Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2017**

Grundkurs Mathematik II

Arbeitsblatt 47

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 47.1. Heinz Ngolo und Mustafa Müller sagen abwechselnd reelle Zahlen auf. Dabei sind die Zahlen von Heinz alle positiv und fallen, die Zahlen von Mustafa sind negativ und wachsen. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die dadurch gegebene Folge.

(1) Kann $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen eine von 0 verschiedene Zahl konvergieren?
(2) Muss $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen 0 konvergieren?

Übungsaufgaben

Aufgabe 47.2. Zeige, dass der einzige Körper-Isomorphismus $\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Identität ist.

Aufgabe 47.3.*

Es sei K ein Körper, R ein Ring mit $0 \neq 1$ und $\varphi \colon K \to R$ ein Ringhomomorphismus. Zeige, dass φ injektiv ist.

Aufgabe 47.4. Es sei $u \in \mathbb{R}$ und $v \in \mathbb{Q}$.

(1) Zeige, dass u genau dann irrational ist, wenn $u + v$ irrational ist.
(2) Sei zusätzlich $v \neq 0$. Zeige, dass u genau dann irrational ist, wenn $u \cdot v$ irrational ist.

Aufgabe 47.5.*

a) Man gebe ein Beispiel für rationale Zahlen $a, b, c \in]0, 1[$ mit

$$a^2 + b^2 = c^2 .$$

b) Man gebe ein Beispiel für rationale Zahlen $a, b, c \in]0, 1[$ mit

$$a^2 + b^2 \neq c^2 .$$

c) Man gebe ein Beispiel für irrationale Zahlen $a, b \in]0,1[$ und eine rationale Zahl $c \in]0,1[$ mit

$$a^2 + b^2 = c^2 .$$

Aufgabe 47.6. Zeige, dass es keinen Gruppenhomomorphismus $\varphi : (\mathbb{R}, 0, +) \to G$ in eine Gruppe G mit der Eigenschaft gibt, dass $r \in \mathbb{R}$ genau dann irrational ist, wenn $\varphi(r) = 0$ ist.

Aufgabe 47.7.*

Es sei $u \in \mathbb{R}$ eine irrationale Zahl und sei

$$G = \{a + bu \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{R}.$$

(1) Zeige, dass G eine Untergruppe von $(\mathbb{R}, 0, +)$ ist.
(2) Zeige, dass es kein Element $v \in \mathbb{R}$ mit

$$G = \mathbb{Z}v = \{cv \mid c \in \mathbb{Z}\}$$

gibt.
(3) Zeige, dass es in G kein positives minimales Element gibt.

Aufgabe 47.8. Es sei K ein angeordneter Körper und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in K. Wir definieren zwei Folgen mit den Anfangswerten $y_0 = x_0$ und $z_0 = 0$ rekursiv durch

$$y_{n+1} = \begin{cases} y_n + x_{n+1} - x_n, & \text{falls } x_{n+1} \geq x_n\,, \\ y_n \text{ sonst}\,, \end{cases}$$

und

$$z_{n+1} = \begin{cases} z_n + x_{n+1} - x_n, & \text{falls } x_{n+1} < x_n\,, \\ z_n \text{ sonst}\,. \end{cases}$$

(1) Zeige, dass $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wachsend ist.
(2) Zeige, dass $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fallend ist.
(3) Zeige

$$x_n = y_n + z_n.$$

Man kann also jede Folge als Summe einer wachsenden und einer fallenden Folge darstellen.

Aufgabe 47.9. Es sei K ein angeordneter Körper. Zeige, dass man die alternierende Folge $(-1)^n$ nicht als Summe

$$(-1)^n = y_n + z_n$$

schreiben kann, wenn $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkte und monotone Folgen sind.

Aufgabe 47.10.*

Es sei $a \in \mathbb{R}$. Zu einem Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$ sei eine reelle Folge rekursiv durch

$$x_{n+1} = \frac{x_n + a}{2}$$

definiert. Zeige die folgenden Aussagen.

(a) Bei $x_0 > a$ ist $x_n > a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und die Folge ist streng fallend.

(b) Bei $x_0 = a$ ist die Folge konstant.

(c) Bei $x_0 < a$ ist $x_n < a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und die Folge ist streng wachsend.

(d) Die Folge konvergiert.

(e) Der Grenzwert ist a.

Aufgabe 47.11. Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper mit der Eigenschaft, dass jede wachsende, nach oben beschränkte Folge in K konvergiert. Zeige, dass K vollständig ist.

Die Folge der *Fibonacci-Zahlen* f_n ist rekursiv definiert durch

$$f_1 := 1\,, f_2 := 1 \text{ und } f_{n+2} := f_{n+1} + f_n\,.$$

Aufgabe 47.12. Es sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge der Fibonacci-Zahlen und

$$x_n \;=\; \frac{f_n}{f_{n-1}}.$$

Zeige, dass diese Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert und dass der Grenzwert x die Bedingung

$$x \;=\; 1 + x^{-1}$$

erfüllt. Berechne daraus x.

Aufgabe 47.13. Beweise durch Induktion die *Binet-Formel* für die Fibonacci-Zahlen. Diese besagt, dass

$$f_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

gilt ($n \geq 1$).

Aufgabe 47.14. Sei $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $k \in \mathbb{N}_+$. Zeige, dass zu einem beliebigen Startwert $x_0 \in \mathbb{R}_+$ durch

$$x_{n+1} := \frac{x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}}{2}$$

eine Folge definiert wird, die gegen $\sqrt[k]{a}$ konvergiert.

Aufgabe 47.15. Entscheide, ob die Folge

$$a_n = \sqrt{\frac{2\sqrt{n}-3}{3\sqrt{n}-2}}$$

konvergiert, und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 47.16. Bestimme die rationale Zahl, die im Dezimalsystem durch

$$0,11\overline{05}$$

gegeben ist.

Aufgabe 47.17. Bestimme die Ziffernentwicklung im Dualsystem derjenigen reellen Zahl, die im Dezimalsystem durch $0,\overline{3}$ gegeben ist.

Aufgabe 47.18. Bestimme die Ziffernentwicklung im Dreiersystem derjenigen reellen Zahl, die im Dezimalsystem durch $0,\overline{17}$ gegeben ist.

Aufgabe 47.19.*

Sei $m \in \mathbb{N}_+$ und sei

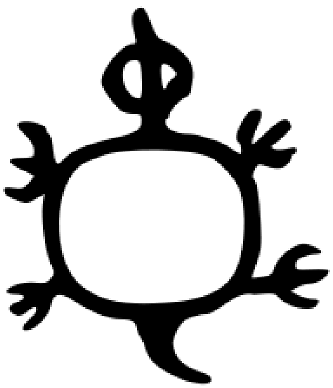
$$x = 0,\overline{0\ldots 01}$$

die reelle Zahl mit Periodenlänge m (die Periode besteht aus $m-1$ Nullen und einer 1). Sei

$$y = \sum_{i=0}^{m-1} z_i 10^i$$

mit $z_i \in \{0,1,2,\ldots,9\}$. Zeige

$$xy = 0,\overline{z_{m-1}z_{m-2}\ldots z_1 z_0}.$$



Aufgabe 47.20. Die Situation im Schildkröten-Paradoxon von Zenon von Elea ist folgendermaßen: Eine langsame Schildkröte (mit der Kriechgeschwindigkeit $v > 0$) hat einen Vorsprung $s > 0$ gegenüber dem schnelleren Achilles (mit der Geschwindigkeit $w > v$ und dem Startpunkt 0). Sie starten gleichzeitig. Achilles kann die Schildkröte nicht einholen: Wenn er beim Ausgangspunkt der Schildkröte $s_0 = s$ ankommt, so ist die Schildkröte nicht mehr dort, sondern ein Stück weiter, sagen wir an der Stelle $s_1 > s_0$. Wenn Achilles an der Stelle s_1 ankommt, so ist die Schildkröte wieder ein Stück weiter, an der Stelle $s_2 > s_1$, u.s.w.

Berechne die Folgenglieder s_n, die zugehörigen Zeitpunkte t_n, sowie die jeweiligen Grenzwerte. Vergleiche diese Grenzwerte mit den direkt berechneten Überholungsdaten.

Aufgabe 47.21. Sei $k \geq 2$. Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$$

konvergiert.

Aufgabe 47.22. Zeige, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$ konvergiert.

Aufgabe 47.23. Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper mit der Eigenschaft, dass jede Dezimalbruchfolge in K konvergiert. Zeige, dass K vollständig ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 47.24. (4 Punkte)

Die Teilmenge

$$S = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{3} = \left\{ x + y\sqrt{3} \,|\, x, y \in \mathbb{Q} \right\} \subseteq \mathbb{R}$$

ist ein Körper. Zeige, dass es einen von der Identität verschiedenen bijektiven Ringhomomorphismus $\varphi\colon S \to S$ gibt.

Aufgabe 47.25. (3 Punkte)

Bestimme den Grenzwert der durch

$$x_n = \frac{2n + 5\sqrt{n} + 7}{-5n + 3\sqrt{n} - 4}$$

definierten reellen Folge.

Aufgabe 47.26. (4 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in K. Zeige, dass man

$$x_n = y_n + z_n$$

mit einer wachsenden Cauchy-Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und einer fallenden Cauchy-Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ schreiben kann.

Aufgabe 47.27. (4 Punkte)

Es sei $x_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine konvergente Folge mit dem Grenzwert x. Zeige, dass die Folge $\sqrt{x_n}$ gegen $\sqrt{x}$ konvergiert.

Aufgabe 47.28. (3 Punkte)

Bestimme die rationale Zahl, die im Dezimalsystem durch

$$0,23\overline{4707}$$

gegeben ist.

Abbildungsverzeichnis