Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2020/2021**

Algebraische Zahlentheorie

Arbeitsblatt 16

Aufgaben

Aufgabe 16.1. Es sei $n \in \mathbb{N}_+$, $q \in \mathbb{Z}$ und $a \neq 0$. Zeige

$$\mathbb{Q}[X]/(X^n - q) \cong \mathbb{Q}[Y]/(Y^n - a^n q).$$

Aufgabe 16.2.*

Es sei $q \geq 2$ eine natürliche Zahl. Bestimme für die Körpererweiterung

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}[X]/(X^3 - q)$$

und ein Element $a+bx+cx^2$ die Multiplikationsmatrix bezüglich der $\mathbb{Q}$-Basis $1, x, x^2$, das charakteristische Polynom, die Norm und die Spur.

Aufgabe 16.3. Es sei b eine quadratfreie Zahl ≥ 2. Zeige, dass $\mathbb{Z}[X]/(X^3 - b^2)$ nicht normal ist.

Aufgabe 16.4. Es sei $q \geq 2$ und $L = \mathbb{Q}[X]/(X^3 - q)$. Bestimme die Anzahl der reellen und die Anzahl der komplexen Einbettungen von L.

Aufgabe 16.5. Analysiere die Fasern über (p) zu $\mathbb{Z} \subseteq R$, wobei R der Zahlbereich zur kubischen Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}[X]/(X^3 - 5)$ ist.

Aufgabe 16.6. Es sei R der Ganzheitsring zur kubischen Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}[X]/(X^3 - q)$. Zeige, dass die Faser über (3) aus mehr als einem Punkt bestehen kann.

Aufgabe 16.7.*

Es sei q eine Primzahl mit $q = \pm 1 \mod 9$ und

$$R = \mathbb{Z}[x, z] \subseteq \mathbb{Q}[X]/\big(X^3 - q\big)$$

mit $z = \frac{1+qx+x^2}{3}$ der zugehörige kubische Zahlbereich, siehe Korollar 16.2. Bestimme Darstellungen für x^2, xz, z^2 bezüglich der Ganzheitsbasis $1, x, z$.

Aufgabe 16.8.*

Es seien a und b teilerfremde quadratfreie natürliche Zahlen mit $a = \pm b \mod 9$. Es sei $x = \sqrt[3]{ab^2}$, $y = \sqrt[3]{a^2b}$ und $z = \frac{1+ax+x^2}{3}$. Bestimme eine Ganzheitsbasis des zugehörigen Zahlbereichs zu $L = \mathbb{Q}[X]/(X^3 - ab^2)$ der Form $1, z, w$.

Drücke x und y durch die neue Basis aus.

Aufgabe 16.9. Es sei R der Zahlbereich zu einer kubischen Erweiterung. Zeige, dass R eine Restklassenbeschreibung mit (maximal) drei Variablen und drei Gleichungen besitzt.

Aufgabe 16.10.*

Es seien a, b verschiedene quadratfreie Zahlen $\neq 1$, die beide den Rest 1 modulo 4 haben. Es sei $x = \frac{1+\sqrt{a}}{2}$ und $y = \frac{1+\sqrt{b}}{2}$. Zeige, dass $z = \frac{1+\sqrt{ab}}{2}$ zu $\mathbb{Z}[x, y]$ gehört.

Abbildungsverzeichnis