Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2018**

Einführung in die mathematische Logik

Arbeitsblatt 12

Übungsaufgaben

Aufgabe 12.1. Erläutere Vor- und Nachteile des axiomatischen Aufbaus der Mathematik.

Aufgabe 12.2. Definiere auf der Menge der Wörter zum einelementigen Alphabet $A = \{|\}$ ein Dedekind-Peano-Modell. Worauf beruht die Gültigkeit der Dedekind-Peano-Axiome?

Aufgabe 12.3. Zeige ausgehend von den Dedekind-Peano-Axiomen, dass jedes Element $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, einen Vorgänger besitzt.

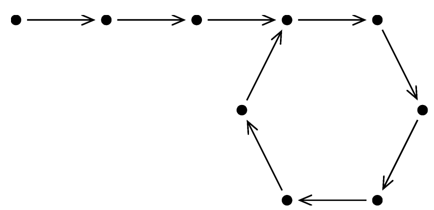
Aufgabe 12.4. Sei $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen und $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die Menge

$$\mathbb{N}_{\geq n} = \{x \in \mathbb{N} |\, x \geq n\}$$

ebenfalls die Dedekind-Peano-Axiome (mit welchem ausgezeichneten Element und mit welcher Nachfolgerabbildung?) erfüllt.

Aufgabe 12.5. Man gebe Beispiele $(M, 0, ')$ für Mengen mit einem ausgezeichneten Element $0 \in M$ und einer Abbildung $' \colon M \to M$ an, die je zwei der Dedekind-Peano-Axiome erfüllen, aber nicht das dritte.

Aufgabe 12.6. Es sei $N_1 = (\mathbb{N}, 0, ')$ und es sei N_2 die unten angegebene Menge mit dem Startsymbol oben links und der durch die Pfeile ausgedrückten Nachfolgerabbildung. An welcher Stelle bricht der Beweis von Satz 12.3 in dieser Situation zusammen?



Aufgabe 12.7. Berechne im Strichsystem

$$||||||||||||| + ||||||$$

allein unter Verwendung des Umlegungsprinzips.

Aufgabe 12.8. Wir zählen

heute, morgen, übermorgen, überübermorgen, überüberübermorgen, ...

und wollen mit diesen Zahlen Addieren.

(1) Welche alltagssprachliche Formulierung besitzt die Addition in diesem Zählmodell?
(2) Welche sprachlichen Formulierungen drücken aus, das heute das neutrale Element der Addition ist.
(3) Was ist morgen plus morgen?
(4) Was ist übermorgen plus übermorgen?
(5) Was ist überübermorgen plus überüberübermorgen?

Aufgabe 12.9.*

Wir zählen

ich, Mama, Oma, Uroma, Ururoma, ...

(1) Was ist die Mama der Urururoma?
(2) Was ist die Uroma der Uroma?
(3) Was ist die Oma der Oma der Oma?
(4) Was ist das ich der Uroma der Ururoma?

Aufgabe 12.10.*

Es sei $(\mathbb{N}, 0, ')$ ein Dedekind-Peano-Modell der natürlichen Zahlen. Zeige, dass die Addition durch die Bedingungen

$$x + 0 = x \text{ für alle } x \in \mathbb{N} \text{ und } x + y' = (x + y)' \text{ für alle } x, y \in \mathbb{N}$$

eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 12.11. Zeige, dass die Addition auf den natürlichen Zahlen kommutativ und assoziativ ist und dass die Abziehregel (d.h., dass aus $n + k = m + k$ für ein k stets $n = m$ folgt) gilt.

Aufgabe 12.12. Es seien N_1 und N_2 Dedekind-Peano-Modelle der natürlichen Zahlen. Es sei

$$\varphi\colon\ N_1 \longrightarrow N_2$$

der eindeutig bestimmte Isomorphismus mit $\varphi(0_1) = 0_2$ und $\varphi(n') = (\varphi(n))'$ für alle $n \in N_1$. Zeige, dass φ die Addition respektiert, dass also

$$\varphi(m+n) = \varphi(m) + \varphi(n)$$

für alle $m, n \in N_1$ gilt.

Aufgabe 12.13. Wie verhält sich die über die Nachfolgerbeziehung eingeführte Addition auf den natürlichen Zahlen (das *Umlegungsmodell*) zu dem *Vereinigungsmodell*, dass die Summe $a+b$ zweier natürlichen Zahlen sich als Anzahl von Objekten (Äpfel) ergibt, wenn man eine Menge von a Objekten und eine Menge von (dazu disjunkten) b Objekten zusammenschmeißt.

Aufgabe 12.14. Begründe, dass die Addition von natürlichen Zahlen im Dezimalsystem (das *schriftliche Addieren*) das Umlegungsprinzip respektiert und auch die 0 richtig verarbeitet. Schließe daraus, dass die schriftliche Addition korrekt ist.

Aufgabe 12.15. Sei $(\mathbb{N}, 0, ')$ ein Dedekind-Peano-Modell der natürlichen Zahlen. Zeige, dass die Multiplikation durch die Bedingungen

$$x \cdot 0 = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{N} \text{ und } x \cdot y' = x \cdot y + x \text{ für alle } x, y \in \mathbb{N}$$

eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 12.16. Definiere auf einem Dedekind-Peano-Modell $(\mathbb{N}, 0, ')$ für die natürlichen Zahlen die Abbildung $Q\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekursiv durch die Bedingungen (die Addition sei mit den wesentlichen Eigenschaften etabliert)

$$Q(0) = 0$$

und

$$Q(n') = Q(n) + n + n + 1.$$

Zeige

$$Q(n) = n \cdot n.$$

Aufgabe 12.17.*

(1) Bestimme die kleinste natürliche Zahl, die größer als die ersten drei Quadratzahlen ist.

(2) Beschreibe die Bedingung (und zwar so, dass die Bedingung erkennbar ist) aus (1) durch einen prädikatenlogischen arithmetischen Ausdruck (also mit dem Symbolalphabet $+, \cdot, 0, 1$ und Variablen) in der einen freien Variablen x.
(3) Beschreibe das Ergebnis aus (1) durch einen einfachen prädikatenlogischen Ausdruck in der einen freien Variablen x.

Aufgabe 12.18. Wir definieren auf $\mathbb{N}_+$ eine neue Relation R durch folgende Vorschrift: Für zwei Zahlen $n, m \in \mathbb{N}_+$ mit $n = 2^k t$ und $m = 2^\ell u$ mit t, u ungerade sei

$$nRm \text{ falls } t < u \text{ gilt oder falls zugleich } t = u \text{ und } k \leq \ell \text{ gilt}$$

(rechts wird auf die natürliche Ordnung in $\mathbb{N}$ Bezug genommen).

(1) Zeige, dass R eine totale Ordnung auf $\mathbb{N}_+$ ergibt und beschreibe exemplarisch diese Ordnung.
(2) Zeige, dass es zu jedem $n \in \mathbb{N}_+$ ein wohldefiniertes Element $n^\star \in \mathbb{N}_+$, $n^\star \neq n$, derart gibt, dass $nRn^\star$ gilt und dass es zwischen n und $n^\star$ keine weiteren Elemente gibt (diese Formulierung ist zu präzisieren).
(3) Erfüllt die Menge $(\mathbb{N}_+, 1, \star)$ die Dedekind-Peano-Axiome?

Aufgabe 12.19. Betrachte die Produktmenge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit der Nachfolgerfunktion

$$(a, b)' := (a, b')$$

und der sogenannten *lexikographische Ordnung*, für die

$$(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2)$$

genau dann gilt, wenn $a_1 < a_2$ oder $a_1 = a_2$ und $b_1 \leq b_2$ ist. Zeige folgende Aussagen.

(1) Es handelt sich um eine totale Ordnung.
(2) Es ist
$$x' \geq x$$
für alle $x \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
(3) $(0, 0)$ ist das kleinste Element.
(4) Es liegt eine Wohlordnung (nach unten) vor.
(5) Diese Menge mit der Nachfolgerfunktion erfüllt nicht das Dedekind-Peano-Induktionsaxiom

Aufgabe 12.20. Es sei M die disjunkte Vereinigung aus $\mathbb{N}$ und aus $\mathbb{Z}$.[1] Wir definieren auf M eine Nachfolgerfunktion, die auf den beiden Bestandteilen

[1]Dabei muss man darauf achten, die Elemente aus $\mathbb{N}$ nicht mit denen aus $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ zu verwechseln. Beispielsweise kann man die Elemente einerseits mit 5 und andererseits mit $5_\mathbb{Z}$ bezeichnen.

durch den üblichen Nachfolger gegeben ist (also durch $+1$), und wir betrachten die $0 \in \mathbb{N}$ als die Null von M.

a) Zeige, dass M die ersten beiden Axiome aus den erststufigen Peano-Axiomen für die Nachfolgerfunktion erfüllt.

b) Zeige, dass es keine Addition auf M gibt, die mit den Additionen auf $\mathbb{N}$ und auf $\mathbb{Z}$ übereinstimmt und für die die Abziehregel gilt.

c) Gilt das erststufige Induktionsaxiom (formuliert für die Nachfolgerfunktion)?[2]

Aufgabe 12.21. Im Kalkül der Prädikatenlogik sei $\vdash \alpha \rightarrow \beta$ ableitbar. Zeige, dass dann auch

$$\vdash \exists x \alpha \rightarrow \exists x \beta$$

ableitbar ist.

Aufgabe 12.22. Zeige, dass in der Prädikatenlogik

$$\vdash \exists x \alpha \leftrightarrow \exists x \neg\neg\alpha$$

ableitbar ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 12.23. (5 Punkte)

Sei $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ das Ziffernalphabet. Definiere die Teilmenge $N \subseteq A^*$, die aus den korrekt gebildeten Zifferndarstellungen einer natürlichen Zahl besteht. Definiere auf N eine Nachfolgerabbildung und zeige, dass N zu einem Dedekind-Peano-Modell wird. Worauf beruht die Gültigkeit der Dedekind-Peano-Axiome?

Aufgabe 12.24. (7 Punkte)

Sei $(\mathbb{N}, 0, ')$ ein Dedekind-Peano-Modell der natürlichen Zahlen mit der in Definition 12.7 festgelegten Multiplikation. Zeige die folgenden Aussagen.

(1)
$$0 \cdot n = 0 = n \cdot 0$$
für alle n.

(2)
$$1 \cdot n = n = n \cdot 1$$
für alle n, d.h. $1 = 0'$ ist das neutrale Element für die Multiplikation.

[2] Diese Aufgabe ist wohl schwierig.

(3)
$$k' \cdot n = k \cdot n + n$$
für alle $n, k \in \mathbb{N}$.
(4) Die Multiplikation ist kommutativ.
(5) Die Multiplikation ist assoziativ.
(6) Aus einer Gleichung $n \cdot k = m \cdot k$ mit $k \neq 0$ folgt $n = m$ (*Kürzungsregel*).
(7) Für beliebige $k, m, n \in \mathbb{N}$ gilt
$$k \cdot (m + n) = k \cdot m + k \cdot n$$
(Distributivgesetz).

Aufgabe 12.25. (3 Punkte)

Es seien N_1 und N_2 Dedekind-Peano-Modelle der natürlichen Zahlen. Es sei
$$\varphi\colon\ N_1 \longrightarrow N_2$$
der eindeutig bestimmte Isomorphismus mit $\varphi(0_1) \,=\, 0_2$ und $\varphi(n') \,=\, (\varphi(n))'$ für alle $n \in N_1$. Zeige, dass φ die Multiplikation respektiert, dass also
$$\varphi(m \cdot n) \;=\; \varphi(m) \cdot \varphi(n)$$
für alle $m, n \in N_1$ gilt.

Aufgabe 12.26. (3 Punkte)

Es sei $(N, 0, ')$ ein Dedekind-Peano-Modell der natürlichen Zahlen. Zeige, dass das erststufige Axiomenschema für die Induktion in N gilt.

Abbildungsverzeichnis