

## Algebraische Zahlentheorie

### Arbeitsblatt 16

#### Aufgaben

AUFGABE 16.1. Es sei  $n \in \mathbb{N}_+$ ,  $q \in \mathbb{Z}$  und  $a \neq 0$ . Zeige

$$\mathbb{Q}[X]/(X^n - q) \cong \mathbb{Q}[Y]/(Y^n - a^n q).$$

AUFGABE 16.2.\*

Es sei  $q \geq 2$  eine natürliche Zahl. Bestimme für die Körpererweiterung

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}[X]/(X^3 - q)$$

und ein Element  $a + bx + cx^2$  die Multiplikationsmatrix bezüglich der  $\mathbb{Q}$ -Basis  $1, x, x^2$ , das charakteristische Polynom, die Norm und die Spur.

AUFGABE 16.3. Es sei  $b$  eine quadratfreie Zahl  $\geq 2$ . Zeige, dass  $\mathbb{Z}[X]/(X^3 - b^2)$  nicht normal ist.

AUFGABE 16.4. Es sei  $q \geq 2$  und  $L = \mathbb{Q}[X]/(X^3 - q)$ . Bestimme die Anzahl der reellen und die Anzahl der komplexen Einbettungen von  $L$ .

AUFGABE 16.5. Analysiere die Fasern über  $(p)$  zu  $\mathbb{Z} \subseteq R$ , wobei  $R$  der Zahlbereich zur kubischen Körpererweiterung  $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}[X]/(X^3 - 5)$  ist.

AUFGABE 16.6. Es sei  $R$  der Ganzheitsring zur kubischen Körpererweiterung  $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}[X]/(X^3 - q)$ . Zeige, dass die Faser über  $(3)$  aus mehr als einem Punkt bestehen kann.

AUFGABE 16.7.\*

Es sei  $q$  eine Primzahl mit  $q = \pm 1 \pmod{9}$  und

$$R = \mathbb{Z}[x, z] \subseteq \mathbb{Q}[X]/(X^3 - q)$$

mit  $z = \frac{1+qx+x^2}{3}$  der zugehörige kubische Zahlbereich, siehe Korollar 16.2. Bestimme Darstellungen für  $x^2, xz, z^2$  bezüglich der Ganzheitsbasis  $1, x, z$ .

## AUFGABE 16.8.\*

Es seien  $a$  und  $b$  teilerfremde quadratfreie natürliche Zahlen mit  $a = \pm b \pmod{9}$ . Es sei  $x = \sqrt[3]{ab^2}$ ,  $y = \sqrt[3]{a^2b}$  und  $z = \frac{1+ax+x^2}{3}$ . Bestimme eine Ganzheitsbasis des zugehörigen Zahlbereichs zu  $L = \mathbb{Q}[X]/(X^3 - ab^2)$  der Form  $1, z, w$ .

Drücke  $x$  und  $y$  durch die neue Basis aus.

AUFGABE 16.9. Es sei  $R$  der Zahlbereich zu einer kubischen Erweiterung. Zeige, dass  $R$  eine Restklassenbeschreibung mit (maximal) drei Variablen und drei Gleichungen besitzt.

## AUFGABE 16.10.\*

Es seien  $a, b$  verschiedene quadratfreie Zahlen  $\neq 1$ , die beide den Rest 1 modulo 4 haben. Es sei  $x = \frac{1+\sqrt{a}}{2}$  und  $y = \frac{1+\sqrt{b}}{2}$ . Zeige, dass  $z = \frac{1+\sqrt{ab}}{2}$  zu  $\mathbb{Z}[x, y]$  gehört.

## Abbildungsverzeichnis

- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 3
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 3