

**Analysis I****Arbeitsblatt 2****Übungsaufgaben**

AUFGABE 2.1. Untersuche für jedes  $n \in \mathbb{N}$  die Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^n,$$

auf Injektivität und Surjektivität.

AUFGABE 2.2. Wie sehen die Graphen der Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  aus, die Sie in der Schule kennengelernt haben?

AUFGABE 2.3. Woran erkennt man am Graphen einer Abbildung

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

ob  $f$  injektiv bzw. surjektiv ist?

AUFGABE 2.4. Welche bijektiven Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (oder zwischen Teilmengen von  $\mathbb{R}$ ) kennen Sie aus der Schule? Wie heißen die Umkehrabbildungen?

AUFGABE 2.5. Wie kann man sich den Graphen einer Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

und wie sich den Graphen einer Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

vorstellen?

AUFGABE 2.6. Eine Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x),$$

heißt *streng wachsend*, wenn für alle  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  mit  $x_1 < x_2$  auch  $f(x_1) < f(x_2)$  gilt. Zeige, dass eine streng wachsende Funktion  $f$  injektiv ist.

AUFGABE 2.7. Man gebe Beispiele für Abbildungen

$$\varphi, \psi: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

derart, dass  $\varphi$  injektiv, aber nicht surjektiv ist, und dass  $\psi$  surjektiv, aber nicht injektiv ist.

AUFGABE 2.8. Es seien  $m$  und  $n$  natürliche Zahlen. Zeige durch Induktion über  $m$ , dass aus einer Bijektion

$$\varphi: \{1, \dots, m\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}$$

folgt, dass  $m = n$  ist.

AUFGABE 2.9. Wir betrachten die Mengen

$L = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ,  $M = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$  und  $N = \{R, S, T, U, V, W, X, Y, Z\}$

und die Abbildungen  $\varphi: L \rightarrow M$  und  $\psi: M \rightarrow N$ , die durch die Wertetabellen

$x$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\varphi(x)$	$c$	$i$	$a$	$g$	$d$	$e$	$h$	$b$

und

$y$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$g$	$h$	$i$
$\psi(y)$	$X$	$Z$	$Y$	$S$	$Z$	$S$	$T$	$W$	$U$

gegeben sind.

- (1) Erstelle eine Wertetabelle für  $\psi \circ \varphi$ .
- (2) Sind die Abbildungen  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\psi \circ \varphi$  injektiv?
- (3) Sind die Abbildungen  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\psi \circ \varphi$  surjektiv?

AUFGABE 2.10.\*

- (1) Es sei  $H$  die Menge aller (lebenden oder verstorbenen) Menschen. Untersuche die Abbildung

$$\varphi: H \longrightarrow H,$$

die jedem Menschen seine Mutter zuordnet, auf Injektivität und Surjektivität.

- (2) Welche Bedeutung hat die Hintereinanderschaltung  $\varphi^3$ ?
- (3) Wie sieht es aus, wenn man die gleiche Abbildungsvorschrift nimmt, sie aber auf die Menge  $E$  aller Einzelkinder und auf die Menge  $M$  aller Mütter einschränkt?

- (4) Seien Sie spitzfindig (evolutionsbiologisch oder religiös) und argumentieren Sie, dass die Abbildung in (1) nicht wohldefiniert ist.

AUFGABE 2.11. Bestimme die Hintereinanderschaltungen  $\varphi \circ \psi$  und  $\psi \circ \varphi$  für die Abbildungen  $\varphi, \psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die durch

$$\varphi(x) = x^3 + 3x^2 - 4 \text{ und } \psi(x) = x^2 + 5x - 3$$

definiert sind.

AUFGABE 2.12. Der Pferdepfleger hat einen Korb voller Äpfel und geht auf die Weide, um die Äpfel an die Pferde zu verteilen. Danach geht jedes Pferd in seine Lieblingskuhle und macht dort einen großen Pferdeapfel. Modelliere den Vorgang mit geeigneten Mengen und Abbildungen. Man mache sich die Begriffe injektiv und surjektiv an diesem Beispiel klar. Kann die Gesamtabbildung surjektiv sein, wenn es 10 Äpfel, 6 Pferde und 8 Kuhlen gibt?

AUFGABE 2.13.\*

Es seien  $L, M, N$  Mengen und  $F: L \rightarrow M$  und  $G: M \rightarrow N$  surjektive Abbildungen. Zeige, dass die Hintereinanderschaltung  $G \circ F$  ebenfalls surjektiv ist.

AUFGABE 2.14.\*

Es seien  $L, M, N$  Mengen und  $F: L \rightarrow M$  und  $G: M \rightarrow N$  injektive Abbildungen. Zeige, dass die Hintereinanderschaltung  $G \circ F$  ebenfalls injektiv ist.

AUFGABE 2.15.\*

Seien  $L, M, N$  Mengen und

$$f: L \longrightarrow M \text{ und } g: M \longrightarrow N$$

Abbildungen mit der Hintereinanderschaltung

$$g \circ f: L \longrightarrow N, x \longmapsto g(f(x)).$$

Zeige: Wenn  $g \circ f$  injektiv ist, so ist auch  $f$  injektiv.

AUFGABE 2.16. Es sei  $P$  eine Menge von Personen und  $V$  die Menge der Vornamen von diesen Personen und  $N$  die Menge der Nachnamen von diesen Personen. Definiere natürliche Abbildungen von  $P$  nach  $V$ , nach  $N$  und nach  $V \times N$  und untersuche sie in Hinblick auf die relevanten Abbildungsbegriffe.

## AUFGABE 2.17.\*

Begründe, ob die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \longmapsto (x + y, xy, x^y) = (u, v, w).$$

injektiv ist oder nicht.

AUFGABE 2.18. Sei  $G$  eine Menge und  $\mathfrak{P}(G)$  ihre Potenzmenge. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathfrak{P}(G) \longrightarrow \mathfrak{P}(G), T \longmapsto \mathfrak{C}T,$$

bijektiv ist. Wie lautet die Umkehrabbildung?

AUFGABE 2.19. Sei  $M$  eine Menge, die als disjunkte Vereinigung

$$M = A \uplus B$$

gegeben ist. Definiere eine Bijektion zwischen der Potenzmenge  $\mathfrak{P}(M)$  und der Produktmenge  $\mathfrak{P}(A) \times \mathfrak{P}(B)$ . Wie verhalten sich diese beiden Mengen, wenn  $A$  und  $B$  zwar eine Vereinigung von  $M$  ergeben, aber nicht disjunkt sind, und umgekehrt?

AUFGABE 2.20. Sei  $G$  eine Menge. Stifte eine Bijektion zwischen

$$\mathfrak{P}(G) \text{ und } \text{Abb}(G, \{0, 1\}).$$

AUFGABE 2.21. Seien  $M, N, L$  Mengen. Stifte eine Bijektion zwischen

$$\text{Abb}(M \times N, L) \text{ und } \text{Abb}(M, \text{Abb}(N, L)).$$

Man mache sich diese Situation für  $M = N = [0, 1]$  und  $L = \mathbb{R}$  klar.

AUFGABE 2.22. Es seien  $L$  und  $M$  Mengen und es sei

$$F: L \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Es sei

$$G: M \longrightarrow L$$

eine Abbildung, die  $F \circ G = \text{id}_M$  und  $G \circ F = \text{id}_L$  erfüllt. Zeige, dass dann  $G$  die Umkehrabbildung von  $F$  ist.

AUFGABE 2.23. Es seien  $L$  und  $M$  Mengen. Zeige, dass die Abbildung

$$\tau: L \times M \longrightarrow M \times L, (x, y) \longmapsto (y, x),$$

eine bijektive Abbildung zwischen den Produktmengen  $L \times M$  und  $M \times L$  festlegt.

AUFGABE 2.24. Es sei

$$F: L \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Zeige, dass das Urbildnehmen

$$\mathfrak{P}(M) \longrightarrow \mathfrak{P}(L), T \longmapsto F^{-1}(T),$$

folgende Eigenschaften besitzt (für beliebige Teilmengen  $T, T_1, T_2 \subseteq M$ ):

- (1)  $F^{-1}(T_1 \cap T_2) = F^{-1}(T_1) \cap F^{-1}(T_2)$ ,
- (2)  $F^{-1}(T_1 \cup T_2) = F^{-1}(T_1) \cup F^{-1}(T_2)$ ,
- (3)  $F^{-1}(M \setminus T) = L \setminus F^{-1}(T)$ .

AUFGABE 2.25. Es sei

$$F: L \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Zeige, dass das Bildnehmen

$$\mathfrak{P}(L) \longrightarrow \mathfrak{P}(M), S \longmapsto F(S),$$

folgende Eigenschaften besitzt (für beliebige Teilmengen  $S, S_1, S_2 \subseteq L$ ):

- (1)  $F(S_1 \cap S_2) \subseteq F(S_1) \cap F(S_2)$ ,
- (2)  $F(S_1 \cup S_2) = F(S_1) \cup F(S_2)$ ,
- (3)  $F(L \setminus S) \supseteq F(L) \setminus F(S)$ .

Zeige durch Beispiele, dass die beiden Inklusionen in (1) und (3) echt sein können.

AUFGABE 2.26. Es seien  $L$  und  $M$  Mengen und es sei

$$F: L \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Zeige, dass  $F$  genau dann injektiv ist, wenn das Urbildnehmen

$$\mathfrak{P}(M) \longrightarrow \mathfrak{P}(L), T \longmapsto F^{-1}(T),$$

surjektiv ist.

AUFGABE 2.27. Es seien  $L$  und  $M$  Mengen und es sei

$$F: L \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Zeige, dass  $F$  genau dann surjektiv ist, wenn das Urbildnehmen

$$\mathfrak{P}(M) \longrightarrow \mathfrak{P}(L), T \longmapsto F^{-1}(T),$$

injektiv ist.

AUFGABE 2.28. Betrachte die ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$  mit der Differenz als Verknüpfung, also die Abbildung

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, (a, b) \longmapsto a - b.$$

Besitzt diese Verknüpfung ein neutrales Element? Ist diese Verknüpfung assoziativ, kommutativ, gibt es zu jedem Element ein inverses Element?

AUFGABE 2.29. Es sei  $M$  eine Menge mit einer Verknüpfung  $*$ . Zeige, dass es maximal ein neutrales Element für die Verknüpfung gibt.

AUFGABE 2.30. Zeige, dass die Verknüpfung auf einer Geraden, die zwei Punkten ihren Mittelpunkt zuordnet, kommutativ, aber nicht assoziativ ist. Gibt es ein neutrales Element?

AUFGABE 2.31. Zeige, dass das Potenzieren auf den positiven natürlichen Zahlen, also die Zuordnung

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, (a, b) \longmapsto a^b,$$

weder kommutativ noch assoziativ ist. Besitzt diese Verknüpfung ein neutrales Element?

AUFGABE 2.32. Es sei  $M$  eine Menge mit einer Verknüpfung darauf, die wir als Produkt schreiben.

- (1) Wie viele sinnvollen Klammerungen gibt es für die Verknüpfung von vier Elementen?
- (2) Die Verknüpfung sei nun assoziativ. Zeige, dass das Produkt von vier Elementen nicht von irgendeiner Klammerung abhängt.

AUFGABE 2.33. Es sei  $G$  eine Menge und  $M = \mathfrak{P}(G)$  die zugehörige Potenzmenge. Betrachte den Durchschnitt von Teilmengen von  $G$  als eine Verknüpfung auf  $M$ . Ist diese Verknüpfung kommutativ, assoziativ, besitzt sie ein neutrales Element?

### Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 2.34. (3 Punkte)

Bestimme die Hintereinanderschaltungen  $\varphi \circ \psi$  und  $\psi \circ \varphi$  für die Abbildungen  $\varphi, \psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die durch

$$\varphi(x) = x^4 + 3x^2 - 2x + 5 \text{ und } \psi(x) = 2x^3 - x^2 + 6x - 1$$

definiert sind.

AUFGABE 2.35. (3 Punkte)

Man beschreibe eine Bijektion zwischen  $\mathbb{N}$  und  $\mathbb{Z}$ .

AUFGABE 2.36. (3 Punkte)

Seien  $L, M, N$  Mengen und

$$f : L \longrightarrow M \text{ und } g : M \longrightarrow N$$

Abbildungen mit der Hintereinanderschaltung

$$g \circ f : L \longrightarrow N, x \longmapsto g(f(x)).$$

Zeige: Wenn  $g \circ f$  surjektiv ist, so ist auch  $g$  surjektiv.

Zeige durch ein Beispiel, dass die Umkehrung nicht gilt.

AUFGABE 2.37. (3 Punkte)

Betrachte auf der Menge  $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  die Abbildung

$$\varphi : M \longrightarrow M, x \longmapsto \varphi(x),$$

die durch die Wertetabelle

$x$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\varphi(x)$	2	5	6	1	4	3	7	7

gegeben ist. Berechne  $\varphi^{1003}$ , also die 1003-te Hintereinanderschaltung (oder *Iteration*) von  $\varphi$  mit sich selbst.

AUFGABE 2.38. (5 Punkte)

Es seien  $L$  und  $M$  Mengen. Wir betrachten die Abbildung

$$\Psi : \text{Abb}(L, M) \longrightarrow \text{Abb}(\mathfrak{P}(M), \mathfrak{P}(L)), f \longmapsto f^{-1},$$

bei der einer Abbildung das Urbildnehmen zugeordnet wird.

a) Zeige, dass  $\Psi$  injektiv ist.

b) Es sei  $L \neq \emptyset$ . Zeige, dass  $\Psi$  nicht surjektiv ist.

AUFGABE 2.39. (2 Punkte)

Es sei  $M$  eine Menge mit einer assoziativen Verknüpfung darauf, die wir als  $\star$  schreiben. Zeige, dass

$$(a \star b) \star (c \star (d \star e)) = a \star ((b \star (c \star d)) \star e)$$

für beliebige  $a, b, c, d, e \in M$  gilt.





## Abbildungsverzeichnis

- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 9
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 9