叢書刊行の趣旨

人間の思想はいろ〳〵な形態に於て或は華やかに或は鋭く或は虔ましくあらはれて、私達の生活を永遠に色づけ得るものでありますけれども、しかもいづれかの究極に於てそれは健實なる理性に接續し若くは之れに根づかなければならないものです。この意味に於て理性の一つの產物たる科學思想はすべての人間の敎養に於て缺くべきものではないと思ひます。

書肆叢文閣は偶々昨年震災後に際し、一つの優秀なる科學叢書の刊行を企圖し、佛國フラマリオン社の出版に係る自然科學叢書の譯述に着手し、之を夫々の專門學者の手に委ね、尙ほ下名等にその監修を依賴されました。同叢書は槪ね佛國第一流の學者の著述せる處であつて、既に世界各國に於て普ねく頒讀せられ、又そのうちの數書は既に英獨諸國に於ても飜譯せられてゐるものです。我國の學界に於て從來佛國の學術書が比較的に讀まれることの尠なかつたのは、その質の良否を選擇せる結果ではなくて、單に佛語に習熟するもの丶僅少であるがために外ならなかつたのです。

この事情のもとに特に私達は、既に名聲の高いこの叢書が我が國語に移譯されることに對して、滿腔の欣びを感じないわけにゆきません。

同叢書譯述の擧を耳にして、現佛國大使クローデル氏は佛國學術の我國に擴まることを快とし、欣んで原著監修者ル・ボン氏及び原出版書肆との間に十分に斡旋の勞をとられました。是れは獨り一書肆の便宜ばかりではなく、同叢書の價値の明らかなる限り、亦我が國一般讀書界の感謝に値ひする處でなければならないと思ひます。

責任ある監修の困難さを思ひながら、私達はなほ之になし得る限りを努めたいと期するものです。

一九二四年十一月

石原純
小泉丹
福見尙文

# 飜譯監修者序

本書の著者アンリ・ボアンカレの著述「晩近の思想」が、嚢に本叢書第二輯として岡谷辰治氏の手によつて譯出せられた後、更にこゝに相次いでその姉妹篇の一つとも云ふべき名著が、我が邦語に移されて私達のまへに置かれることを私は非常な喜びとするものです。

特に私は山本修氏のこの譯文が甚だ推稱するに値ひするものであることを信じ、これを多くの讀者に薦めることを躊躇しないでせう。同氏はさきに理論物理學を修學せられた後、引き續いて哲學の研究に志してゐられる人です。ボアンカレの如き、自然科學の諸分科並びに數學に精通して、しかも之等に關して最も深奧な哲學的思索を施し、依つて人間精神の眞の價値をそこに見出さうとしたところの一人の大思想家の著述を、出來るだけの理解のもとに飜譯しようとするがために、同氏はこの點に於てたしかに私たちの周圍に求め得るところの最も適當な一人であると私は思ひます。その譯文の簡潔であり讀み易いものである上に、原文の意味とその匂ひとをも能く傳へてゐることを私は感ぜずにはゐられません。

ボアンカレの事績については、上記の岡谷氏の譯書に附せられた詳細な傳記に盡されてあります。本書の内容も亦同書に載せられた諸篇の全體と極めて密接な關聯をもつてゐます。從つて本書を讀まれる人達は同時に「晩近の思想」をも手にしなければなりますまい。

私たちは先づ本書を繙いて、科學がいかに研究せらるべきものであるかを悟ることができるでせう。科學について私達の周圍の社會は餘りにも無理解です。科學に從事する人たちさへも專心に自分の目前に並べられた實驗器械と數式とを熟視するに過ぎません。丁度眼蔽ひをされた馬車馬が自分の路だけしか見出し得ないやうに。そんな有樣で、若しも適當な御者がゐなかつたなら、科學は一體どうなるのでせう。ポアンカレは恐らくその御者の本當の役目を本書の讀者に示さうとするのです。

彼れはかやうにして、數學上の發見がどんな心のなかに生れるか、嘗て原始的に數學上の觀念がいかにして發生したか、數學を學ぶものにこれをいかに敎へたならよいか、偶然なるものの眞の意味はどこにあるかと云ふやうな極めて根本的な重大な問題について私達を親切に指導してくれました。更に數學と論理との關聯についての彼れの最も深く透徹した觀察と思索とは、私たちに數理哲學の本質を最も周密に說き明かします。

理論物理學上の諸問題については、丁度今世紀の始めに於て電子の力學があらはれ、光學現象によつて運動の相對性が論ぜられ、そこに一大革新が叫ばれた時代に書かれたところのものであつて、當時このフランスの一碩學が之等の議論に對しどんな批判的意見をもつてゐたかを知ることは、今日の私達にとつて極めて興味あるところのものです。そこにはまだアインシュタインの名は記述されてゐません。ポアンカレは彼れが旣に數學敎育に關し、又數理哲學に對して示した甚だ穩健な立場に彼れ自身を置いて、十分な根據のない間に妄りに新奇に走ることを戒めると同時に、しかも之等の新らしい理論に對して完全な理解を盡し、あらゆる可能性を吟味しようとしてゐます。私たちは彼れのこの態度に於て眞正の科學者的精神を認めないで、果してどこにそれを求むべきでありませう。





次いで私達は、天文學上の考察に於て、彼れの廣い蘊蓄をもつてせられた研究の一端を覗ふことが出來、又フランスに於ける測地學の發達を叙するに當つて、その溢れ出るやうな親しみを含んだ彼れの言葉に、限りなく懷かしい彼れの人間的な人格を汲み取らずにはゐられません。

ポアンカレが逝いて旣に十三年を經ました。優れた研究業績を積んでゆく科學者は必ずしも尠なくはないでせうが、このフランスの稀な自然哲學者の跡を踏んで、これに並ぶものはどこにあるでせうか。

一九二五年十月二十日

石原純

# 飜譯者序

本書はアンリ・ポアンカレ Henri Poincaré 著 Science et Méthode を譯したものです。原著は一九〇八年初めて出版されました。この譯書の底本としたのは一九二三年版です。

獨譯 F. u. L. Lindemann.——Wissenschaft und Methode

英譯 Halsted.——Science and Method. これは Foundation of Science の中に、「科學と假說」及び「科學の價値」と共に收めてあります。

其の他の國語にも譯されてゐる筈ですが、私は知りません。

外國地名人名の中、既に我が國によく知られてゐるものはなるべくそれに從ひ、他はその屬する國語の發音に從ひたいと思ひました。しかし尙念の爲め原綴をも添へておきました。

索引は、この書の性質上それ程必要ではないと考へて、作りませんでした。

最初からの願ひは、意味の間違はない樣に、そして出來るだけやさしく譯したいといふことでした。しかも力の足りない爲めに、つい難かしい言葉や句やを使つてしまつたことを、譯者として殘念にも耻かしくも思ひます。誤譯は勿論、日本文として平明を缺く樣な箇所については、先進の方々から御氣付きの點を御注意下さる樣にお願ひします。

本書を譯するについては、初めから石原博士に大變御厄介になりました。飜譯についての御注意もうけ、譯稿に筆を入れても頂きました。私のたど〳〵しい譯が、とにもかくにも讀まれる樣になつたとすれば、私は、何人よりもまづ先生に感謝しなければなりません。茲に厚く御禮を申上げます。

どんなに拙ないものにもせよ自分の初めての譯書が世に出るといふことは、私にとつても嬉しいことです。しかし私は、私以上にこれを喜んでくれるものとして、今は遠く離れて住む一人の友を忘れることが出來ません。曾て彼の勵ましに依つて始めたこの譯を、私は今、彼の記憶に生きつゝ、彼の思ひ出の爲めに仕上げました。彼なくしては私はこの仕事を終へることは出來なかつたでせう。この意味で此の書は彼と私との共譯ともいふべきものです。

一九二五年十月二十四日

山本修



# 目次

# 緒言

私は玆に科學方法論の問題に多かれ少かれ直接關係ある樣々の研究を集めた。科學の方法は觀察することと實驗することとにある。もし學者が限り無い時間を自由に使用し得るものであるなら、彼に對して唯かう云へばよい。「見なさい、よく見なさい」と。しかし學者もすべてを、殊に十分に見るだけの時間がなく、或は下手に見る位ならば見ない方が寧ろよいのであるから、彼は必ず選擇しなければならない。それ故第一の問題は、この選擇を如何になすべきかを知ることである。この問題は、物理學者と共に歷史家に對しても現はれる。それは又數學者に對しても同樣に現はれるが、かれ等を導くべき諸原理相互の間には類似がないでもない。科學者は本能的にそれらの原理に從ふのであり、又私たちはそれを反省することに依つて、數學の將來を豫想することが出來る。

このことは學者の仕事がどうして出來るのであるかを觀察すれば一層よく理解することが出來るであらうが、先づ第一に發見特に數學的發見を生み出す心理的の機構を知らなければならない。數學者の仕事の過程を觀察するといふことは心理學者にとつて殊に敎ふるところの多いものである。

實驗に依るすべての科學に於ては、私たちの感覺と器械との不完全から生ずる誤差を考へなければならない。幸ひにして、ある狀態に於てはこれらの誤差は一部分互にうち消し合ひ平均に於ては消え失せると考へることが出來る。この樣に打ち消し合ふといふことは偶然に依つて生ずるのである。しかし偶然とは何であらうか。この

觀念は說明すること、否、定義することさへも難しい。しかも、上に觀察の誤差について述べたことから考へれば、學者はこれを捨てて置くことは出來ない。それ故、これ程必要な、而もこれ程捕捉し難いこの觀念に出來るだけ正確な定義を與へることが必要である。

これらの事は一般的なものであつて、大體に於てすべての科學にあてはまる。たとへば數學的發見の道筋は一般に發見といはれるものの道筋と殆どちがひがない。私は次に特にある特殊科學——最初は純粹數學——に關する問題に入る。

その爲めにあてた章に於ては、私は止むなく幾分抽象的な問題を取扱はなければならない。私はまづ空間の觀念について述べなければならぬ。空間が相對的のものであることは誰でも知つてゐる、或は誰でも知つてゐるといふ。しかも、どんなに多くの人々が、それを絕對的と信じてゐるかの樣な考へ方をしてゐることであらう。しかし彼等がどういふ矛盾に陷るかを知る爲めには、少しの反省をして見ればよい。

敎育の問題は亦重要なものである。第一にはそれ自身のために。第二には、少年の頭腦に新らしい觀念を吹き込む最良の方法を考へるといふことは、同時に、如何にして私たちの父祖がこの考を得たかを、隨つて、その眞の起源を、卽ちこの考の眞の本性を尋ねることだからである。學者たちを滿足させる定義を子供たちが多くの場合に少しも理解しないのは何故であるか。又彼等には別な定義を敎へなければならないのは何故であるか。これは私がその次の章で取扱ふ問題であつて、その解決は科學の論理を硏究する哲學者にも有益な反省を暗示するだらうと信ずる。

一方多くの幾何學者は數學を形式論理の規則に還元することが出來ると信じてゐる。此の方向には非常な努力が試みられ、それに達する爲めには彼等は、例へば私たちの觀念發生の歷史的順序が逆轉する事などは氣にかけず、無限に依つて有限を說明しようとした。これは人目を欺く幻影に依つてであることを、私はこの問題を公平に考へる人々に示すことが出來たと思ふ。讀者はこの問題の重要なことを理解して、これに費した頁が無味乾燥なのを許して頂きたい。

その後の力學と天文學とに關する章はこれよりも讀み易いであらう。

力學は今や大革命を受けようとしてゐるかに見える。最も確實に證明せられたと思はれた考も大膽な革新者たちに攻擊された。唯革新者だからといふだけで彼等を今から正しいとするのは恐らく早急すぎるであらう。しかし彼等の說を述べるのは興味あることであり、又それが私の技にしようとした事である。私は出來るだけ歷史的の順序に從つた。それは若し讀者がそれがどうして生れたかを知らないならば、この新らしい考はあまりに不思議なものと思はれたであらうからである。

天文學は私たちに雄大な眺めを與へ巨大な問題を呈出する。私たちはそれに直接實驗を應用しようとは考へることも出來ない。私たちの實驗室はあまりに小さいからである。しかもそれにも係はらず、この實驗室で達することの出來る現象との類似は天文學者を指導することが出來る。例へば銀河は太陽の集合したものであつて、それ等の運動は一見氣紛れのものとも見える。しかしこの集合は、氣體運動論に依つてその性質を知ることの出來る氣體分子の集合に比較されることは出來ないだらうか。この樣にして、物理學者の方法は間接に天文學者を助

けることが出來るのである。

最後に私はフランスの測地學の發達の歷史を少し記さうと思つた。私は、測地學者が、地球の形について私たちがもつてゐる幾らかの知識を得るために、如何に苦しい努力を拂ひ、又往々如何なる危險を犯したかを述べた。これは果して方法の問題であらうか。勿論さうである。實にこの歷史は、眞劍な科學的の仕事は豫め如何なる用意をしなければならないか、又一つの新らしい小數字を得る爲めにも如何程の時間と艱難とが費されてゐるかを敎へるものである。

# 第壹篇　學者と科學

## 第壹章　事實の選擇

トルストイ Tolstoi は或る場所で、何故彼にとつて「科學のための科學」La Science pour la Science といふ考が不合理なものであるかを說明してゐる。すべての事實を知り盡すといふ事は、事實が實際上無限に多數であるから吾々には出來ない。選擇が必要である。そこで、この選擇は單なる氣紛れによつて差支へないものであらうか。この選擇を導くに、その有用性を以つて、吾々の實際的殊に道德的の必要さを以つて、する方が更によくはなからうか。吾々にとつて、この地球上に棲息するテントウ蟲の數をかぞへるより有用な仕事は他にないであらうか。

彼にとつては、明かに、有用性といふ言葉は、實務家が考へ、又それに倣つて現代の多數人の思つてゐる樣な意味をもつてはゐない。彼は工業の應用とか、電氣學、自働車製造などの驚異すべき發達を望んでゐるのではなく、それ等を寧ろ道德進步の障害と見做してゐる。彼にとつて、有用とは唯人間を善くなし得ることのみである。

私としてはこれ等孰れの理想にも滿足することは出來ない。私は、貪慾で一部分的な金權政治をも望まなけれ

ば又、左の頬を出す事のみに腐心して、極端を戒めるから病死する事はなからうが、きつと退屈で死にさうな好奇心のない善人ばかりの、從つて道德的ではあるが平凡な民衆政治をも望まない。しかしこれは趣味の問題であり、私の論じようとするのは此の點についてではない。

問題は尙依然として殘つてゐる。再びこれに注意をかへさう。若し選擇が氣紛れか直接の有用性かに依つて定められるより他ないものとすれば、科學のための科學、隨つて科學といふものも存在することは出來ない。が、これは眞であらうか。選擇の必要なのは爭ひ得ない事である。吾々の活動がどんなであらうとも、事實の方は更に速かに進み、これに追ひつく事は出來難い。學者が一の事實を發見する間に、彼の身體の一立方粍の中にも幾百萬の事實が生じてゐる。自然を科學の中に包容しようといふのは、恰も全體を部分の中に含ませようとすると一般である。

しかし、學者は事實に系統のあることを信じ、其の中に於て正當な選擇をなし得る事を信じてゐる。この事は正しい。何故なら、若しさうでなければ、科學は存在し得ない筈だのに、而も科學は存在してゐるからである。少し眼をあけて見れば明かに知り得る樣に、多數の實際家を富裕にしたあの工業の勝利も、若しこれ等實際家のみが生存してゐたのならば、そして若し、效用の事など夢想だもせず貧困の中に逝いてしまひながら、而も自己の氣紛れ以外に或る指導を持つてゐた寡欲淸廉な「馬鹿者」がなかつたならば、決してこの世の光を見る事は出來なかつたであらう。

マッハ Mach も云つた樣に、この「馬鹿者」は後繼者の爲めに思考の勞を省いたのである。直接利用の見地のみから働く人々は、其後に何物も殘すことなく、新らしい必要に面しては、再びすべてをやり直さなければならなかつたであらう。大多數の人々は思索を好まない、そしてこれは恐らく惡いことではなからう。何故なら、道理が純粹な知性を導くよりも、少くとも直接で常に變らぬ目的を追ふ場合には、本能が更に一層よく其人々を導くであらうから。しかし本能は一の習慣性である。若し思考がそれを培ふ事がなかつたならば、人類に於ても亦、蜂や蟻に於ける以上には進歩しなかつたであらう。この故に吾々は思索を好まぬ人々に代つて思索しなければならず、又この樣な人々が多數であるから、吾々の思索はすべてあらゆる場合に有用でなければならない。そしてこれが、法則が普遍的であればある程貴い所以である。

この事は吾々が如何に選擇すべきであるかを示してゐる。最も興味ある事實とは、幾度も役立つ事實、再現の機會のある事實である。幸ひにして吾々は其樣な事實の存在する世界に生れた。今假りに、化學的元素が六十でなく六百億もあるとして、其中の或るものは普通に或るものは稀にといふ樣な事なく、一樣に分布してゐるものと考へて見る。すると新たに小石を一つ拾ふ毎に、それが何か未知の物質から出來てゐるかも知れないといふ確率は非常に大であらう。他の石についての智識もそれには何の役にも立たない。新らしい對象の前に立つ毎に、吾々は生れた許りの赤ん坊と選ぶ所がないであらう。赤ん坊の如く吾々も亦自己の氣紛れか必要かのまゝに從ふより他はない。其の樣な世界に於ては科學は存在しまいし、恐らくは、思索することも、生活することさへも——進化が自己保存の本能を發達させる事も出來なかつたらうから——不可能となるであらう。有難いことには其樣な事はない。しかし、あまり慣れすぎたすべての幸運と同じく、この幸運もその眞價を認められずにゐる。若

し個體のみで種といふものがなかつたなら、若し遺傳が父に似た子を作る事がなかつたなら、生物學者も同様に當惑するに相違ない。

それでは再現の機會のある事實とは如何なるものであらうか。先づ第一に單純な事實である。複雜な事實に於ては、幾多の事實が偶然に依つて結合して居り、又其様な結合が再び現はれるといふのは、尙一層ありさうもない偶然に依る事は明かである。しかし單純な事實といふものが果して存在するであらうか。存在するとすれば、如何にして知られるだらうか。吾々の單純だと信ずる事實が驚く可き複雜さを藏して居ないとは誰が保證し得るだらうか。吾々の言ひ得るのは唯、粗雜な吾々の眼が異つた要素を見つけ得る様な事實をとるよりは、見かけだけでも單純なものを選ばなければならないといふ事のみである。そこでこの單純は、まことであるのか、又は要素が區別出來ない程緻密に混つてゐるのか、どちらかである。第一の場合には、この單純な事實は、或は全然純粹に、或は複雜な全體の要素として再現する機會があり、第二の場合にも同様に、この緻密な混和物は異質的な集合物よりは出現の機會が多い譯である。偶然は混合する事は出來るが分別する事は出來ない。その中に何か區別あり秩序ある組織を多數の要素から作る爲めには、殊更にさうしなくてはならない。故に何か一様でない集合が出現する機會は甚だ少く、之に反して一見同質と見える混合が屢々現はれる機會は多い。それ故單純に見える事實は、眞に單純でないにしても、偶然に依つて遙かにたやすく再現せられる。

この事が學者の本能的に採用する方法を正當たらしめるものであるが、恐らく尙一層これを正當たらしめるのは、度々現はれる事實が、まさしく、吾々に馴染深いといふことの爲に、單純なものと見えるといふ事である。

然し單純な事實は何處にあるであらうか。學者はこれを兩極端、卽ち無限大と無限小とに求めた。天文學者はこの單純なものを發見したが、それは天體間の距離が非常に大きく、各天體は點と見られて其性質的の差異が消え失せ、且點は形と性質とをもつた物體よりも單純な爲めである。之に反して、物理學者は物體を無限に小さい立體に分けて、要素的の現象を探究した。といふのは、問題の條件は物體内の一點から他點に移るに隨ひ緩漫連續的に變化するのであるが、此の小立體の内部では變化しないと考へられるからである。同様に生物學者は細胞を全體としての動物より興味あるものと考へたが、これは誤つては居なかつた。何故なら、多くの種々の器官に屬する細胞は互に類似して居り、その類似を認める者にとつては、器官その物が似てゐるよりも尙似通つてゐるからである。社會學者となると更に困る。彼等にとつて要素となるのは人間であるが、これは餘りに多種多様氣紛れであつて、一言に云へば、要素自身が複雜すぎる。其上歴史は繰返すことがない。それならば如何にして興味ある事實、卽ち繰返される事實を選擇するか。方法とは正に事實の選擇といふことであるから、何よりも先づ方法を考案しなければならない。しかし、いづれの方法も反對の出來ない程完全ではないから、種々の方法が考案された。社會學上の論文の出る毎に新らしい一つの方法が呈出されるが、而もこの新博士もそれを應用しようとはしない。隨つて、社會學は最も方法の多く而も最も結果の少ない科學である。

それ故、規則的な事實から始める事が便宜である。しかし規則が立派に出來上り、それに疑がなくなると、この規則によく一致する事實は何等の新らしい事をも教へないから、忽ち興味を失つてしまふ。かうして例外といふものが重要となつて來、吾々は類似を尋ねる事を止めて何よりも先づ差異を探ね、差異の中でも先づ最も著し

いものを選ぶ。といふのは、それが一番人目につき易いといふばかりでなく、又最も教ふる所の多いものでもあるからである。簡單な例を擧げれば私の考は一層よく理解されるであらう。或る曲線上の幾つかの點を觀察してその曲線を定めるものと假定する。直接の利用のみを求める實際家は、只彼がある特別な目的に必要な點だけを觀察するだらうから、それらの點は或る所には集まり、或る所には疎となり、曲線上に具合よく配布されず、隨つて連續した線で結べず、又他の應用には利用出來ないであらう。學者の方法は之と異なり、曲線その物を研究するのであるから、觀察すべき點を規則的に配布し、或る點を知ればそれを規則的な線で連結し、全體の曲線を得る。しかしその爲めに彼はどうするかといふに、曲線の一端の點がさだまればその附近は止して直に他の端を求め、次に最も重要とするのは中央の點であり、順次に斯くの如く進むのである。

かうして一つの規則が建てられたならば、次に先づ探求すべきは、この規則が誤りであるやうな機會の最も多さうな點についてであるが、これが、天文學上の事實、地質學的過去の興味ある一つの理由である。空間を遠く離れ、或は時間を遠く距てた所に至れば、吾々日常の規則が全く覆がへされてゐることを見る。そしてこの一大顚覆は、吾々の棲息活動してゐる宇宙のこの一隅に於て吾々の周圍に起るかも知れない僅かな變化を、一層よく知らしめ理解せしめる助けとなるであらう。吾々と無關係なこの遠く遙かな國々の遍歴に依つて、吾々は一層よくこの一隅を理解するであらう。

然し吾々の目的とする所は、類似と差異とを確めるよりは、寧ろ多樣な現はれの下に隱された相似を發見するにある。個々の規則は一見一致し難い樣であるが、更に精はしく觀察すると、一般には相互に似てゐる事が――

實質に於ては異つてゐても、その形式に於て、各部の秩序に於ては互に似通つてゐる事が分る。此の見地から檢べて見れば、規則といふものは益〻擴張され、すべてを包括する傾向のものである。そして此處に、全體を完成し、それが他の既知の全體の忠實な寫しであることを示す或る事實をして、價値あらしめる所のものがある。

私はこれ以上この點について固執することは出來ないが、次に述べる事だけで、學者は觀察すべき事實を決して出まかせに選擇するのではないといふ事は十分に分るであらう。彼はトルストイの云ふ樣にテントウ蟲を數へはしない。何故かといふに、此の動物がどんなに興味の深いものであるとしても、その數は氣紛れな變化に從つてゐるから。彼は多くの實驗と思想とを僅かな容積に凝縮せしめることを求める。そしてこれが一小物理學書も尙あの樣に多くの過去の實驗と、其幾千倍の、結果を豫知し得る可能な實驗とを包括し得る所以である。

然し吾々は未だ問題の一面しか見てゐない。學者は自然が有用であるからこれを研究するのではない。彼が自然を研究するのは、それが愉快であるから、自然の美が彼を歡ばすからである。若し自然が美でないとしたならば、それは勞して知る程の價値もなく、人生は生きる甲斐もない。勿論私は玆に官能をうつ美、性質や外見のあの美を云ふのではない。私は決して其等を輕蔑するものではないが、その樣な美は科學と何の關する所もない。私の言はむと欲するのは、部分の調和的秩序より生じ、純粹知性の摑むことの出來る一層內面的な美の事である。それは譬へば、吾々の官能に媚びる虹色の輝く幻に、一つの體を、一つの骨格を與へるものであり、この支柱がなければ、この不定で常に消え失せ易い果敢ない美は、不完全な美に過ぎない。反之、知的の美はそれ自身で充ち足りたものであり、又學者がその長い苦しい研究を續けるのは、人類未來の幸福の爲めによりは、寧ろ恐らく

この美その物の爲めにである。」

それ故に此の特殊の美、宇宙調和の感じが、吾々をしてこの調和に貢献するに最も適した事實を選ばしめるのである。恰も美術家がモデルの姿の中から、その像を完成し且つこれに性格と生命とを與ふるものを選擇する樣に。而もこの教ふる所の多い不知不識の先入感が、眞理の探究から學者を迷路に誘ふ虞れはない。吾々は調和した世界を空想する事が出來る。が、實在の世界は如何にこれより勝れたものであらう。嘗て在つた最大の藝術家たるギリシヤ人は彼等の爲めに一の天空を建立したが、而もそれは吾々の眞の天空に比して遙かに貧弱なものであつた。

單純なもの、壯大なものが、美であればこそ、吾々は好んで單純な事實、壯大な事實を研究するのであり、或は天體の宏大な運行を追ひ、或は顯微鏡下に莫大な微小物——これも亦壯大である——をしらべ、或は又遠い昔であるが爲めに心惹かれつゝ地質學的時代に過去の痕跡を尋ねて、自ら樂しむのである。

かうして、美を求める事は效用を求めてすると同一の選擇に吾々を導く事が知られる。同樣にして、マッハに從へば科學の不變の傾向であるといふこの思考の經濟、この努力の經濟は、實際上の利益であると同時に又美の源泉でもある。吾々の嘆賞する所の建築は、建築家が巧に手段を目的に調和せしめたものであり、その柱は、エレクテイオン Erechthéion の優雅な女像柱の樣に、課せられた重みを輕々と苦もなく支へてゐるものである。

さて此の一致は何から生ずるのであらうか。それは單に、美くしく見えるものが最もよく知性に適合するものであり、又從つてそれは同時に知性が最もよく使用するを得る道具であるといふことであらうか。或は其處に進



化と自然淘汰との働きがあるのであらうか。云ふ迄もなく理想と利益とを最もよく一致させた民族が他の民族を絕滅して其の位置を得たのであらうか。兩者共に結果を考へる事なく其の理想を追つたが、其結果が一は破滅し一は帝國を得る事になつたのである。吾々はかう信じたいと思ふ。ギリシヤ人が蠻族に打ち勝ち、ギリシヤ思想の繼承者たる歐洲が世界に君臨してゐるとするならば、それは蠻族が彼等の官能を充すケバ〳〵しい色彩と騷々しいタンブールの騷音とを好んだに反し、ギリシヤ人が、官能的の美の底に隱れ知性に力と確固さとを與へる知的の美を愛したに依るのである。

恐らくトルストイはそのやうな勝利を恐れるであらうし、それを眞の有用であるとしては許さないであらう。しかしながら、美其物の爲めにするこの興味の少ない眞理の探究も亦健全なものであり、人類を善ならしめ得るものなのである。固より私は、思想家が常に純潔なものでもなく、學者の中にも品性の卑しい者のあるといふ事はよく知つてゐる。が、さればといつて、科學を捨てて道德のみを研究しなければならないと云ひ得るであらうか。

道德家それ自身さへ、演壇に立つてゐない時、一點の非難すべき處もないとは誰が考へるであらう。

# 第貳章　數學の將來

數學の將來を豫見する眞の方法は、其歴史と其現在の狀態とを研究することである。

これは吾々數學者にとつて幾分專門的な手段ではなからうか。吾々は度々過去と現在とから未來を引き出す手段たる外挿法 Extrapolation を用ゐるが、其の價値を知つて居るから、それの與ふる結果の限界を見誤る樣な虞はない。

嘗ては悲觀的の豫言をする人々があつた。彼等は好んで、總て解かれ得べき問題は解かれた、今後は只それを拾ひ集める他には何事も殘らないであらうと繰返した。幸ひにも吾々は過去の例によつて安心する事が出來る。すべての問題は解き終へられたとか、或は少くとも解き得べき問題の總目錄は作られたと、人々は既に幾度も叫んだ。而も解くといふ言葉の意味は擴張され、解き得ざる問題が何よりも最も興味あるものとなり、夢想だもせられなかつた他の問題が姿を現はした。ギリシヤ人にとつて良い解法とは定規とコンパスしか用ゐないものであつたが、後には開平法に依つて得られるものとなり、次には代數函數又は對數以外を含まぬ樣なものとなつた。此の樣にして悲觀論者は常に追ひ越され追ひ退けられてゐる、隨つて現代にては其の樣な人々はないと私は信ずる。

だから私は既に滅んだこれ等の人々と爭はうとは思はない、吾々は數學がその發展を續けゆくべき事を知つてゐる、たゞそれが如何なる方向にであるかが知りたいのである。人はこれに答へて「すべての方向に」といふかも知れない、一應尤もなことである。然しこれが全然眞であるとすると多少變な事になる。吾々の富は忽ち混亂したものとなり、その集積は、未知の眞理が無學者に對すると同樣に、測知すべからざる塊溜となるであらう。

歷史家も、又物理學者自身も、事實の中に選擇を行はなければならない。學者の頭も宇宙の一部に過ぎないから宇宙全體を含む事は出來まい。隨つて自然が吾々に供する無數の事實の中、或る物は捨て、ある物は採る事にならう。この事は數學に於ても固より同樣である。數學者も同じく彼の前に現はれるすべての事實を無暗に取り込む事は出來ない、ましてこの事實を作るものが彼自身――寧ろ彼の氣紛れ――であるから尙更である。要素を集めて新らしい組合せを上から下まで作るのは彼であつて、通常既に出來上つたものとして自然が彼に與へるのではない。

勿論、數學者が時には物理學の必要を滿たす爲めに或る問題に手を染める場合や、物理學者又は技術家が何かの應用の見地から彼に或る數の計算を求める場合もあらう。併し吾々幾何學者は彼等の註文を待ち、又自己の滿足の爲めにこの學問を培ふ代りに、この顧客の趣味に應ずることのみを心掛けなければならないと云へるであらうか。若し數學が自然を研究する人々の助けとなる以外に目的のないものとすれば、吾々はこの人々の註文を待たなければならない。然しこの見方は正當なものであらうか。勿論、否。若し數學が數學その物の爲めに育てられなかつたならば、數學的の手段は決して生れず、物理學者からの注文が來たとしても、吾々には何の武器もなかつたであらう。

同樣に物理學者も、或る現象の研究を、何か物質生活上の火急の要求がそれを必要とする迄、待つては居ない。これは尤もな事である。若し十八世紀の科學者が、彼等の眼には只珍らしいだけで實利のないものであるからとて、電氣を等閑にしたなら、二十世紀に於て、電信も電氣化學も電氣工業もなかつたであらう。故に選擇を强ひられた物理學者は、その選擇を單に功利に依つて導くのではない。それなら彼等はこの自然の事實の間に於て如何に選擇するか。私は既にこれを前章に於て說明した。彼等が興味をもつのは法則の發見に導く事實である。即ち、それは他の多くの事實と類似せるもの、他より孤立せず他と密接な群をなすと思はれる事實である。孤立せる事實は萬人の眼を、學者の眼と共に素人の眼をも惹く。たゞ眞の物理學者のみの見得るものは、深く且つ隱れたる類似をもつ多くの事實を結合する所の關係である。ニウトン Newton の林檎の逸話は恐らくまことではあるまいが象徵的であるから、これをまことのものと見做さう。そこで吾々はニウトン以前にも多くの人が林檎の落ちるのを見たことと考へなければならないが、而も誰一人それから何等の結論をも出す事は出來なかつた。若しその背後に何物かを藏するものを識別して、これを諸事實の中から選擇し、且つその背後に隱れたるものを識り得る精神——あるがまゝの事實の下にその事實の魂を感じ得る精神——が無かつたならば、それ等の事實も、何等の實をも結び得なかつたであらう。

數學に於ても全く同樣である。任意の種々の要素から幾萬の異つた組合せを作ることが出來る。併しこの組合せはそれが孤立してゐる限り、全く價値のないものである。吾々は屢〻この樣な組合せを作る爲めに多くの勞力を拂ふが、これは恐らく中等敎育の練習問題を供する他には何の用にも足りない。然しこの組合せが類似した組合せの一族の中に現はれ、又吾々がこの類似を認める時には、事情は全く違ひ、玆に現はれたものは既に一の事實ではなくて、一の法則である。此の時に當つて、眞の發見者は、この組合せの或る物を根氣よく築き上げる勞作者ではなく、それの關係を明かにする人であらう。前者はあるがまゝの事實以外を見ず、只後者のみが事實の魂を感ずる。この關係を確立する爲めには、新らしい言葉を發見するだけで事足る場合が往々あり、この言葉は創造者となるであらう。科學の歷史は誰にも知られた多くの實例を供してゐる。

有名なヴィエンナ Viennois の哲學者マッハも言つた、科學の役目は、機械が勞力の經濟を產む樣に、思考の經濟を產む所にあると。そしてこれは至極正しい。蠻人は自分の指で又は小石を集めて計算する。小兒に乘法の九々を敎へるのは、共後小石ですべき無數の手數を省いてやることである。誰かが或る時小石か他の何かの方法で、七の六倍は四十二である事を知り、且つこれを記錄する方法を工夫した。そしてその爲めに吾々は再びそれを繰返す必要がないのである。彼が自分の樂みに計算したのであるとしても、その時間は浪費されたのではない。その手數が僅か二分間しかかゝらないとしても、若し百萬人が彼に傚つてそれを反覆しなければならないとすれば、すべてで二百萬分を要するであらう。

それ故事實の重要さは共產物、即ちその爲め節約し得る思考の量に依つて測られる。物理學に於て多產的な事實といふのは、非常に普遍的な法則の中に入る事實である。共譯はそれに依つて極めて多くの事實が豫知されるからであつて、この事は數學に於ても異る所はない。私がある複雜な計算をしてやうやく或る結果に到達したとする。若し私が、その爲に、他の類似した計算の結果を豫見し、又最初の樣な模索に

廿んぜず確にそれを支配し得る様にならないなら、私の勞は酬ひられたとは云はれまい。反之、若しこの模索が、今研究した問題と他の問題の既知の一族との間の、深い類似を私に啓示するなら、若しそれがその類似と差異とを同時に示すなら、一言に云つて、それが普遍化の可能を洞察させるならば、私の時間は空費されたのではあるまい。かくて私の得るであらう所のものは一の結果ではなくて一の新らしい力である。

先づ第一に思ひ浮ぶ簡單な例は、最後に文字を數で置換すれば數的問題の或る型の解法を與へる所の代數公式である。この公式のおかげで、吾々は只一回の計算に依り、數の計算を不斷反復するの勞を省くことが出來る。然しこれは粗笨な一例に過ぎない。何人も、公式の例に依つて說明し得ないやうな、而も最も貴重な類似の存在することを知つてゐる。

若し或る結果が價値のあるものなら、それは、以前より知られては居るが、しかし離れ離れに互に無關係と思はれた要素を結合して、無秩序と見えた場所に、忽ち秩序を附した場合である。かうして、その爲めに、各要素とそれが全體に於て占める位置とは一目瞭然となる。この新事實はそれ自身が貴重な許りではない。これが結合したすべての古い事實も、この新事實に依つてのみ價値を得るのである。吾々の精神は感覺と同樣弱い無力なものであり、若し宇宙の複雜さが調和的のものでないなら、その複雜さの中に滅び失せるであらうし、又すべてを包括する事を得ないから、近視眼者の樣に細部のみしか見えず、その細部さへ次のものを檢べる前に忘れなければならないであらう。吾々の注意に値する事實とは、只この複雜に秩序を附して、近寄り易からしめるもののみである。

數學者はその方法と結果との優雅を極めて重んずるけれども、之は單なる好事心（ヂレツタンチスム）からではない。一體、解法に於て、又證明に於て、この優雅の感を與へるものは何であらうか。それは各部の調和であり、整齊であり、巧みな釣合である、約言すれば、凡そ秩序を附するもの、凡そ統一を與へるもの、從つて細目と同時に全體を明かならしめ又理解せしむるものである。そして之は又正（まさ）しくこの事實をして多產的ならしむる所のものでもある。まことに、この全體が一目瞭然となればなる程益々他のこれに近い對象との類似が知られ、從つて可能な普遍化を發見する機會は更に多くなるであらう。優雅の感は、無關係と思はれた對象が思ひがけずも遭遇したといふ驚異の感情から出る事もあらうが、この場合にも、今迄知られなかつた關係を明かにする故、同樣に多產的である。又この感情が、方法の簡單さと與へられた問題の複雜さとの對照からのみ生じた場合に於てすら同樣である。何故ならそれは吾々にこの對照の理由を反省させ、又屢々、この理由が偶然ではなく、何か或る未知の法則に依る事を知らしめるからである。一言に云へば、この優雅の感情は、發見された解法と精神の必然との何かしら或る適應に依る滿足に他ならない。その適應に依つてこそ、この解法が吾々の道具となり得るのであり、從つてこの美的滿足は思考經濟に結び着いてゐる。茲に思ひ浮ぶのは又例のエレクテイオンとの比較であるが、私はあまりに度々それを用ゐようとは思はない。

多少長い計算が何か簡短な著しい結果に達する時、吾々はその結果の全體をでないまでも、少くともその最も特質的な姿を豫見し得る事が示されない限り滿足しない、といふのも同樣の理由に依るのである。何故であらうか。何が、一見すべての知らうと欲する所を敎へたと思はれる此の計算に滿足する事を妨げるのであらうか。そ

れは、似よつた計算の場合にこの長い計算は再び用ゐる事は出來ないが、結果を豫見させる様な往々半ば直覺的な推理は再び使用し得るからである。この推理は短くて、一目にすべての部分を見渡し得るから、從つて、現はれ得べき總ての同種類の問題に適用する爲めに變化すべき箇所を、直に知る事が出來る。尙この問題の解法が簡單であるか否かをも豫見し得るから、少くとも計算に着手する價値があるか否かを知る事が出來る。

以上述べた所は、數學者の創造的な自由を何等かの機械的過程に依つて代へようとする試みが、如何に無意味であるかを示すに十分である。眞に價値ある結果を得るためには、計算をこつ〳〵する事や、事物を秩序正しくする機械を持つだけでは足りない。價値のあるのは、單に秩序ではなくて、豫期しなかつた秩序である。機械はあるがまゝの事實を呑み込むことは出來ようが、その魂は常に彼から逸し去るであらう。

前世紀中葉以後、數學者は益々絕對的の嚴密を得ようと勉めてゐる。まことに正當な事でもあり、又この傾向は益々强くなるであらう。數學に於ては嚴密が全部ではないが、又それなくしては何物でもない。嚴密を缺く證明は無である。思ふに何人もこの眞理を爭ふまい。然しこれをあまり文字通りにとると、例へば、千八百二十年以前には數學といふものはなかつたといふ様な結論となるが、これは明かに誇張である。其時代の幾何學者は吾吾が煩瑣な論述で說明する事柄をも好んで省略した。これは全然氣がつかなかつたといふのではなく、餘り早急に其上を通り越して居たのであり、それを詳しく知る爲めには、面倒でもその事柄を表示しなければならなかつたであらう。

只、その様に度々表示する事は常に必要であらうか。何物よりも嚴密を得るに力めた最初の人は模範とすべき推理をしたが、若し將來の證明がその模型の上に立てられなければならないとすると、數學の論文は非常に長いものとなるであらう。長くなるのを恐れるのは、單に圖書館が一杯になるのを心配するのみではなく、それに依つて、上述の如く有用な役目を果すべき調和の外觀が失はれるかも知れないからである。

吾々の目的とすべきは思考の經濟であるから、模型を與へるだけでは十分とは言へない。後進の者がこの模型を必要とせず、既存の推理を繰返す代りに之を數行に槪括し得るのでなければならない。而もこれは或る場合には既に成功してゐる。例へば、相互に相似た、至る處にあらはれる、或る推理の型があつた、完全に嚴密ではあつたが長いものであつた。或る日、一人が「收斂の齊一」Uniformité de convergence といふ言葉を工夫したが、この言葉一つに依つてこれ等の推理は不用に歸し、これを省略し得るから以來繰返す必要がなくなつたのである。だから難點を細密に檢べる人は吾々に二重に役立つ、卽ち先づ必要があれば彼等に倣ふ事を敎へ、其上殊に嚴密さを失ふことなく出來得る限り彼等の様な面倒を避けしめるのである。

數學に於て用語が如何に重要であるかは一例を以つて示したが、尙多くの例を引くことが出來る。マッハも云つたが、數學に於て巧みに選ばれた用語が如何に思考を經濟ならしめたかといふ事は信じ難い程のものである。私は何處かで言つたかとも思ふが、數學は異る事物に同一の名を與へる技術である。この實質の異る事物が、謂はば同一の鑄型に流れ入ることの出來るためには、その形式が似てゐればよい。適當な言葉を選ぶ時、或る既知の對象についての證明が其儘他の多くの對象に應用される事は驚くべき程であり、此の場合には名稱が同一となつてゐるから、用語さへも變更する必要はないのである。

古い用語で表はされた規則の例外が、適當な用語を用ゐるといふことのみで取除かれることが往々ある。負數量、虛數量、無限遠點の考へられたのも、このために他ならない。而も忘る可らざるは、例外は法則を隱蔽するから有害であるといふ事である。

さてこの事は吾々が以つて多產的な事實を認める一の特徵であり、この事實は卽ちかの仕合せな言葉の革新を齎す所のものである。あるがまゝの事實は時としては大なる利益のないものであり、往々科學に何等の大貢獻なくして記載されてゐる場合がある。それは一層愼重な思索家が、その事實の明かにすべき關係を會得し、之を一語に表示するのでなければ價値が生じない。

物理學者も亦全く同樣である。彼等はエネルギーといふ言葉を發明したが、この言葉は驚く程多產的であつた。それは例外を消去し、法則を創造し、實質は異るが形式の等しい事物に同一の名を與へたからである。

最も喜ばしい影響を及ぼした言葉の中、私は群 groupe と不變量 invariant とを擧げよう。これに依つて吾々は多くの數學的推理の本質を理解し、又昔の數學者が如何に度々それと知らずに群を考へてゐたか、どうして互に遠く離れて居ると信じながら、突然理由もわからずに相接近する場合があつたかを知る事が出來る。

今日では以前の數學者はイソモルフ群 groupes isomorphes を研究してゐたといふ。今では、吾々は、群に於ては實質は興味少く重要なのは唯形式であるといふこと、又一の群を熟知するとそれに依つて總てのイソモルフ群が知られるといふ事を知つてゐる。又この精妙な規則を數級に總括し何人にも近づき易からしめるこの群とイソモルフィズムといふ言葉のお蔭で、一から他に移ることは直接であり、多くの考を要しない。其上、群の觀念は變換 transformation の觀念と結合してゐる。一の新らしい變換の發見が何故多大の價値があるかといふに、この變換が一の定理から十も二十もの他の定理を引き出さしめるからである。變換は整數の右に添へる零と同樣の價値を持つてゐる。

此處に今迄の數學的科學の運動の方向を定めた所のものがある。それは又確に將來に於てもその方向を定めるものであらう。然し、そこに現はれた問題の性質も、同じく此の事に貢獻する。吾々は目的とすべき事を忘れることは出來ない。私の考ではこの目的は二重である。數學は同時に哲學と物理學とに接して居り、吾々の働く可きもこの二隣人のためである。かうして數學者は常に二つの相反する方向に進んで來た、そして今後も同樣に進んでゆくであらう。

一面に於て數學は自己自身を省みなければならない。これは有用な事である。何故かといふに、自己自身を反省するとは、それを生み出した人間精神を省みる事であるからである。殊に數學は、人間精神の創造物中、外界に負ふ所の最も少いものであるから尙更である。これが公準 Postulate や見慣れぬ幾何學や珍らしい性質をもつた函數やの研究を目的とする或る數學的思索の有用な所以である。この思辨が日常の考へと、隨つて自然と、離れれば離れる程一層明かに、外界の暴壓を逃れる時、人間精神が何をなし得るかを示し、隨つて又愈々人間精神其のものを知らしめるのである。

しかし吾々が主力を注ぐべきは、これと反對の側、自然の側についてである。

其處では吾々はかう話しかける物理學者又は技術者に出遇ふ。「この微分方程式を積分しては吳れないか、こ

れこれの日迄に終る筈のこれこれの仕事のために、僕はこゝ一週間の中にそれがほしいのだが。」吾々はかう答へる。「この方程式は積分出來る形にはならない。知つても居るだらうが、その型といふのが澤山はないんだから。」「知つてゐる。が、でも何とかならないものか。」多くの場合には熟く相談して見ればよいので、實は技術者の方は有限項の積分が欲しいのではない。彼はその積分函數一般の性質、或は單にその積分を知れば、それから容易に出て來る幾らかの數字が知りたいのである。普通吾々はこの積分を知つてはゐない。が、若し技術者がどれ程の數字、どれ程の精密さを求めてゐるかが分れば、其の數字を算出することは出來るであらう。

昔は方程式は其の解が有限數の既知函數で表はされなければ、解かれたとは考へられなかつた。併し、これは百に一も覺束ない事である。吾々の常にする事は、或は寧ろ常にしようとすべき事は、問題を謂はば性質的に解く事、換言すれば未知函數を表はす曲線の一般形式を知らうとする事である。

次に殘るのは、その問題の量的の解を求めることである。然し若しこの未知量が有限の計算で定められない時は、何時でも、計算し得る收斂無限級數で表はす事が出來る。これは眞の解と見做し得ようか。ニウトンはライプニッツ Leibniz に大體次の様なアナグラム Anagramme を送つたと傳へられてゐる。aaaaabbeeeeii, etc. 無論ライプニッツは全く何も分らなかつた。しかし解釋の鍵を有する吾々は、このアナグラムの云はうと思ふ所を知つてゐる。現代の語法に直せばかうである。「余はすべての微分方程式を積分し得る。」思ふにニウトンは餘程幸運な人か又は奇抜な幻想を持つてゐた人に相違ない。彼の云ふ所は全く只、與へられた方程式を形式的に滿足させる冪級數を——不定係數法に依つて——作る事が出來るといふ事であつた。

今日ではこの様な解は最早吾々を滿足させない。それは二つの理由、收斂があまり緩漫であるのと、其の後續の項が何等の法則にも從つてゐないのとの理由からである。反之、$\theta$ 級數に於ては其れ以上に望むべきことはない。先づ收斂は急速であり（これはなるべく早く必要な數を得る事を望む實際家のために）次に各項の法則は一目に理解出來る（これは理論家の美的要求を滿足させるために）からである。

かうして其處には最早解かれた問題も、解かれない問題もない。在るものは只多くか少くか——それを解く級數の收斂の緩急、或は其處に支配する法則の調和の多少に隨ひ多くか少くか——解かれた問題のみである。しかしながら或る不完全に解かれた問題が、吾々をより良い解に導く場合もあり、又時としては、級數の收斂が非常に遲く、それを計算する事は實用とはならず只其の問題の可能を示し得るに止まることもある。

かやうな譯で技術者はこれを嘲笑ふべきものだと考へる。これも尤もな事で、それは或る一定の日限迄に仕事を仕上げる助けにはならないからである。彼はそれが二十二世紀の技術者にとつて有用であるか否かを知らなどとは少しも思はない。吾々はこれと異つて、時として、同時代人の一時間を節約するより、孫の時代の一日の勞を省くを以つて、より以上の喜びとする。

時には吾々は手探りで、謂はば經驗的に十分收斂的な式を得ることがある。「これ以上何がいるのか」と技術者はいふ。しかし吾々はどうしても滿足せず、この收斂を豫見し得ることを望むであらう。何故かと云へば、若し一度これを豫見し得るならば、他の場合にもさうする事が出來ようから。吾々は成功した、がこの成功は、眞にそれを繰返し得る望がないならば、吾々にとつて左程貴いことではない。

科學が發展するに伴ひ、總てを完全に包括する事は愈〻困難となる。故に人はこれを部分に分け、或る一部分で滿足しようと、約言すれば專門化しようとする。若しこの方向に進行を續けてゆくとすれば、それは科學進步の厄介な障害となるであらう。既に云つた樣に科學が進步し得るのは、その異つた部分の豫期しない接觸に依つてである。あまりに專門化することはこの接觸を妨げるであらう。ハイデルベルク Heidelberg やローマ Rome に於ける樣な會議が、吾々を互に他と接觸せしめ、隣人の領分への眺望を開き、これを吾々のものと比較せしめ、吾々の小天地から少しでも踏み出させるのは望ましいことである。この樣にしてこれらの會議は上述の危險に對する最上の救濟法となるであらう。

一般論があまり長引いたが、今やその細目に入るべき時である。

まづ相寄つて以つて數學を形成する個々の特殊分科の檢察にすゝみ、それらは何をなしたか、何處に進んで行くか、又何をそれから期待し得るかを見よう。今迄の見解が正しいとすれば、過去の大進步は、この科學の二分科が互に接觸した時、其の實質の相異にも係らずその形式の相似が認められた時、彼等が相互に他を摸して、一方の勝利は又他方の利益となる樣になつた時に、生じたといふ事が理解されるに相違ない。吾々は同時に將來の進步も、同種の接觸に於て見なければならない。

## 算術

算術の進步は代數又は解析に比して遙に遲れたが、その理由は容易に會得される。連續の感じは重要な指導となるものであるが、算術學者にはこれが缺けてゐる。各整數は相互に分離し、謂はば固有の個性をもち、各々が一種の例外である。これが數論に於ては一般的定理が極めて少い所以であり、又その存在するものも發見し難く久しく研究者の眼を逃れた所以でもある。

若し算術が代數又は解析より遲れてゐるとすれば、これ等の進步を利用するためにこれらの分科に倣ふのが得策である。だから算術學者は代數との類似を指導者としなければならない。此の類似の數は甚だ多く、多くの場合、利用され得る迄に詳しく研究されて居ないにしても、少くとも久しく豫感されて居り、この二學の言葉そのものが、この類似を吾々が會得してゐたことを示してゐる。卽、人は超越數 nombre transcendent の事を語り、又この數の將來の分類は既に手本として超越函數の分類をもつてゐると說明する。しかし尙どうして一方の分類から他方のに移るべきかは明確には知られてゐない。もしそれが明かになれば、それだけで既に完了したので、其以上將來なすべき事は殘らないであらう。

私が先づ思ひ浮べるのはコングリウエンス congruence の理論で、そこには代數的方程式との完全な平行が存在する。確に吾々はこの平行——例へば代數曲線と二變數のコングリウエンスの間にあるべき平行を完成する事になるであらう。そして多變數のコングリウエンスに關する問題が解かれた時は、卽、不定解析法の多くの問題の解決に一步を進める時である。

## 代數

代數方程式の理論は尙長く幾何學者の注意を惹くであらう。其の相接すべき側面は多數であり、又多種である。代數は、すべてこの可能な組合せを作るべき法則を供したからそれで終了したと考へてはならない。興味ある組

合せ、即ち特殊な條件を滿足すべき組合せを研究すべき事が殘つてゐる。かうしてそれは、未知數が既に整數ではなく多項式 Polynome である樣な、一種の不定解析法を建設するであらう。かうして今度は代數が、或は任意係數の整多項式、或は整係數の整多項式と整數との類似に導かれつゝ、算術に範をとることになるであらう。

### 幾何

幾何學は、代數又は解析の中にないものは何物をも含むことは出來ず、幾何學的の事實とは他の言葉を以つて表はされた代數的或は解析的事實に他ならぬかの樣に思はれる。隨つて今迄の檢察の後で、特に幾何學に關して何も云ふべき事はないと考へられるかも知れない。然しこれは適當な言葉の重要な事を忘れ、事物を說明し總括する方法が、その事物自身に何を添加するかを理解しないからである。

先づ幾何學的考慮は吾々を新らしい問題に導く。それが解析的の問題であることもあらうが、決して解析のために提出したのではない。しかし解析がそれに依つて利益を得ることは、丁度物理學の要求を滿たすに必要な問題に依つて利益を得ると同樣である。

幾何學の大きな便宜といふのは、正に共處では感覺が知性を助け、進路の決定に助力し得る事である。だから多くの人々は、解析の問題を幾何學的の形に還元することを好む。不幸にして吾々の感覺は餘り遠くへは吾々を導き得ず、古典的な三次元の空間外に出ようとすれば、忽ち吾々の望を裏切つてしまふ。これは感覺が吾々を押込めてゐるとも見えるこの制限された領域の外に出ては、吾々は純粹解析のみしか考へてはならず、又すべての四次元以上の幾何學は空虛、無對象のものである事を意味するのであらうか。一時代前に於ては、最大の學者も「然り」と答へたであらう。今日では此の觀念は吾々に親しいものとなり、通俗的の講演に於てでさへ大した驚愕を呼び起すことなく、これについて語ることが出來る程である。

然し幾何學は何の用に立つのであらうか。これは容易に判る。先づ第一に非常に便利な言葉を與へて、それが通常の解析の言葉では長々しい文句を使ふ所のものを、極めて簡潔な用語で云ひ表はす。その上この言葉は吾々をして、互に似通つた事物に同じ名稱を與へしめ、忘れ難い類似を確めさす。尙其の上吾々はそれに依つて、心に絕えず可視的空間――それは恐らく更に大きな空間の只不完全な像に過ぎないが、しかも尙像ではある――を喚び起し、それがなければ知る事を得ない樣な大きな空間に向ふ事が出來る。此處でも亦さきに述べたすべての例と同じく、複雜なものを理解せしめるものは簡單なものとの類似である。

此の四次元以上の幾何學は單純な解析的幾何學ではなく、單に量的であるのみならず又質的でもあり、これが主として此の幾何學の興味のある所である。位置解析 Analysis Situs といふ科學がある。これは大きさを捨てて圖形の種々の要素の位置の關係の研究を目的とする。此の幾何學は純粹に性質的であり、その定理は、たとへ圖形が正確でなく子供が描く眞似たものであるとしても、やはり眞理である。吾々は四次元以上の位置解析をも作る事が出來る。この位置解析が如何に重要なものであるかは、到底こゝに述べ盡すことは出來ない。その主な創建者の一人たるリーマン Riemann がそれに依つて得た所の成果は、それを示すに十分であらう。吾々は高次元の空間に於てもこれを完成しなければならない。さうすれば、眞に高次元空間 hyperespace を洞見し、感覺を補ふべき手段を得るであらう。

位置解析の問題は、若し解析の言葉のみを用ゐて居たなら、恐らく現はれなかつたであらう。否、確に現はれたではあらうが――この解法は解析の或る一團の問題には必要であるから――しかし個々別々にで、人はその共通の連結を理解出來なかつたであらう。

## 集合論（カントリスム） le cantorisme

私は絶えず我々の科學の第一原理に立ちかへる事の必要と、それが人間精神の研究に利益ある事とを述べた。最近の數學史上に重大な位置を占めた二つの試みを刺戟したものは、此の要求であつた。第一はカントリスムであつて、その數學に致した貢獻は人の知る所である。カントル Cantor は數學的無限を考察する新らしい様式を數學に導入したが、この事に關しては第七章に再び說く機會がある。カントリスムの特徴の一つは、順次複雜な組立てをして行つて一般的なものに達し、組立てによつて定めるのではなく、スコラ哲學者の言葉で云へば、最高類 genus supremum から發して、次位類と種差 genus proximum et differentiam specificam に依つてのみ定めるのである。この事が時として或る人々、例へばエルミツト Hermitte――彼の好む考は數學と自然科學とを比較する事であつた――をして、嫌惡の感を起さしめたものである。吾々の大多數にとつてはこの偏見は消え失せたが、併しエレアのゼノン Zénon d'Elée やメガラ學派 l'école de Mégare の喜びさうな逆說（パラドクス）や明白な矛盾に突き當る様なことになり、人々は各自其の救濟法を求めた。私としては――かう考へるのは私一人ではない――有限數の言葉で定義されない様なものを決して導き入れない事が大切であると思ふ。この救濟が如何様に行はれるにしても、吾々は興味ある病理學的の問題を研究する醫學者の樂しみを持つことが出來る。

## 公準の研究

他の方面に於ては、人は數學の種々の定理の根本を形成する多少隱れた公理と公準とを數へ上げる事に努力し、ヒルベルト Hilbert は最も耀かしい結果を得た。最初はこの領域は非常に局限されて居り、その長くもない研究が終つたならば、成すべき事は何物も殘らないだらうと思はれた。然しすべてが列擧せられても、尙それ等すべてを分類するには幾多の方法があるであらう。立派な圖書係りの仕事はいつも無くなりはせず、各々の新分類は哲學者にとつて興味あるものであらう。

私は到底完成しさうもないこの評論を茲で止めよう。思ふにこれらの例證は、數學が如何なる機制（メカニスム）に依つて過去に進步し、如何なる方向に向つて將來進むべきかを示すに足るであらう。

# 第參章　數學上の發見

數學上の發見の由來は、心理學者の激しい興味をそゝるべき問題である。それは人間精神が外界に負ふ所の最も少いと思はれるものであり、精神自身が自らの上に働く或は働くと思はれる所の活動である。隨つて吾々は幾何學的思惟の過程を研究することによつて、人間精神の最も本質的なものに達することを期待し得るのである。

これは從來知られてゐることであつて、數ケ月前にもレェザン Laisant、フェール Fehr 兩氏の主幹する雜誌數學敎育 l'Enseignement Mathématique は種々の數學者の精神の習癖、研究の方法の調査を企てた。この調査が發表された時にはこの論文の主な輪郭は既に書き上げられてゐた爲め、此處にそれを利用する事は殆ど出來ないから、多數の證據が私の意見を裏書した――滿場一致でとはいはない、一般投票に依る場合に滿場一致を得るなどとは誰にも望めないことだから――といふにとゞめておかう。

先づ最初に不思議な――といふより寧ろ、若し吾々がそれをこれ程見慣れてゐなかつたら、不思議と思ふべき筈の――事實がある。一體どうした譯で數學を理解しない人々があるのか。數學が、すべての常識ある人の承認する論理の規則以外のものを用ゐぬとすれば、又その證明が、すべての人に共通な、狂人でない限り否定出來さうもない原理の上に立つものとすれば、數學に全く適せぬ人々がかうも多いといふのは、どういふ譯か。

すべての人に發明が出來ないといつた所で別に不思議なことではない。すべての人が前に學んだことを憶えてゐられないとしてもまだそれもよい。然し現に數學的の推理が說明されてゐる其場に於てさへ、誰にでもそれが理解出來る譯ではないといふことは、考へて見れば甚だ不思議なことである。それにも拘らず、非常な努力でやつとついて行けるといふ樣な人が大多數であるのは、爭へない事實であり、又中等敎育にたづさはる敎師の經驗も、確にこれに一致するであらう。

それのみではない。數學に於て誤りといふものがどうして生じ得るのであらうか。健全な知性は論理の誤りを犯してはならない。而も日常生活の行爲に於ての樣な短い推理は誤らないが、數學的の論證――長くはあるが、要するに彼等の容易になし得る推理と全く同樣な、短い推理の集積にすぎない數學的論證――を誤りなく續け又は繰返し得ない所の極めて聰明な人々がある。この上に尙數學者自身でさへ誤ることがあるといふことを附加へる必要はあるまい。

この答は私には明かである。推論式の長い系列を考へ、前のものの結論が次のものの前提をなすものとしよう。吾々は一々の推論式を了解することが出來るであらう。過ちに陷る虞れのあるのは、前提から結論への途中に於てではない。しかし、最初に或る推論式の結論として或る命題に出遇つた時と、他の推論式の前提として此の命題に再び出遇つた時との間には、往々永い時間を經て居り、又多數の推論の鎖の輪が展げられてゐるであらう。それ故人々はその命題を忘れ、或は尙一層大切な事には、その命題の意味を忘れたかも知れない。それ故、これを少し異つた命題で置き代へるとか、又は全く同じ言葉を用ゐながら、それに多少異つた意味を與へるとかいふ事があるかも知れない。誤謬に陷る虞れのあるのはかうしてである。

數學者は屢〻規則を用ゐる必要がある。勿論彼は先づこの規則を證明する。そしてこの證明が彼の記憶に全く新しい間は、彼はその意味と限界とを完全に理解して居り、それを變更する虞れはない。しかし、次にはこれを記憶に止め、只機械的に應用するにすぎなくなるが、共の時この記憶が失はれると彼はそれを誤用するかも知れない。かうして簡單通俗な例をとれば、吾々は時として乘法の九々を忘れた爲めに計算を間違へることがある。

この點から見れば、數學の特別な才能といふものは、非常に確實な記憶或は異常な注意力のみに依るのであらう。この性質は、濟んでしまつたカードを記憶してゐるトランプの競技者のそれに似たものであり、一層進んでは、非常に多數の組合せを考へ且憶えて居られる將棋指しのそれに似たものであらう。總ての立派な數學者は同時に巧みな將棋指しの筈であり、又このことは逆にも云へる。そして彼は同時に巧みな數の計算者でなければならない。實際これは時としては事實であつて、ガウス Gauss は天才的の幾何學者であると同時に、非常に速い非常に確な計算者でもあつた。

然しこれには例外がある。否寧ろ例外といふのは當らないので、さもないと例外が規則に一致するものよりも多數だといふことになるであらう。だから逆にガウスの方が例外なのである。私自身はどうかといふに、正直に云つて、寄せ算を間違へずにすることは殆ど出來ない。同じ樣に將棋も極めて下手であらう。私はかう動かせばかういふ危險があるといふことを容易に察し、澤山の他の指手を考へるが、何かの理由でそれ等をも撤回し、そしてその間に初め豫想した危險を忘れてしまつて、結局は最初考へた指手を指す樣なことになるであらう。

つまり私の記憶は惡いといふのではないが、將棋の上手になるには不十分なのである。それならば多くの將棋指しが困る樣な難かしい數學的推理に於て、私の記憶が缺けてゐないのは何故であるか。それは明に推理の一般的な過程によつて導かれるからである。數學的の證明は單に推理式を並べただけのものではなく、或る秩序に配列された推理式であり、是等の要素が配列される秩序は、要素そのものよりも遙に重要なのである。若し私がこの秩序の感じ、謂はば直感とも云ふべきものを持つて居り、推理の全體を一目に會得するならば、もはや一々の要素を忘れることを心配することはない。すべての要素は自然と設けの場所に來、私は勞せずしてそれらを記憶することが出來るであらう。

かうして私は既に覺えた推理を繰返しながら、恰も自分でそれを發明し得たかの樣に思ふ事がある。之は屢〻幻影に過ぎないのであるが、しかしそんな場合でも、自分自身で創造の出來ない樣な場合でも、それを繰返すに準じて、自らそれを再び發見するのである。

吾々は隱れた調和と關係とを豫知させる數學的秩序のこの感じ、この直覺が、誰にでも與へられてゐるのでないことを知つてゐる。或る人々には、この說明し難い微妙な感じも普通以上の注意力記憶力もなく、隨つて少し高等な數學を理解することは全く不可能であらう。殆ど大多數の人がこの類である。或る他の人々は、この感じは僅であるが、異常な記憶力と强い注意力とを具へてゐる。彼等は詳細なことを一つ一つ暗記して、數學を理解し得、又時としてそれを應用することも出來るが、これを創造し得る力はない。最後に他の人々は、前述の特別な直觀を幾分高度に具へて居り、特に記憶が勝れてゐない場合でも、數學を理解し得るのみならず、創造者ともなり得るのであつて、その直觀の進んだ程度に從ひ、多くか少くかの發明を成就することが出來るであらう。

一體數學的の發見とは何であるか。それは旣に知られてゐる數學的の事柄を以つて、新しい組合せを作ることではない。これは誰にもでき、又かうして作られた組合せは無數であるが、その大多數は全く無用のものである。發見とは正に無用の組合せを作らぬこと、最少數の有用な組合せを作ることである。發見は判別であり選擇である。

どうしてこの選擇をなすべきであるかといふことは前に說明した。研究の價値ある數學的事實とは、實驗的事實が物理學的法則の認識に吾々を導くと同樣に、他の事實との類推に依つて、吾々を數學的法則の認識に導き得る樣なもの、又旣に前から知られながら而も誤つて互に無關係なものと考へられてゐた事實間の、思ひがけない關係を明にするものである。

吾々が選擇する組合せの中、最も多產的なものは、往々非常に懸離れた領域から借りて來た要素から成るものである。がこれは發見する爲めには出來るだけ離れたものを寄せ集めればよいといふ意味ではない。かうして作られた組合せは、大部分全然無效なものであるけれども、只その中に、極めて稀にではあるが、すべての中最も多產的なものがあるのである。

旣に云つた樣に、發見は選擇である。が、この言葉は恐らくあまり適當ではあるまい。何だか澤山の見本をつきつけられて、その中から選りとる爲めに、一つ〳〵を查べてゐる顧客を思はせるからである。しかしこの場合は、見本が一生かゝつても檢べ切れない程多數であらうから、そんな具合にはゆかない。無用な組合せは發見者の腦中に現はれてさへ來ないであらう。彼の意識の域內には、實際に有用なものでなければ決して現はれず、又その中彼が斥けるものでも、幾分有用な組合せの性質はもつてゐる。恰度發見者は、第一段の試驗に及第した候補者に口頭試驗をすればよい所の、第二段の試驗官である樣なものである。

然し私が今迄述べたところは、幾らかの反省を以てすれば、諸幾何學者の著作を讀んでそれから觀察或は推量し得る事柄である。

今や進んで數學者の魂そのものの中に起る事柄を觀察すべき時である。その爲めには私は自分の回想を辿るのが最もよいと思ふ。玆では唯私がどうしてフックス函數に關する私の最初の論文を書いたかを語るに止めよう。唯これから多少の術語を用ゐることを許して頂きたい。しかし讀者は之を理解する必要は少しもないのであるから、別に心配するには及ばない。例へば私がこれ〳〵の狀態でこれ〳〵の定理を發見したといふ場合、この定理が多くの讀者の知らない樣な難かしい名稱のものであつても、それは別に大切なことではない、心理學者に興味のあるのは、その定理ではなくてその狀態である。

半月ばかりの間、以前からフックス函數と呼ばれてゐるものに類する函數が存在出來ないといふ證明をしようと思つて、私は一生懸命になつてゐた。其時に私は少しも分らなかつた。每日一二時間勉强の卓に向つては非常に多數の組合せを試みたが而も何の結果にも達しなかつた。ある晚私はいつもになく黑コーヒーを飮んだ爲め寢つかれなかつた。樣々の考へが群をして湧き上つて來た。丁度、それらは互に衝突し合ひ、遂に其中の二つが安全な組合せとなる爲めに謂はばからみ合つたかの樣に思はれた。朝になつた時私はフックス函數の一種類の存在**することを**確信してゐた。これは高次幾何級數 la série hypergéométrique から誘導されるものである。私は

唯その結果を書き表はせばよかつたので、その爲めには唯數時間しかかからなかつた。

私は次にこの函數を二つの級數の商として表はさうと思つた。この考は全く意識的反省的であつて楕圓函數との類似によつて導かれた。私はもしこの級數が存在するならば、その性質はどういふものでなければならぬかをたづねて、容易にテータ・フックス函數と呼ぶ級數を作ることが出來た。

此時私は鑛藝學校に開かれる地質學上の會に列するため、當時住んでゐたカァン Caen を離れた。旅中の出來事が數學上の仕事を忘れさせた。クウタンス Coutances に着くと、私達は何處かに散策に行く爲め乘合馬車に乘つた。私が足を昇降段にかけた時、それまで心中に何の準備もなかつたのに、突然かういふ考が頭に浮んだ。私がフックス函數を定める爲めに用ゐた變換は、非ユークリッド幾何學のそれと同一であると。私は吟味して見なかつた。その時間がなかつた、といふのは馬車に乘ると直ぐ又會話が初まつたから。しかし私は直に全く確實だと感じた。カァンに歸つて私は唯氣休めの爲めにゆつくりと吟味をした。

私は次に數論の問題の研究にとりかゝつたが、眼に見えて大した結果もなく、又それが私の前の研究に少しでも關係があり得ようなどとも思はなかつた。巧くゆかないのに嫌氣がさして、二三日海岸へ遊びに出かけ、まるで外の事を考へてゐた。或日斷崖を散歩してゐると、不定三項二次形式の整數論的變換 Transformations arithmétiques des formes quadratiques ternaires indéfinies は非ユークリッド幾何學のそれと同一だといふ考が、いつもと同じ簡潔さ、突然さ、直接な確實さを以つて浮んで來た。

カァンに歸つて私はこの結果を考へ直し共の結論を引き出した。二次形式の例は又私に高次幾何級數に對應するもの以外にもフックス群のあることを示した、私はそれにテータ・フックス級數の理論を應用することができ、隨つて高次幾何級數から導かれたもの——これがその時迄私の知つてゐる唯一のものであつた——の外にもフックス函數の存在するといふ事を知つた。私は勿論この函數のすべてを作らうと考へた。私は組織的な攻擊をして一つ一つにすべての前進堡を占領した。しかしまだ陷とし得ない唯一の前進堡があり、それが陷ちれば要塞の主部も陷落する筈であつた。しかし私のあらゆる努力も最初は唯、それでなくとも前から可なりあつた困難を一層明に私に知らせるだけであつた。これらの仕事はすべて全然意識的にしたのである。

その時私は軍務に服する爲めモン・ヴァレリアン Mont-Valérien に出發した。それ故私は全く異つた仕事をしてゐたのである。或る日大通りを步いてゐると、私の邪魔をした難點の解法が突然解つた。私はそれを直に深く研究することはしなかつた。私が再びこの問題にとりかゝつたのは、やつと兵役がすんだ後であつた。總ての要素は出來てゐたから、唯それを集めて整頓すればよかつた。かうして私は仕上げの論文を一氣に何の苦もなく書き下した。

私はこの一例にとゞめておかう。これ以上例を增す必要はない。私の他の研究についても、全く似た樣な話をするだけであり、又「數學教育」の調査に於て他の諸數學者の語る觀察も、これを確めるだけであらう。

先づ最初に目につく事は、以前からの長い無意識な活動が突然な悟り、明瞭なあらはれとなつて出現することである。私はこの無意識な活動の役目は、數學上の發見に於ては爭ふ事の出來ないものと思ふ。そして他のこれ程明瞭でない場合にも尙その痕跡が見出される。何か難かしい問題を解かうとする時には、屢〻最初は唯仕事に

着手したといふだけで何の結果も得られない。次に幾らか休息し再び机に坐る。最初の半時間はやはり何ものも得られない。次に突然に決定的な考が心の中に現はれる。之は意識的のはたらきが中止され、休息のために精神が力と新鮮さとを得た爲に、よりよくはたらく様になつたのだとも云はれるが、それよりも、休息中に無意識なはたらきが續き、次にその結果が、前例と全く同じ様に、幾何學者に現はれたといふ方が一層ほんとうらしい。唯この啓示が、散歩や旅行中に現はれる代りに、意識的な勉强の期間中に、而も精々分析の役を勤めるに過ぎないこの意識的な努力とは獨立に現はれたのである、この努力が恰も、休息中に得られながら尙無意識に止まつてゐた結果に、意識的な形を與へる刺針ででもあるかの様に。

玆にこの無意識のはたらきの狀態について、今一つ別の注意すべき事がある。それはこの事が、意識的な努力がその前に先だち又後に續かなければ不可能であり、又どんな場合にも效の少いといふ事である。何の好結果も得られないと思はれる様な、又進路を誤つたとも考へられるやうな、有意的な幾日間かの努力をした後でなければ、この突然な靈感は決して現はれない。（この事は前述の諸例が旣に十分に證明してゐる）。それ故この努力は人の思ふ様に無駄ではなかつたので、これが無意識の機械を發動させたのであり、それがなければこの機械は動かず、何の結果も得られなかつたであらう。

靈感後の第二期の意識的な努力が必要なことは尙一層容易に理解される。それは靈感の結果をはたらかし、その直接な結論を導き出し、それを整理し、證明を記し、とりわけそれを吟味しなければならない。私は靈感に伴ふ絕對確實の感じを述べた。あの引用の例の場合には、この感じは嘘ではなかつたし、又多くの場合にさうではあるが、これが例外のない規則だと信ずる事は愼まなければならない。この感じは同じく潑剌としてゐながら、屢々吾々を欺くことがある。そのことは證明の後でなければわからない。私は特に自分が朝又は夜、床の中で半醒の狀態で思ひついた考についてこの事を經驗した。

かういふ譯で玆では次の様に考へざるを得ない。今迄述べて來た所によると、無意識な自我、所謂潛在の自我は數學的發見に於て重要な役目を演ずることになる。併し潛在的の自我は通常全く機械的なものと考へられてゐる。然るに吾々は、數學的の仕事が單純な機械的な仕事でなく、又何かの機械に――それがどの様に完全なものであらうとも――託することの出來ないものであることを見て來た。それは單に規則を應用するとか、何か一定の法則に從つて、出來るだけ多くの組合せを作り出すとかではない。こんな風に作られた組合せは、極めて多數で、無用で、邪魔氣なものであらう。眞の發見者の仕事は、無用な組合せを捨て去り、或は寧ろそんなものを作り出す勞を省く様に組合せの中に選擇を施すことである。そしてこの選擇を導くべき規則は、極めて纎細微妙であり、正確に言葉で云ひ表はすことは殆ど出來ない。それは說明されるより、寧ろ感じらるべきものである。かういふ事情であるのに、どうしてこの規則を機械的に應用し得る様な篩を想像することが出來よう。

そこで第一の假說が現はれる。潛在的の自我は決して意識的の自我に劣るものではない。それは純粹に機械的ではなく、識別することが出來、敏感であり微妙であり、選擇し豫見することが出來る。それどころか、それは意識的の自我が失敗する場合にも成功する故、後者よりも更に炯眼なのである。一言に云へば、潛在的の自我は意識的の自我より勝れてゐるのではなからうか。諸君はこの問が如何に重要であるかがおわかりであらう。ブ－

トルー氏 Boutroux は最近の講演で、全く違つた事柄についてこの問題がどうして現はれるか、又それを肯定すればどんな結果となるかといふ事を示してゐる。（尙同氏の著書、科學と宗教 Science et Religion. 三一三頁以下を見よ）

さて吾々は上述の事柄からして、どうしてもこの問に然りと答へなければならないだらうか。敢て云へば私としてはこれを受入れたくはない。それ故再び事實に戻つて、それが何か他の說明を許すか否かを調べて見よう。

多少續いた無意識的なはたらきの後、突然一種の悟得の狀態で精神に現はれる組合せが、通常有用豐富なものであることは確であつて、これは最初の選擇の結果と思はれる。この事から潜在的の自我は、微妙な直觀に依つて、この組合せが有用なことを豫知し、その他のものを作らなかつた、或は又恐らく他の組合せをも作つたが、それは無用のものであり尙無意識にとゞまつてゐる、といふことが出來るであらうか。

この第二の見地では、總ての組合せは潜在的自我の機械的な作用の結果作られるのであるが、唯有用なものだけが意識の領域に出て來るのであらう。しかしこれは尙甚だ神祕的である。吾々の無意識作用で生じた幾千の中、或るものは內に留まつてゐるのに、或るものは閾の外に呼び出されるのはどういふ譯か。彼等にこの特權を與へるものは單に偶然であるか。勿論さうではない。例へば感覺を刺戟するすべての物の中、他に原因がなければ、最も强度なものが吾々の注意を惹くであらう。もつと一般的に云へば、特權づけられた卽ち意識的になり得る無意識現象は、直接にか間接にか吾々の感受性を最も深く動かすものである。

一見悟性以外には關係がないと思はれる數學的の論證に就て感受性をもち出すのを見て、諸君は驚くかも知れない。がそれは數學的の美、數と形式との調和、又幾何學的優美の感情を忘れるからであらう。すべての眞の數學者の認めるものは眞の美的感情であつて、これは感受性によるのである。

ところで吾々がこの優美典雅の特質を歸すべき、又吾々の心中に一種の美的情緖を起さしめ得る所の數學的の事柄とは何であるか。それは調和的に配列された要素から成り、吾々がその細部を硏究しながら、たやすく共全體をもつかみ得る所のものである。この調和は美的要求の滿足であると同時に、それが支へ導く精神にとつては扶助である。そして同時に、吾々の眼前に全體を整然と排列し、吾々に數學的法則を豫感せしめる。處が旣に述べた通り、注意を惹く價値があり有用であり得る唯一の數學的事實は、吾々に數學的法則を認識させ得るものである。かうして吾々は次の結論に達する。有用な組合せとは、正に最も美しい組合せである。卽ち、すべての數學者の認めるこの特殊な感受性を最もよく魅し得る所のものである。而も素人はこの感受性を知らず、往々にしてこれを嘲笑しようとする。

そこでどういふこととなるか。潜在的の自我が盲目的に作つた無數の組合せの中、殆ど大部分は興味もなければ有用でもなく、又正にこの爲めに、それは美的感受性にはたらかず、意識は決してそれを認めないであらう。唯その中の或るもののみが、調和的であり、隨つて有用であると共に美であり、前述の幾何學者の特殊な感受性を動かし得るであらう、そしてこの感受性が一度動かされると、吾々の注意はその組合せに向ひ、かうしてそれが意識的となる機會を生ずることになるのであらう。

これは假說にすぎないが、尙この事を確め得る一つの觀察がある。突然な悟得が數學者の心中に現はれた時は

殆ど常に間違ひのないものであるが、しかし時としては、前に述べた樣に、それが吟味の試みに堪へ得ない樣なこともある。しかしながらこの誤つた考が、若し正しいものであつたなら、吾々の數學的美の自然的な本能を滿足させ得たものであつたらうといふことは、殆ど常に認められるのである。

この樣にして、前述の微妙な篩の役を勤めるものはこの特殊な美的感受性であり、そしてこれを缺く人々が決して眞の發見者となり得ない所以も、これによつて十分理解出來る。

しかし、これですべての困難が無くなつたのではない。意識的の自我は狹く制限されて居るのに、潛在的の自我については、吾々はその限界を知らない。そしてこれが、意識的の全生涯も捕へ得ない程多數な種々の組合せを、潛在的自我が短時間のうちに作り得ると想像することの出來る所以である。しかし、この限界も無いのではない。この潛在的自我が、想像も及ばぬ程多くの、總ての可能な組合せを作り出す、といふことがあり得るであらうか。それにもかゝはらず、それはあり得なければならないと思はれる。何故なら、若し小部分の組合せしか出來ないなら、又若しそれが偶然に生ずるのなら、選擇される筈の正しい組合せがその中にある機會は、非常に少いであらうから。

恐らくこれの說明は、常に總ての有效な無意識なはたらきに先き立つ最初の意識的なはたらきの中に求めなければならないのであらう。若し粗笨な比較が許されるなら、組合せを作るべき未來の要素を、エピキュール Epicure の鉤をもつた原子として表はさう。精神が全く休んでゐる間は、この原子は動かずに謂はば壁に懸つてゐる。それ故この完全な休息がいつまで續いても、原子は衝突もせず隨つてその間に何等の組合せも生じない。

之に反して、見かけは休んでゐても無意識的に働いてゐる時には、その中の幾つかは壁から外づされて動いてゐる。そしてその容れられた空間中をあらゆる方向に、例へば蚊群の樣に、又一層學問的な比較をすれば氣體運動論に於ける氣體分子のする樣に、縱横に動いてゐる。かうしてそれらの相互の衝突は新らしい組合せを生ずることが出來る。

初めの意識的なはたらきの任務は何であるか。それは明に、この原子の或るものを動員し、壁からはづし、發動させることである。人々はこれを組合せようとして幾千の樣々な方法で動かすが、滿足な組合せを見出すことは出來ないために、何の好結果も得られなかつたと信ずる。しかし吾々の意志に依つてそれらに與へられたこの擾亂の後にも、原子は彼等の最初の休息には歸らず、自由にその舞踏を續ける。

處が吾々の意志は出鱈目に選擇するのではなく、或る全く定つた目的を追ふのである。それ故動員された原子も勝手な原子ではなく、それから正當に所求の解法を期待し得る所の原子である。動員された原子は、自分の走路に反對に來る所のものと衝突して、或は彼等同志で、或は靜止してゐる他の原子と、組合せを作るであらう。この比較が極めて粗笨なものであることは今一度お斷りする次第であるが、私はこれ以外にどうして私の考を理解させ得るかを知らないのである。

たとへどんな組合せであらうとも、組合せとなり得る程のものは、少くともその要素の一つは吾々の意志で自由に選擇された原子である。所が爾に正しい組合せと名づけた所の組合せがあるのも明にこれらの中にである。恐らく茲に第一の假說では逆說と思はれたものを緩和する方法があるのであらう。

今一つの觀察がある。この無意識的なはたらきは決して、ある一定の規則を應用するに過ぎないが少々長い所の計算を、出來上つたものとして提供することはない。潜在的な自我は全く自働機械的であつて、全然機械的なこの種の働きには特に適してゐるとも考へられる。それで一晩、乘法の因數について考へれば、眼の醒めた時には積が出來上つてゐるかも知れないとか、或は又代數的計算例へば吟味は、無意識にすることが出來るとも思はれるが、觀察の證明する所によると決してこんな事はない。無意識的なはたらきの結果たるこの靈感から期待し得ることは、この樣な計算の出發點であり、計算そのものは、この靈感に次ぐ第二期の意識的な努力を俟たなければならず、それによつてこの靈感の結果を吟味し、又それからの結果を引き出す。この計算の規則は嚴密複雜であつて、秩序と注意と意志とを要し、隨つて意識を必要とする。これに反して潜在的の自我に於ては、私が自由と呼ぶ所のもの——若し單に秩序の缺けてゐること、偶然から生じた無秩序をかう名付けるなら——が支配する。唯正しくこの無秩序なことが、思ひがけない配合を許すのである。

最後の注意をしよう。私が前に自分の觀察を述べた時、自分の意志に反して考へた興奮の一夜の事を話した。かういふ場合は屢々ある。そして私が擧げた場合の樣にこの變則な腦活動が肉體的興奮から生ずる事は必要なのではない。扨て思ふにこの場合には吾々自身が本來の無意識的なはたらきを助けてゐるので、この無意識的なはたらきは過度に興奮した意識に一部分知覺される樣になるが、その爲めにその本性を變へることはない。かうして吾々は二種の機構、言ひ換へれば二つの自我の働く方法を區別するところのものを、朧氣ながら知ることが出來る。そして私がかうして成し得た心理的觀察は、私の述べた意見を大體に於て確めると思ふ。



この事は實際必要である。といふのはこれがつきるところ假說であり、又假說にとゞまるからである。これは極めて興味ある問題であり、私はそれを讀者諸君に委ねたことを悔いない。

# 第四章　偶然

## 一

「偶然の法則といふことは如何にして云ひ得るか。偶然とはすべての法則の反對ではないか。」ベルトラン Bertrand はその確率論 Calcul des Probabilités の冒頭でかういつてゐる。蓋然 Probabilité とは確實の反對である。卽ち吾々の知らないもの、隨つて吾々の算定出來ないものと思はれる。玆に少くとも外見上は矛盾があり、この事については既に幾多の人が論じてゐる。

先づ偶然とは何であるか。古人は現象を分けて、確實に立てられた調和的な法則に從ふと思はれるものと、偶然に歸せられるものとに區別した。後者はすべての法則に反し、吾々が豫期することの出來ないものであつた。いづれの領分に於ても、正確な法則はすべてを決定するのでなく、唯限界を示すだけであり、その中では偶然が働くことの出來るものであつた。この考では、偶然といふ言葉は正確な客觀的な意味を持つてゐたので、或る人にとつて偶然なものは、他の人にも、又神にとつてさへ偶然なものであつた。

しかしこの考はもはや吾々のものではない。吾々は絶對的な決定論者になつたし、又人間の自由の權利を保存しようと願ふ人々でさへも、少くとも無機物界では全然決定論が支配することを許してゐる。どんな些細な現象にも、總て或る原因があり、自然の法則を知り盡した全能の精神は、その現象を世界の初めから豫知し得たであらう。若しそんな精神があつたとすれば、吾々は彼と賭をすることは出來まい、吾々はいつも負けるであらう。

まことに彼にとつては偶然といふものは無意味であり、寧ろ彼にとつては偶然は存在しなかつたであらう。吾吾にとつて偶然が存在するのは、吾々の無力無智な爲めである。そしてこの無力な人間の中に於てさへ、無學者にとつて偶然なものも、學者にとつてはもはや偶然ではない。偶然は吾々の無智の尺度である。偶然の現象といふのは、定義に依つて、吾々がそれについての法則を知らぬものの謂である。

しかしこの定義は極めて滿足なものであらうか。カルデアの最初の牧人が眼に天體の運行を追うた時、彼等はなほ天文學の法則を知らなかつた。しかし彼等は、それらの天體が偶然に動いてゐるなどとは、夢にも云はなかつたであらう。現代の物理學者が、或る新現象を研究してその法則を火曜日に發見する樣な場合、彼はこの現象を偶然的だと月曜日に云つたであらうか。それのみでなく、吾々はある現象を豫測する爲に、屢〻ベルトランの所謂偶然の法則を採用しはしないか。例へば氣體運動論に於て、前から知られてゐたマリオット Mariotte とゲイ・リュサック Gay-Lussac との法則に再び出會ふが、それは氣體分子の速度が不規則的、卽ち偶然的に異つてゐるといふ假定によつてである。もしその速度が何か或る簡單な法則に支配されてゐたら、もしその分子が所謂組織立てられてゐたら、そしてもしそれが何かの秩序に從ふものであつたなら、吾々の觀察し得る是らの法則は遙に複雜なものとなつたであらうとは、凡ゆる物理學者のいふ所である。吾々の結果を得ることの出來るのは偶然のおかげ、卽ち吾々の無智のおかげである。そこでこの偶然といふ言葉が、唯單に無智の同意語であるとする

と、これはどういふ意味であらうか。それは次の様に云ひ換へられるであらうか。

「諸君は生ずべき現象を豫言する様に私に求める。若し不幸にして私がこの現象の法則を知つてゐたならば、面倒な計算をしなければならないから、私は諸君にお答へする事を斷念したであらう。所が幸ひ私はその法則を知らないから直樣お答へすることが出來る。そして一層驚くべき事は、私のその答が正しいだらうといふことである。」

して見ると、明に、偶然とは吾々の無智に名づけた名稱以上のものでなければならない。そして吾々は原因の不明な現象の中に、確率の計算から豫め知られる偶然的の現象と、偶然的ではないがそれを支配する法則を定めない限り吾々に全然わからぬ現象とを、區別しなければならない。そして偶然的の現象そのものについて確率の計算が與へる智識の眞なることは、この現象が一層明に知られる様になつた時にも變りないことは明である。

生命保險會社の支配人は、各被保險者が何時死ぬかを知つては居ないが、確率の計算と大數の法則とに信頼してゐる。而も株主に配當をして居る所を見れば、彼は間違つてはゐないのである。非常に眼のきく、そして無遠慮な醫師が證書の署名された所へ來て、支配人に被保險者が何時まで生きるかを敎へたところで、此の配當はなくなりはしない。この醫師は支配人の無智を除きはするであらうが、明にこの無智の結果ではないところの配當には、何の影響をも與へないであらう。

## 二

偶然についての一層よい定義を見出す爲には、誰が見ても偶然的で、しかも確率の計算が應用されさうな幾つかの事實を調べなければならない。そして次にそれらの共通な特徴が何であるかを探ねよう。

先づ最初に選ぶのは不安定な釣合の例である。若し圓錐がその頂點を下にして立つてゐるなら、それが倒れるだらうといふことは直にわかるが、どちらの方向へかはわからない。これは全く偶然によつて定まるものと思はれる。若しこの圓錐が完全に均齊で、その軸が完全に鉛直で、重力以外の何の力も受けないなら、それは全く倒れまい。しかし僅かでも均齊が缺けて居れば、どちらかの方向に僅か傾き、又どんなに僅かでも傾きさへすれば全く倒れてしまふであらう。或は完全に均齊であるとしても、極く少し搖れるとか風が當るとかすれば、角にして何秒か傾き、それだけで、倒れるには十分でもあるし、又最初傾いた方へ倒れるから、その方向を定めるにも十分であらう。

吾々が見逃す様な極く些細な原因が、吾々の見過す事の出來ない様な大きな結果を定める場合、吾々はこの結果が偶然によるといふのである。若し吾々が自然の法則と宇宙の初めの狀態とを正確に知つてゐたならば、その世界のその後の狀態を正確に豫言することも出來たであらう。しかし自然の法則が吾々にとつて明になつた場合に於ても、最初の狀態は吾々に近似的にしか知られないであらう。若しこれに依つてその後の狀態を同じ近似さで豫知し得るならば——これ以上は望めないことである——吾々はこの現象は豫知せられた、それは法則に從ふ、といふ。がいつもさうは行かない、初めの狀態に於ける少しの差が、最後の現象に於ては非常な差を生む樣な事もあるかも知れない。前者についての僅かな誤は、後者に就ての莫大な誤を生ずるであらう。かうして、豫知す

ることは不可能となり、偶然な現象が存在することとなる。

第二の例も第一のものとよく似たものであるが、氣象學からの例をとらう。氣象學者が或る程度迄確實に天氣を豫報する事は、何故あの樣に難かしいのであるか。又降雨や暴風雨さへやが、何故偶然に起る樣に思はれる――それなればこそ多くの人々が、日蝕を祈禱で求めるのを滑稽な事と考へてゐながら、平氣で雨乞をしたり晴天を祈つたりするのであるが――のであるか。吾々は、一般に大氣が不安定な釣合にある樣な所に、大きな變化の起る事を知つてゐる。氣象學者はその釣合が不安定である事、旋風が何處かに現はれる事をよく知つてはゐるが、何處にといふことが出來ない。或る點で十分の一度多いか少いかに依つて、旋風が此處には出來て彼處には出來ず、免かれる筈であつた地方を荒らす、といふ樣な事にもなる。もしこの十分の一度を知つて居たら、それを豫知することも出來たであらうが、觀測がそれに十分な程、密でもなければ正確でもなく、その爲めにすべてが偶然の干渉にかゝる樣に思はれる。吾々は茲にも矢張り、觀測者にわからぬ樣な小原因と、時として恐るべき災害ともなる大結果との間の、同樣な對照を見出すのである。

次にこれとは異つた例、小惑星の獸帶上の分布を考へよう。それらも最初はどれだけかの經度の中に分布されてゐたのかも知れないが、その平均運動が違ひ、長い年月回轉してゐた爲め、今では事實上全獸帶にわたつて偶然によつて分布されてゐるといつてもよい。それらが太陽に對する距離の、或は同じことになるが、それらの平均運動の間の、最初の極く僅かな差が現在の經度の大差を惹起したのである。一日の平均運動で千分の一秒違へば三年間に一秒、一萬年に一度、三四百萬年に全圓周だけの差を生ずるであらうが、この位の年月は、小惑星がラプラースの星雲から生じてからの時間に比べれば何であらう。それ故、茲にも再び、小原因と大結果、一層正しく言へば、原因に於ける小差と結果に於ける大差とがある。

球ころがしの遊戲も見かけ以上に前例と相似たものである。交互に赤と黑との百區域に分けられた盤上で、軸の上に廻轉出來る針を考へよう。若しそれが赤の區域に止まれば勝となり、さもなければ負となる。萬事は明に針に與へた撃力に依るのである。針は十回轉或は二十回轉するものと假定しても、それを強く押すか弱く押すかに依つて、早くも遲くも止まるだらう。只その撃力の千分の一か二千分の一かが變れば、針が黑の區域に止まるか赤の部分に止まるかには十分である。この差異は筋覺の感じ得ないものであり、又一層銳敏な器械ででも測れないものであらう。それ故私は、自分の打つた針がどうなるかを、豫知することは出來ない。これが私が胸を躍らせ、總てを偶然の手に期待する所以である。原因に於ての差異は、感じられない程であるが、結果に於ての差異は、私にとつて甚だ重大である、私の全賭金に關係するのであるから。

## 三

これに關して、私の題目から少々離れた考察をする事を許して頂きたい。或る哲學者が數年前、未來は過去に依つて定まるが、過去は未來に依つて定められないと云つた。言ひ換へれば現在を知つてゐれば未來を知る事は出來るが過去を知ることは出來ないといふのである。何故なら、一つの原因は一つの結果しか生じないが、同一の結果は多くの原因から生じ得るからと彼はいふ。科學者は誰もこの結論に同意出來ないのは明である。自然法

則は、前件に依つて後件が定められると同じく、後件に依つて前件が定められる樣に前件と後件とを結びつけてゐる。併しこの哲學者の誤謬の源は何であつたのであらうか。吾々はカルノー Carnot の原理に依つて、物理現象が不可逆的であり、世界は均一に向つて進むといふ事を知つてゐる。溫度の異つた二物體が接して居れば、暖い方は冷めたい方に熱を與へる、それ故吾々は、溫度が等しくなる事を豫知することが出來る。併し一度溫度が等しくなつた以上、以前の狀態を尋ねられても、吾々は何と答へることが出來よう。無論一物體は暖く他は冷めたいと云ふだらうが、併し、この二物體のどちらが前に暖かだつたかを、云ひ當てることは出來なからう。

しかし乍ら、實際は、溫度が完全に等しくなる事はない。只溫度の差が零に向つて漸近線的に近よるだけである。そこで吾々の寒暖計がそれを見分けることの出來ない樣な時が來るのであるが、もし寒暖計が千倍も十萬倍も鋭敏であつたとすれば、尙僅かな溫度の差があり、一方の物體は他方のよりも少し暖かいことを知つたであらうし、又かうして此方が以前他のものよりも遙に暖かであつたと云ひ得たでもあらう。

それ故茲では前例で見たと反對に、原因に於ての大差と結果に於ての小差とがある。フラマリオン Flammarion は甞て光以上の高速度で地球を遠ざかる觀測者を想像した。その觀測者にとつては時間はその符號を變へる。歷史は逆轉しワーテルロー Waterloo はオステルリッツ Austerlitz に先立つであらう。そして彼にとつては、結果と原因とは逆となり、不安定な平衡もその例にもれなからう。宇宙の不可逆性に依つて、總ての物は彼には一種の混沌から出て不安定な釣合に到る樣に思はれ、全自然は偶然の手に委ねられてゐるかの樣に見えるであらう。

## 四

さて茲に多少異つた性質の見られる樣な例がある。先づ氣體運動論をとらう。氣體の充ちた容器をどういふ風に言ひ表はせばよからうか。大速度をもつた無數の分子が、この容器の中で各方向に縱橫に飛んで居り、始終壁にぶつかり或は互に衝突する。又この衝突は樣々な狀態で起る。茲で何よりも眼につくのは、原因が小さいといふ事ではなくて、それが複雜だといふ事である。併し前者の要素もこの中に含まれて居るのであつて大切な役割を勤めてゐる。もしある分子がその道筋から、氣體分子の活動範圍の半徑に比べて、ほんの僅かだけでも右か左かに逸れると、その分子は衝突を免かれるか或は異つた狀態で衝突し、衝突後の速度の方向も恐らく九十度とか百八十度とか變る樣なことにもならう。

それのみでなく、上に見た樣に、分子が衝突後にある有限量だけ逸れる爲には、衝突前に無限小の量だけ逸れればよいのである。そこで若し分子が二回續けて衝突するならば、そして第一衝突前に第二次的の無限小量だけ逸れるならば、第一衝突後には第一次的の無限小量の逸れをなし、第二回衝突に有限量の逸れを生ずるのに十分であらう。而も分子は唯二回衝突するのみではなく每秒非常に多くの衝突をするであらう。隨つて、若し第一回の衝突が逸れを非常に大きくA倍にするとすれば、n回の衝突後には$A^n$倍になるであらう。それ故嘗にAが大きい爲め、即ち小原因が大結果を生む爲めばかりでなく、尙又指數が非常に大きいため、即ち衝突が非常に多數であり原因が複雜である爲めに、この逸れは非常に大きいものとなるであらう。

第二の例に移らう。驟雨の場合に、雨滴の分布が偶然である樣に見えるのは、何故であらうか。之も矢張り、雨滴の出來る原因が複雜な爲めである。イオンは大氣中に擴つてゐるが、長い間、絕えず變化する氣流に從ひ、又狹い範圍の渦の中に引き入れられ、遂にはその分布は、最初の分布と全く關係のないものとなつてゐる。急に溫度が降り、水蒸氣が凝縮し、この各イオンは雨滴の中心となる。この雨滴の分布がどうであるか、又各舖石の上に幾つ落ちるかを知るには、イオンの初めの位置を知るだけでは足りない。何千といふ、微細な、氣紛れな、氣流の影響を計算しなければならないだらう。

水中に粉末を浮游させる場合も、これと同樣である。容器の中では水流が或る法則――それについて吾々は、それが非常に複雜である、といふ事しか知らない――に從つて動いてゐる。幾らか時間が經てば、この粉末は器中で偶然な卽ち均一な分布となるであらうが、これは正しく、その水流が複雜な爲めである。もしそれが或る簡單な法則に從ふなら、例へば容器が回轉し、水流が容器の軸の周りを圓狀に廻流したならば、もはやこれと同じではなく、各粉末は、最初の高さと軸からの最初の距離とを、保つてゐるであらう。

二種の液體或は二種の粉末の混合を考へても、同樣の結果に達するであらう。粗雜な例をとるならば、カルタをきる場合も同樣であらう。一度きるたびに、カルタは（置換論で論ずる樣な）順列をうけるが、最後に實現する順列はどんなものであらうか。ある特別の（例へば順列前に$\Phi(n)$といふ位置にあつた札を$n$といふ位置に移す樣な）順列についての確率は、きり手の癖に依つて定まる。しかしもしこのきり手が永い間札をきれば、引續き幾回も順列をすることとなり、最後に現はれる順序は、もはや偶然のみに支配されるものであらう。といふのは、すべての可能な順序が同樣の確からしさであるといふ意味である。この結果は、順次の順列の回數の多いこと、卽ち現象の複雜なことに依つて、生じたのである。

最後に、誤差論について一言しよう。玆では原因が、複雜であり重複してゐるのである。最良の器械を用ゐても、觀測者の誤に陷る機會は、どんなに多い事であらう。吾々はその大きなものを見出すこと、避けることに、專心しなければならない。それらは系統的誤差を生ずる所のものである。しかもそれを消去することが出來たとしても、尙小さいながら其結果が積り積れば危險なものとなる樣な誤差が殘つてゐる。そこから意外の誤謬が生ずるのであるが、その原因があまり複雜であまり多數である爲めに、吾々はこれを偶然に歸する。玆でも矢張り小さな原因があるのであるが、しかしその各々は小さな結果を生ずるに過ぎないので、その結果が恐るべきものとなるのは、その結合と多數とに依るのである。

## 五

尙第三の見地をとることも出來るが、これは前二者程重要なものではなく、私もそれ程重きを置いてゐない。ある事柄を豫知しようとして、それに先き立つ事柄を調べる場合、吾々は、それ以前の狀態を尋ねることに努める。併し吾々は、宇宙のあらゆる部分についてさうすることは出來まいから、その事柄の生ずべき點の附近に起る事、或はその事柄に關係あると思はれる事を、知るだけで滿足する。完全に調べる事は不可能であるから、選擇をしなければならない。しかし一見、豫知しようとする事柄に全く無關係で、何の影響もあるまい、と思つて

顧みなかつた事情が、豫期に反して重大な役目を演ずる場合も、あるかも知れない。

ある人が所用があつて道を通る。彼の仕事を知つてゐる人は、どういふ譯で彼がその時間に家を出、何の爲めにその道を通つたかを、知つてゐるでもあらう。屋根の上に屋根屋が働いてゐる。それを雇つた人は、或る程度迄は、屋根屋のする仕事を豫知することも出來よう。しかし、かの人も屋根屋のことを知らなければ、屋根屋もその人のことは知らない。彼等は互に全く無關係な世界に住んでゐるかに見える。而もそれにもかゝはらず、屋根屋が瓦を落して、その人を殺す。そして吾々は何の躊躇ふこともなく、それは偶然だといふであらう。

吾々は無力の爲めに、宇宙全體を包容する事は出來ない。それ故、止むを得ず宇宙を斷片に分ける。吾々はなるべく人爲的でない様な別け方をしようとするのであるが、尙ほ時として、その斷片が互に作用し合ふ様な事がある。そしてこの相互作用の結果は、吾々には偶然と見えるのである。

これは偶然を解する第三の見方であるか。いつもさうといふ譯ではない。事實多くの場合は、第一又は第二の場合に歸するのである。普通は互に無關係な二つの世界が、かうして相互に作用する様になる場合には、この相互作用の法則は、いつも非常に複雜なものでなければならない。その上、この二つの世界の初めの狀態に極く僅な差があれば、この相互作用は起らなかつたでもあらう。この人が一秒遲く通るか、屋根屋が一秒早くその瓦を落すかする爲めには、ほんに些細な事情で十分だつたであらう。

## 六

以上述べた所ではまだ、何故偶然が法則に從ふか、といふことを説明してゐない。吾々が一の場合の結果をではないまでも、平均の結果を豫知し得る爲めには、原因が小さい事、複雜な事で十分であるか。この問に答へるためには、再び前に引いた例をとるのが最上であらう。

球ころがしの例で始める。私は、針の止まる點は、初めに針に與へた撃力に依る、と云つた。この撃力がこれこれの價をとる確率は、どれ程であるか。それについて私は何も知らないが、この確率が連續的な解析函數で表はされるといふことは拒み難い。かうして撃力が $a$ と $a+e$ との間にある確率は、$e$ が極めて小さくさへあれば、それが $a+e$ と $a+2e$ との間にある確率と明に等しいであらう。これはすべての解析函數に共通な性質である。函數の小さい變化は、變數の小さい變化に比例する。

しかし吾々は、撃力の極小さな變化も、針が最後に止まる區劃の色を變へるに足ると、假定した。$a$ から $a+e$ までは赤で、$a+e$ から $a+2e$ までは黑だとすれば、赤の各區劃の確率は、その次の黑の各區劃のと同じであり、隨つて、赤の全確率と黑の全確率とは相等しい。

この問題で與件となるものは、初めの撃力の確率を表はす、或る定つた解析函數である。しかしこの理論は、すべての解析函數に共通な性質に依るのであるから、この與件がどんなであらうとも、矢張り正しい。それで結局、吾々はもはやこの與件を少しも要しない、といふことになる。

球ころがしの例について述べた事は、小惑星の例にもあてはまる。獸帶は、その上に創造主が、或る何かの法則に從つて、種々異つた初撃力を與へて、多數の球を投げた巨大な盤であるとも見られる。それらの球の現在の

分布は、前例と同じ理由で均一であり、この法則とは獨立である。かうして吾々は、原因に於ける小差が結果に於て大差を生ずるに足る場合には、何故現象が偶然の法則に從ふかを知る。そしてまさしくこの差の小なる事、又連續函數の小さい增加は變數の小さい增加に比例することに依つて、この小差異の確率は差異そのものに比例する、と見ることが出來るのである。

これと全く違ひ、主として原因の複雜なことが關係する所の例に移らう。カルタをする人がカルタをきるとする。きるたびに彼は札の順序をかへ、而も幾通もの仕方で變へる事が出來る。說明を簡單にするために、唯三枚の札を考へる。きる前にそれ〴〵123の順序であつた札は、きつた後は

123, 231, 312, 321, 132, 213,

の順序となることが出來よう。

この六つの各假定は可能なものであり、それぞれ $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ の確率をもつてゐる。

この六數の和は一に等しい。併し吾々がそれについて知るのは、唯それだけのことである。この六つの確率は勿論きり手の癖によつて違ふが、吾々はその癖を知つてゐない。

第二回以下でも、此事は同樣な條件で繰返される。卽ち例へば、$p_4$はいつも、第$n$回目のきりの後、第$n+1$回目のきりの前に於て123の順序であつた札が、第$n+1$回目のきりの後に321の順序となる確率を表はす、といふ意味である。そして此事は、$n$なる數が何であつても、きり手の癖、きり方が變らないから矢張り正しいであらう。

しかし若しこのきる回數が非常に多いと、第一回のきりの前には123の順序であつた札が、最後に

123, 231, 312, 321, 132, 213,

の順序をとり得るが、その六假定の確率は明に同一で$\frac{1}{6}$に等しく、又この事は吾々の知らない $p_1 \ldots\ldots p_6$ なる數が何であらうとも正しいであらう。きり方が多數な事、卽ち原因の複雜な事が、この一樣性を生じさせたのである。

この事は三枚以上の時にも其儘當てはまるだらうが、三枚でさへその證明は複雜となるだらうから、私は唯二枚について證明するだけで滿足しよう。今度は$p_1$と$p_2=1-p_1$との確率をもつ二假定 12, 21, しかない。$n$回きつて、若し最後に始めの順序であれば私が一フラン勝ち、最後に逆となれば負けとする。さうすれば、私の數學的の期望は $(p_1-p_2)^n$ であらう。

この差 $p_1-p_2$ は勿論1より小さい、隨つて若し$n$が非常に大きければ、私の期望は零となるであらう。吾々は、この勝負が平等であるのを知る爲めには、$p_1$と$p_2$とを知る必要はないのである。

併しながら、若し$p_1$と$p_2$との中、一數が1に等しく他が零であれば例外となり、この場合にはうまく行かないだらうが、それは初めの假定があまり簡單過ぎるからであらう。

上に述べた所は、唯、札の混交に適用されるだけでなく、すべての混合に、粉末や液體のそれにも、又氣體運動論に於ける氣體分子の混合にさへもあてはまる。この問題に戻るために、暫く、氣體の分子は、互に衝突することは出來ないが、その閉ぢ込められた器壁に衝突して、方向を變へ得るものと假定しよう。もし容器の形が十

分複雜であれば、分子とその速度との分布は、やがて一樣となるであらうが、若し容器が球形であるか直角平行柱形であれば、そうはなるまい。何故であるか。第一の場合には、中心から任意の分子の徑路迄の距離が、いつまでも變らないし、第二の場合には、各徑路と平行柱の面との角の絶對値が、變らないだらうから。

この樣にして、簡單すぎる條件といふ事を、どう解すべきかがわかる。それは何かを保持するもの、ある不變なものを保たしめるものである。ある問題に就ての微分方程式が、偶然の法則を適用し得るためには簡單すぎるか否か、といふ問は一見明確な意味を缺く樣にも思はれるが、吾々は今やその意味を知つてゐる。それがもし何かを保持してゐるなら、若し一樣な積分を許すなら、それは簡單すぎる。若し最初の條件の何かが變らないで殘つてゐるならば、最後の狀態ももはや、最初の狀態に無關係であることが出來ないのは明である。

終りに誤差論に入らう。思ひがけない誤といふものが何に依るのであるかは、吾々は知らない。しかも正にこのそれを知らないといふ事に依つて、吾々はそれがガウス Gauss の法則に從ふ事を知るのである。これは逆說（パラドクス）であるが、前の場合と稍似た仕方で說明せられる。吾々は唯一つの事、卽ち誤差が非常に多數であり、非常に些細であり、其各々は正であり得ると同樣に負でもあり得る、といふ事を知ればよい。各誤差の確率の曲線はどんなであるか。吾々はそれについては何も知らない。只それが對稱的であることを知るのみである。そこで吾々は、この誤差の結果がガウスの法則に從ふことを證明する。そしてこの結果の法則は、吾々の知らない個々の法則には無關係である。玆でも亦、結果の簡單さは、與件の複雜さそのものから生じたのである。

## 七

しかし逆說（パラドクス）はこれで終つたのではない。私はさきに光よりも速く動く人間――彼にとつては時間はその符號を變へる――についてのフラマリオンの架空的な想像を述べ、彼にとつては總ての現象は偶然に依るものと見えるといつた。この事はある見方からは正しいが、しかし或る一定の瞬間に於ては、之らすべての現象は偶然の法則に一致する樣に分布せられないであらう。何故かといふに、それは、現象が太初の混沌から生ずるのでなく調和的に展開するのを見てこれを偶然が支配してゐるとは看做さない吾々にとつてと、同樣であらうから。

これはどういふ意味であるか。フラマリオンの假想人物ルウメン Lumen にとつては、小原因が大結果を生む樣に見える。それならどうして、吾々が大結果が小原因に依ると考へる場合と、同樣にゆかないのであるか。この場合にも、同樣の推論が適用されないであらうか。

この推理に戻らう。原因に於ける小差が結果に於て大差を生ずる時には、何故この結果は偶然の法則に從つて分布されるのであるか。假に、原因に於て一ミリメートルの差は、結果に於て一キロメートルの差を生ずるとしよう。もし私が結果が偶數キロメートルに相應する場合に勝つものとすれば、私の勝つべき確率は$\frac{1}{2}$であらう。何故かといふに、その爲には原因が偶數ミリメートルに相應しなければならないからである。處が原因がある範圍內で變る爲めの確率は、この範圍が極めて小さいとすれば、その大きさに比例すると考へられる。もしこの假定が許されないとすると、もはやこの確率を連續函數で表はすことは出來ないであらう。

さて大きな原因が小さい結果を生む場合には、どうなるであらうか。此場合には、吾々は現象を偶然でないとし、反對にルウメンはそれを偶然にするのである。原因に於ての一キロメートルの差に對しては、結果に於て一ミリメートルの差が對應するであらう。原因がnキロメートルの距離にある二限界の間に含まれる確率は、矢張りnに比例するであらうか。それはこのnキロメートルといふ距離が極めて大きいから、比例するとは考へられない。しかし結果がnミリメートル離れた二限界の中に含まれる確率もそれと同じであるから、このnミリメートルといふ距離が小さいにも拘らず、それはnに比例しないであらう。それ故結果の確率の法則を連續曲線で表はす手段がない。勿論この曲線は解析的の意味、即ち横座標の無限小の變化に對して、縱座標の無限小の變化が對應する、といふ意味では連續的でもあらう。しかし横座標の極めて小さい變化に對して、縱座標の極めて小さい變化が對應しないから、それは實用的には連續的でなからう。即ち、普通の鉛筆ではこの曲線を描くことが出來なからうといふのが、私の云ふ意味なのである。

そこでどういふ結論となるか。ルウメンには原因（彼の原因、吾々にとつては結果）は必ず連續函數で表はされなければならないといふ權利はない。併しそれなら、吾々はどうしてさう云ひ得るのであるか。吾々は前にかの不安定な釣合の狀態を最初の狀態と呼んだが、それは實は其以前の長い歴史の到達點に過ぎない。この歴史の經過の間に、複雜な原因が而も永い間作用した。それらは諸要素の混合をはかり、又すべてを少くとも小範圍では一樣ならしめようとした。それらは角を削り、山を崩し、谷を埋めた。與へられた原の曲線が、どんなに氣紛れで不規則であつても、複雜な原因はそれを均らして、遂に吾々に連續的な曲線を與へる程に作用した。これが吾々の安心して連續を許し得る理由である。

ルウメンには、この樣に結論すべき同樣な理由がなからう。彼にとつては、複雜な原因は均齊平等を來たすものではなくて、却つて唯分化と不平等とを作り出すに過ぎまい。彼は太初の一種の混沌の中から益々複雜な世界の生ずるのを見、又彼の觀察する變化は、彼にとつては、彼の豫想せぬもの、豫想し能はぬものであらう。それは彼にとつて、何か或る氣紛れに依るものとも見えようが、しかもこの氣紛れは、吾々の偶然とは全く別のものであらう。といふのは、それがすべての法則に從はぬに反して、吾々の偶然は、尙自己の法則を持つてゐるからである。これらすべての點については、一層長い開展を要するであらうが、それは恐らく、宇宙の不可逆性を更によく理解する助けともなるであらう。

## 八

吾々は偶然を定義することを求めて來たが、茲に一つの疑問を呈出するのが適當であらう。この樣に偶然を出來得る程度で定義はしたが、それは客觀的の性質をもつものであらうか。

これは尤もな疑問である。私は極めて小さい或は極めて複雜な原因といふことを云つた。併し、或る人にとつて極めて小さいものも、他の人にとつては大きいことはなからうか。又或る人にとつては極めて複雜と思はれることも、他の人にとつては簡單と見えることはなからうか。私は既に一部分これに答へておいた。即ち前に、どんな場合に微分方程式が、偶然の法則を適用する爲めに簡單過ぎる樣になるかを、明確に述べたからであ

る。しかし尙他の見地から見ることも出來るのであるから、今少し詳しくこの事を吟味するのが適當であらう。

極めて小さいといふ言葉はどういふ意味か。これを理解するには前述のことに戻ればよい。ある間隔の範圍內で、確率が目立つ程度に變らなければ、その差、その間隔は極めて小さい。又何故この確率は小さい間隔內では變らないと見られるか。それは確率の法則は連續的な——啻に解析的の意味で連續的であるばかりでなく、前述の樣に實用的にも連續的な——曲線で表はされるものとしたからである。これは曲線が、唯絕對的な間隙を示さぬばかりでなく、あまり銳いあまり激しい凹凸をもたない、といふ意味である。

さて吾々がこの樣に假定し得るのは何に依つてであるか。前述の樣に、それは刧初以來複雜な原因が絕えず同一の方向に作用し、恒に世界を一樣ならしめる樣に進ませ、逆行する事を許さなかつたからである。この原因が漸次に高みを削り低みを埋めたのであり、又その爲に、吾々の確率曲線が緩やかな起伏のみとなつたのである。幾千萬年の間には一層一樣に向つて進み、この起伏は更に十倍も緩やかとなり、曲線の平均曲率半徑は尙十倍も大きくなるであらう。かうして、吾々の曲線上ではその長さの弧が直線と見られない爲めに、今日の吾々には極めて小さいとは思はれぬ長さも、その時代となれば今日とは異つて、曲率が十倍も小さくなり、この長さの弧は直線と殆ど同じであらうから、極めて小さいと云はれる樣になるでもあらう。

それ故、極めて小さいといふ言葉は相對的である。しかしそれは、この人あの人に對して相對的なのではなく、世界の現在の狀態に對して相對的なのである。それは世界が更に一樣となり、すべての物が尙一層混交する時には、その意味を變へるであらう。併しその時には、恐らく人間は生存する事が出來ず、吾々は、より大きいか小さいか、兎に角他の生物に席を讓らなければならないであらう。隨つてこの規準は、すべての人間にとつて正しいものであり、客觀的の意味をもつてゐるのである。

さて次に、極めて複雜なといふ言葉は、どんな意味であらうか。私は旣に一つの解釋を與へた。それはこの章の初めに述べたものである。複雜な原因は層一層緊密な混交を生ぜしめる、と私は云つたが、しかしどれだけの時間が經てば、この混交は吾々を滿足させるのであるか。いつ十分に複雜となるのであるか。何時になればカルタは滿足にきられるのであるか。若し黑と白との二種の粉末を混合すれば、その混合物の色が一樣に見える樣な時が來るが、それは吾々の感覺が不完全な爲めである。近視の人にとつては尙一樣でない時でも、遠くから見なければならぬ遠視の人にとつては一樣であらう。又すべての人にとつて一樣となつても、吾々は尙、器械を用ゐてその限界を擴げることも出來よう。若し氣體運動論が本當とすれば、何人も、一樣と見える氣體の奧にひそむ無限の多樣さを見分け得る機會はない。しかし若しブラウン運動についてのグウイ Gouy の考を採用すれば、顯微鏡はこの點について、何か類似の事を示しはしないであらうか。

それ故この新らしい規準は、前のと同じく相對的であり、もし客觀的の性質を保つてゐるとすれば、それは總ての人間が略ゝ同樣な感覺をもつ爲め、又器械の效力には限界があり其の上それを用ゐる事が稀な爲めである。

## 九

これは道德學、特に歷史に於ても同樣である。歷史家はその研究する時代の事件を無選擇にとる譯にはゆかな

いから、最も重要と思はれるものしか勘定に入れない。それ故彼は、例へば十六世紀の最も重大な事件や又同様に十七世紀の最も著しい事實やを述べるだけで滿足する。若し前者が後者を說明するに足る場合には、人々は、後者は歷史の法則に一致するといふ。しかし若し十七世紀の大事件が、歷史にも載らず誰も顧みない樣な十六世紀の小事實から起つたとすれば、其時には、人々は、この事件は偶然に依るといふ。それ故この言葉は、物理學に於てと同樣な意味であつて、小原因が大結果を生んだといふことを意味する。

最大の偶然は、大人物の生れることである。其相互作用に依つて天才が生れる筈の神祕な要素を、丁度双方がそれぞれ含む樣な、性の異る二つの生殖細胞が相遇ふといふのは、偶然に依つてに過ぎない。この要素が稀であること、又それらが相逢ふことは尙更に稀であることについては、異論はあるまい。その要素をもつた精蟲を、その通路から外れさせる爲めには、ほんの僅かなことでよかつたであらう。それが$\frac{1}{10}$ミリメートル外れさへすれば、ナポレオンも生れず、大陸の運命も變つてゐたでもあらう。どの樣な例もこれ以上に、偶然の眞の性質を理解させ得るものはない。

尙一言、道德學に確率の計算を應用することから生じた逆說について、述べて置かう。どの議會にも反對說の議員は決して一人もないだらうといふこと、或は少くとも、その樣なことは極めてあり得ない事で、吾々は安心してその反對に賭け、且つ一錢に對して十圓をかけてもよい程であるといふこと、が證明せられた。コンドルセ Condorcet は、裁判上の過誤を實際的に不可能とする爲めには、幾人の陪審員が必要かを計算しようと試みた。若し人がこの計算の結果を使用したなら、彼は確に、前の計算に信頼して、反對說の代表者が決して一人もないといふ側に賭けたと同樣な、失望を嘗めるであらう。

偶然の法則はこの問題には應用せられない。若し裁判が常に正しい理性に依つて決定するものではないとしても、それは人の思ふ程ブリドワイ Bridoye（「フィガロの結婚」の中に出て來る愚法官）の樣な方法を用ゐるものではない。これは恐らく悲しむべきことであらう。何故かといふと若しさうであつたら、コンドルセの組織が吾々を裁判の過誤から禦ぐであらうから。

これはどういふ意味か。吾々はこの種の事柄を、その原因が不明な爲めに、偶然に歸する樣になり勝である。が、これは眞の偶然ではない。原因が吾々に知られないといふこと、又それが複雜であることも事實であるが、しかし十分に複雜ではない。といふのはそれが何かを保存してゐるからであり、吾々は旣にこの事が「あまり簡單な」原因を他から區別するものであることを知つてゐる。人間が集まれば、彼等はもはや偶然に各獨立に決定せず、互に作用し合ふ。幾重にもなつた原因が働き、人間を惱まし、彼らを右に左にひきづり廻す。がそこに尙破壞し得ない或るもの、即ち附和雷同性が殘つてゐる。そしてこれが、變らずに保存せられる所のものである。

十

確率の計算を精密科學に應用するにも、矢張り多くの困難を伴ふ。何故對數表の小數が、何故圓周率の小數が、偶然の法則に一致して排列されるのであるか。私は前に何處かで、この問題を對數については研究した。そしてこれは容易である。眞數についての小差は、對數についての小差を、しかし對數の第六位の小數については大き

な差を、與へることは明である。吾々は玆でも矢張り同一の規準を見るのである。

しかし圓周率については一層難かしく、私は今の所何等よい説明を知らない。

若し私が、特別に手をつけた問題を解かずに、他の問題をやらうと思へば、問題は幾らでもあるだらう。吾々が簡單な結果に達した場合、例へば端のない數を見出した時は、吾々はこんな結果が偶然に依る筈はないといつて、それを說明する爲めに、偶然でない原因を求める。又實際一萬の數の中に端のない數、例へば一萬が、偶然に現はれる確率といふのは、極めて小さいものに過ぎない。卽ち一萬に對して唯の一である。しかし他のどんな數にしても、それが偶然に現はれる機會は、一萬に對して一に過ぎない。而もこの結果は少しも吾々を驚かさない、そして吾々は猶豫なく、それを偶然に歸する。それは唯、これが特に眼を惹かないからに過ぎない。

これは單に吾々の迷ひに過ぎないのか。或は又この樣な見方も、正當な場合があるのであるか。さういふ場合のある事は望ましい、でなければ、總ての科學は不可能となるからである。或る假說を檢査する時、吾々はどうするか。その假說の歸結は無數であらうから、それをすべて吟味することは出來ない。吾々はある幾つかの歸結を檢證するだけで滿足し、もしそれが成功すれば、この假說は確かめられたといふ、それ程の成功は、偶然に依つては生じ得ないからである。これも根柢に於ては同一の推理である。

私はあまり時間がかゝるだらうから、それを玆に十分に說明することは出來ないが、少くともこれだけは云へる。單純な原因か、或は偶然と呼ぶ複雜な原因の集りか、吾々はこの二つの假說の前に立つてゐる。前者が單純な結果を生ずることを許すのは極めて自然のことであり、隨つて若し單純な結果、例へば端のない數に達した時は、それを殆ど確實に生ずべき單純な原因に歸する方が、一萬に對して一度しか與へ得ない偶然に歸するよりも、まことらしく思はれる。吾々が單純でない結果に達した場合には、それと異る。偶然がそれを同じく一萬に一度しか生じ得ないことは事實であるが、單純な原因もそれ以上の機會をもつのではないのである。

# 第貳篇　數學的推理

## 第壹章　空間の相對性

### 一

空虛な空間を思ひ描くことは不可能である。物質的對象の變化する像を除いて純粹空間を思ひ浮べようと如何に努力して見ても、それは强い色の面を、弱い色の綫で取代へ表はす位のことに過ぎない。そしてこの道を飽く迄進んでゆけば、總ては消え失せて無に歸して仕舞であらう。玆に消し難い空間の相對性が生ずるのである。

絕對空間について語るものは、無意味な言葉を用ゐるものである。これはこの問題について反省した程のすべての人々が、旣に久しく認めてゐる眞理であるが、しかも往々にして忘れられやすい。

私がパリのある定點、例へばパンテオンの廣場にゐて、かういふとする。「明日此處に來よう」。若し誰かがそれは空間內の同一點に歸るといふ意味かと問ふなら、私はさうだと答へるだらう。しかし私は間違つてゐるかも知れない。といふのは、地球はパンテオンの廣場を乘せたまゝ、明日までの間に二百萬キロメートル以上も動

いてゐるだらうから。さうしてたとへ私がもつと精確に云はうと思つても、どうすることも出來なからう。何故かといふに、この二百萬キロメートルは、地球が太陽に對して運動するのであるが、その太陽はまた銀河に對して運動し、その銀河自身も亦吾々の知らない速さで動いてゐるに相違ないから。かういふ譯で吾々はパンテオンの廣場が一日間にどれだけ動くか全く知らず、又何時までも知らないであらう。結局私の言はうと思つたのは、明日再びパンテオンの圓屋根と破風とを見ようといふことであり、もしパンテオンがなければ、私の言葉も全く無意味なものとなり、空間もなくなつたであらう。

これは空間の相對性の原理の最もありふれた形であるが、倘この他にもあつて、それについてはデルブフ Delbeuf が特に力說してゐる。一晩の中に宇宙のすべての擴りが千倍の大きさになると假定しよう。相似 Similitude といふ語をユークリッドの幾何原本の第三卷に用ゐられた意味にとれば、この世界は依然として元の世界に相似 Semblable であらう。唯一メートルの長さのあつたものはこの後一キロメートルとなり、一ミリメートルであつたものは一メートルとなるであらう。私の寢床も私の身體自身も同じ割合で大きくなるであらう。翌朝眼の覺めた時、私はこの驚くべき變化に對してどんな感にうたれるだらうか。だが私は全然何も氣づかないであらう。どんな精密な物差を以つてしても、私はこの途方もない大變化を知ることは出來まい。私の使ふ物差も亦、測らうとする物と全く同じ割合で、變つてゐるだらうから。實際にはこの變化は、空間が絕對的であるかの樣に考へる人々にとつての他は存在しない。私が一時彼等の樣に推理したのは、彼等の考へ方には矛盾のあることを明にするためである。實際は空間は相對的であるから、何事も起らなかつたのであり、吾々が何事をも認めないのも、そのためであるといふべきであらう。

隨つて吾々は、二點の距離を知つてゐる、といふ權利があるだらうか。否。何故なら、この距離は、もし他の距離も同じ割合で變化すれば、吾々の知らぬ間に大變化をも受けることが出來ようから。前に、私が明日此處に來ようといふのは、明日自分が今居る空間の點に來ようといふ意味ではなく、明日はパンテオンから今日居るのと同じだけの距離の所に來ようといふことであるのを見た。しかも今となつては、この表はし方も十分なものではなく、次の樣に云はなければならない。

明日も今日も、私のパンテオンからの距離は、私の身長の同數倍に等しからう。

しかしこれだけではない。私は世界の擴りの變化することを假定したが、この世界が少くとも常にそれ自身に相似であるものとした。吾々は倘それ以上にも進む事が出來る。現代の物理學者の最も驚くべき理論は、吾々にその機會を與へてゐるのである。ローレンツ Lorentz とフィッツ・ジェラルド Fitzgerald とに依ると、地球の運動に伴はれるすべての物體は、變形をうける。この變形は事實非常に僅なもので、地球の運動に平行なすべての長さは十億分の一縮まり、この運動に垂直な長さには變りがない。しかしこの變化が僅だといふことは問題でないので、變化が存在するといふだけで私が次に抽き出さうとする結論には十分なのである。倘ほ其上私は僅だといつたが、實は私は何も知らないのである。吾々に絕對空間を考へてゐる樣に思はせるあの執拗な幻覺に、私自身陷入つてゐたのであつた。私は太陽の周りの楕圓軌道上の地球の運動を考へて、その速度を三十キロメートルとした。しかし地球の眞の速度を（今度は無意味な絕對速度でなく、エーテルに對する速度と解する）私は

知らないし、又知る方法もない。それは或は十倍百倍も早く、隨つて變形も百倍一萬倍も大きいかも知れない。

この變形を證據立てることが出來ようか。明に出來ない。一邊一メートルの立方體があれば地球の運動に依つて變形し、運動に並行な稜は短くなり他の稜は變らない。この事を物差で確めるには、先づ運動に垂直な稜を測り、物差がこの稜に正確に合ふことを認める。又實際この二つの長さは二つとも運動と垂直であるから、どちらも變化してゐない。次には運動に平行な稜を測らうとする、それには物差を動かし、この稜に合ふ樣に廻はす。しかし物差はその方向をかへて運動に平行となるから自分も變形をうけ、隨つて稜の長さはもう一メートルではないが、物差も丁度それに合ふ樣になり、何事も認めることは出來なからう。

すると或人は、どんな實驗でも檢することが出來ないなら、ローレンツ、フィッツ・ジェラルドの假說は何の役に立つのかと尋ねるかも知れぬが、これは私の言ひ方が足りなかつたのである。私は物差で出來る測り方のみを云つたのであるが、其他にも、光の速度が不變で方向にかゝわらぬものだと假定すれば、光の通過するのに要する時間で、長さを測ることも出來る。ローレンツは、光速度が地球運動の方向に於てはそれに垂直な方向に於てよりも大きいと假定しても、事實を說明することが出來たであらう。彼は、速度はすべての方向に同じであるが、物體は一方向では他の方向でよりも短い、とする方を選んだ。もし光波面が物體と同樣な變形をうけたなら、吾々はローレンツ、フィッツ・ジェラルドの變形を認めなかつたであらう。

孰れの場合にしても、絕對的な量が問題となるのではない、何かの道具に依つてのこの量の測定が問題となるのである。この道具となるのは、物差でもよし或は光の通過する道でもよい。吾々の測るのは只この量が道具に對する關係である。それで若しこの關係が變つたとすると、變化したのが量であるか道具であるかを知るには、何の方法もないのである。

尚これ以上に遠く進み得ることは明である。變形の法則の特に簡單なローレンツ、フィッツ・ジェラルドのものの代りに、全然勝手な變形を考へることも出來よう。物體が何かの法則——どんなに複雜であつても——に從つて變形しても、すべてのものが例外なしにその同じ法則に從つて變形するならば、吾々はそれを認めなかつたであらう。すべての物が例外なしにといふのは、勿論吾々の身體自身や種々の物から發する光線やをも含めてである。

もし吾々が、對象を奇妙な具合にゆがめる複雜な鏡に、世界を寫して見るなら、それでも世界の各部の相互關係は變らないだらう。もし實際二つの本當の對象が觸れてゐるなら、その像も同樣に觸れてゐる樣に見える。實を云へば、そんな鏡を見る時、吾々は變形してゐることを認めるが、それは實際の世界が、變形された像の傍にあるからである。またもしこの實際の世界が隱されたにしても、何か隱し切れないもの、卽ち吾々自身がある。吾々自身の身體や四肢は變形されずに測定の道具となるのであるが、吾々はそれらの物を見ない譯にはゆかない、少くとも感じない譯にはゆかない。しかしもし吾々の身體自身も鏡の中で見られる通りに變形されると考へると、この測量器も今度は役に立たなくなり、最早變形は認められなくなるであらう。

同樣に茲に二つの宇宙があつて、其一方は他のものの寫像であるとする。A宇宙の各對象Pに對し、B宇宙ではPの寫像なる對象P′が對應する。この寫像P′の座標は對像Pの座標の定つた函數である。其上此函數は全く

どんなものでもかまはない、只それは一度定められたら變らないものと假定すればよい。PとP'との位置の間には或る一定の關係がある。その關係が何であるかは大した問題ではなく、それが不變であれば十分なのである。

さてこの兩宇宙は互に差別の出來ないものであらう。といふのは、第一のものがその住民にとつてと、第二のものがその住民にとつてとは、同じ關係にあるといふ意味である。そしてそれは此の兩宇宙が互に無關係である限りさうであらう。吾々がA宇宙に住んでゐると假定すれば、吾々はその上で科學特に幾何學を建設するであらう。その時一方B宇宙の住民も科學を建てるであらうが、彼等の世界は吾々の世界の寫像であるから、その幾何學も吾々のものの寫し、もつと正確に云へば、吾々のと同じであらう。處で或る日吾々にB宇宙を見る窓が開かれたとすると、吾々は、彼等を憫んでかういふだらう。「可哀さうに、彼等は幾何學を作つたと思つてゐるが、彼等の幾何學といふのは、吾々の幾何學の滑稽な寫しに過ぎない。その直線は曲つて居り、圓はでこぼこで、球はでたらめに歪んでゐる。」そして吾々は、彼等も亦吾々について同樣に云つてゐることや、何方が正しいかは誰も知ることが出來ないことやなどは、夢にも考へないであらう。

吾々は空間の相對性といふことが、どんなに廣い意味にとられなければならないかを知つた。まことに空間は無定形のものであつて、その中に在る物だけがそれに形を與へるのである。それでは吾々が直線又は距離に對してもつこの直接な直觀は、何と考へるべきであらうか。距離その物の直觀は吾々には殆どないので、前に述べた樣に、一夜の中に距離が千倍になつても、もし他のすべての距離が同樣に變ずれば、吾々はそのことを覺らないであらう。又一夜の中にB宇宙がA宇宙とどり代へられてゐてさへも、吾々には何等それを知る手段はなく、又さうして昨日の直線がもはや直線でなくなつてゐても、吾々は何も覺ることは出來ないであらう。

空間の一部分はそれ自身、その語の絕對的な意味に於ては、空間の他の部分に等しくない。もし吾々にとつて等しいとすれば、B宇宙の住民にとつては等しくなく、彼等は、吾々が彼等の意見を非としたと同樣の權利で、吾々の意見を拒むことが出來ようから。

私は他の場所で、吾々が非ユークリッド幾何學や、他の類似の幾何學を建てなければならぬといふ考から見て、この事實からの結論がどんなものであるかを示した。私は再びそれに戻らうとは思はない。今日は少し違つた見地に立つて見よう。

## 二

若し距離の、方向の、直線の、一言にいつて空間の、この直接な直觀が存在しないものならば、それでも吾々が夫をなほ信ずるのは何故であるか。もしこれが幻影に過ぎないなら、この幻影がかくも執拗なのは何故であるか。これは考ふるに足る問題である。旣に述べた樣に吾々は大きさの直接の直觀をもつてはゐない。只測量の道具に對するこの大きさの關係に達し得るのみである。隨つて吾々は空間を測るべき道具がなかつたなら、空間を構成する事は出來なかつたであらう。扨吾々がすべてのものを關係させ、又本能的に使用するこの道具は、吾々自身の身體である。吾々が外物を配置するのは自己の身體に對してであり、吾々の考へ得るこの對象の唯一の空間關係は、それと自己の身體との關係である。吾々にとつて謂はば座標軸系となるものは、吾々の身體である。

例へばある瞬間αに對象Aの存在が視覺で知られ、他の瞬間βに他の對象Bが他の感覺、例へば聽覺或は觸覺で知られる。私がこの對象Bは對象Aと同じ場所を占めるといふ事は何を意味するか。先づこの事は、この二對象が異つた二瞬間に絶對空間の同一點を占める、といふ意味ではない。絶對空間がたとへあつたにしても、αとβとの兩瞬間の間に太陽系は移動し、吾々はその移動を知るすべもないから、それを認識することは出來ないであらう。それは、この二つの對象が吾々の身體に對して同じ相對的な點を占める、といふ意味である。

しかしこの事さへ一體何を意味してゐるのだらうか。これらの對象から來た印象は全く異つた道を、對象Aは視神經、對象Bは聽神經を、通つて來、性質的に見ればこれらは何の共通點もない。この兩對象から作り得る表象は全く異質的であり、互に他に歸することは出來ない。只私は對象Aに達するには、右腕を或る仕方で延ばせばよい事を知り、又さうしない場合にも、腕を延ばすに伴ふ筋覺或は他の類似の感覺を考へ、その表象は對象Aの表象と結合される。

扨て同樣に私は右腕を同じ樣に延ばし、筋覺の同樣な結果を伴ふ伸延で、對象Bに達し得ることを知る。これらの兩對象が同一位置を占めると私がいふのは、このことに他ならない。

私は又これと別な左腕の適當な運動に依つて、對象Aに達し得るだらうといふことを知り、この運動に伴ふ筋覺を表象する。そしてこの同じ感覺を伴ふ左腕の同じ運動で、同じく對象Bに達することが出來るであらう。

これは甚だ大切な事である。といふのは、對象A又は對象Bが私に及ぼし得る危險を私が防ぐことの出來るのは、かうしてであるから。自然は私を打つかも知れないやうな攻撃に對して、それから吾々を衞り得る樣な幾つかの防禦法を結びつけてゐる。同一の防禦法は澤山の攻撃を防ぐことも出來る。例へば右腕の同じ運動で瞬間αには對象Aに對して、瞬間βには對象Bに對して禦ぐことが出來よう。同じ樣に一つの攻撃は種々の仕方で防がれる、例へば前に述べた樣に、右腕の或る運動に依つてでも、或は左腕の或る運動に依つてでも、變りなく對象Aに達することが出來る。

これらすべての防禦法には、同一の攻撃を防ぎ得るといふ他には、何も共通の事はない、そして吾々がこれらは空間の同一點に達する運動であるといふのもこの意味であり、これ以外の意味ではない。同じ樣に吾々が空間の同一點を占めるといふ諸對象も、夫が同一の防禦法で防がれるといふ他には、何等共通の所はないのである。

或は內に向ふものと外に向ふものとの無數の電信線を考へてもよい。向內線は外界の出來事を警告し、向外線はそれにその對策を送る可きである。向內線に電流が通ると、この電流は繼電機にはたらき向外線に電流を起す樣に連結して置き、もし同一の處置が幾つもの危害に適するなら、幾つもの向內線が同一の向外線にはたらき、同一の危害が幾つもの處置で除かれる時には、一つの向內線が同時にか或は交互にか種々の向外線を働かせる樣に配置する。

この結合の複雜な組織が、この謂はゞ配電盤が、吾々の幾何學、或は幾何學の本能的にもつすべてのものである。直線の或は距離の直觀といふのは、この結合についての、或はその强制的な特性についての意識である。

それでこの强制的な特質そのものが何處から來るかは容易に理解される。結合は古ければ古い程、吾々には一層破り難く思はれる。しかしこの結合の大部分は生れたばかりの子供にもその痕跡があるから、個人の得たもの

ではなく、種族の得たものである。この得物が必要であればあるだけ、自然淘汰は一層速くそれを得させなければならなかつた。

この點に於て玆に話してゐるものは、それがなくては有機體の防禦が不可能であつたらうから、最も古いものでなければならなかつた。細胞が單に並んでゐるのみでなく相互扶助をする様になるや否や、この扶助が誤まらずに危難に赴く爲に、上述の機構が組織されなければならなかつた。

蛙の首を切つて、一滴の酸をその皮膚の一點に置くと、蛙は一等近い足でそれを拭ひとらうとする。もしその足を切りとれば、彼は反對側の足で拭きとる。これは明に私が今述べた二重防禦法であつて、第一の處置が駄目となれば、第二のものが危害と戰ひ得るのである。そしてこの防禦法の重複とそれから生ずる配置とが、空間なのである。

## 三

この空間的な結合の最初の痕跡を尋ねる爲めには、どんなに深く無意識の奥に下らなければならないかがわかる。何故といふに、そこでは神經組織の一等内部の部分のみがはたらくのであるから。かうして見れば、こんなに遠い昔から結合されてゐたものを離さうとするすべての試みに對して、吾々が抵抗するといふのは、何も驚くことではなからう。さて幾何學的眞理の明證といふのは、實にこの抵抗の事である。この明證は、吾々が平素滿足してゐた非常に古い習慣と別れる場合に感ずる嫌惡の情に過ぎない。

この様にして創造された空間は、私の腕のとゞく範圍以上に擴がらぬ小さな空間に過ぎない。この制限を擴げる爲めには、記憶が加はらなければならない。私がどんなに努力して手を延ばしても、尙達することの出來ぬ點がある。もし私が、例へば觸手を延ばすことしか出來ない珊瑚蟲の様に、地上に縛りつけられてゐたならば、これらのすべての點は空間外にあるであらう。何故なら、そこに置かれた身體の活動に依つて感ずる感覺は、吾々をその點に達せしめる運動の觀念にも、又適當な如何なる防禦法の觀念にも、結合されないだらうから。これらの感覺は少しも空間的な特性を持つと思はれず、又吾々はその位置關係を定めようともしないであらう。

しかし吾々は、下等動物の様に大地に固定しては居ない。吾々はもし敵があまり遠過ぎるならば、先づ其方に進み、十分近くなつた時に腕を延ばす。これも矢張り防禦法、遠距離の防禦法である。又一方これは複合した防禦法であり、それについての表象の中には、足の運動による筋覺の表象と、最後の腕の運動による筋覺、半規管の感覺の表象等が入つて來る。其上吾々は、同時の感覺の複合のみでなく、繼續的な或る一定の順序に從つた感覺の複合をも表象しなければならない。私が前に記憶の加はる必要があると述べたのはこの爲めである。

次に尙或る一點に達するに手を延ばすのを少くする爲めには、達すべき對象に一層近く進めばよい。其他同一の危險に對することの出來る防禦法は、一つでなく無數にある。すべてこれらの防禦法は、何等共通點のない感覺から出來てゐるが、吾々はこれを空間の同一な點を定めるものと看做してゐる。それらは同一の危險に對抗することが出來、互にこの危險の觀念と結合されてゐるからである。同一の攻擊を防ぐ可能性が、これら種々の防禦法を結びつけるものであるのは、恰も同じ様にして防がれるといふ可能性が、空間の同一點から吾々を脅かす

種々の性質の攻撃を結合すると同様である。この二重の結合が、各點の個別性をなすものであり、點といふ考へには、この他に何もないのである。

前節に私の述べた制限された空間とも云ふべき空間は、私の身體に結合した座標軸に關係してゐた。私の身體が動かないで、移動するのは四肢だけであつたから、この軸は固定してゐた。擴張された空間、即ち私が今定めたばかりのこの新空間が本性上關係する軸は何であらうか。吾々は點を、身體の最初の位置から出發して、それに達する爲めになすべき運動の系列を以つて定めた。隨つて軸は、この身體の最初の位置に結びついてゐる。

しかし私が最初のと呼ぶところの位置は、私の身體が順次に占めたすべての位置の中から、任意に選ぶことが出來る。もしこの順次の位置についての幾らか無意識的な記憶が、空間の觀念の發生に必要ならば、この記憶は幾分過去に溯ることが出來る。この事からして、空間の定義そのものの中に或る不定なものが生じて來る、そしてこの不定なものが、まさしくその相對性をなすのである。

絕對空間といふものはもはや存在せず、在るものは只身體の或る起點に相對な空間のみである。下等動物の樣に地に固着し、隨つて制限された空間しか知らない樣な生物にとつても、空間はその生物の身體に關係するから、矢張り相對的であらうが、その生物はその相對性を覺らないであらう。といふのは、この制限された空間を關係させる軸は變らないからである。この生物の固着してゐる岩は、地球の運動と結合してゐるから、恐らく不動ではなからう。隨つて吾々にとつては、この軸は各瞬間に變化するのであるが、彼等にとつては變らない。吾々は、或る時は吾々の身體の起點と考へられたAなる位置に、或る時は幾らかの時間の後に身體の占める、そして改めて起點と認められ得るBなる位置に、擴張された空間を關係させる能力がある。だから吾々は各瞬間に無意識に座標を變更してゐるのである。この能力は玆に想像した生物には缺けて居り、彼は運動をしないから絕對空間を信じてゐるであらう。その座標軸系はいつも彼に附着し、この系は實は大に變化するのであるが、彼にとつては常に唯一の系であり、常に同一であらう。しかしそれは吾々にとつては、即ち記憶に依つて幾らか過去に溯れば、自由に選むことの出來る多くの系を各瞬間にもつ吾々にとつては、同じでない。

其の上制限された空間は等質でもなからう。この空間の種々の點は等値のものと見られない。何故なら或る點は非常に努力しなければ達することは出來ないのに、或る他の點は容易に達せられるからである。之に反して擴張された空間は等質の樣に思はれ、吾々はそのすべての點は等値であるといふ。これはどういふ意味であるか。

もし吾々がある場所Aから發するとしたならば、この場所から出て、或る筋覺の複合を特質とする運動Mをすることが出來る。又他の場所Bから出て、同じ筋覺を伴ふ運動M′をすることも出來る。そこでaを、起點Aに於ける身體の或る一點、例へば右手の食指の先端の位置とし、bをこのAなる場所から出てMなる運動をした時のこの同じ食指の位置とする、次にa′をこの指のBなる場所に於ける位置、b′をBなる場所から出てM′なる運動をした時のこの指の位置とする。

さて私はよく、空間の點aとbとの關係はa′とb′との關係に等しいといふが、それは只二通りの運動MとM′とが、同じ筋覺を伴ふといふ意味である。そして私はAなる場所からBなる場所に移つても自分の身體は同じ運動が出來ることを知つてゐるから、私は任意の點bが點aに對すると同樣の關係を點a′に對してもつ空間の或る一

點があり、隨つてaはa′と等値であることを知る。空間の等質性といふのはこれである。そして同時に空間が相對的であるのもこの爲めである。といふのは、A軸に對してもB軸に對しても、空間の性質は變らないからである。隨つて空間の相對性と等質性とは、同一の事柄を言ふのである。

さてもし私が唯自己の用に供するばかりでなく、宇宙に關係し得る大きな空間に移らうと思ふなら、想像のはたらきによつてそこに達するであらう。私は數歩で諸遊星に達し得る樣な巨人が感ずるだらうとも思はれることを想像する。或は又これらの遊星が小さな毬で置き代へられ、この小毬の上に私といふ倭人が動いてゐるといふ風な、縮小された世界に對して私自身の感ずるだらうと思ふやうなことを想像する。しかしこの想像のはたらきも、若し私が豫め自分の個人用として、私の制限された空間と擴張された空間とを作つて置かなかつたならば、不可能であつたであらう。

## 四

さて何故これらの空間は皆三次元であるのか。前に述べた配電盤の話に戻らう。一方に於て種々の可能な危險の表がある。これを$A_1$、$A_2$等で表はさう。他方には種々のそれに對する處置の表がある。これを同樣に$B_1$、$B_2$等と云はう。次に第一表と第二表との送電裝置の間には連絡があり、例へば危險$A_3$の警報がはたらくと、防禦法$B_4$に對する繼電機が動く、或は動き得る樣になつてゐる。

私は前に向內線と向外線との事を述べたから、玆に述べることも、すべて唯の比喩としてでなく神經系統の記述であるととられはしまいかと案じられるが、私の本意はさうでない。それには二三の理由がある。第一に私の知りもしない神經系統の構造について、私は意見を述べることは出來なからう。さういふことはその道に造詣のある人が愼重にするより他はない。次に私は管轄ちがひではあるが、この模型圖があまり簡單すぎることをよく知つてゐる。最後に、防禦法の表の中には、前に見た樣に擴張された空間の場合にも、腕の運動を伴ふ幾つかの階級から出來てゐる樣な非常に複雜なものがあるから。そこでこれは實際の二導體の物理的の連絡をいふのではなくて、感覺の二系列間の心理的な連絡をいふのである。

もし例へば$A_1A_2$が互に防禦法$B_1$に連絡し、又もし$A_1$が同樣に防禦$B_2$に連絡してゐるなら、一般には$A_2$と$B_2$とも亦連絡されてゐるであらう。もしこの根本法則が一般には正しくないとすると、非常な混亂のみとなつて、空間の概念にも幾何學にも相應しいものは何もなくなるであらう。實際どうして空間の點を定めたかといふに、吾々はそれを二樣の仕方でした。それは一方では同一の防禦法Bと連絡する警報Aの全體であり、他方では同一の警報Aと連絡する防禦法Bの全體である。もしあの法則が正しくないとすると、吾々は$A_1$と$A_2$とは共に$B_1$に連絡するから同一の點に對應すると云はなければならず、又同樣に$A_1$は$B_2$と連絡してゐるが$A_2$はさうでなからうから、$A_1$と$A_2$とは同一の點に對應しない、と云はなければならない。これは矛盾であらう。

しかし一方から見れば、もしこの法則が嚴格に常に正しいものであつたとすると、空間は現にあるのとは遙に異つたものであつたであらう。吾々は一方に警報A、他方に防禦法Bの屬する樣な、判然と區別された組をもつたであらうし、これらの組は非常に多數であるが互に全然分離し、空間は甚だ多數の、而も離れ〴〵の點から成

り、不連續であつたであらう。そして、これらの點が或る順序に配列されて他の順序にされない、といふ理由もなく、隨つて空間に三次元を附する理由もなかつたらう。

しかし事實さうではない。私に暫く既に幾何學を知つた人々の言葉を用ゐることを許して頂きたい。その必要があるのは、この言葉は私が理解してほしいと思ふ人々の最もよく解するものであるからである。攻撃を防がうとする時には、私は其攻撃の發する點に達しようとするが、それには其處に十分近づけばよい。それでもし$B_1$に對應する點が、$A_1$に對應する點と$A_2$に對應する點とに同時に十分近ければ、防禦$B_1$は$A_1$と$A_2$とに應ずることが出來よう。又これと異つた防禦$B_2$に對應する點が、$A_1$に對應する點には極めて近いが、$A_2$に對應する點には近くない、隨つて防禦$B_2$は、$A_1$には對抗出來るが$A_2$には出來ない、といふ樣なこともあるであらう。

未だ幾何學を知らぬ人々に對しては、簡單に前述の法則を言ひ換へて表はす事が出來る。卽ち次の樣な風になるであらう。二つの防禦法$B_1B_2$は、同一の警報$A_1$と、並びに$A_1$と同じ組に屬し且つ空間の同一點に對應する極めて多數の警報とに連絡される。併し吾々は$B_2$には連絡するが$B_1$には連絡せず、其代り$A_1$と連絡してゐないところの$B_3$に連絡してゐる樣な警報$A_2$を見出すことも出來よう。順決この樣にして、次の樣な列を書くことが出來るであらう。

$$B_1\ A_1\ B_2\ A_2\ B_3\ A_3\ B_4\ A_4$$

此處に各項は其前後のものとは連絡するが、幾つか飛び離れた項とは連絡しない。

云ふまでもないが、この列の各項は孤立してゐるのではなく、これと同樣な連絡をなし且つ空間の同一點に對應すると見られる他の非常に多數の警報或は防禦法の組の一部分となつてゐるのである。それ故あの根本法則は例外はありながらも殆ど常に正しい。只この例外のために此等の組が全く分離してしまはず、幾らか互に侵し合ひ、或る程度迄相互に浸透し、かうして空間は連續的となるのである。

尙これらの組が排列される順序は、もはや任意のものではなく、もし前揭の列を參照すれば、$B_2$は$A_1$と$A_2$との間、隨つて$B_1$と$B_3$との間に排置しなければならず、例へば$B_3$と$B_4$との間に置くことの出來ないことは明に知り得られる。

それ故空間の諸點に對應するもろ〳〵の組が、自然に排列される所の一つの秩序がある。そして經驗はこの秩序が三重表の形で現はれることを敎へる。空間が三次元であるのはこれが爲めである。

## 五

かうして空間の特質、三次元であるといふ性質も、吾々の配電盤の性質、謂はば人間知性の內的性質に過ぎない。異つた配電盤を得る爲めには、この接續卽ち觀念の連絡の或るものを破ればよいのであり、又それだけで空間は第四次元をもち得るであらう。

ある人はかういふ結果に驚くかも知れない。彼等は外界は何物かとして確にそこに存在しなければならぬと考へるだらう。もし次元の數が上に述べた樣にして生ずるならば、この世界に住んで吾々と異つた考へ方をし、空間を三次元より多い或は少いと信じてゐる或る思考する生物もあり得る譯である。ド・シヨン氏 de Cyon も二

對の半規管をもつ日本産の鼷鼠は空間が二次元だと信じてゐると云はなかつたであらうか。かうしてこの思考する生物は、もし物理學を建て得るならば、二次元或は四次元の物理學を建てはしなからうか。しかしながらこの物理學も、同一の世界を異つた言葉で言ひ表はしたものであるから、ある意味では吾々のものと同じである。

實際吾々の物理學を四次元の幾何學の言葉に飜譯することは、確に出來ると思はれる。しかしこの飜譯を試みるのは、勞多くして效少いことであらうから、私は幾らかそれに似よつた所のあるヘルツ Hertz の力學を擧げるに止めよう。しかしながら飜譯は常に原文ほど簡單でなく、又いつも飜譯臭いところがあり、吾々の世界を記述するには三次元の言葉が――尤も必要とならば他の言葉でもなし得るが――一等適當らしく思はれる。

尚又吾々の配電盤は、偶然に依つて組立てられたものではなく、警報$A_1$と防禦法$B_1$との間には連絡があるので、これは吾々の知性の內的性質である。併しかういふ連絡のあるのは何故であらうか。それは防禦法$B_1$によつて、危險$A_1$に對し、事實防衛することが出來るからである、が、この事は吾々に對しては、外的の事實であり、外界の性質である。それ故吾々の配電盤は外的事實全體の飜譯に過ぎない。この配電盤が三次元であるといふのは、それが或る種の性質をもつた世界に順應したからであり、この性質の中で重要なことは、吾々が不變剛體の運動法則と呼ぶ法則に從つて移動する固體が自然の中に存在する、といふことである。それ故、もし三次元の言葉が吾々の世界の記述に一等容易であるとしても、別に驚くには當らない。この言葉は吾々の配電盤から複寫したものであるが、それは、この盤の作られたこの世界に於て生活し得る爲めにである。

私は、この世界に生活し四次元の配電盤をもち隨つて高次元空間に於て思考する生物を、想像することが出來るといつたが、そんな生物は、たとへこの世界に生れて來たにしても、そこに生活することが出來るかどうか、又幾千の危險の攻擊を防いで行けるかどうかは全く疑問である。

## 六

終りに二三の注意をしよう。私が配電盤と呼んだものに歸せられるこの原始的な幾何學の粗笨さと、幾何學者の幾何學の無限な正確さとの間には、著しい對照がある。しかしながら、後者は前者から生れたものである、が前者だけからではない。それは、例へば群の概念といつた樣な、數學的の概念を構成する吾々の機能に依つて、豐富にされなければならなかつた。又これらの純粹な概念の中から、私が上にその發生の說明を試みた吾々高等動物に共通なあの粗笨な空間に、最もよく適應するものを探さなければならなかつた。

ある種の幾何學公準の明證といふことは、前述の樣に、吾々が非常に永い間の習慣を棄てるのを嫌がるといふことに過ぎない。この習慣は本來幾らか不確定なところがあるが、公準は無限に正確である。いやしくも考へようとすれば、吾々は無限に正確な公準を要する。それが矛盾を避ける唯一の手段だからである。しかし可能な公準のあらゆる系統の中で、吾々の習慣に十分適合しない爲めに、吾々が選ぶことを好まないものがある。習慣がどれ程流動的彈性的であるといつても、それには彈性の限界があるのである。

吾々は、幾何學が經驗科學ではないにしても、經驗に關して生じた科學であり、その研究する空間は、吾々の生活するこの世界に適應して創造されたことを知つた。吾々は最も適合する空間を選擇したが、その選擇を指導し

たものは經驗である。只この選擇が無意識的であつたから、吾々には吾々に對して課せられたものの様にも思はれる。或人はそれを課したものは經驗であるといひ、或人は吾々は既に出來上つた空間を持つて生れるといふ。上の考察に依つて、吾々はこの兩說の中の正しい部分と誤つた部分とを知ることが出來るであらう。

空間の構成に到るこの漸進的な訓練の中、どれだけが個人的で、どれだけが種族的の部分であるかは、仲々定め難いことである。吾々の一人が生れると直ぐ全然異つた世界に、例へば非ユークリッド的の剛體運動法則に從つて動く物體の在る世界に移されたとして、全く新しい空間を建設する爲めに、どの程度迄祖先の空間を捨て得るであらうか。

種族の分擔する部分は餘程優勢と思はれる。しかし吾々は上記の粗笨な空間、未確定の空間、高等動物の空間を種族に負ふてゐるとしても、幾何學者の無限に正確な空間は、個人の無意識な經驗に負ふてゐるのではなからうか。これは解き難い問題である。しかしながら、祖先が吾々に遺した空間が尙幾らか殘つてゐることを示す、一つの事實を擧げておかう。或る漁夫は、魚の姿が屈折に依つて浮き上つて見えるのに、水中の魚をつくことを習ひ覺える。而も彼等は本能的にさうするのである。即ち彼等は、方向についての古くからの本能を變化すること、換言すれば、$A_1B_1$といふ連絡の代りに、別の$A_1B_2$といふ連絡を入れることを學んだのであるが、それは經驗が前者の成功しないことを敎へたからである。

# 第貳章　數學上の定義と敎育

一　私は此處で數學に於ける一般の定義について述べなければならない。少くとも表題の示すところはさうである。しかし私は活動統一の規則が示す通りに、この題目だけに限ることは出來ないであらう。この題目だけを取扱つて、これと關係のある他の問題に少しも觸れないなどといふことは出來なからうから、たとへ私が時々花園をあちこちと逍遙しなければならなくなつても、それは許して頂きたい。

立派な定義とはどんなものか。哲學者にとつて、又科學者にとつて、それは定義せらるべきすべての對象にあてはまり、それ以外のものにはあてはまらない定義であり、論理の規則を滿足させる定義である。しかし敎育に於てはこれと異り、立派な定義とは生徒に理解できる定義である。

數學を理解出來ない人々の多いのはどういふ譯であるか。これは少し不思議なことではなからうか。こゝに論理の根本原理のみに、例へば矛盾の原理、吾々の理解の謂はゞ骨骼をなし、ものを考へる以上どうしても賴らなければならない矛盾の原理、のみに訴へる科學がある、而もそれを理解しない人があるといふのは、又それが大多數であるといふのは、どうしたことであらう。彼等が發見をなし得ないことはまだよいとしても、彼らが示された證明を理解することが出來ず、きよらかな光に輝くとも思はれる光明を與へられながら、尙盲目のまゝでゐるといふのは全く不思議なことである。

しかしこれらの盲目者が決して例外でないことを知るには、澤山の試驗の經驗を必要としない。此處に解決し難い、しかも教育に身を捧げる者の捨て置き難い問題がある。

理解するとはどういふことか。この言葉は誰にとつても同じ意味であらうか。ある定理の證明を理解するとは、それを組立てゐる推論式を順次にしらべて、それが正しいこと、規則に合つてゐること、を確めることであらうか。同樣に定義を理解するとは、唯それに用ゐられてゐるすべての言葉の意味を既に知つてゐることを認め、又それが何等の矛盾を含まぬことを確めることであらうか。

ある人々にとつてはさうである。彼等はこの確めを終ると、私は理解したといふであらう。しかし大多數の人人にとつてはさうではない。殆ど大抵の人はもつと求める所が多く、證明のすべての推論式が正しいか否かばかりでなく、何故推論が他の順序でなく、こんな順序に連るかを知らうとする。彼等はその推論が、到達すべき目的を意識した理性からではなく、氣紛れから生れたと思はれる間は、理解したとは考へない。

恐らく彼等は自分で自分の要求する所を知らず、又自分の希望を述べる事も出來ないが、滿足を得ない間は、ぼんやり何かが缺けてゐる樣な氣がする。さういふ結果は、最初はまだその目の前に出された證明を認めるが、それは前のものにも後のものにも、極めて細い絲で結ばれてゐるに過ぎないから、頭の中に何の跡も殘さず、忽ちに忘れられてしまふ。それは一瞬間明るくなつたと思ふと、もう直ぐに再び永遠の夜の中に落ちてゆくのである。尙進むと、彼等はもはやこの束の間の光明をさへ認めぬ樣にならう、何故なら、定理は互に相倚るものであるのに、彼等に必要な定理は既に忘れられてゐるから。かうして彼等は數學が理解できなくなるのである。

これは何時でも教師の罪とばかりはいはれない。往々連絡の絲を認むべき生徒の理性が、それを探ね見つけるにはあまりに怠惰な場合もある。しかし彼等を助けてゆかうといふには、先づ彼等を妨げるものを、十分に理解しなければならない。

又或る生徒はいつも、この定義は何の役に立つのかと尋ねるであらう。彼等は、これこれの數學的の觀念が何の爲めにあるかといふ理由を、彼等の周圍に——實用上にか、自然の中にか——見つけないと、理解することが出來なかつたであらう。彼等はすべての言葉の奧に、感覺的の像をおかうとする。定義はこの像を呼び起すものでなくてはならず、證明の一段毎に、彼等はその像が變形し開展してゆくのを見るのである。この狀態に於てのみ彼等は理解もし、覺えてもゐるであらう。これは往々誤りに陷る、彼等は理性にきかずに形を見る、理解したと思つても、實は眺めたに過ぎないのである。

**二**　何といふ樣々な傾向だらう。吾々はそれらに反對すべきであるか。それらを利用すべきであるか。又若し反對するとするならば、どれを援助すべきであらう。純粹の論理のみに滿足するものに對しては、彼等が事物の一面のみを見てゐるに過ぎないことを示すべきであるか。或は又、たやすく滿足しないものに對しては、彼等の要求するものは不必要であるといふべきであるか。

換言すれば、若い人々にその心の性質をかへるやうに、强制しなければならないか。こんな試みは無駄であらう。吾々は委托された金屬を或るものから他のものに變へ得る哲學者の石をもつてはゐない。吾々のなし得る所は只、彼等の性質に自分を適合させながら、敎へて行くことである。

數學者になれない子供は澤山あるが、これらにも同様に數學は教へなければならない。そして數學者自身も同じ一つの鑄型に入れられることは出來ない。彼等の著述を讀めば、その中に二種の精神を見分けることが出來る。例へばワイヤストラス Weierstrass の様な論理家と、リーマン Riemann の様な直觀家と。學生の中にも同様な差異がある。或る者はその問題を所謂「解析で」、他の者は「幾何で」と扱ふことを好む。

此の點について何かを變へようとするのは、無駄なばかりでなく、望ましいことでもなからう。論理家のあるのも結構なら、直觀家のあるのも結構である。ワイヤストラスが何も書かなかつた方がよいとか、リーマンがゐなかつた方がよいなどと、誰が云ふであらう。それ故吾々は、精神が様々に異つてゐるといふことについては、諦めなければならない、或は寧ろ喜ぶべきである。

三　理解といふ言葉には澤山の意味があるから、或る人にとつて一等理解される定義も、他の人にとつては不都合な定義ともなるであらう。像を生み出さうとする人々があると共に、完全に明瞭な、しかし純粹に概念的で、抽象に依つてすべての内容から離れた空虛な形式の結合のみに限らうとする人々もある。

玆に例を擧げる要のあるなしは別として、ともかく擧げて見れば、先づ分數の定義がその極端な例を提供する。小學校では分數を定義するのに、林檎かパイを切る。勿論心の中で切るので實際切るのではないが、これは初等教育の豫算がそんな贅澤なことを許さないからであらう。之に反して高等師範學校とか大學とかでは、かう云ふだらう、分數とは横線で分けられた二整數の一體であると。次に規約に依つてこの記號のうける演算を定義し、この演算の規則が整數の計算の場合と同様なことを證明し、最後に、この規則に從つて分數にその分母をかければ分子となることを認めるであらう。これは甚だ結構なことである、といふのは、林檎や何かを切つたりしたお蔭で永らく分數といふ考へに馴れて居り、且つ可なりの數學的教育で鍊られて、その精神が次第に純粹に論理的な定義を望む様になつて來た青年に對してであるから。しかし若し初學者にこの通りにしたら、彼等はどんなにびつくりすることだらう。

近頃もてはやされ、屢々賞讃されてゐる著書、ヒルベルトの幾何學原理 Hilbert; Grundlagen der Geometrie の中の定義も亦この様なものである。事實彼が何から初めるかを見よう。

點、直線、平面と呼ぶ三組のものを考へよう。この「もの」とは何であるか。吾々は知らない、又知る必要もない、知らうとするのは却つて邪魔になる位のものであらう。それについて許されるのは只公理を覺える事だけである。例へば、二つの異る點は常に一つの直線を定める。尚次の註釋がつく、定めるといふ代りに、直線はこの二點を通る或はこの二點を結ぶ、或は又この二點はこの直線上にあると云つてもよい。即ち「一直線上にある」とは單に「一直線を定める」の同意語として定義されてゐる。私はこの書を立派なものとは考へるが、中學生に對してはすゝめないであらう。だがすゝめた所で心配することはない、彼はこの書を先の方まで讀み續けて行くことは出來まいから。

これは極端な例であるが、誰もこんなに極端に走らうとする教師はあるまい。しかしこの例程でなくとも、尚同じ様な危險の中にありはしないであらうか。

吾々が四年級の教室にゐるとする。教師は筆記させる、圓とは中心といふ内部の一點から等距離にある平面上

の點の位置である。勉强家の生徒はこの句をノートに書く。怠け者の生徒はでこ坊の畫をかく。しかし兩者共に理解してゐない。そこで教師は白墨を以つて黑板に圓をかく。「何だ、早く云へばいゝのに、圓とはまるだといへばすぐわかつたんだ」生徒等はかう思ふ。疑もなく教師の方がたゞしいのである。生徒の定義は何の價値もない。それはどんな證明にも使ふことは出來ないし、殊に彼等の考を分析するといふ有益な習慣をつけることが出來ないから。しかし彼等がわかつたと思つてゐることも、ほんたうに解つてゐないのだといふことを教へ、彼等の初めの考が粗雜であつたことを覺らせ、自分からそれを純化し精化する望を起さすべきであつたであらう。

**四**　これらの例には又戻る時があらう。私は只相反する二種の考へ方を示さうと思つただけである。その間には明な對照があるが、この對照は科學の歷史の吾々に示すところである。五十年前に書かれた書を讀んで見ると、その中の大部分の推論は吾々にとつて嚴密さが缺けてゐると思はれる。

その時代には人は、連續函數は零を通らなければ符號をかへることは出來ない、といふことを許したが、今日ではこれを證明する。又普通の算法が無理數にも適用されることを許したが、今日ではこれをも證明する。其他多くの事柄を許したが、中には謬であるものもあつた。

彼等は直觀に賴つた。しかし直觀は嚴密を、否、確實をさへ與へることは出來ない。人々は次第にこゝに氣づいて來たのである。直觀は、例へばすべての曲線は切線をもつこと、卽ちすべての連續函數は誘導函數をもつことを教へる。がこれは謬である。そして人が確實を重んずると共に、直觀の領土は益〻狹められなければならなかつた。

この必要な發展はどうしてなされたか。人々はやがて、豫め定義に嚴密を入れておかなければ、推論に嚴密を與へることは出來ないといふことに氣がついた。

久しい間、數學者の取扱ふ對象は不完全に定義されてゐた。人々は官覺又は想像で寫像するから、その對象を知つてゐると信じてゐたが、只粗笨な心像をもつてゐるに過ぎないのであつて、その上に推論を行ひ得る樣な精密な觀念を持つてゐたのではない。

論理家が努力しなければならなかつたのは、此の點についてである。かうして、無理數についての努力がなされた。

直觀から來た曖昧な連續の觀念は、整數についての不等式の複雜な體系に分解された。微積分學の根柢を省みる時、前代の人々が不安を感じたすべての困難は、かうして全く消え失せたのである。

今日では最早解析に殘つてゐるのは、唯、整數或は整數の有限又は無限の體系が、等、不等の網に依つて結合されたもののみである。

數學はかうして所謂數論化されたのである。

**五**　數學は何物も犧牲にせずにこの絕對的の嚴密に達したと、吾々は信ずるだらうか。全くさうではなく、嚴密さに於て得たところは客觀性に於て失つたのである。完全な純粹性を得たのは、現實から離れることに依つてである。嘗て障害に滿ちてゐた領土を吾々は自由に馳驅することが出來るが、この障害は消え失せたのではない。それは只國境に移されたのみであつて、この國境を突破して實用の王國に侵入しようとすれば、吾々は再び

これを征服しなければならないであらう。

嘗て人々はちぐはぐの要素――或は先天的の、或は多少消化された經驗から生じた――から成る曖昧な觀念をもち、直觀に依つて、その主要な性質を知つてゐると信じてゐた。今日では吾々はこの經驗的の要素を捨てて、先天的の要素のみを保存する。これらの性質の中、或るものは定義となり、他のすべては嚴密な推理に依つてこれから引き出される。これは結構であるが、尙この定義となつた性質が、吾々が經驗に依つて知る所の、又吾々の曖昧な直觀的觀念が引き出された所の、かの現實の對象に屬してゐることを證據立てなければならない。それを檢證するには、經驗に訴へ又は直觀を働かすことが必要であらう。若しこれを證明することが出來なければ、この定義は完全に嚴密ではあらうが、全く無用のものであらう。

論理は時として奇妙なものを產み出すものである。半世紀前から多くの奇妙な函數が現はれたが、夫らは何かに役立つ眞正の函數に出來得る限り似まいと努めてゐる樣に見える。連續でないもの、或は連續ではあるが誘導函數のないものなど。それのみか、論理の見地からすれば、この奇妙な函數こそ最も一般的なのであつて、別に探さなくとも見つかる樣な函數は、その特別な場合として見られるに過ぎず、僅に片隅を占めてゐるのみである。

嘗ては、新しい函數が發見されるのは、何か實際の目的があつての事であつた。今日では、發見は只全く先人の論理の謬りを示す爲めにされるのであつて、それからは決して何物も引出されることはなからう。

若し論理が教育者の唯一の指導であつたならば、この最も一般的な函數即ち最も奇妙な函數から出發すべきであつたらうし、又初學者をこの怪物と取り組ますべきであつたらう。さもないと論理家は、諸君は一段づゝしか嚴密に達しないといふかも知れない。

**六**　恐らくさうでもあらう、が吾々は現實をそんなに安く見る事は出來ない。私は唯感覺的な現實の世界のみを云ふのではないが、この世界も亦價値あるものである。何故なら、生徒の十中九迄は、この世界と鬪ふ爲めにこそ、諸君に武器を求めるのだから。併し數學的の事物の生命となり、而も論理とは異る一層微妙な現實がある。

人間の身體は細胞から成り、細胞は原子からなる。それなら、この細胞と原子とは人體の現實の全部であるか。この細胞を調整し、個體の統一をなさしめる仕方も亦、一の現實、更に一層興味のある現實ではなからうか。

顯微鏡のみで象を研究した自然學者は、この動物を完全に知つてゐると考へるだらうか。

數學にても同樣である。論理學者が各證明を單純な演算に分解し、それがことごく正しいとしても、彼は尙全體の現實を攫んだのではなく、この證明の統一をなす或る何物かは、彼の手から全く逸してゐるであらう。

名工の建築を見ても、若し建築家の意圖を理解できないならば、石工の仕事の何をほめるべきであらう。然るにこの全體觀は、純粹論理の與へ得るところではなく、之を直觀に求めなければならない。

一例として連續函數の考をとらう。これは最初は白墨で黑板に引かれた線、感覺的の像に過ぎない。それは次第に純化されて、原像のすべての線を再生させる不等式の複雜な體系を組立てる用に供せられる。すつかり總とアーチを建てた後の樣に、框をとりはづす。この粗笨な代表物は最早無用の支柱として取除かれ、後には、論理家の眼には非のうち所もない建物自身が殘される。しかしながら、教師がかの原像を呼び戻さないなら、假に框を立て直さないなら、何の爲めにすべてのこれらの不等式が一つ一つ積み上げられたかを、生徒たちはどうし

て想像することが出來ようか。この定義は論理的ではあらうが、しかし眞の現實を示しはしないであらう。

**七**　玆で話を戻さなければならない。自分の全く滿足しないことを教へるのは、疑もなく教師にとつて苦しいことである。しかし教師の滿足が教育の唯一の目的ではない。吾々は先づ、生徒の精神狀態や、生徒が何になればよいかについて、考へなければならない。

動物の胎生期の發達は、地質學的時代の祖先の全歷史を極めて短期間に約めたものである、と動物學者は云つてゐる。精神の發達にも、同樣のことがある樣に思はれる。教育は兒童をして其の父祖が通つた處を一層速く、といつて順序を飛ばさずに、過ぎさせなければならない。この點については、科學の歷史が吾々の第一の指導とならなければならない。

吾々の祖先は、分數や連續や或は曲面の面積やが何であるかを、知つてゐると信じてゐた。彼等が知つてゐたのでないと認めたのは、吾々に至つてである。同樣に生徒も、彼等が眞面目に數學の勉强を初める時には、それを知つてゐると思つてゐる。若し何の用意もなしに、彼等に「いや諸君は數學を知つてゐない。諸君がわかつたと思つてゐることも實はわかつてゐないのである。私は、諸君がわかり切つた事と思つてゐることを、證明しなければならない。」といつたら、そして若しその證明に彼等にとつては結論よりも尙不分明に思はれる前提を使つたら、この不幸な子供達は何と思ふだらうか。彼等は數學とは無用の詮鑿を勝手に集めさがしたものだと思ひ、或者は數學が嫌になるし、或者は遊戲として面白がり、ギリシャ時代の詭辯學者たちの樣な精神狀態になつてゆくであらう。

之に反して、もつと後になつて、生徒の心が數學の推理に馴れ、長い間の親しみに依つて熟して來ると、疑は自分の內から生れて來、そこで初めて、諸君の證明も歡迎せられる樣になるであらう。其證明は、再び新しい疑を呼び起し、恰も吾々の父祖に疑問が續々と生じた樣に、兒童にも續々と生じて、遂には、完全に嚴密でなければ、彼等は滿足しない樣になるであらう。すべてを疑ふだけでは尙足りない。何故人は疑ふかをも、知らなければならない。

**八**　教育の重なる目的は、ある精神能力を開發するにあるが、それらの能力の中、直觀は決して價値少いものではない。數學の世界が現實の世界と接觸を保つのは、この直觀に依つてであり、もしこの現實の世界が純粹數學にも缺く可らざるものとすれば、吾々は記號と現實とを隔てる溝を埋める爲めに、常に直觀に訴へなければならないだらう。實際家は常にさうする必要があるのである、そして一人の純粹幾何學者に對して、實際家は百人もなければならない。

技術家は完全な數學的教育をうけなければならないが、それは何の役に立つのであらうか。事物の各方面を見る爲め、速に見るためである。彼等には細かい詮鑿をする暇はない。目前の複雜な物理的對象について、早速吾が彼等に與へた數學の利器を應用し得る點を發見しなければならない。吾々が、兩者の間に論理家の掘つたあの深い溝渠を殘しておいたならば、彼等はどうすることが出來ようか。

**九**　未來の技術家の外に、或る少數の生徒は教師になる樣な役割となる。從つて彼等は深く底まで極めなければならない。根本原理の深い正確な智識は、彼等にとつて何よりも缺く可らざるものである。しかし、それは彼

等に直觀を養成しなくてもよいといふ理由とはならない。何故なら、唯この科學の一面のみしか見ないなら、それについて誤つた考をもつだらうし、又彼自身にないところのこの直觀の能力について、彼の生徒を開發することは出來まいから。

この能力は純粹幾何學者にとつてさへ必要である。證明するのは論理によつてであるが、發明するのは直觀によつてである。批評することを知るのはよい事であるが、創造することを知るのは更に一層よい事である。諸君は組合せが正しいか否かを知ることは出來る。しかし、諸君がすべての可能な組合せの中からどう選擇すべきかを知らないならば、何といふ困つたことであらう。論理は、これとれの道を行けば確に障害に遇はないといふことを教へるが、どの道が目的に導くものであるかについては、何も云はない。その爲めには、遠くから目的を見なければならない。そして吾々に見ることを教へる機能は、即ち直觀である。直觀のない幾何學者は、恰も、文法には通じてゐるが思想のない作家の樣なものであらう。しかしこの機能も、それが現はれると忽ち斥け、又その效用も知らない中にこれを疑ふ樣に教へたならば、どうして發展することが出來ようか。

さて茲に、書くといふことの練習が大切なことを、括弧をしていつて置きたい。書くといふことは、或る種の試驗では、例へば理工科學校（エコールポリテクニク）などでは、多分あまり重んじられてゐない。それを重んじると優良な學生に門を閉ざすことになる、彼等はその學課を極めてよく理解し知つてゐるが、それを應用することはさつぱり出來ないから、といふ樣なことを私はきいた。前に理解するといふ言葉に澤山の意味があるといつたが、この生徒達は第一の意味で理解してゐるに過ぎず、技術家となるにも、幾何學者となるにも、不十分なことがわかる。處で吾々は選擇をしなければならないのであるから、寧ろ完全に理解してゐるものを採らうと思ふ。

**十**　然し、正しく推理する事も亦、數學の教師が何よりも先に養成しなければならない大切事ではなからうか。この事は忘れられる恐れはない。吾々は最初からそれに努めなければならない。私は幾何學が、何といふか一種低級な測量術の樣なものに、墮落するのを見るのを悲しむものであつて、獨逸のある教授の極端な說には、決して同意するものではない。然し生徒に正しい推理の練習をさせる爲めには、前述の不都合を伴はない樣な數學の諸部分に於て、可なり機會がある。

吾々は既に最初から、謂はば全く自然的に、絕對に論理の支配してゐる長い連續した定理をもつて居り、最初の幾何學者は、吾々の常に見習ふべき又讃賞すべきその模範を示してゐる。

あまり詮鑿するのを避けなければならないといふのは、根本の原理を述べるについてである。それはあまり生徒を厭がらせるだらうし、又役にも立たない。吾々はすべてを證明することも出來なければ、すべてを定義することも出來ない。そして常に直觀を借らなければならない。とすれば、直觀に訴へることが少し位早からうと遲からうと、或は少し位多からうと少からうと、それから出る前提を正しく用ゐて正當に推理することを學びさへすれば、問題ではなからう。

**十一**　かうした澤山の反對な條件を滿たすことが出來ようか、特に定義を與へる場合に出來ようか。頑固な論理の規則、この新觀念の科學全體に於ける位置を理解しようとする希望、かたちに依つて考へようとする要求、これらを同時に滿足する樣な簡單な敍述は、どうして見つかるだらうか。それは多くの場合見つからないであら

う。これが、一つの定義を述べただけでは不十分な所以である。吾々は先づ定義を準備し、又それが正當なことを説明しなければならない。

これはどういふ意味であるか。諸君は度々かういふことを聞いたであらう、すべての定義は公理を含む、何故なら、それは定義された對象の存在を斷定するのだから、と。それ故定義は純粋論理の見地からは、それが言葉についても、又は旣に許された眞理との關係に於ても、矛盾を伴はないことを證明されなければ正當なものとは云へなからう。

然しこれだけでは足りない。定義は規約として述べられるのであるが、而も若しそれを任意の規約として强ひるならば、大抵の人々はこれに反抗し、諸君が多數の質問に答へた後でないと納得しないであらう。

多くの場合數學上の定義は、リアル氏 Liard の示した樣に、何處までも、より單純な觀念から構成されたものである。しかしこれらの要素を、他に幾らも集め方があるのに、何故こんな具合に集めたか。それは氣紛れによつてであるか。さうでないとすれば、何故この組合せが他のすべての組合せより存在の權利が多いのか。それはどういふ必要を滿たすのか、この組合せが數學の發達に於て重大な役目をつとめることを、又推理と計算とを簡單ならしめることを、どうして豫知したか。この定義の曖昧な、粗笨な、うつしともいふべきものが、何か自然の中にあるのであるか。

それのみでない。もし諸君が、すべてのこれらの問に滿足に答へたなら、吾々はこの新來者も洗禮される權利があつたことを認めるだらうが、名稱の選擇も矢張り勝手には出來ない。吾々がどういふ類似に依つて導かれたかを、又若し異つたものに類似の名をつけたのであれば、此等の物が少くとも、內容は異つても形式は似てゐる事、卽ち共性質の類似してゐる、謂はば平行してゐることを、說明しなければならない。

かうして初めてすべての傾向を滿足させることが出來るであらう。もし定義の陳述が論理家を喜ばすに足る程正確であれば、その說明は直觀をも滿足させるであらう。が尙一層望ましいのは、出來るかぎり說明が陳述に先だち、それを準備する事である。吾々は何か或る特別の例の研究によつて、一般的な陳述に導かれるであらう。

尙一言しよう。定義の各部分の陳述は、定義すべき對象を、それに近い他の對象の階級から區別することを、目的としなければならない。定義は、唯定義された對象を示すだけでなく、それと混同されてはならぬ類似の對象をも示さなければ、その差異を理解させなければ、又この定義をこれ〳〵と述べるのはかういふ理由からであると明に說明しなければ、理解されないであらう。

しかし今は、一般的のことはこれに止めて、今迄のべた幾分抽象的なこれらの原理が、どうして算術、幾何、解析及び力學に應用せられるかを吟味すべき時である。

## 算　術

**十二**　吾々は整數をば定義しないが、その代り整數についての演算を定義する。私の思ふ所では、生徒はこの定義を暗記するだけで、それに何の意味もたせない。それには二つの理由がある。先づ生徒の心が未だ少しも定義の必要を感じない中に、あまり早く敎へすぎる。次にこの定義は、論理的の見地からも十分なものでない。

加法についてはよい定義が見つからない。それは唯何處かで止めなければならず、完全に殘らず定義することができないからである。加法とは加へる事であるといふのは、加法を定義することではない。吾々の出來るのは唯、具體的の例として或る數から初めて、今行つた演算を加法といふといふより他はない。

減法については之と違ひ、加法の逆の演算として論理的に定義することが出來る。しかしかうして初めるべきであらうか。玆でも矢張り例で初め、この例に依つて兩演算の相互關係を示さなければなるまい。さうすれば定義は準備され、又説明されるであらう。

乘法についても矢張り同樣。特殊な問題をとつて、それが互に等しい數を幾度も加へれば解けることを示し、次に生徒達の既に熟練で使へる樣になつてゐる演算、即ち一度の乘法で、遙に速くその結果に達し得ることを敎へる。論理的の定義は、これから全く自然的に出て來るであらう。

除法は乘法の逆演算として定義するが、分配といふ親しみのある觀念を用ゐた例で初め、この例について、乘法をすれば再び元の分けられたものになることを示す。

殘るところは分數に關する運算であるが、乘法の場合の他には困難はない。一等よいのは先づ比例の理論を說くのであつて、これからのみ論理的の定義を出すことが出來る。しかし、この理論の初めの部分に現はれる定義を頭に入れさせる爲めには、分數を導き入れる樣に氣をつけながら、比例等の昔からの問題からとつた澤山の例で準備しなくてはならない。比例の考へに生徒を馴らす爲めには、幾何學的の像を使ふことを恐れるには及ぶまい。既に幾何學を習つたものなら、それを想ひ出させるなり、或は未だ習つてゐなければ、直接直觀に訴へるなりする。これは其上、彼等にとつて、今後さうすることの準備ともなるであらう。最後につけ加へておくが、分數の乘法を定義した後では、この演算が交換、結合、配分の法則に從ふことを示し、又かうして檢證するのは、これが正しいことを示す爲めであることを生徒に十分注意させつゝ、この定義を說明しなければならない。

すべてこれらの事について、幾何學的の圖形がどんな役目を演じてゐるかは明であるが、この役目は科學と哲學との歷史から見ても當然なものである。若し算術がすべての幾何學的の混りものから純粹であつたなら、それは整數しか知らなかつたであらう。その他のものを發明したのは、幾何學の要求に適はう爲めである。

## 幾何

幾何學に於では、まづ直線の觀念に出遇ふが、直線を定義することが出來ようか。一點から他の點への最短距離といふよく知られた定義は、私にはあまり滿足なものではない。私は簡單に定規を以つてはじめ、先づ生徒にどうして定規を裏返して檢査することが出來るかを示す。この吟味は直線の本當の定義である。直線とは廻轉軸のことである。次に定規をすべらして査べることを示し、直線の最も大切な性質を知らせる。直線は一點から他の點への最短の道であるといふ性質は、確實に證明出來る定理であるが、この證明は中等敎育に入れるには少し難かしい。それよりも、豫め吟味された定規が、引つ張つた絲にぴつたり合ふことを示す方がよからう。こんな風の困難が生じた場合には、粗末な實驗で確めた公理の數を增すのを恐れてはいけない。

どうしても公理を許さなければならないのであるから、嚴密に云へば必要でないものでも、少し位許した處が

大した害にはなるまい。大切なことは、一度許された公理について正しく推理することを教へるにある。繰返すことの好きだつた伯父のサルセイ Sarcey は度々から話した。劇場では、觀客は初めに出される假定は何でも喜んで受入れるが、一度幕が揚ると、理窟に合はないことは承知しなくなると。數學に於ても同樣である。

圓を定義するにはコンパスで初めることが出來る。それで描いた曲線を生徒達はすぐ理解する。次には彼等にコンパスの二點の距離が不變であること、この二點の中、一方は固定し、一方は動き得ることを觀察させる。かうして自然に論理的の定義に導かれるであらう。

平面の定義は一つの公理を含んでゐるが、それを隱してはならない。畫板をとり、定規が畫板の上をいつも離れずに動くこと、又それが三つの自由度をもつてゐることを示し、圓筒と圓錐とを以て、その表面には只二自由度のみを許すのでないと直線がくつつかないことを比較し、次に三枚の畫板をとつて、先づ互に觸れながらすべり得ること、それが三自由度をもつことを示し、最後に平面と球とを區別する爲めに、この二枚の板が第三の板にふれながら互にも觸れ得ることを示す。

諸君は恐らく絶えず動かし得る道具を使ふのに驚いたであらう。併しこれはお粗末な猾いやり方ではなく、一寸考へるよりは遙に哲學的なものである。哲學者にとつて幾何學とはどんなものか。群の研究である。どんな群か、剛體の運動の群である。して見れば、何か剛體を動かさないで、どうしてこの群を定義する事が出來よう。

平行線については、昔からの定義をそのまゝに、同一平面上にあつて何處まで引き延ばしても交らない二直線を平行線といふ、といふべきであらうか。さうではない、といふのはこの定義は消極的であり、經驗によつて檢證することが出來ず、從つて直觀に直接與へられたものと見る事が出來ないから。殊にそれが上に述べた樣に幾何學の眞の源たる群の觀念、剛體運動の考へに、全く關係のないものであるから。寧ろ初めに不變圖形の直線運動を、この圖形のすべての點が直線の道をもつ樣な運動として、定義し、定規の上に直角定規をすべらせて、この樣な運動があり得ることを示す方がよくはなからうか。この公理にまで持ち上げられた實驗的の確めから、平行線の觀念、ユークリッドの公準そのものを引き出すことは、易々たるものであらう。

## 力　學

私は速度、加速度、或は運動學の他の觀念の定義にまで戻るには及ぶまい。それは誘導函數の觀念に結合した方が便利であらう。

之に反して、私は力と質量との動力學的觀念について述べよう。

玆に私の驚く事が一つある。それは中等教育をうけた青年たちで、教はつた力學の法則を實際世界に應用する事から遠ざかつてゐる者が、どんなに多いかといふ事である。それは只彼等が出來ないばかりでなく、それについて考へても見ないのである。彼等にとつて、科學の世界と現實の世界とは、透過し難い仕切で隔てられてゐる。立派な服裝の、或は大學生とも見えるものが、馬車に乘つて前の方を押しながら、それで車の進みを助けてゐると思つてゐるのを見掛けるのも珍らしい事ではないが、之などは作用反作用の原理を無視してゐるのである。

しかし吾々が生徒の精神狀態を分析して見れば、これもそんなに驚くことではなからう。彼等にとつて力の眞

の定義は何か。彼等の口にする定義でなく、彼等の頭の片隅に隠れて居り、其處からすべてを操つてゐる定義は何か。その定義はかうである。力とは、それで以て平行四邊形を作るべき矢である。この矢は想像的のものであつて、自然界に存在するものとは何の關係もない。若し彼等に矢で表はす前に、現實界に於ける力を示して置いたなら、こんなことにはならなかつたであらう。

力をどう定義すべきであるか。論理的の定義にはよいものがない。この事は他の場所で十分説明しておいたと思ふ。人間的な定義卽ち筋肉の努力の感覺があるが、之れは事實あまりに粗笨で、それから有用なものは何も引き出すことは出來ない。

玆に進むべき道がある。最初は力といふ類を知らせる爲めにこの類のすべての種類を一つ一つ示す。それは多種多樣である。液體がその容器の壁に及ぼす壓力、絲の張力、ゼンマイの彈力、物體のすべての分子に働く重力、摩擦力、接觸した二つの固體の互に垂直な作用と反作用と。

これは性質的な定義に過ぎないから、力を測定することを敎へなければならない。さうするには先づ、平衡をみださずに一つの力を他の力でとり代へ得ることを示す。この交換の最初の例としては、天秤やボルダの二重衡がある。次には重さを單に重さでとり代へられるばかりでなく、異つた力でとり代へられることを示す。例へばプロニイの制動機は、重量を摩擦でとり代へさせる。

これらすべての事から、二力の相等しいことの觀念が出て來る。

次に力の方向を定義しなければならない。もしFなる力が、今考へてゐる物體に引張つた絲を媒介として働いてゐるF'なる力に等しく、Fが平衡をみださずにF'と取代へられるなら、絲の附着點は、定義によつて、F'なる力の、そしてそれと等値なFなる力の、作用點であり、絲の方向はF'なる力の、又それと等値なFなる力の、方向である。

これから力の強さの比較に移る。もし一つの力が同方向の二力ととり代へられると、その力はこの二力の和と相等しい、例へば二十瓦の分銅と十瓦の分銅二つと取代へられることを示す。

これで十分であらうか。まだ不十分である。同じ作用點、同じ方向の二力の強さを比較することは既に出來るが、それを方向の異る場合にも敎へなければならない。それには絲を錘で引張り滑車にかけてかういふ、絲の兩部分の張力は引張る錘の重さに等しいと。

此處に吾々の定義があるのである。これに依つて二つの部分の張力を比較し、又前述の諸定義を使つて、この二部分と同方向の如何なる二力でも比較することが出來る。これは絞車の滑車の數や配置はどうであつても、錘の重量が同じならば、後の部分の張力は變らないことを示して檢證しなければならない。次にこの事は滑車が摩擦がないのでないと正しくないことを示して、これを完成しなければならない。

一たびこの定義がわかれば、作用點と方向と強さとが力を定めるに十分であること、二力はこの三要素が同じなら常に等値であり、常に互に交換出來ること、又このことは平衡の時でも運動してゐる時でも、或はそれに働く他の力がどうあらうとも、變らないことを敎へなければならない。

そして共に働く二力は常に一つの合力で置き代へられ、又その物體が靜止してゐても運動してゐても、或はそ

れに働く他の力がどうあらうとも、この合力は變らぬことを敎へなければならない。

最後に、かうして定義された力は、作用反作用の等しいといふ原理を滿足させることを、示さなければならない。

これらすべては實驗である。そして實驗のみが吾々を敎へることの出來るものである。それは生徒が日常それと知らずにやつてゐるありふれた實驗を引用し、又彼等の目前で簡單な巧みに選んだ僅な實驗をすれば十分である。

力を矢で示すことの出來るのは、かういふ迂路を通つた後のことである。がその時でも私は推理を進める折々、記號から現實に歸ることがよからうと思ふ。例へば力の平行四邊形を、三本の絲を滑車にかけ錘で張り、同一の點を引張らせて平衡ならしめた器械を用ゐて、說明するのは難しいことではなからう。

力を知れば質量を定義するのは容易である。此度の定義は、動力學から借りてこなければならない。質量と重量との區別を理解させるのが望む所の目的であるから、外に仕樣がないのである。しかし玆でも尙實驗で定義を準備しなければならない。實際質量がどんなものかを示す爲めに特別に作られたかの様な器械がある、卽ちアトウッドの器械である。其他重力の加速度は重いものにも輕いものにも同じであること、又それは緯度で變ることなどの落體の法則を思ひ出させる。

さて若し諸君が私に、私の吹聽する樣な方法は總てずつと以前から中學で行はれてゐるといふなら、私は驚くよりも喜ばう。吾々の數學敎育が結構な事を私は知つてゐる。私はそれの覆へされるのを欲するものではない。それを悲しみさへもしよう。私は唯徐々に改良されることを希ふのみである。敎育は一時の氣紛れから急激な變更をうけてはならない。その高い敎育的の價値は、この樣な嵐に於ては忽ちに滅ぶのである。正確嚴密な論理は、尙、その根柢を作ることを止めてはならない。例證による定義は常に必要ではあるが、それは論理的の定義を準備するのであつて、それにとつて代つてはならない。只少くとも、論理的な眞の定義が高等敎育に於てのみしか有效に與へられない樣な場合に、望ましいことなのである。

私が今日述べたところは、他の場合に書いた意見を少しも捨てるのではないことを、諸君はよくおわかりになつたと思ふ。私は今日述べた定義の或るものを度々批評する機會があつた、それらの批評は全くそのまゝ通用する。これらの定義は唯假のものに過ぎないが、しかもそれは吾々の通らなければならないものである。

# 第參章　數學と論理と

## 緒論

數學を數學特有の原理に訴へずに、論理に歸することが出來るであらうか。熱心に誠實にこれが成立に努めてゐる一學派がある。彼等には特有の言葉があつて、文字を使はず符號だけを用ゐる。この言葉は專門家以外には理解出來ない爲め、素人は專門家の決然たる主張の前に頭を下げがちである。それ故その斷乎とした調子が果して正しいか否かを知る爲めに、今少し精しくこの主張を吟味するのは、恐らく無用のことではなからう。

しかし問題の性質を十分理解するためには、幾らか歷史的の事柄にふれ、特にカントルの事業の特質を回顧する必要がある。

無限といふ觀念は久しい前から數學に導入されてゐるが、この無限は哲學者が生成と呼ぶ處のものである。數學的の無限とは只、如何なる限界をも超えて增してゆくと考へられる量に他ならなかつた。それはすべての限界を超えたとは云へないが、只超えるだらうといひ得る不定の量であつた。

カントルは數學に眞無限 infini actuel、卽ちたゞすべての限界を超えると思はれるのみならず、旣に超えたと考へられる量を、導入しようと試みた。彼は次の樣な問題を呈出した。空間の點は整數よりも多いか。空間內には平面上の點より多くの點があるか。等。

かうして整數の數、空間內の點の數等は彼の所謂超限基數 nombre cardinal transfini 卽ちあらゆる普通の基數よりも大きい基數を構成する。彼は好んで無限を含む集合の原素を適當な順序にならべ、これらの超限基數を比較し、又超限順序數といふものをも考へたが、私はこれについては述べまい。

多くの數學者は彼の跡を追つて多數の同種の問題を呈出した。彼等は超限數に馴れ親しみ遂に有限數の理論をカントルの基數の理論に依屬させる迄に至つた。彼等の意見によると、數論を眞に論理的に敎へるには、先づ超限基數の一般的特質を建てて、然る後この中から一小階級卽ち普通の整數の性質を區別しなければならない。この迂回に依つて、この小階級（卽ち普通の算術代數全體）に關する命題は論理學の原理以外に何物をも用ゐずに證明せられるであらう。

この方法は明にすべての健全な心理に反してゐる。人間精神が數學を建てる爲めに進んだのは確にこの樣にしてではない。思ふにこの方法の主唱者も中等敎育にこれを移入しようと思ふのではなからう。然しこの方法は論理的であるか、一層正確に云へば、この方法は正しいか。こゝに疑問がある。

それにも係らず多くの幾何學者はこの方法を採用した。彼等は公式を積み重ねるだけで、普通敎科書に見る樣に說明と公式とを交へずに、全然文言のない論文を書いて、それに依つて論理以外のものから脫れたと考へた。不幸にして彼等はカントルの二律背反 antinomies cantoriennes ――これについては後に語る機會がある――といふ矛盾した結果に到達した。彼等はこの矛盾にも屈せず旣に現はれた矛盾を除き得る樣にその規則を改める

に努めた、が矛盾が今後再び現はれないとは斷言出來ないのである。

今や彼等のこの誇張を正すべき時である。しかし私は長らくその雰圍氣の中に住んでゐる彼等を説得しようなどとは望まない。のみならず彼等の證明を斥けた處で、それは少し變つた形でまた現はれるであらうし、又其中の或物は、昔話のいつも頭の生え代るレルヌの九頭蛇の樣に、旣に幾度も灰の中から生れ變つて來たものである。エルキュル Hercule の蛇の頭は九つか十一かであつたから退治られたが、今の場合は頭數があまりに多く英、獨、佛、伊にあるのであるから、エルキュルと雖も勝利を拋たなければならないだらう。それ故私は只偏見のない常識の人々のみに訴へる。

## 一

最近幾年間に、數學的推理から論理的要素を解放分離する目的を以て純粹數學及數理哲學に關して幾多の書物が公刊された。此等の書はクーテュラー氏 Couturat が其著「數學の原理」les Principes des Mathématiques の中で頗る明快に分析陳述してゐる。

クーテュラー氏にとつては、これらの新らしい仕事、特にラッセル Russell ペアノ Peano 兩氏のものは、ライプニッツとカントとの間の久しい爭論に最後の解決をつけたものである。彼等は先天的綜合判斷 jugement synthétique a priori 卽ちカントが分析的に證明することも、自同性に歸することも、經驗的に設定することも出來ない判斷に名づけた先天的綜合判斷といふものは存在しないことを示し、又數學は全く論理に還元せられること、直觀はそれについて何等與かるところのないことを示した。

これはクーテュラー氏が上記の著書で述べる處であるが、彼は又カント記念祭の講演に於て尙一層明に述べたのであつて、私は隣席の人が小聲でかう云ふのを聞いた。「これこそ、カントの死の百年祭である。」

吾々は、この最後の判決を、承認することが出來ようか。私はさうは思はない。次にその理由を示さうと思ふ。

## 二

この新らしい數學で、先づ人目を惹くのは、純粹に形式的であるといふ特質である。ヒルベルトは云ふ。「點、直線、平面と呼ぶ三種のものを考へ、一の直線は二點に依つて定められるものと規約し、この直線がこの二點に依つて定められるといふ代りに、この直線はこの二點を通る、又は、この二點はこの直線上にある、とも云へると規約しよう。」このものが何であるかは、吾々は全く知らないのみならず、又それを知らうとしてはならないのである。その樣なことはどうでもよいので、未だ嘗て點も直線も平面も知らない樣な人でも、吾々と同樣に、立派に幾何學がやれるであらう。を通るやの上にあるといふ語が、心の中にどんな想像をも起させない爲めに、前者は、定められる、後者は、定めるといふことの、同意語に過ぎないとせられる。

從つて勿論一つの定理を證明するのに、その定理が何を意味するかを知るのは、必要どころか有用でさへもない。吾々は幾何學を、スタンレイ、ジェヴォンス Stanley Jevons の考へた推理ピアノで、取換へることも出來るし、或は、望みとならば、一端から公理を入れ他端から定理を引出す樣な機械、丁度、生きた豚が入つてゆく

とハムとソーセージになつて出て來るといふ、傳說のシカゴの機械の樣なものを、考案することも出來よう。この機械同樣に、數學者も自分のする事を理解する必要が更にないのである。

彼の幾何學のこの形式的な特質について、私はヒルベルトを非難はしない。彼は自分の出した問題によつて、その方に傾かざるを得なかつたのである。彼は幾何學の基礎的公理の數を最少とし、且つそれを完全に列擧しようとした。處が、精神が活動的に活らく推理、直觀が尙或る役目を勤める推理、謂はば活きた推理に於ては、知らず識らずに入つて來る公理や公準を、斥けることは難しい。從つて、彼がすべての幾何學的推理を、純粹機械的な形式に歸した後でなければ、彼の計畫が成功し、彼の仕事が完成したと、定めることは出來ない。

ヒルベルトが幾何學についてしたことを、他の人々は數論及解析についてしようとした。若し彼等がそれに成功したとしても、カント派の人々は默しなければならないだらうか。恐らくさうではない。何となれば、數學的思索を一の空虛な形式に歸することは、確にそれを不具にするものだから。すべての定理が、純粹に分析的な過程に依り、たゞ有限數の公理の論理的結合によつて演繹され、且つこの公理は規約に過ぎないといふことが、證明せられたとしても、哲學者は尙、この規約の起源をさぐり、又何故この規約が、他の反對の規約よりよいとせられたかを、尋ねることが出來るであらう。

次に、公理から定理に至る推理の、論理的正確といふことのみが、吾々の求むるものではない。完全な論理の規則が、全數學であらうか。同樣に、將棋の全技術は、駒の進行法に歸すると云ひ得るだらうか。論理によつて供せられた材料を組合せて得るすべての結構の中から、吾々は選擇をしなければならない。眞の幾何學者が正しくこの選擇をなし得るといふのは、彼等が確實な本能、或は何といつていゝか、もつと深い、もつと隱れた幾何學——これのみが、組上げられた幾何學を價値あらしめるものである——の漠然たる意識に依つて導かれるからである。

この本能の源を尋ね、この、感じられはするが言表し得ない、深い幾何學の法則をさぐることは、論理萬能を欲しない哲學者にとつての、貴い努力である。しかし、これは私のとらうとする見地でもなく、隨つて、私の問題とするのもその事ではない。上に述べた本能は、發見にこそ必要なれ、一度出來上つた科學の研究には、無くてもいゝと、一應は思はれる。そこで、私の知りたいのはかうである。一度論理學の原理が許されたとして、吾吾はすべての數學的眞理を、直觀に訴へることなく、果して眞に證明——發見とはいはない——し得るか否か。

## 三

この問に對して、私は嘗て否と答へた。（科學と假說第一章參照）この答は、最近の研究によつて變へられなければならないだらうか。私が否と答へたのは、「完全歸納原理」が、數學者に必要であると同時に、論理に還元し得ないものである、と思つたからである。この原理は、既に知られてゐる通り、次のことを言表はす。「ある性質が、數1について眞であり、又それが、$n$ について眞ならば $n+1$ についても眞なることを、證明し得る時には、その性質は、すべての整數について眞であらう。」私はこの中に、特に數學的の推理を見るのである。私は——或はさう思はれるかも知れないが——すべての數學的推理がこの定理の一應用に歸する、といふつ

もりではない。少しく詳しくこれらの推理を調べて見ると、そこに、同様な本質的の特徴をもつ、多くの他の類似の原理が、應用されてゐるのを知るであらう。この種の原理の中、完全歸納法は只最も簡單なもので、私が標本として擇んだのも、亦それが爲めである。

この完全歸納法といふ名は、既に行はれてはゐるが、適當ではない。この推理法は、眞の數學的歸納法其のものに他ならず、普通の歸納法とたゞ正確さの點で異るのみである。

## 四

### 定義と公理

この樣な原理が存在するといふことは、頑固な論理家にとつては難點である。彼等はどうしてこれから脫しようとするか。彼等はいふ、完全歸納原理は、本來公理と云ふべきものではなく、又先天的綜合判斷でもない、單に整數の定義に過ぎない、換言すれば、只の規約である、と。この見方を論ずるには、定義と公理との關係を、今少し精しく吟味しなければならない。

先づゴティエ・ヴィラァルと、ジュネーブのゲオルグとから出してゐる雜誌「數學敎育」に現はれた、クーテュラー氏の數學的定義についての論文を參照しよう。それによると、直接定義と公準による定義 définition directe, définition par posturats との區別がある。

クーテュラー氏は云ふ。「公準による定義の用ゐられるのは、單一な觀念にではなく、觀念の體系についてである。それは、それ等の觀念を結合し、又それらの他の性質を表示する根本的諸關係を列擧することであり、この諸關係が公準である……。」

若し一つを除き、他のすべての觀念を豫め定義して置けば、殘りの一つは、定義に依つて、この公準を滿足させるであらう。

かうして、證明することの出來ない或る種の數學的公理は、假裝した定義に過ぎなからう。この見地は屢〻正しいものであり、私自身も、例へばユークリッドの公準については、これを許した。

幾何學の他の諸公理は、距離を完全に定義するに十分でない。從つて、距離は、定義に依つて、これ等諸公理を滿足させるすべての大きさの中、ユークリッドの公準を眞ならしめる所のものであらう。

扨て、論理主義の人々は、完全歸納原理に許すに、私がユークリッドの公準に許す所のものを以つてし、其處に、假裝した定義のみを見るのである。

しかし、かうする爲めには、滿たさなければならない二つの條件がある。ステュアァト・ミル Stuart Mill は云つた。總ての定義は、一の公理――それによつて、定義された對象の存在を確めるべき、一つの公理を含むと。それ故、假裝した定義であり得るのは、今や公理ではなくて、却つて、定義こそ假裝した公理であらう。ステュアァト・ミルは、存在といふ語を、物理的經驗的に解した。彼は、圓を定義するのは、吾々が自然の中に、まるい物の存在を確めることだ、と思つたのである。

この形では、彼の考は許さるべきではない。數學は、物質的對象の存在とは獨立したものである。數學に於て

は、存在するといふ語は、矛盾を含まぬといふ意味に過ぎない。次の樣に訂正すれば、ミルの考へは正確となる。一つの對象を定義するには、その定義が矛盾を含まぬといふことを、確めなければならない。

それ故、若し公準の體系があり、これ等の體系が矛盾を含まぬことを證明し得るならば、これを以つて、そこに現はれた一つの觀念の定義を代表するものと、考へることが出來るであらう。もしこの事が證明し得られないならば、これを證明なしに許さなければならず、從つて、それは公理となるであらう。かうして、若し吾々が公準の奥に定義を見出さうとするならば、定義の奥に公理を見出すことになるのである。

或る定義が矛盾を含まぬことを證明する爲めには、屡々例證によつて進み、その定義を滿足すべき對象の一例を作らうとする。公準に依る定義の場合をとれば、Aといふ觀念を定義する爲めに、Aは、定義に依つて、或る公準がそれについて眞であるやうな、すべての對象であるといふ。もし、すべてこれらの公準が、或る對象Bについて眞なることが、直接證明せられると、この定義は正しいものであり、BはAの一例であるだらう。これらの公準が同時に皆な眞である場合があるのであるから、これらの公準は、矛盾するものでないことが確められる。

しかし、例證によるこの樣な證明は、常に出來るとは限らない。

諸公準が矛盾を含まぬことを證するには、これらの公準を前提として導き出され得るすべての命題をよく考へ、且つこれらの命題の中に、互に矛盾する樣な二命題のないことを、示さなければならない。もしこの命題が有限數のものなら、直接の吟味も出來るが、この樣な場合は稀でもあり、其上興味も少い。もしこれらの命題が無限數ある時には、もはや直接の證明は施されない。一般には、完全歸納原理――これが正に證明しようとしてゐる所のものであるが――の使用を避けられない樣な證明法に戻らなければならない。

吾々は今や、論理主義の人々の滿たすべき一條件を説明した。後に至つて、彼等がそれを果さなかつたことを示さう。

## 五

次に第二の條件がある。吾々が定義を與へるのは、それを用ゐる爲めである。

それ故、定義された語は、それ以後の論中に現はれて來るであらう。吾々はこの語によつて表はされた對象から、定義する爲めに使はれた公準を確めることが出來ようか。明に出來る、若しその語が、原の意味を保つてゐるならば、若し吾々が、それにひそかに異る意味を附加しないならば、處が、かうした事は往々あるのであつて、それを見分けることは、多くの場合困難である。吾々は、この語が、どうして議論の中に入つて來たか、又その入口の門は、初めに與へた定義以外の定義を實際含まぬか否か、をしらべなければならない。

この困難は、數學のあらゆる應用に於て現はれる。數學的の觀念は極めて純化され、極めて嚴密な定義を受けてゐて、純粹數學者にとつては何等躊躇すべきものもない。しかし、もし、例へば物理學にこれを應用しようとすれば、吾々の取扱ふのは最早この純粹な觀念ではなくて、多くの場合その粗笨な影像に過ぎない具體的の對象である。この對象が、近似的にもせよ定義を滿足させると言明することは、經驗でのみ確められるべき、又既に在來の公準の特質を失つた、一つの新しい眞理を言明することである。

しかし純粹數學の中でも、吾々は尙同樣な困難に遭遇する。

吾々は數について精細な定義を與へる。扨てこの定義が一度與へられると、吾々は最早これを顧みない。何となれば、數の何物なるかを敎へたのはこの定義ではなく、吾々は旣に數を以前から知つてゐたのであるから。そしてその後、數といふ語を書く時にも、吾々はそれに最初のと同じ意味を與へてゆく。この意味が何であるか、又それが或る句と他の句とに於て同じか否かを知るには、吾々がどうして數について論ずる樣になつたか、又この二句に導入する樣になつたか、を知らなければならない。私は再び說く機會があるだらうから、今は此の點について、これ以上說明はしない。

この樣にして、表面はAなる定義が與へられた或る語について、吾々は議論の中で、ひそかに他のBなる定義を假定して用ゐる。この二つの定義が同一の對象を示す場合もあり得るが、もしさうとしても、そのことは一つの新しい事實であつて、證明せられるか、又は獨立な公理として許されなければならない。

吾々は後に至つて、論理主義の人々が、第一の條件と同樣に、この第二の條件をも滿たさなかつたことを示さう。

## 六

數の定義は多種多樣である。私はその作者の名を擧げることすら斷念する。吾々はこの樣に多いのを驚くにはあたらない。もしその中の一つが滿足すべきものであつたなら、誰も再び新しく考へはしなかつたであらう。もし、この問題にたづさはる哲學者が、各々異つた定義を發見しなければならぬと信じたとすれば、それは、彼が先進者のものに滿足しなかつたからであり、もし、彼がそれに滿足しなかつたとすれば、それは、彼が其の中に循環論があると信じたからである。

私はこの問題に關する書き物を讀む每に、いつも深い不安を感じた。私は常に、循環論に行き當ることを待ちもうけた。そして、もしそれが其場で見當らない時には、見落したのではなからうかと氣遣つた。

實際、一句をも用ゐずに定義することは不可能であり、又、その中に數の名とか、少くとも若干とか複數の語とかを用ゐずに、句を言ひ表はすことは困難である。かうして、坂は辷り易く、吾々は不斷に、循環に陷る危險に瀕してゐる。

私は次に、循環論の最も巧みに隱された諸定義のみについて云はう。

## 七

パジグラフィ　La Pasigraphie

ペアノ氏の創案にかゝる記號的の言葉は、この新しい研究に於て、極めて重大な役目を演じてゐる。それが幾らかの用に立つてゐることは疑ひないとしても、クーテュラー氏は、ペアノ氏自身も驚くに相違ない程、あまりに大げさに重要視してゐるかと思はれる。

この言葉の根本的の要素は、種々の接續詞、もし、及び、或は、故に、を表はす或る代數的の記號である。こ

の記號が便利なこともあらうが、それが哲學全體を改變する價値があるといふこととは、又別である。「若し」といふ語を$\supset$と書くと、「若し」と書いた時にはなかつた力が生ずるとは、受取れないことである。

このペアノ氏の考案は、初めは、パジグラフィ、即ち、數學論文を一語の日常語をも用ゐずに書く法、と呼ばれた。この名稱は、その範圍を正確に表はしてゐた。その後人々は更に威嚴を添へて、ロジスティク logistique（論理計算、數學的論理學、記號論理學）といふ名稱を與へた。この語は、陸軍の學校に於て、行軍術、宿營術を表はすに用ゐられてゐるが、これとは紛ぎれる虞れはなく、吾々は直に、この新語が論理を革新する目的を含むでゐることを知る。

この新方法は、ブラリ・フォルティ氏 Burali-Forti の、超限數に關する研究 Una Questione sui numeri transfiniti と題し、パレルモ數學會會報第十一卷に收められた數學論文中に現はれてゐる。

第一、この論文は極めて興味あるものであり、私がこれを例としてとるのは、まさしくこれが、この新語で書かれたものの中、最も重要なものであるからでもあるが、其上、その中に書き入れられた伊太利譯に依つて、素人にも讀むことが出來るのである。

此の論文が重要なのは、超限數の研究に於てこの數年來數學者を絶望せしめてゐる、あの矛盾の最初の例を與へるからである。此の論文の目的は、aがbに等しくもなく、bより大でも小でもない樣な二つの超限（基）數a、bの存在し得ることを示すにある、とブラリ・フォルティ氏は云つてゐる。

讀者は安心して頂きたい。次の考察を理解するには、超限基數とは何かといふことは、知らなくてもよいのである。

扨てカントルは、二つの超限數の間には、二つの有限數の間に於てと同じく、等しいか等しくないか（大か小か）以外の關係はあり得ないことを、精密に證明した。しかしこゝに論じたいのは、この論文の内容ではない。それは私の題目とはあまりに離れ過ぎるから、私は形式についてだけにして置きたい。そして、この形式が嚴密性を得る助けとなり得るか、又、それによつて筆者と讀者との受ける勞力を償ふか否か、を問ふこととする。

先づブラリ・フォルティ氏は、一なる數を次の樣に定義する。

$$1 .= \iota T' \{Ko \cap (u, h) \ni (u \varepsilon Un)\}$$

1といふ數の考へを一度も知らない人に敎へるには、誠にふさはしい定義である。

私は、敢て批評する程、ペアノ流の書方を知らないけれども、左邊に1といふ數字があり、右邊に一 Un といふ文字があるのを見ると、この定義は循環論を含みはしないか、と危ぶまれる。

とに角、ブラリ・フォルティ氏は、この定義から出發して、少しの計算の後、次の方程式に達する。

(27) $1 \varepsilon No$,

これは、1が數であることを示すのである。

吾々は、玆で、第一番目の數の定義を扱つてゐるのであるから、クーテュラー氏も亦1と0とを定義してゐることを想起しよう。

零 Zéro とは何か。零階級 classe nulle の原素の數である。零階級とは何か。何の原素をも Aucun 含まぬ階

級である。Zéro を nul で、nul を aucun で定義することは、明に、豐富な佛蘭西語の濫用である。それで、クーテュラー氏もその定義を改良して、次の様に書いた。

$$0 = \iota\Lambda \cap x = \Lambda . \supset . \Lambda = (x \epsilon x),$$

これはフランス語で讀めば、零とは、決して滿たされない一つの條件を滿足する事物の數である。

しかし、「決して……せぬ」jamais とは「何んな場合にも……せぬ」en aucun cas といふ意味であるから、私はこれに何の進歩をも認めない。

私は進んで、クーテュラー氏が數1に與へた定義の方が、これより滿足なものだと云はう。彼は大體、一は、どの二原素も同一である樣な階級の原素である、といふ。

前に云つた樣に、一を定義するといふ意味では、これは甚だ滿足すべきものであり、彼は一といふ語を使はず、その代りに二といふ語を使つてゐる。しかし私の危ぶむところは、もしクーテュラー氏に、二とは何かと問ふなら、彼は一といふ語を用ゐずに答へられるかどうか、といふことである。

# 八

しかし、ブラリ・フォルティ氏の論文に歸らう。私は彼の結論が、カントルのものと全く反對であることを云つた。扨て、或る日私はアダマァル氏 Hadamard の來訪を受け、談はこの二律背反におちて行つた。

「ブラリ・フォルティ氏の推論は、あなたには完全なものとは思はれませんか

――いゝえ。反之、私はカントルの推論には何の反對もありません。それにブラリ・フォルティ氏には、すべての基數の集合といふことを云ふ權利はありません。

――御意見ですが、彼にはその權利があります。といふのは、彼は常に次の假定をすることが出來ましたから

$$\Omega = T'(N_0, \varepsilon >).$$

一體、誰が彼を妨げることが出來ませう。又吾々がそれをΩと呼んでゐるのに、その對象がないと云へませう。」

だがそれは無駄であつた。私は彼を納得させることは出來なかつた。(尤も出來れば大變だつた、彼の方が正當なのだから) これは只、私がペアノ流を十分巧みに話せなかつたからであらうか。さうかも知れない。しかし私自身は、さうは思はない。

かうして、このパジグラフィ的道具を以つても、問題は解かれない。この事は何を語つてゐるのであるか。單に一が數である事を證明するだけの間は、パジグラフィも十分役立つが、難點か生じ、矛盾を解決しなければならなくなると、パジグラフィは無力となるのである。

# 第四章　新しい論理

## 一

ラッセルの論理

論理學が自己の抱負を實現する爲めには、その形を改めねばならなかつた。新しく現はれた澤山の論理の中で、最も興味のあるのはラッセル氏のものである。形式論理は、アリストテレス Aristote が既に其底を極めたのであつて、其上新らたに書き加へるべきものは何物もないかに思はれる。しかし、ラッセル氏が論理に附與した領土は、古典論理に比して遙か無限に廣大であり、又彼はこの題目について獨創的な、時には正當な意見を出してゐる。

先づアリストテレスの論理は、何よりも階級の論理であり、其出發點として、主辭の賓辭に對する關係をとるものであるが、ラッセル氏は、階級の論理を命題の論理に屬せしめる。古典的推論式「ソクラテスは人である」云々は、假言的推論式 Syllogisme hypothétique 即ち、若しAが眞ならばBは眞である、さてBが眞ならばCは眞である、云々、に席を讓つてゐる。これは非常によい考であると思ふ。といふのは、古典的推論式は容易に假言的推論式に還元せられるに反し、逆の變形は、たやすくは行はれないからである。

而も尙これだけではない。ラッセル氏の命題の論理は、接續詞の若し、及び、或はと否定詞のでない ne pas の組合せが從ふべき規則の研究である。これは古典論理學の著しい擴張である。古典的推論式の性質は、たやすく假言的推論式に擴張されるから、吾々は後者の形式の中に、容易にスコラ風の形式を認めることが出來、古典論理の本質的なものを見出す。しかし推論式の理論は尙、接續詞もしと、恐らく否定詞との、文章構成法にすぎない。

この上に二つの別の接續詞、及びと或はとを加へて、ラッセル氏は論理學に新しい分野を開拓する。この及びと或はとの記號は、×と＋との二記號の從ふ法則、即ち交換、結合、配分の法則に從ふ。かうして、及びは論理的乘法を、或はは論理的加法を表はす。これも亦甚だ面白い點である。

ラッセル氏は、任意の謬つた命題は他のすべての命題――正しいか否かを問はず――を含むといふ結論に達した。クーテュラー氏は云ふ。この結論は一見逆說的に見えるかも知れぬが、ラッセル氏がどれ程正しいかを知るには、間違つた數學の論文を訂して見ればよい。最初の間違つた方程式を見つける迄には、屢〻非常に骨が折れるが、一度それを見つければ、途方もない結果を――その中には實際正しいものもあるかも知れぬが――集める事も朝飯前である。

## 二

この新論理が、從來の論理に比べて、どんなに豐富であるかは明である。符號は二倍となつて、限りなく異つ

た組合せが出來る。吾々は論理といふ言葉の意味を、この樣に擴張してもよいであらうか。此の問題を吟味し、ラッセル氏と單なる言葉爭ひをするのは愚であらう。吾々は彼のいふ所に任せよう。しかし、若し、在來の意味での論理學に還元出來ないといはれた或る眞理が、この新しい意味での、全く異つた論理學に還元し得る樣になつたとしても、吾々は驚くにはあたらないのである。

吾々は多くの新しい觀念を導入した。これは單に在來のものを組合せたのではなかつた。此の點に於て、ラッセル氏は憚る處がない。彼は、第一章卽ち命題の論理の冐頭に於てのみならず、第二章、第三章卽ち階級と關係との論理の冐頭に於ても亦、自ら定義されぬと稱する新しい語を導入してゐる。

而もこれだけではない。彼は同樣に證明出來ないといふ原理をも導入してゐる。しかし、この不可證明の原理こそ、直觀に訴へるもの、卽ち先天的綜合判斷なのである。數學書に書かれてゐた時には直觀であると考へられたこのものが、今論理の意味が擴張され、論理學研究と題する書の中にあるからと云つて、その本性まで變じたのであらうか。否、それは本性を變じたのではなく、只位置を變へたに過ぎない。

## 三

それでは、この原理を、假裝された定義と考へることが出來るか。その爲めには、それが矛盾を含まぬ事を證明し得なければ、卽ち、どこまで演繹して行つても決して矛盾に陷らない事を、確定しなければならなかつたであらう。

吾々は、次の樣に推論することが出來る。矛盾のない前提に新論理を用ゐると其結果は又同樣に矛盾のないことを證明し得るから、若し、$n$回その操作を繰返して後、矛盾がなければ、$n+1$回繰返しても、同樣に矛盾がないであらう。それ故、矛盾の初まる時はあり得ない、卽ち、矛盾に遇ふことは決してない、と。かやうに推論して差支へないであらうか。否、何となれば、これは完全歸納原理を用ゐてゐるから。而も忘れてならないのは、この完全歸納原理を、吾々はまだ知つてゐないといふことである。

故に、これらの公理を、假裝した定義と見ることは出來ない。吾々に殘された道は唯一つ。各公理に、直觀の新しい働きを許さなければならない。尙これはラッセル氏、クーテュラー氏の考へでもあらうと思ふ。

かうして、新論理の、廣義に於ける論理の、根柢をなす不可定義の九觀念、不可證明の二十命題（私が數へれば今一二增すかと思ふが）は、各々直觀の新しい獨立な作用を假定してゐるが、それなら、これを眞の先天的綜合判斷といふに、何の差支へがあらう。この點については、何人も一致するのであるが、ラッセル氏の主張する所は、これを直觀に訴へればそれで終つたので、一の新要素をも入れる事なく全數學を構成することが出來る、といふのであり、私の疑ふ所も亦この點である。

## 四

クーテュラー氏は屢々、この新論理は全く數の觀念と獨立である、と繰返してゐる。私は彼の言葉の中に、基數なり序數なりの數形容詞、又は若干の樣な不定形容詞が、何回出て來るかを數へようとは思はないが、少し例

を擧げて見よう。

「二又は若干の命題の論理的乘積は……」

「すべての命題は二つの價、眞と僞と、のみをもつ」

「二つの關係の相對的乘積は關係である」

「關係は二つの項の間に生ずる」

時にはこれらの不都合を避け得ないでもないが、時には又本質的なものでもある。二つの項がなければ關係は理解できない。二項の直觀を同時にもつものでなければ、又、項が二つなることに注意するのでなければ——關係が了解される爲めには、項は二にして唯二のみでなければならぬから——關係の直觀を得ることは不可能である。

## 五

### 數論

私は玆に、クーテュラー氏が普通理論 theorie ordinaire と呼び、眞の意味で數論の根柢となる所のものを述べる場合となつた。クーテュラー氏は、先づ、ペアノ、パドア Padoa 兩氏がその獨立なることを證明したペアノの五公理を以つて初める。

一、零は整數である。

二、零は如何なる整數の後續者 le suivant でもない。

三、整數の後續者は又整數である。尙これに、次の樣に加へるのが便利である。

すべての整數は後續者をもつてゐる。

四、二つの整數は、若しそれらの後續者が等しければ、相等しい。

第五の公理は完全歸納原理である。

クーテュラー氏は、これ等の公理を、假裝した定義であつて、零、後續者及び整數の公準に依る定義である、と思つてゐる。

しかし既に知る樣に、公準による定義を許す爲めには、それが矛盾を含まぬことを確定し得なければならない。この場合は、果してさうであらうか。どうして、全然さうではない。

この證明は、例證に依つてすることは出來ない。整數の一部、例へば初めの三數を選んで、それらがこの定義を滿足することを證明することは出來ない。

若し系列、0、1、2をとれば、これが公理一、二、四、五を滿足することはわかるが、公理三を滿足する爲めには、尙3が整數でなければならず、從つて系列、0、1、2、3は諸公理を滿足しなければなるまい。吾々はこれらが公理、一、二、四、五を滿足することは檢證できようが、公理三は再び4が整數であり系列、0、1、2、3、4が諸公理を滿足することを要求し、順次この樣に進むであらう。

それ故、これらの公理を全體について證明せずに、いくつかの整數について證明することは不可能であり、例

證に依る證明は、斷念しなければならない。

かうして、これら諸公理から出て來るすべての結果をとり、それらが矛盾を含まぬか否か、を見なければならない。これらの結果が有限數ならば事は簡單であるが、それは無限に多く、數學全體、少くとも數論の全部である。

それではどうすればよいか。止むを得なければ、恐らく第三節の推論を繰返すことが出來るであらう。しかし、既に云つた樣に、この推論は完全歸納法であり、而もこの完全歸納法こそ、まさにこゝで證明しようとしてゐる所のものである。

## 六

ヒルベルトの論理

扨て私は、ヒルベルト氏の主要な仕事を語るべき場合になつた。彼はそれをハイデルベルヒの數學者會議で發表し、そのフランス譯はピエール・ブートルー氏 Pierre Boutroux によつて數學教育雜誌に、又其イギリス譯はハルステッド氏 Halsted によつてモニスト誌上に現はれた。その最深の思想を含むこの論文に於て、ヒルベルト氏はラッセル氏と同樣の目的を追ひながら、多くの點で彼の先進者から離れてゐる。

彼はいふ。「しかし詳しく檢べて見ると、在來の論理の原理の中には、既に或る數論的の觀念——例へば全體——や、或る程度の數の觀念やが、暗默の間に含まれてゐるのを認める。即ち、吾々は循環の中に捕はれてゐる。これ私が、すべての逆說を避ける爲めには、論理の原理と數理の原理とを、同時に發展させる必要がある、と信ずる所以である。」

吾々は既に、ヒルベルト氏が在來の論理の原理についていふ處は、又ラッセル氏の論理にも適用されることを見て來た。それで、ラッセル氏にとつては、論理は數理に先ち、ヒルベルト氏にとつては、兩者は同時である。吾々はさきに到つて、尙他の一層深い差別を見るであらう。が、それはその現はれた時に述べることとして、私は最も重要な箇所を本文のまゝ利用して、ヒルベルト氏の思想を、歩一歩跡づけたいと思ふ。

「先づ最初に對象1を考へよ。」 注意すべきは、かうは云つても、吾々は決して數の觀念をもつてゐるのではないのである。云ふまでもなく、1は此處では只符號に過ぎず、又吾々は決してその意味を知らうとはしないのだから。「この對象が二、三、又は若干回繰返されて作られる群……」さあ今度は大分違つて來る。何故かといふに、二、三殊に若干といふ語を入れるのは、數の觀念を入れることだからである。それ故、これに續いて現はれる有限整數の定義は、殘念ながら遲過ぎる。がヒルベルト氏は、この循環論を見すごす程迂濶ではない。それでこの論文の終りで、眞の解決策を講じようと試みてゐる。

ヒルベルトは次に二つの單純な對象1と=とを導入し、この二對象のあらゆる組合せ、その組合せの組合せ等を考へた。云ふ迄もなく、吾々はこの二符號の通常の意味を忘れねばならず、又それに何の意味も附してはならない。彼はこれ等の組合せを、有と非有との二階級に區別したが、この區別は、新しい秩序の生ずる迄は、全く任意である。すべての肯定的命題とその組合せとは、有の階級に屬し、すべての否定的命題及びその或る組合せ

は、非有の階級に屬することにしてゐる。

## 七

玆に最も重要な差別について記さう。ラッセル氏にとつては、彼が$x$で示す或る任意の對象は絶對に不定であつて、それについて彼は何事も假定してゐない。ヒルベルト氏にとつては、それは1と=なる記號からなる組合せの一つである。彼は、既に定められた對象の組合せ以外の物を、導入することを許さない。尙ヒルベルト氏は、その考を最も鮮かな形で述べてゐるから、私は彼の叙述を共儘掲ぐべきだと思ふ。「諸公理の中に現はれる不定なもの（普通の論理學での「或る」又は「すべて」の代り）は、專ら共理論が現在既に得た所の、或は導入しようとしてゐる所の、對象と組合せとの全體を表はす。故に、この問題とする公理から命題を演繹するときに、不定なものに代入し得るのは、只この對象と組合せとのみである。同樣に基本となる對象の數を增すときは、公理は同時に新擴張をしたので、從つて更めて證明され、必要ならば、變更されなければならぬ、といふことを忘れてはならない。」

ラッセル氏の考へ方との對照は明白である。この哲學者（ラッセル）にとつては、$x$の代りに、既知の對象のみならず、何者をも置換へることが出來る。ラッセルは、彼の見地即ち理解の見地に忠實である。彼は一般觀念から發し、それに新しい性質を附して制限する場合でも、次第々々にそれを豐富にする。ヒルベルトは反對に、可能な存在として、既知物の組合せしか認めない。それ故、（彼の思想の一面のみを見れば）彼は擴張の見地をと



るものと云へよう。

## 八

ヒルベルトの思想の叙述を追つてゆかう。彼は二つの公理を導入し、これを記號的の言葉で記して居るが、吾吾素人の言葉にすれば、總ての量は、それ自身に等しく、又二つの同一な量にどんな運算を施しても、共の結果は同一である、といふ意味である。かう云へば、それは明白なことであるが、こんな風に云ふのは、ヒルベルト氏の本意には副はない。彼にとつて、數學者は只純粹な記號を組合すのみであつて、眞の數學者は、それに依つて、その意味に關はることなく、推理しなければならない。そこで、この公理も、彼にとつて、素人にとつてとは趣が違ふのである。

彼はこれらの公理を、今迄はすべての意味から離されてゐた記號=の、公準による定義を表はすものと思つてゐる。しかし、この定義を正しいとする爲めには、この二公理が何等の矛盾をも生じないことを、證明しなければならない。

## 九

その爲めにヒルベルト氏は、第三節の推理を用ゐてゐるが、それが完全歸納法であることには、氣付いてゐないかに思はれる。

ヒルベルト氏の論文の最後は、全く謎であるから、私は其處を見捨てよう。それは矛盾に滿ちてゐる。吾々は、筆者が、彼が犯した循環論を漠然と自覺して、徒らに推理の間隙を彌縫しようと試みてゐるのを感ずる。

この事は何を意味するか。それは、完全歸納法による整數の定義の矛盾を含まぬことを證明するに當つて、それがあまりに困難な爲め、恰もラッセル氏、クーテュラー氏の敗れた如く、ヒルベルト氏も亦敗れたことを語つてゐるのである。

## 十

クーテュラー氏は、幾何學は、完全歸納法の參加しない廣大な學理の一體である、といつてゐるが、これは或る程度迄は眞實であつて、參加しないとまでは云へないが、參加することの少いものである。ヒルベルト氏の原理に依つて建てられた、ハルステッド氏の合理的幾何學 Rational Geometry (New-York, John Wiley & sons, 1904) をとれば、完全歸納法は、百十四頁に至つて、(私が探し誤つたかも知れぬが) 初めて出て來ることがわかる。

かうして、僅か數年前には、疑ひもなく直觀が君臨してゐる領土と思はれた幾何學も、今日では、數學的論理學者が勝利を得るかと見える土地となつた。何物もこれ程、ヒルベルト氏の幾何學的事業の重大さと、それが吾吾の思想に殘した深い印象とを、表はすものはない。

しかし、欺かれてはいけない。幾何學の根本定理は、要するに何か。それは、幾何學の公理が矛盾を含まぬ、といふ事である。而もこの事は、完全歸納法なくしては、證明することが出來ない。

ヒルベルトは、この本質的な點を、どう證明するか。それは解析に賴る事によつて、數論に賴り、又それによつて、完全歸納法に賴るのである。

故にもし他の證明を發明し得ないなら、吾々は尙この原理に賴らなければならない。何となれば、矛盾せぬ事を證明さるべき諸公理から生ずる可能な結果は、無限に多いからである。

## 十一

結　論

吾々の結論は、第一に、歸納原理は整數の假裝した定義と見られない、といふことである。此處に三つの眞理がある。

完全歸納原理

ユークリッドの公準

燐は四十四度で融解する、といふ物理的法則 (ル・ロア氏 Le Roy から引用)

人はかういふ。これは、三つの假裝された定義、第一は整數の、第二は直線の、第三は燐の定義である、と。私は、第二についてはこのことを許すが、他の二つについては許さない。私は、この不整合に見える理由を、說明しなければならぬ。

第三のものについては、その矛盾を含まぬことは明である。しかしこの定義は、定義された對象の存在を、保證する——この事は必要であらう——といへようか。玆で取扱つてゐるのは、數學ではなくて、物理學であるから、存在といふ語は、最早同じ意味ではない。それは玆では、矛盾がないといふ意味ではなく、客觀的の存在を意味する。

そして其處に、私がこの三つの場合を區別する第一の理由はあるのであるが、尙第二の理由がある。吾々がこれらの三觀念を用ゐる場合に、それは、この三公準に依つて確定されたものとして、吾々に現はれるか。

歸納法を用ゐることの出來る場合は、無數にある。一例として、旣に擧げた場合、諸公理の全體が矛盾しないことを檢する場合をとらう。その爲めに吾々は、前提とした公理から出發して連續する推論式の系列を、考へることが出來る。

第 $n$ 番目の推論が終れば、尙次の推論をする事が出來る。これは第 $n+1$ 番目のものである。かうして、$n$ といふ數は、次々の操作の系列を數へるに使はれ、卽ち、次々に加へて得られる數である。故にそれは、次々に減じてゆけば、再び1に歸り得る數である。もし $n=n-1$ であれば、引算によつていつも同じ數となるから、明に上の樣にすることは出來ない。それ故、この $n$ といふ數は、有限整數の定義を含んでゐる、と考へなければならなくなる、そしてこの定義とは、次の樣なものである。有限な整數とは、次々に加へて得られ、$n$ が $n-1$ に等しくない樣な數である。

かうして置いて、扨てどうするか。第 $n$ 推論式に矛盾がなければ、第 $n+1$ 番目にも尙ないことを示し、矛盾は決して起らないだらうと結論する。そしていふ、吾々は、かく結論する權利がある、何故なら、整數は、定義によつて、この樣な推理が正當に使用され得る數であるから、と。しかしこの事は次の樣な別の整數の定義を含んでゐる。整數は、反復 récurrence に依る推理の適用され得る數である。此の場合には、吾々の云ひ得るのは、からである、若し整數番目の推理式に矛盾のないことが、次の整數番目の推理式に矛盾のないことを伴ふならば、どんな整數番目の推理式についても、何等の矛盾も入つて來る恐れはなからう。

この二つの定義は、同一ではない。無論等値ではあるが、それは、先天的綜合判斷に依つてさうなるので、純粹論理的には、一方から他方に移ることは出來ない。隨つて吾々は、第一を假定する道に依つて整數を導入した以上、第二を採用することは出來ない。

之に反して、直線についてはどうなるか。この事については、私は旣に幾度も說明したから、尙一度繰返すのは躊躇するのであるが、私の考を、簡單にまとめてだけおかう。

今度は、前の場合の樣に等値であつて論理的に一方から他方に還元出來ない樣な、二つの定義はない。吾々は、言葉で表はされる唯一の定義しか、もつてゐない。或は、吾々は直線の直觀を持ち、又直線を思ひ浮べるから、言表はせぬが、感ずることの出來る別の定義がある、といふかも知れない。然し、先づ第一に、吾々がさうなし得るのは、幾何學的空間に於てではなく、只代表的空間に於てであり、次に、ユークリッドの公準を滿足する事を除けば、直線の他のすべての性質をもつ對象を、思ひ浮べることも出來る。この對象は、或る見地からは、無意味なものではなく、或る球に直角な圓（眞の空間の眞の圓）である。同じく想像し得るこれ等の二對象の中、

吾々の直線と呼ぶのが前者（ユークリッド的直線）であり、後者（非ユークリッド的直線）でないとすれば、それは正に、定義に依つてである。

最後に第三の例、燐の定義に到つては、その眞の定義は、次の様なものであらうことがわかる。燐とは、この罎の中にある一塊の物質である。

## 十二

所で、これが私の問題とする處であるから、尚一言しよう。燐の例について、私は云つた。「この命題は、檢證出來る眞の物理的法則である。何故なら、それは、融解點を除くほか、燐の他のすべての性質をもつ物は、同じく四十四度で融解する、といふ意味だから。」人はこれに答へて云つた。「いや、この法則は檢證することは出來ない。若し燐に似た二物體が、一は四十四度で、他は五十度で融けることを、檢するやうな事があれば、吾吾は常に恐らく、融解點以外にも、これ等を區別する何か他の未知の性質がある、と云へたらうから。」

私が云はうと思つたのは、全くそんな意味ではないので、かう書く可き筈であつた。これこれ有限數の性質（化學書に記された燐の融解點以外の性質）をもつすべての物質は、四十四度で融ける、と。

次に直線の場合と、燐の場合との區別を、一層明にする爲めに、尚一つの注意をしておかう。直線には、種々の不完全な像が、自然の中にある。その主なるものは、光線と、剛體の回轉軸とである。吾々が、光線はユークリッドの公準を滿足しない、と認める（例へば、星に負の視差があるからして）と假定すれば、どうすべきであらうか。直線は、定義によつて、光路であるから、公準を滿足しない、と結論するだらうか。或は、反對に、直線は、定義に依つて、公準を滿足するから、光線は直線ではない、と結論するであらうか。

孰れの定義を、隨つて孰れの結論をとるかは、確に吾々の自由である。然し、前者を採るのは愚であらう。といふのは、光線は恐らく、ユークリッドの公準を、完全には滿足せぬばかりでなく、尚、直線の他の性質をも、滿足しないから。又、ユークリッド公準に一致しないと同じく、直線の他の不完全な像たる、剛體の回轉軸とも一致しないから。最後に、光線は明に變化を受けるものであつて、昨日直線であつたものも、物理的狀態が變はれば、明日は直線でなくなることにならうから。

扨て、燐が四十四度でなく、四十三度九で融けることを、發見することになつた、と假定しよう。吾々は結論して、燐は定義に依つて、四十四度で融けるものであるから、吾々が燐と呼んだこの物體は、燐ではない、といふだらうか。或は反對に、此の燐は四十三度九で融ける、といふだらうか。玆でも尚、孰れの定義をとるか、隨つて孰れの結論をとるかは、吾々の自由である。しかし、前者をとるのは、愚であらう。吾々は、融解點の小數を新らたに決定する毎に、物體の名を變へるといふことは出來まいから。

## 十三

概括すれば、ラッセル、ヒルベルト兩氏共、非常な努力をし、共に獨創深奧、且つ屢〻極めて正當な意見に滿ちた書を著した。この二書は、吾々に多くを反省せしめ、又多くを敎へる。その結果の中には、根柢あり殘るべ

きものも、少からずある。

　しかし、彼等がカントとライプニッツとの間の論爭をきつぱり解決し、數學についてのカント派の理論を破つたといふのは、明に正しくない。私は、彼等が事實、さうした、と信じてゐるか否かは知らぬが、若し、さうと信じてゐれば彼等は謬つてゐる。

# 第五章　數學的論理學者の最近の努力

## 一

　數學的論理學者は、前章の考察に答へようと試みた。其結果、ロジスティクを變更しなければならなくなり、特にラッセル氏は、その當初の見解の或る點に修正を施した。こまかい議論には入らぬこととして、私は最も重要と思はれる二問題にかへらうと思ふ。ロジスティクの法則は、その多產性と確實性との證明を得たか。何等直觀に訴へることなく、完全歸納原理を證明し得る、といふのは事實か。

## 二

ロジスティクの確實性

　ロジスティクが多產的であることについては、クーテュラー氏は小兒らしい夢を見てゐる樣である。彼の云ふ所では、ロジスティクは、發見のために、竹馬と翼とを與へるものである。そして次の頁では、「ペアノ氏が、その公式 Formulaire の第一版を出してから、十年になる」といつてゐる。

　何とした事であらう。翼を得てから十年經て、而も尙飛ばないとは！

私は、極めて立派な仕事（例へば全面積を滿たす彼の曲線）を成就したペアノ氏を、頗る尊敬するものであるが、結局彼は、翼のない數學者に比べて、遠くも高くも速くも、行かなかつた。彼は全てを、彼の足のみで、同樣になし得たであらう。

之と反對に、私はロジスティクに於て、發見者の束縛を見るのみである。それは簡潔をさへもたらさなかつた。それ所か、1が數であることを確定する爲めに、二十七の方程式を要するとすれば、實際の定理を證明するには、どれ程多くを要するであらう。若し、ホワイトヘッド氏と共に、個物xを區別して、xを唯一の成員とする階級（xと、xを唯一の成員とする階級そのものを唯一の成員とするやうな階級（xとにするとすれば、この區別が如何に有益なものにもせよ、吾々の速度を非常に早めるものとは考へられまい。

ロジスティクは、普通に省略すべき所を悉く言明し、步一步に進むことを要求する。これはより確かではあるが、より早くはない。

吾々が諸君から受けたものは、翼ではなくて紐である。それだから、この紐が墜落を防ぐのを、要求することは出來る。これが唯一の辯解である。利子の少い株劵は、せめて確實ででもなければならない。

吾々は諸君の規則に、盲從しなければならないか。然り。さもないと、それを判別し得るものは、直觀しかないから。しかし、さうすると、吾々が盲目的に信用し得るのは、確實な權威のみであるから、諸君も、確實なものでなければならない。そこで、確實であるか、さもなければ消滅するか、これが諸君にとつて必要なことである。

諸君は吾々にかういふてはならない。「吾々は誤る。それは事實であるが、諸君も亦誤るではないか」と。吾吾にとつて、誤るといふことは、不幸、極めて大きい不幸、に過ぎないが、諸君にとつて、それは死である。

同樣に、かういつてもならない。「算術の確實性は、寄せ算の間違ひを防ぐことが出來るか」と。計算の規則は確實であるが、この規則を破つたものが謬るのである。そしてそれを檢すれば、直に何處で謬つたかは知れるであらう。玆では之と全く違ひ、數學的論理學者は、自分の法則を用ゐて、矛盾に陷つたのである。事實さうであればこそ、彼等は其規則を變更しようとし、又「階級の觀念を犧牲にしよう」としてゐる。それが確實ならば、何處に改める必要があらう。

諸君はいふだらう「吾々は、すべてある限りの問題を、今此處で解かなければならぬといふことはない」と。どうして！吾々はそんなことを諸君に求めてゐるのではない、諸君が問題に當つて、何の解答をも出さないとしても、吾々は、何もいふことはなかつたであらう。然し反對に、諸君は、二つの、而も互に矛盾する、隨つてその中の一つは僞であるべき、二つの解答を出してゐる。これが謬りなのである。

ラッセル氏は、この矛盾を調停しようと試みてゐる。彼に依れば、これは、階級の觀念を制限し、或は犧牲にまでしなければ、出來ないことである。そしてクーテュラー氏は、この試みの成功を豫期して、かう云つてゐる。「もし他の者が失敗したことについて、數學的論理學者が成功するならば、ボアンカレ氏は此の文句を想起して、ロジスティクに解決の名譽を與へるだらう。」

しかし、さうではない。ロジスティクといふものは存在して居り、既に四版にもなつた其法典をもつてゐる。

寧ろ其法典が、ロジスティク其物である。ラッセル氏は、その矛盾する二つの推論の中、少くとも一つが、この法典に違背したことを示さうとしてゐるか。全然さうではない。彼はその法典を變更し、其幾つかを廢棄しようとしてゐる。若し彼が成功しても、私はラッセル氏の直觀をこそ尊敬するだらうが、彼が破つたペアノ流のロジスティクを尊敬しはしなからう。

## 三

矛盾のないこと。

私はロジスティクの採つた整數の定義に、二つの主な抗議を呈出したが、クーテュラー氏は、その第一の抗議に對して、何と答へるか。

數學に於て、存在するとはどういふ意味か。これは既に云つた樣に、矛盾を含まぬといふ事である。クーテュラー氏はこの事を拒んでいふ。「論理的に存在するといふ事は、矛盾がないといふこととは、全く異る。それは、或る階級が空虛でない、といふ事である。いくつかのaが存在するとは、定義に依つて、階級aが空虛でないことを、確定する事である。」而も疑もなく、階級aが無でないことを確めるとは、定義によつて、aが存在するを確定することである。しかしこの二つの確定は、aを見、又は觸れ得ることを意味するか——物理學者又は自然論者のいふのは、この意味である——、或は矛盾に陷ることなくaを理解し得る事を意味するか——論理學者又は數學者のいふのは、この意味である——でなければ、兩者共に無意味である。

クーテュラー氏にとつては、矛盾のないといふことが、存在を證明するのでなく、存在するといふことが、矛盾のないことを證明する。それ故、或る階級の存在を定めるには、例證に依つて、この階級に屬する個物のあることを、定めなければならない。「或は人はかういふかも知れない、どうして然し、この個物の存在を證明し得るか、個物の存在から、それを一部分とする階級の存在を引出す爲めには、個物の存在が確定されねばならぬではないか、と。——がさうではない。かういふと如何にも逆說めくが、吾々は決して、個物の存在を證明する事は出來ない。個物は、個物の個物たる事に依つて、常に存在すると考へられる。吾々は、絶對的に云へば、決して、個物が存在する、といふべきではないが、只、それは或る階級に於て存在する、といふのである。」クーテュラー氏は、彼自身の主張を逆說的と見てゐるが、さう思ふのは、確に彼一人ではなからう。しかし、この主張も、一つの意味がなければならない。それは確に、宇宙に孤立して居るので、全く未定な個物の存在といふことは矛盾に陷らない、といふ意味であらう。それが全く孤立する限り、何物の之と交涉する事も出來ないのは明である。よろしい、さうとしよう。すると吾々は「絶對的に云つて」、個物の存在を許すことになるが、それだけでは仕樣がない。尙、「階級に於て」、個物の存在を證明することが殘つてゐる。それには常に、これこれの個物がこれこれの階級に屬する、といふ確認が、それ自身にも、また其處に採用された他の公準にも、矛盾しないことを證明しなければなるまい。

クーテュラー氏は、これに續けて曰ふ。「それ故、定義は先づ矛盾しないことを證明されなければ無效だと主張するのは、勝手な、不當な、要求である。」吾々は、これ以上强い烈しい言葉で、矛盾のないことを要求する

ことは出來まい。』いづれにしても、證據を檢べる役 onus probandi は、この原理が矛盾すると信ずる人に任せよう。」被告人が、先づ無罪のものと假定せられる樣に、公準も、その反對な事が解るまでは、矛盾のないものと假定されるのである。

私がこの要求を承認しないのは、云ふ迄もない。諸君はいふかも知れぬ、君の吾々に要求する處の證明は、不可能である、が君も亦、吾々に「齒で月を捕へる」樣な無理を求めてはならない、と。失禮ながら、諸君には不可能でも、吾々には、先天的綜合判斷として歸納原理を許す吾々には、それが出來るのである。これを許すことは、吾々にとつてと共に、諸君にとつても亦必要であらう。

公準の體系が矛盾を含まぬことを證明するには、この完全歸納原理を用ゐなければならない。この推理法には、何の「不可思議」なものもないのみか、又これが、唯一の正しい方法である。誰でもこの方法を用ゐなければならなかつたことも、理解出來ないことではなく、又その「先例」を見つけるのも、難しいことではない。私は論文の中に、その二人を引いたが、それはヒルベルト氏の小冊子から借りたのである。それを利用したのは、彼一人でもなく、それを用ゐなかつた人こそ、間違つてゐた。私がヒルベルト氏を非難するのは、それに頼つた事ではなくて、(彼の樣な生れながらの數學者が、證明の必要なこと、又これがその唯一の可能な證明であることを、看過しよう筈はない)、反復推理法 raisonnement par récurrence であるに氣付かずに、それに頼つたことである。

## 四

### 第二の抗議

私はヒルベルト氏の章で、數學的論理學者の第二の謬をしるした。今では、ヒルベルト氏は除外されてゐるから、クーテュラー氏は、彼を數學的論理學者とは、認めないかも知れない。それ故彼は私に、正統の數學的論理學者の中にも、同樣の謬があるかと問ふだらう。彼等の書中、私の讀んだ部分にはなかつたが、讀まなかつた三百頁の中にも、ないか否かは知らない。

只、數學を何かに應用しようとすれば、彼等は忽ち、この謬を犯さなければなるまい。數學は、永遠に自分の臍を瞑想することだけを、目的とするものではない。それは自然と接し、又何時かはこれと交渉しよう。其時に當つては、口先きだけの定義は棄てなければならず、最早、言葉のみに滿足してはゐられない。

ヒルベルト氏の例に戻らう。矢張り反復推理法と、公準の體系が矛盾するか否かの問題とである。クーテュラー氏は多分、自分には關係がないと云ふだらうが、しかしこの問題は、彼と同じく矛盾の除去を求めぬ人々にも、恐らく興味があらうかと思ふ。

上述の樣に、吾々は、推理を何回か――有限であればどれだけ多くとも――繰返した後なほ矛盾せぬことを、確めようとする。その爲めには、歸納法を用ゐなければならない。玆で有限數といふことを、定義に依つて、歸納法が適用され得るすべての數、と解すべきであらうか。明にさうではない。さもないと、甚だ厄介な結果になるであらう。

公準の體系を提出し得る爲めには、それらが矛盾しないことを確めなければならない。これは大多數の――ク

ーテュラー氏の最近の論文を讀まなかつたら、私はすべてのと書いたであらう——學者の認める眞理である。しかし、これはどういふ意味であるか。

有限の意味を、定義に依つて、反覆性の總ての性質——この性質の一を缺くとき、例へば矛盾に陷るときは、この數は有限でない、と認めなければならぬ樣なすべての性質——をもつものと解した上で、吾々は、有限數の命題の後に矛盾に陷らぬことを、確證しなければならない、といふのであらうか。

言ひ換へると、矛盾に陷るといふ間際でやめるとの條件の下に、矛盾に遇はぬことを確むべきだ、といふのであらうか。こんな命題は、口にするだけでも、非難される價値がある。

かうして、ヒルベルト氏の推理は、歸納法を假定してゐるのみでなく、又、この原理を定義としてでなく、先天的綜合判斷として假定してゐるのである。

概括すると、

證明は必要である。

唯一の可能な證明は、反覆による證明である。この證明は、歸納原理を許さなければ、又、それを定義としてでなく、綜合判斷として認めるのでなければ、正しくない。

## 五

### カントルの二律背反

吾々は今、ラッセル氏の新論文の吟味にとりかゝらうとしてゐる。この論文は、既に度々暗示しておいたカントルの二律背反から生じた難點に打勝つ爲めに、書かれたのである。

カントルは、無限についての科學を建て得る、と信じてゐた。他の人々は彼の開いた道を進んで來たが、早くも奇妙な矛盾に衝突することとなつた。これらの二律背反は、既に多數にあるが、最も有名なものは、次のものである。

一　ブラリ・フォルティの二律背反。

二　ツェルメロ、ケェニッヒの二律背反。

三　リチャッドの二律背反。

カントルは、順序數（彼が新らたに導入した觀念、超限順序數）は線狀（一次）の系列にならべられる、即ち二つの等しからぬ順序數の中、一つは常に他より小さい、といふ事を證明した。ブラリ・フォルティ氏は其反對を證明し、實際、大體次の樣にいつてゐる。若しすべての順序數が線狀の系列にならべられるなら、この系列は、他のすべてのものより大なる、一つの順序數を定めるであらう。隨つて、それに一を加へる事が出來、一層大なる順序數を得るであらう。而もこれは矛盾である、と。

幾分性質の異るツェルメロ、ケェニッヒの二律背反については、吾々は後に說くであらうが、リチャッドの二律背反とは、次のものである。（Revue générale des Science 1905, 6, 30）有限數の語で定められるすべての小數を考へる。これらの小數は集合Eを作るが、この集合が列擧される事、即ち、この集合の種々の小數に、1から

無限大迄番號をつけ得ることは、容易に知られる。今、この番號をつけてしまつたと假定して、扨て、Nなる數を次の様に定める。もしこの集合の第n番目の數の第n桁の小數字が

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

ならば、Nの第n桁の小數字を

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 1, 1

である様にする。

誰でもわかる通り、NはEの第n番目の數と等しくなく、又nはどんな數でもよいのであるから、NはEに屬しない。しかし、吾々はNを有限數の語で定めたのであるから、Nはまた、Eに屬しなければならないだらう。

後になつて吾々は、リチャード氏が自ら極めて巧みにその逆説の證明を與へたこと、又その證明は、必要な變更を加へれば mutatis mutandis、他の類似の逆説にも擴張せられることを知るであらう。ラッセル氏は尚、他の可なり面白い二律背反を引用してゐる。

百語より少ない語からなる句で定め得ない最小の整數は何か。

この數は存在する。實際、フランス語の語數は無限ではないから、この様な句で定められる數のかずは、明に有限である。それ故、その中には、他のすべてより小さいものがあるであらう。

而も、一方、この數は、その定義が矛盾を含んでゐるから、存在しない。事實、この數は、百語以内のフランス語からなる（傍點のある）句で定義されてゐるが、而も定義に依つて、この數はこの様な句で定義され得ては

ならないのである。

## 六

ジグザグ論と無階級論と

この矛盾に對するラッセル氏の態度はどうかといふに、上述の矛盾を分析し、尙他のものをも引用し、これにエピメニィド Epiménide 風の形式を與へた後、彼は躊躇ふことなくかう結論する。

「一變數の命題的函數 Propositional function（卽ち定義）は、必ずしも常に階級を定めない。」或る「命題的函數」或は「ノルム」Norm は、「非確定的」non prédicative であることもある。かういふのは、この非確定的命題が空虛な階級、無の階級を定める、といふことでもなく、定義を滿足してその階級の一原素となり得るxの如何なる價も存在しない、といふことでもない。かやうな原素は存在するが、相結合して階級を作ることが出來ない、といふのである。

然し、これはまだ發端にすぎない。吾々は、或る定義が非確定的か否かを、見分けなければならない。この問題を解くに、ラッセル氏は、次の三說の中に迷つてゐる。

一　ジグザグ Zigzag 論
二　大きさ制限論.
三　無階級論 No-class theory

ジグザグ論に依ると、定義（命題的函數）は、非常に簡單な場合には階級を定めるが、複雜で不明瞭な場合には定めない。扨て、定義が十分簡單であると見られるか否かを、誰が判斷するか。この間に對しては、只全然無力だと正直に告白するよりほか、答へられない。「この定義が非確定的か否かを見分ける規則は、極めて複雜なものであらうし、大きな顏をして薦める事は出來ない。これは、より以上の工夫に依つて、或は、今迄されなかつた區別をすることに依つて、初めて改良され得る缺點である。然し私はこの規則を求めたが、今迄の處では、矛盾の除去以外の、指導原理を發見することは出來なかつた。」

それ故、この論は甚だ曖昧なものである。しかし、この暗黒中に、一道の光明とも云ふべきは、ジグザグといふ語である。ラッセル氏がジグザグ性 Zigzag-giness といふのは、恐らく、エピメニィドの論法の特色となつてゐるあの特質のことであらう。

大きさ制限の論に依ると、或る階級は、あまり擴張されすぎると、存在し得なくなる。それは、恐らく無限にもなり得るが、然しあまりに無限となつてはいけないのである。

然し、此處でも同樣の難點がある。無限になり過ぎるといふのは、丁度いつからか。この難點が解かれないのは、いふ迄もない。そこで、ラッセル氏は第三に進む。

無階級論に於ては、階級といふ語を用ゐることは禁止され、その代りに、種々の婉曲な云ひ方をしなければならない。階級と階級の階級とのみを說いた數學的論理主義者にとつて、何といふ變化であらう！全ロジスティクは、改められようとしてゐる。階級の問題を取扱ふ命題を除いたなら、ロジスティクの書籍はどんな樣となるか、想像出來ようか。そこには、眞白な頁の所々に、幾らかの殘物が散在して居るに過ぎなからう。廣々とした太洋に、僅かな船が見える。

孰れにしても、ラッセル氏の躊躇してゐるものが、今迄彼が採用してゐた基本的原理に課さうとする變更であることがわかる。定義が複雜すぎるか否か、廣すぎるか否か、を決定する爲めには、一の標準を要するが、而もこの標準は、直觀に訴へなければ、定めることは出來ないであらう。

ラッセル氏の最後に傾いてゐるのは、この無階級論の方へである。

何は兎もあれ、ロジスティクは改造を迫られてゐるが、何人も、その中どれだけが救はれ得るか、は知らない。云ふ迄もなく、玆に問題となつてゐるのは、カントル派とロジスティクのみである。眞の數學、何物かに役立つ數學は、それ自身の原理に依つて、戸外に狂ふ嵐に顧慮することなく、發展を續け、依然確實な、決して奪はれることのない勝利を、歩一歩追求することを得るであらう。

## 七

眞の解決

これらの異說の中から、如何に選擇すべきであるか。私はこの解決は、前述の la Revue générale des Science 1905, 6, 30 に現はれたリチャード氏の書簡に含まれてゐるかと思ふ。所謂リチャードの二律背反を述べた後、彼はその說明を與へてゐる。

第五節でこの二律背反について云つたことを參照しよう。Eは、集合Eそれ自身の觀念を用ゐずに、有限數の語に依つて定め得られるすべての數の集合である。さもなければ、Eの定義は循環論法を含むことになるから、集合E自身でEを定義することは出來ない。

扨て吾々はNを有限數の語で定義したのは事實であるが、それには集合Eの觀念を使つてゐる。そしてこれこそ、NがEに屬しない理由である。

リチャド氏の選んだ例では、其の結論は全く明であるが、其書簡の本文を見れば、尙一層明瞭であらう。しかし容易にわかる通り、この說明は又、他の二律背反にも用ゐられるのである。

かうして、非確定的と看做さる可き定義は、循環論法を含んだものである。そして前例は、私のいふ意味を、十分に明示してゐる。この事が、ラッセル氏の「ジグザグ性」といふものであらうか。私は答へることなく、この問を出すに止めておく。

## 八

### 歸納原理の證明

次に、歸納原理の所謂證明なるもの、特にホワイトヘッド氏及びブラリ・フォルティ氏のものを吟味しよう。

先づホワイトヘッド氏のものについていふのであるが、幸ひラッセル氏が最近の論文に導入した幾つかの新證明法を利用しよう。

零を含み、もしnを含めば n+1 をも含む樣な數の、あらゆる階級を、反復的階級 classe récurrente といふ。すべての反復的階級の一部をなすすべての數を、歸納的數 nombre inductif といふ。

この後者の定義は、ホワイトヘッドの證明に於て重要な役目を演ずるものであるが、これはどういふ條件で「確定的」であり、從つて許され得るものであらうか。

上記の事から、すべての反復的階級とは、其定義が歸納的數を含まぬ樣な反復的階級のすべてと解しなければならない。

さもないと、吾々は再び、二律背反を生ずる循環論に陷ることになる。

扨てホワイトヘッド氏は、この用意を缺いてゐた。

それ故、ホワイトヘッド氏の推論は謬であり、二律背反に導いた循環論と同一である。それは、眞ならぬ結果を與へたならば不正であるが、偶然に眞の結果に達しても、依然として不正である。

循環論を含む定義は、何物をも定義しない。云ふ迄もなく、この定義にどの樣な意味を與へるにしても、そこに歸納的數に屬する零がある事は確かである。これはこの階級が空虛か否かの問題でなくて、この階級に嚴密な區域を定め得るか否かの問題である。「非確定的」の階級は、空虛な階級ではなく、境界の不定な階級である。

この一部的の抗議が、すべての證明に適用される一般的抗議を無效にするものでないのは、云ふまでもあるまい。

## 十

ブラリ・フォルティ氏は、彼の論文、有限階級 Le Classi finite (Attidi di Torino, t, XXXII) で他の證明を與へたが、二つの公準を許さなければならなかつた。

第一は、少くとも一つの無限階級は常に存在する。

第二は、次の様に書かれる。

$$u\varepsilon K(K-\iota\Lambda).\supset.u\wedge<u.$$

第一公準は、證明すべき原理と比べて、より以上明瞭とも云はれない。第二は、明瞭でないのみか謬である。これはホワイトヘッド氏が證明したことであり、又この公理が解り易い言葉で表はされたなら——若干の對象からなる組合せの數は、この對象の數より少い、といふ意味だから——年少の生徒も直ぐに知り得るであらう。

## 十一

ツェルメロの公理

ツェルメロ氏は、有名な證明で、次の公理を重用してゐる。

ある一集合に於て、(或は集合の集合の各集合に於ても)、吾々は常に、手當り次第に一原素を選ぶことが出來る。(この集合の集合が無限の集合を含む場合でも。) 彼は幾度となくこの公理を默つて用ゐたが、若しこれが明言せられたなら、直に疑問を惹起したであらう。ボレル氏 Borel などの或る數學者は、これを斷然排斥し、或る他の人々は、これを是認する。これについて、ラッセル氏はどう考へてゐるか、彼の最近の論文についてこれを見よう。

彼は何の意見も述べてゐないが、彼の與へた考察は、甚だ暗示に富んでゐる。

先づ、解り易い例がある。吾々が夥數對の靴を持ち、1から無限大迄その對に番號を附け得ると假定すれば、吾々は幾つの靴を持つてゐるだらうか。靴の數は對の數と等しいだらうか。若し各對に於て右の靴と左の靴とが區別出來るものとすれば、さうである。第n對の右靴を 2n−1 番、第n對の左靴を2n番とすればよからう。若し右靴が左靴と同様だとするとさうはゆかない。前の様な手順は不可能となるからである。又、ツェルメロの公理を許せば、各對の靴から手當り次第に、右と看做される靴を選ぶことが出來る。

## 十二

眞に分析的判斷に基づく證明は、一列の命題からなり、前提となるものは、同一判斷か定義であらうし、他のものは、第一のものから順次に出て來るであらう。各命題と次のものとの間の連絡は、直に知られるとしても、どうして最初のものから最後のものに到るかは、一目には分らぬから、これを新たな眞理と考へ易い。しかし、若し其處に現れる種々の辭句を、次第に定義で置き換へるなら、そしてこの手順を出來るだけつゞけて行くなら、最後に殘るものは、同一判斷のみであらうし、從つて、すべてが、廣大な循環論に歸するであらう。それ故、

論理は、直觀に依つて豐富にされなければ、何物をも產み出さないのである。

これは、私が前に記した處である。數學的論理學者はこれに反對し、且つ、新眞理を證明することで、この事を證據立てたと信じてゐる。しかし、それは如何なる手段によつてであらう。

彼等の證明に前記の手續きを應用しても、卽ち、一定の意味の言葉を、其定義で置き換へても、普通の推理の樣に同一判斷になつてしまはないのは、何故であらうか。それは、この手續きが、それ等には應用し得ないからである。何故かといふと、それ等の定義は非確定的で、私が前に述べた樣な、隱れた循環論を含んでゐるからである。非確定的の定義は、一定の意味の項に、代入することは出來ない。この場合には、ロジスティクは、何物をも產まないのみでなく、二律背反を來たすものである。

この非確定的な定義を產んだものは、眞無限が存在するといふ信念である。それは前に引いた例で知れる通り、この例の中に、すべてといふ語が出て居る。このすべてといふ語は、有限數の對象については、明かな意味があるが、無限數の對象についても依然意義がある爲めには、眞無限といふものがなければならない。一方これらのすべての對象は、其定義に先だつて存在するとは考へられまいから、若しNなる觀念の定義が、Aなる對象のすべてに依存するならば、Aの中に、Nの觀念そのものを用ゐなければ定められない樣なものがある場合には、循環論となるかも知れない。

形式論理の規則は、單に、すべての可能な區分法の性質を述べるだけである。しかし、それが用ゐられる爲めには、其區分法が不變で、又推理の途中で變更を要せぬもので、なければならない。若し有限數の對象を區分するだけならば、この區分法を變へずにゐる事は、容易である。若し又對象が不定數であるならば、卽ち不斷に新しい未知の對象が現れて來るやうな場合には、一つの新對象が現れる度に、區分法を變へなければならぬかも知れない。二律背反に陷るのは、かうしてである。

眞無限といふものはない。カントル派の人々は、これを忘れて矛盾に陷ちた。カントル派が無用でないことは事實であるが、それは眞の問題——項が明かに定つた——に應用せられ、從つて、何等の危險なく進み得る時のことである。

數學的論理學者も、カントル派の人々と同樣この事を忘れて、同樣の難點に衝突した。しかし、彼等がこの道をとつたのは偶然であつたか、或は、それが彼等にとつては必然であつたか、は問題である。

私にとつては、これは問題にならない。眞無限に對する信念は、ラッセル流のロジスティクに於ては、本質的なものである。これがまさしく、ヒルベルト流のロジスティクと別れる點である。ヒルベルトは、このカントル流の二律背反を避ける爲めに、擴張の見地をとり、ラッセルは理解の見地をとる。隨つて彼にとつては、類は種に先んじ、最高類 Summum genus は、總てに先だつ。この事は、最高類が有限であれば、差支へなからうが、若し無限であると、有限の前に先づ無限を假定しなければ、換言すれば、無限を眞にあるものと見做さなければならない。

而も、無限階級があるばかりではない。新しい條件で概念を制限して、類から種に移る場合に、その條件の數も亦無限である。何故かといふと、この條件は、一般には、問題となつてゐる對象が、無限階級のすべての對象

と、かく／＼の關係にある、といふことを表はすからである。

しかし、これは既に、過去の歷史である。ラッセル氏も危險に氣づいて、思索をしてゐる。すべてを變へようとしてゐる。そして彼が、以前禁じた方法を許す樣な原理を導入するのみならず、以前正當と考へた方法を禁じようともしてゐる事は明かである。彼は、曾て焚いたものを尊敬するのみで滿足しない。嘗て尊敬したものを、焚かうとしてゐる。この後者の方が、更に重大である。彼は建物に新しい翼屋をつけ足してゐるのではなく、その基礎を掘り返してゐるのである。

古いロジスティクは死んだ。それなればこそ、ジグザグ論と無階級論とが、勝敗を爭つてゐるのである。吾々は、新來のものを判斷する爲めに、先づ、その生れ出づるを待たうと思ふ。



# 第參篇　新力學

## 第壹章　力學とラヂウム

### 一　緒論

ニュートン Newton 以來物理學の基礎となり、動かす可らざるものと思はれてきた力學の一般原理は、今や棄てられようとしてゐるのであるか、少くとも、根本的に變更されようとしてゐるのであるか。之は數年來多くの人の尋ねるところである。彼等の云ふところに依ると、ラヂウムが發見された爲めに、一等確實なものと信じられてゐた科學の定說、即ち一方では、金屬が變質出來ないといふことと、一方では、力學の根本公準とが、くつがへされたといふのである。この新奇な事柄を、確實に證明されたものと考へ、昨日迄の偶像を破壞するのは、恐らく早急すぎるであらう。そして、それに賛成する前に、もつと多くの、もつと確な實驗を待つのが、恐らくよいのであらう。しかし、今から、この新學說と、それを支持する今迄の論據の中の最も大切なものとについて知つて置くことは、依然として必要である。

私は先づ、それらの原理を、簡單に思ひ返へさう。

A　孤立して居り、且つ何の外力をも受けない質點の運動は、直線等速的である。これは慣性の法則である。力がなければ、加速度もない。

B　運動する點の加速度の方向は、その點がうけるすべての力の合力と、同じ方向である。この加速度は、この合力を、この運動する點の質量と呼ぶ係數で、割つた商に等しい。

この様に定義された運動點の質量は、一定である。それは、この點の得る速度には關しない。力がこの速度に平行で、單にこの點の運動を早め、或は遲らす時にも、又これと違ひ、力がこの速度に垂直で、この運動を右か左かに外れさせる時、卽ちその行路を曲げる時にも、質量は變らない。

C　ある質點のうけるすべての力は、他の質點の作用から生ずる。それは唯、この異つた質點の、相對的な位置と速度とのみに關係する。

BCの二原理を組合すと、相對運動の原理を得る。これに依つて、ある體系の運動の法則は、この體系を固定軸に關係させても、或は直線等速運動をしてゐる軸に關係させても、同じである。隨つて、絕對運動と、この樣な軸に關しての相對運動とを、區別することは出來ない。

D　若し、質點Aが質點Bにはたらくならば、Bは又、Aにはたらく。そして、この二作用は、大きさ相等しく方向反對な二力である。これは作用反作用相等の原理、短く言へば、反作用の原理である。

天文學上の觀測や、最も普通な物理學的現象は、これらの原理に、完全な、不變な、極めて精密な確證を與へた、と思はれる。が、人々は今日からいふ。それは事實である、併し、それは今迄、小さい速度だけを取扱つたからである、例へば、水星は最も速い惑星であるが、その速度は、一秒漸く一〇〇キロメートルに過ぎない。この星が千倍も速くなつたとしても、同樣に行動するであらうかと。尤も、私たちはまだ心配することはない。いくら自働車製造が進歩しても、力學の舊原理が機械に應用されなくなる迄には、まだ〳〵時間がかゝるだらう。

それでは、私たちはどうして、水星の千倍もの速度、例へば、光速度の$\frac{1}{10}$とか、$\frac{1}{3}$とか、或は尙一層それに近い速度を、實現し得るであらうか。それは、陰極線とラヂウム線とに依つてである。

私たちはラヂウムが、三つのギリシャ文字、α、β、γで表はされる、三種の線を出すことを知つてゐるが、今後、もし特別の注意がなければ、いつもβ線を指すものとする。この線は、陰極線に類似のものである。

陰極線が發見されて以來、二つの說が現はれた。この現象を、クルークス Crookes は、原子が實際に飛び出すのであるとし、ヘルツ Hertz は、エーテルの特別な波動であるとした。これは一世紀前、光に關して物理學者を二派に分けた所の、あの爭論を繰返したものである。クルークスは、光について廢棄された發射說 théorie de l'émission を再び採用し、ヘルツは、波動說 théorie ondulatoire に加擔した。事情は、クルークスに有利な樣に思はれる。

陰極線は、先づ、陰電荷を持つてゐる、といふことが認められた。それは、磁場又は電場で曲げられる。そして、この曲り方は、丁度、强い電荷をもち高速度で運動する放射體が、この同じ磁場電場で生ずる筈のものと同じである。この二つの外れは、二つの量、卽ち一方では速度に、一方では放射體の電荷とその質量との比に、關

係する。私たちは、この質量と電荷との絶對値を、知ることは出來ない、唯、その比を知り得るのみである。成程、速度を變へずに、電荷と質量とを同時に二倍にすれば、この放射體を曲げようとする力も亦、二倍になるであらうが、その質量が、同じく二倍であるから、加速度と、觀測し得る外れとは、變るまい。それ故、二つの外れを觀測すれば、これらの二未知量を定めるための、二方程式を得るであらう。速度は毎秒一萬乃至三萬キロメートルであることがわかつた。電荷が質量に對する比は、非常に大きい。私たちはこれを、電解に於ける水素イオンの電荷と質量との比に、比較することが出來る。すると陰極放射線は、電解物中の水素の同質量に比べて、約千倍の電氣をもつことが知れるのである。

この考を確めるには、この速度を直接測つて、それを、かうして計算した速度と、較べて見なければならぬ。以前にやつたジェー・ジェー・トムソン J. J. Thomson の實驗では、百倍以上も小さく出たが、これには或る誤りの原因があつた。ウィーヘルト Wiechert は再びこの問題をとつて、ヘルツ振動を用ゐる裝置で行つた。その結果は、少くとも大きさの桁では、理論と一致するものであつた。この實驗を再びやつて見るのは、興味のあることであらう。いづれにしても、波動説は、この全體の事實を説明する力はない様に思はれる。

ラヂウムのβ線についてした同様な計算は、尚一層の大速度、十萬乃至二十萬キロメートル、或はそれ以上を與へた。この速度は、私たちの知つてゐたすべての速度を、遙に超えてゐる。既に前から知られてゐる通り、光は毎秒三十萬キロメートルの速さであることは事實であるが、それは物質が移動するのではない。然るに、陰極線について發射説を採れば、實際上記の速度で動く物質分子があらうといふもので、普通の力學の法則が、それ**に適用されるか否かを、研究する必要がある。**

## 二　縦質量と横質量と

私たちは、電流が感應現象、特に、自己感應を起すといふことを知つてゐる。電流が增せば、それに反對する自己感應の動電力が生ずる。反對に、電流が減れば、自己感應の動電力は、この電流を維持しようとする。即ち、自己感應が電流の强さのあらゆる變化に反對するのは、丁度、力學で物體の慣性が、その速度のあらゆる變化に反對するのと、同じである。自己感應は、實際一つの慣性なのである。丁度、電流がその周圍のエーテルを動かさなければ生じないかの様な、又隨つて、このエーテルの慣性が、この電流の强さを一定に保たうとしてゐるかの様な具合である。電流を起すには、この慣性に打ち勝たなければならず、又電流を止めるにも、矢張りそれに打ち勝たなければならないであらう。

陰極線は、負の電荷をもつ放射體の雨、ともいふべきものであるが、それは、電流と同じだと見ることが出來る。勿論この電流は、第一に少くとも、物質は動かずに電氣がそのなかを回流する普通の傳導電流 Courant de conduction とはちがつてゐる。それは帶動電流 Courant de convection であつて、物質的な媒介物に結びついた電氣が、この媒介物の運動に依つて運ばれるのである。しかしローランド Rowland は、この帶動電流が、傳導電流と同様な磁氣的效果を生ずることを示した。それは又、同様な感應の效果をも生ずる筈である。第一、もしさうでないとすれば、エネルギー不滅の法則は破れるだらうし、其の上クレミゥ Crémieu とパンデ Pender と

は、この感應の效果が直接見られる樣な方法を行つてゐる。

若し陰極微粒子の速度が變化すれば、それに對應する電流の强さも、等しく變化するであらう。そして、この變化に反對しようとする自己感應の效果が生ずるであらう。それ故、これらの微粒子は、二重の慣性、第一その本來の慣性と、そしてそれと同じ效果を生ずる自己感應に依る見かけの慣性とを、もつてゐなければならない。それ故、それは、眞の質量と電磁的に生じた假の質量とから成り立つた見かけの總質量を持つであらう。計算の示すところでは、この假の質量は速度と共に變化し、又自己感應の慣性の力は、放射體の速度が速くなる時と、遲くなる時と、方向を變へる時とで異り、隨つて、この見かけの總慣性の力についても、同じことである。

それ故見かけの總質量は、微粒子に働く實際の力が、速度に平行でその運動を加速する時と、その速度に垂直で方向を變へさせる時とで、同じでない。それ故縱の總質量と、橫の總質量とを、區別しなければならない。この兩總質量は、固よりその速度に依るのである。これが、アブラハム Abraham の理論的な研究の結果である。

前章に述べた測定で二つの外れを測つて、私たちは何を定めるのであらうか。それは一方ではその質量、一方では電荷が總橫質量に對する比である。かういふ譯で、この總質量に於て、眞の質量と電磁的の假質量との割合は、どうして定められるか。もし本來の陰極線のみであつたなら、それを定めることは、夢にも出來なかつたであらう。しかし、幸ひにもラヂウム線があり、前に述べた通り、これは更に著しく速いのである。これらのラヂウム線は、皆な同じといふのではなく、電場磁場の作用をうけても、同樣な行動をとらない。私たちは、電氣的の外れが磁氣的の外れの函數であることを知り、又、電場磁場の作用をうけたラヂウム線を乾板にうけて、この二つの外れの間の關係を表はす曲線を、寫眞にとることが出來る。カウフマン Kaufmann のやつたのはこれであつて、彼はそれから、速度と、電荷が見かけの總質量に對する比、卽ち私たちが $\varepsilon$ と呼ぶ比との、關係を引き出したのである。

私たちは、數種の線があつて、各々或る特定の速度、特定の電荷、特定の質量をその特徵としてゐる、と考へることも出來る。が、この假說は、極めて眞に遠いものである。實際どういふ譯で、同じ質量の微粒子がすべて、常に同一の速度をとるであらうか。それより寧ろ、すべての放射體について、電荷も、眞の質量も、同一であり、それらは唯、速度に依つてのみ異る、と考へる方が、遙に自然である。$\varepsilon$ といふ比が速度の函數であるとしても、それは、眞の質量がこの速度と共に變るからではなく、電磁的な假の質量が、この速度に依つて變る爲めに、眞の質量はそれと獨立で不變であるが、見かけの全質量は、それに從はなければならない。

アブラハムの計算は、假の質量が速度の函數として變化する、といふ法則を敎へ、カウフマンの實驗は、全質量の變化の法則を敎へる。それ故この二法則を比較して、眞の質量と全質量との比を定めることが出來るであらう。

これが、カウフマンがこの比を定めるために用ゐた方法である。そして、その結果は、頗る驚くべきものである。眞の質量は零である。

かうして私たちは、まるで思ひもかけない考に導かれた。陰極線についてのみ證明された事柄は、すべての物體にまで擴げられた。私たちが質量と呼ぶものは、見かけだけに過ぎず、すべての慣性は、電磁的に生じたもの

であらう。しかし、さうなると、質量はもはや不變ではなく、速度と共に増加するであらう。毎秒一千キロメートル迄は大體不變であるが、それ以上は次第に増加し、光速度に於ては無限大となるであらう。横質量はもはや縱質量とは等しくなく、只速度のあまり大きくない時にだけほゞ等しく、力學のBの原理は、もはや眞ではなくなるであらう。

## 三　陽電氣線 rayons-canaux

私たちが今迄に達しただけの所では、この結論は、早すぎると見えるかも知れない。物質からの放射物にすぎず、恐らく眞の物質ではないかも知れないところのこの輕い微粒子についてのみ證明された事柄を、あらゆる物質にまで應用することが、果して出來るであらうか。しかし、この疑問に入る前に、今一つ他の線――陽電氣線、ゴールトシュタイン Goldstein のカナル線 Kanalstrahlen――について述べておかなければならない。陰極は、陰電荷をもつた陰極線と同時に、陽電荷をもつた陽電氣線をも放射する。一般に陽電氣線は陰極から反撥されず、その極く附近に止まり、「黄色帶」Couche chamois となるのであるが、これはたやすくは認め難い。併し、若し陰極に孔を穿ち、陰極が管を完全に塞ぐ様にすれば、陽電氣線は陰極の後方、卽ち、陰極線と反對の方向に擴がり、それを研究し得る様になるであらう。この様にして、私たちはその電荷が正であることを明にし、磁氣電氣による外れは、陰極線についての様に矢張り存在するが、非常に弱いといふことを示すことが出來るのである。

ラヂウムも同樣に、α線といふ比較的吸收され易いが陽電氣線に似た線を出すのである。

私たちは陰極線についての樣に、二つの外れを測り、それから速度と ε なる比とを出すことが出來る。その結果は陰極線について程には一定でない。が、速度も ε なる比も非常に小さい。陽微粒子は、陰微粒子より電荷が少いのか、或はもつと自然なことは、若し電荷が等しく符號が反對であると假定すれば、陽微粒子は遙に大きいのである。これらの微粒子は、一は陽電荷、一は陰電荷をもち、電子 électron と名づけられた。

## 四　ローレンツ Lorentz の理論

然し電子は、それが非常な高速度で動いてゐると思はれるところの、これらの線に於てのみ認められるのではない。それは、ずつとちがつた方面にも、見られるのであつて、光學電氣學上の主な現象を說明するのも、この電子である。次に少しく述べたいと思ふ所の輝かしい綜合は、ローレンツのなし遂げたものである。

物質は、非常に大きい電荷をもつた電子から出來てゐるのであつて、それが中性に見えるのは、電子の陰陽の電荷が、互に消し合つてゐる爲めである。例へば、大きな陽電子と、この中央の電子のもつ反對な（陽）電氣に依つてその周圍に惹きつけられる無數の小惑星卽ち陰電子とから成る、一種の太陽系を考へることが出來る。これらの惑星の陰電荷は、この太陽の陽電荷に釣合ひ、これらすべての電荷の代數的和は、零となるのであらう。

これらの電子は、皆エーテルの中にあり、エーテルは到る所同一で、その運動は、眞空に於ける光或はヘルツ振動と、同じ法則に從つて擴がるであらう。電子とエーテルとの他には、何物もない。光波が、電子の無數に在るエーテルの或る部分に入つて來ると、これらの電子は、エーテルの擾亂の影響をうけて運動し始め、次に逆に

エーテルに對して、作用し返す。この樣にして、屈折、分散、複屈折、吸收が說明される。同樣に、若し、電子が何かの原因で運動を始めると、周圍のエーテルをかき亂し、光波を生ぜしめる。かうして、白熱された物體が光を輻射することが、說明されるであらう。

或る種の物質、例へば金屬に於ては、動けない電子以外に尙ほ、その金屬から外に出るとか、外部の眞空、空氣、或はその他すべて非金屬的な物體と金屬とを區別する表面を橫切るとかは出來ないが、その他は全く自由に動くことの出來る電子が、その間を廻つてゐる。これらの自由電子は、丁度氣體運動論でいふ氣體分子が、その入れられた容器の內部で運動するのと同じ樣に、その金屬の內部で運動する。しかし電位差の影響をうけると、自由陰電子は一方に、自由陽電子は他方に集まらうとする。これが電流を生ずるのであり、またこれらの物體が良導體であるのも、これが爲めである。そのほか、これらの電子の速度は、氣體運動論との類推を許せば、溫度が高い程速いであらう。もし、これらの自由電子の二つが、金屬體の表面卽ちそれが橫切ることの出來ない表面に當れば、緣に當つた玉突の玉の樣に、撥ね返り、その速度は、方向について、急激な變化をうける。しかし、後になつてわかる樣に、電子が方向を變へる時には、光波の源となる。そして、高溫度の金屬が白熱されるのは、この爲めである。

他の物體、電媒質、透明體に於ては、自由電子のもつ自由は遙に少ない。それは、それを悉く束縛電子に、くつついてゐるかの樣である。自由電子が束縛電子を離れると離れる程、この引力は强くなり、それを後に引き戾さうとする。それ故、少ししか離れる事が出來ず、又、もはやその周圍を廻ることも出來ず、唯その平均位置近くで、振動することが出來るだけである。これが、これらの物體の良導體でない所以である。その上、それらは大抵光線を屈折させるであらう。何故かといふと、光の振動は、振動出來る自由電子に傳へられ、それが擾亂を生ずるだらうからである。

私は玆で、細かしい計算を述べることは出來ない。私は、この理論が、旣に知られてゐたすべての事實を說明し、且つゼーマン效果 phénomène de Zeeman の樣な新事實を豫知させた、といふに止めて置かう。

## 五　力學上の歸結

今や私たちは、二つの假說を考へることが出來る。

一、陽電子は、その電磁的な假の質量より遙に大きい眞の質量を持つて居り、唯陰電子だけが、眞の質量を持たない。尙陰陽二種の電子のほかに、眞の質量のみをもつ中性の原子を、假定することも出來よう。この場合には、力學を害なふことはなく、その法則に觸れる必要はない。眞の質量は不變であり、唯運動が、自己感應の結果、かき亂されるけれども、これは前から知られてゐたことである。その上この擾亂は、眞の質量をもたぬ、卽ち眞の物質ではない所の、陰電子の場合を除けば、殆ど無視しても差支へがない。

二、しかし、別の見方もある。中性の原子といふものはなく、陽電子も、陰電子と同樣に、眞の質量といふものはない、と假定することも出來る。しかしさうすれば、眞の質量といふものは無くなり、質量といふ言葉は、もはや無意味となるか、或は、電磁的の假の質量を表はさなければならない。この場合には、質量はもはや不變

ではなく、横質量と縱質量と等しくなくなり、力學の原理は覆へされるであらう。

先づ一言說明しよう。私たちは同量の電荷に對して、陽電子の總質量は、陰電子のそれより遙に大きい、と云つた。さうすれば、この差は、陽電子が、その假質量のほかに、可なりな眞質量をもつてゐるから、と說明されると考へるのは、自然のことである。これは第一の假說の方へ、私たちを導くであらう。しかし同樣に、どちらにも眞質量はないのであるが、陽電子は遙に小さいから——私は、遙に小さいといふ——その假質量は遙に大きい、といふことも出來る。事實この假說では、慣性は全く電磁的に生じたものであつて、エーテルの慣性に歸せられる。電子は、もはやそれだけでは何物でもなく、唯エーテルの中の孔であつて、その周圍には、エーテルが動いてゐる。この孔が小さければ小さい程、そこにはエーテルが澤山あり、隨つて、エーテルの慣性も大きいであらう。

この二つの假說を、どう判定すべきであらうか。カウフマンがβ線についてした樣に、陽電氣線を取扱つてであらうか。さうは出來ない。この線の速度が、遙に小さいからである。それ故、保守的な人は一方に、新奇を好む人は他方に、各自がその氣質に從つて決めなければならないのだらうか。しかし、恐らく、革新者の論議をよく理解させるためには、他の考察をも加へなければならないのであらう。

# 第貳章　力學と光學

## 一　光行差 L'Aberration

私たちは、ブラッドレィ Bradley の發見した光行差の現象が、どういふものかを知つてゐる。星から出た光が望遠鏡を通るには、幾らかの時間がかゝる。この時間の間に、望遠鏡は、地球の運動につれて移動する。それ故、もし望遠鏡を星の眞の方向に向けると、その像は、光が對物鏡に達した時に十字糸 Croisée des fils du réticule のあつた場所に、結ばれるであらう。而もこの十字糸は、光が十字糸の面に達する時には、もはや同じ點には居ないであらう。それ故私たちは、像を十字糸の上に戻す爲めに、望遠鏡の方向を變へなければならない。その爲めに天文學者は、望遠鏡を、光の絕對速度の方向、卽ち星の眞の位置に向けないで、光の地球に對する相對速度の方向、卽ち星の見かけの位置といはれるものに向ける。

光の速度は知られてゐるから、私たちは、地球の絕對速度を計算することが出來る、と考へるかもしれない。(この絕對といふ言葉については、次に說明する。) 處が、決してさうではない。成程、私たちは觀測する星の見かけの位置は知つてゐるが、その眞の位置は知らない。私たちが光の速度を知つてゐるのは、その大きさについてだけであつて、その方向については知らない。

それ故、もし地球の絶對速度が直線等速であつたなら、私たちは、決して光行差の現象に考へ及ばなかつたであらう。併し、この絶對速度は變化する。それは二つの部分、即ち直線等速な太陽系の速度と、地球が太陽に對する變化する速度とから、成り立つてゐる。もし太陽系の速度、即ち不變な部分だけであつたなら、觀測の方向は變らないであらう。そして、この場合に觀測されるだらう、と思はれる位置を、星の平均の見かけの位置といふ。

次に、地球の速度の兩部分を、同時に考へに入れゝば、實際の見かけの位置が、得られるであらう。これは平均の見かけの位置の周圍に、小さい楕圓を描く。私たちが觀るのは、この楕圓である。

極く小さい量を無視すると、この楕圓の大きさは、太陽に對する地球の速度が光速度に對する比だけに依るのであり、隨つて、太陽に對する地球の相對速度にのみ、關係するのであることが知られる。

しかし、こゝで止めなければならない。この結果は正確なものではなく、唯近似的なものに過ぎないのである。この近似をもう一歩進めると、この楕圓の大きさは、地球の絶對速度によるものとなるであらう。樣々な星について、その楕圓の長軸を比較すれば、少くとも理論的には、この絶對速度を定める手段があることになるであらう。

恐らく、これは一見して思ふ程に、驚くべきことではなからう。實際、それは絶對空間に對する速度のことを云つてゐるのではなく、定義に依つて絶對靜止にあると見做されるエーテルに對する速度を指すのである。

その上、この手段は、全く理論的である。事實、光行差は極めて小さいもので、光行差の楕圓の可能な差は、尚一層小さい。そして、もし光行差を第一次と見れば、その差は第二次と見られなければならず、ほゞ千分の一秒位であつて、私たちの器械では、全く感じられないものである。最後に、私たちは後に到つて、何故上の理論を斥けなければならぬか、又なぜ、私たちの器械が一萬倍も精密になつた場合にでも、この絶對速度を定めることが出來ないか、を知るであらう。

尚私たちは、他の手段を考へることも出來ようし、又事實考案もされた。光の速度は、水中と空中とではちがつてゐる。空氣の入つた望遠鏡と、水を滿たした望遠鏡とで觀測した星の二つの見かけの位置を比較することは出來ないだらうか。その結果は、反射、屈折の法則は、地球の運動に依つて變化しない、といふ否定的なものであつた。この現象は、二通りに說明することが出來る。

一、エーテルは靜止してゐるのでなく、運動する物體に伴はれる、と假定することが出來よう。さうすれば、屈折の現象が地球の運動に依つて變化しない事は、驚くにあたるまい。何故かといふに、プリズムも望遠鏡もエーテルも、皆同時に同じ移動をするからである。光行差そのものについては、星と星との間の空間にある靜止するエーテルと、地球の運動に伴ふエーテルとを別つ表面に生ずる、一種の屈折で說明される。運動體の電氣力學についてのヘルツの理論は、この假說（エーテルが全部伴ひ去られるといふ）の上に建てられたのである。

二、これに對してフレネル Fresnel は、エーテルは眞空中では絶對靜止、空氣中ではこの空氣の速度如何に係らず殆ど絶對に靜止、屈折性の媒質の運動に依つては一部伴はれる、と假定する。ローレンツは、この理論に一層滿足な形を與へた。彼にとつては、エーテルは靜止して居り、電子のみが運動するのである。エーテルのみが

働きにあづかる眞空に於て、或は殆どエーテルのみが働きにあづかる空氣中に於ては、この隨伴現象は、零又は殆ど零である。エーテルの振動に依り、又同時に、エーテルの擾亂で生じた電子の振動に依つて、擾亂を生ずる屈折性の媒質では、波動は一部分伴つて行かれる。

この二つの假說を決定するには、フィゾー Fizeau の實驗がある。彼は干涉縞を測定して、靜止中と運動中との、空中及水中に於ける光の速度を比較した。これらの實驗は、フレネルの部分隨伴の假說を確めた。マイケルソン Michelson もこの實驗を繰返したが、その結果は同樣であつた。それ故、ヘルツの理論は斥けられなければならない。

## 二　相對性の原理

しかし、エーテルが地球運動に伴はれないならば、地球の絕對速度、といふより寧ろ、不動なエーテルに對する地球の速度を、光學的現象の手段で、明にすることが出來るであらうか。經驗はこのことを否定した。しかも人々は、出來るだけ樣々に、實驗の方法を變へて見た。どんな方法を用ゐても、私たちは決して、相對的速度、卽ち或る物質的なものが他の物質的な物に對する速度しか、知ることは出來ないであらう。實際、もし光源と觀測の器械とが、地球上にあつて、地球と共に運動するならば、地球の軌道運動の方向に對して、器械がどんな位置をとらうとも、實驗の結果は、常に同一であつた。天文學的光行差の生ずるのは、その光源たる星が、觀測者に對して運動してゐるからである。

これまでにした假說は、若し光行差の自乘の階級である極めて小さい量を無視しさへすれば、この一般的な結果を說明することが出來る。その說明は、私が、次に明にしようとするローレンツのとなへ出した局所時 temps local の考にもとづいてゐる。各々AとBとにあつて、光の信號により時計を合はせようとする、二人の觀測者を考へる。彼等は、Bが彼の時計が或る特定の時間を指す時に、Aに向つて信號を送り、Aはその信號を見た時に、彼の時計をその時間に合はせるものと約束する。若しこの樣にするだけであれば、光がBからAに行くに或る時間を要するから、Aの時計はBの時計よりもt時間遲れ、系統的の誤差を生ずる事になるであらう。この誤差は、たやすく訂正される。それには、信號を交換すればよい。AはまたBに信號を送らなければならない。そして、かうして調整すれば、Bの時計は、Aの時計よりも、t時間だけ遲れることにならう。そこで、この二つの調整の算術平均をとればよいのである。

しかしこのやり方は、光がAからBに行くと、BからAに行くとに、同じ時間を要すると假定してゐる。これは、若し兩觀測者が動かなければ正しいが、彼等が共通な運動をしてゐる時には、もはや正しくない。何故なら、その場合には、例へばAはBから來る光に向つてゆき、BはAから來る光に遠ざかつてゆくからである。それ故、もし觀測者が共通な運動をしてゐながら、その事を知らずに居るなら、彼等の調整は不完全で、その時計は同じ時間を指さず、その場所に應じた局所時を示すであらう。

これらの兩觀測者には、若し不動なエーテルが、すべて同一の速度で進む光の信號しか傳へ得ないなら、又、彼等が用ゐ得る他の信號が、彼等と共に移動する媒質に依つて傳へられるなら、上の事を認めるに、何の手段も