Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2017/2018**

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Vorlesung 27

> Who on earth d'you think you are, A super star, Well, right you are.
>
> John Lennon

In der letzten Vorlesung haben wir die Haupträume zu einem Eigenwert λ zu einem Endomorphismus φ als Kern von $(\varphi - \lambda \operatorname{Id})^k$ für einen hinreichend großen Exponenten k eingeführt. Dies bedeutet insbesondere, dass wenn man $\varphi - \lambda \operatorname{Id}$ auf den zugehörigen Hauptraum einschränkt, dann eine gewisse Potenz davon die Nullabbildung ist. Hier untersuchen wir generell Endomorphismen mit der Eigenschaft, dass eine gewisse Potenz davon die Nullabbildung ist.

Nilpotente Abbildungen

Definition 27.1. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Eine lineare Abbildung

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

heißt *nilpotent*, wenn es eine natürliche Zahl n derart gibt, dass die n-te Hintereinanderschaltung

$$\varphi^n = 0$$

ist.

Definition 27.2. Eine quadratische Matrix M heißt *nilpotent*, wenn es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ derart gibt, dass das n-te Matrixprodukt

$$M^n = \underbrace{M \circ \cdots \circ M}_{n-\text{mal}} = 0$$

ist.

Beispiel 27.3. Es sei M eine obere Dreiecksmatrix, bei der alle Diagonalelemente 0 seien. M hat also die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ist M nilpotent, und zwar bewegt sich mit jedem Potenzieren die 0-Hauptdiagonale nach rechts oben. Wenn man nämlich beispielsweise das Produkt für die i-te Zeile und die j-te Spalte mit

$$i \geq j-1$$

ausrechnet, so kommt in den Teilprodukten stets eine 0 vor und das Ergebnis ist 0.

Beispiel 27.4. Ein Spezialfall zu Beispiel 27.3 ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Eine wichtige Beobachtung dabei ist, dass unter dieser Abbildung e_n auf e_{n-1} abgebildet wird, e_{n-1} auf e_{n-2} und schließlich e_2 auf e_1, welches auf 0 abgebildet wird. Die $(n-1)$-te Potenz der Matrix bildet e_1 auf e_n ab und ist nicht die Nullmatrix, die n-te Potenz der Matrix ist die Nullmatrix.

Beispiel 27.5. Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zu einem Eigenwert $\lambda \in K$ besitzt der Hauptraum $H = \operatorname{Haupt}_\lambda(\varphi)$ die Eigenschaft, dass die Einschränkung von $\varphi - \lambda \operatorname{Id}_V$ auf H nilpotent ist.

Lemma 27.6. *Es sei K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(1) *φ ist nilpotent.*
(2) *Für jeden Vektor $v \in V$ gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit*

$$\varphi^k(v) = 0.$$

(3) *Es gibt eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V und ein $k \in \mathbb{N}$ mit*

$$\varphi^k(v_i) = 0.$$

für $i = 1, \ldots, n$.
(4) *Es gibt ein Erzeugendensystem $v_1, \ldots, v_m$ von V und ein $k \in \mathbb{N}$ mit*

$$\varphi^k(v_i) = 0.$$

für $i = 1, \ldots, m$.

Beweis. Von (1) nach (2) ist klar. Von (2) nach (3). Es sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis (oder ein endliches Erzeugendensystem) und es sei $k_j \in \mathbb{N}$ mit

$$\varphi^{k_j}(v_j) \,=\, 0$$

gegeben. Dann erfüllt

$$k \,:=\, \max\,(k_j, j = 1, \ldots, m)$$

die Eigenschaft für jeden Erzeuger. Von (3) nach (4) ist klar. Von (4) nach (1). Zu $v \in V$ ist

$$v \,=\, \sum_{i=1}^{m} a_i v_i.$$

Aufgrund der Linearität von φ^k ist

$$\varphi^k(v) \,=\, \varphi^k\left(\sum_{i=1}^{m} a_i v_i\right) \,=\, \sum_{i=1}^{m} a_i \varphi^k(v_i) \,=\, 0,$$

also ist

$$\varphi^k \,=\, 0.$$

$\square$

LEMMA 27.7. *Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi\colon\, V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(1) *φ ist nilpotent*
(2) *Das Minimalpolynom zu φ ist eine Potenz von X.*
(3) *Das charakteristische Polynom zu φ ist eine Potenz von X.*

Beweis. Die Äquivalenz von (1) und (2) ergibt sich unmittelbar aus den Definitionen, die Äquivalenz von (2) und (3) ergibt sich aus Satz 25.10. $\square$

KOROLLAR 27.8. *Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi\colon\, V \longrightarrow V$$

eine nilpotente lineare Abbildung. Dann ist φ trigonalisierbar, und zwar gibt es eine Basis, bezüglich der φ durch eine obere Dreiecksmatrix beschrieben wird, in der alle Diagonaleinträge 0 sind.

Beweis. Dies folgt direkt aus Lemma 27.7 und Satz 25.10. $\square$

Die Jordanzerlegung zu einem nilpotenten Endomorphismen

Für einen nilpotenten Endomorphismus φ auf V ist

$$V = \operatorname{Haupt}_0(\varphi),$$

es gibt also nur einen Hauptraum, und dieser ist der Gesamtraum. Wir werden jetzt zeigen, dass man eine beschreibende Matrix weiter (über die Dreiecksgestalt hinaus) verbessern kann. In der nächsten Vorlesung werden wir diese Verbesserung bei einem trigonalisierbaren Endomorphismus auf den einzelnen Haupträumen durchführen und so zur sogenannten Jordanschen Normalform gelangen.

Beispiel 27.9. Eine Matrix der Form

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit

$$a \neq 0$$

hat bezüglich der Basis ae_1 und e_2 die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lemma 27.10. *Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine nilpotente lineare Abbildung. Es sei

$$\varphi^s = 0$$

und s minimal mit dieser Eigenschaft. Dann besteht zwischen den Untervektorräumen

$$V_i := \operatorname{kern} \varphi^i$$

die Beziehung

$$\varphi^{-1}(V_i) = V_{i+1}$$

und die Inklusionen

$$V_i \subset V_{i+1}$$

sind echt für

$$i < s.$$

Beweis. Sei $v \in V$. Dann ist $v \in V_{i+1} = \operatorname{kern} \varphi^{i+1}$ äquivalent zu $\varphi(v) \in V_i = \operatorname{kern} \varphi^i$, was die erste Behauptung bedeutet. Für die zweite Behauptung sei

$$V_i = V_{i+1}$$

für ein $i < s$ angenommen. Durch Anwendung von φ^{-1} ergibt sich

$$V_{i+1} = \varphi^{-1}(V_i) = \varphi^{-1}(V_{i+1}) = V_{i+2}.$$

In dieser Weise erhält man

$$V_i = V_{i+1} = V_{i+2} = \ldots = V_s = V$$

im Widerspruch zur Minimalität von s. $\square$

Lemma 27.11. *Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine nilpotente lineare Abbildung. Dann gibt es eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V mit

$$\varphi(v_j) = v_{j-1}$$

oder

$$\varphi(v_j) = 0.$$

Beweis. Es sei

$$\varphi^s = 0$$

und s minimal mit dieser Eigenschaft. Wir betrachten die Untervektorräume

$$V_i := \operatorname{kern} \varphi^i .$$

Es sei U_s ein direktes Komplement zu V_{s-1}, also

$$V = V_{s-1} \oplus U_s .$$

Wegen Lemma 27.10 ist

$$\varphi^{-1}(V_{s-2}) = V_{s-1}$$

und somit

$$\varphi(U_s) \cap V_{s-2} = 0.$$

Daher gibt es einen Untervektorraum U_{s-1} von V_{s-1} mit

$$V_{s-1} = V_{s-2} \oplus U_{s-1}$$

und mit

$$\varphi(U_s) \subseteq U_{s-1}.$$

In dieser Weise erhält man Untervektorräume $U_i \subseteq V_i$ mit

$$V_i = V_{i-1} \oplus U_i$$

und mit

$$\varphi(U_i) \subseteq U_{i-1}.$$

Ferner ist

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_s ,$$

da ja jeweils die vorhergehende direkte Summenzerlegung zunehmend verfeinert wird. Des weiteren ist φ eingeschränkt[1]

auf U_i mit $i \geq 2$ injektiv. Zu $v \in U_i \cap \operatorname{kern} \varphi = U_i \cap V_1 \subseteq U_i \cap V_{i-1}$ ist ja wegen der Direktheit

$$v = 0.$$

[1]Die Einschränkung als Abbildung nach V die U_i sind im Allgemeinen nicht φ-invariant.

Wir konstruieren nun eine Basis wie gewünscht. Dazu wählen wir zuerst eine Basis $\mathfrak{u}_s$ von U_s. Das (linear unabhängige) Bild $\varphi(\mathfrak{u}_s)$ ergänzen wir zu einer Basis $\mathfrak{u}_{s-1}$ von U_{s-1} und so weiter. Die Vereinigung dieser Basen ist dann eine Basis von V. Die Basiselemente aus $\mathfrak{u}_i$ für $i \geq 2$ werden nach Konstruktion auf andere Basiselemente abgebildet und die Basiselemente aus $\mathfrak{u}_1$ auf 0. Um eine Reihenfolge festzulegen, wählen wir ein Basiselement aus $\mathfrak{u}_s$, gefolgt von all seinen Bildern, sodann ein weiteres Basiselement aus $\mathfrak{u}_s$, gefolgt von all seinen Bildern, bis $\mathfrak{u}_s$ aufgebraucht ist. Dann arbeitet man $\mathfrak{u}_{s-1}$ in der gleichen Weise ab. In einem letzten Schritt vertauscht man die Reihenfolge der soeben konstruierten Basiselemente. □

Korollar 27.12. *Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine nilpotente lineare Abbildung. Dann gibt es eine Basis von V, bezüglich der die beschreibende Matrix die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 0 & c_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & c_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & c_{n-2} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & c_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

besitzt, wobei die c_i gleich 0 oder gleich 1 sind. D.h., dass φ auf jordansche Normalform gebracht werden kann.

Beweis. Dies folgt direkt aus Lemma 27.11. □

Bei einer nilpotenten Abbildung auf einem zweidimensionalen Vektorraum V handelt es sich um die Nullabbildung oder um eine nilpotente Abbildung mit einem eindimensionalen Kern. Im letzteren Fall erhält man für jedes Element $v \in V \setminus \operatorname{kern} \varphi$ eine Basis $\varphi(v), v$ (in dieser Reihenfolge), bezüglich der die beschreibende Matrix die Gestalt $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ besitzt. Bei zunehmender Dimension werden die Möglichkeiten zunehmend zahlreicher und komplexer, wir besprechen abschließend typische Beispiele in der Dimension drei.

Beispiel 27.13. Wir wollen Lemma 27.11 auf

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

anwenden. Es ist

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$M^3 = 0.$$

Somit ist

$$V_1 = \operatorname{kern} M = \langle e_1 \rangle, \, V_2 = \operatorname{kern} M^2 = \langle e_1, e_2 \rangle \text{ und } V_3 = K^3 \, .$$

Es ist

$$V_3 = V_2 \oplus \langle e_3 \rangle,$$

so dass wir

$$U_3 = \langle e_3 \rangle$$

wählen können. Es ist

$$Me_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \in V_2.$$

Somit ist

$$V_2 = V_1 \oplus U_2$$

mit

$$U_2 = \langle \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

Schließlich ist

$$M^2 e_3 = M \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Daher ist

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis wie gewünscht.

Die inverse Matrix zu

$$B = \begin{pmatrix} 10 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{10} & -\frac{3}{50} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und es ist

$$\begin{aligned} B^{-1}MB &= \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & -\frac{3}{50} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & -\frac{3}{50} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 27.14. Wir wollen Lemma 27.11 auf

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

anwenden. Es ist

$$M^2 = 0.$$

Somit ist

$$V_1 = \operatorname{kern} M = \langle e_1, e_2 \rangle \text{ und } V_2 = K^3 .$$

Es ist

$$V_2 = V_1 \oplus \langle e_3 \rangle,$$

so dass wir

$$U_2 = \langle e_3 \rangle$$

wählen können. Es ist

$$Me_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \in V_1.$$

Somit ist

$$V_1 = \langle \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, e_1 \rangle = U_1.$$

Daher ist

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis wie gewünscht. In dieser Basis wird die lineare Abbildung durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

beschrieben.

Beispiel 27.15. Wir wollen Lemma 27.11 auf

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

anwenden. Es ist

$$M^2 = 0.$$

Somit ist

$$V_1 = \operatorname{kern} M = \langle e_1, 7e_2 - 3e_3 \rangle \text{ und } V_2 = K^3 .$$

Es ist

$$V_2 = V_1 \oplus \langle e_3 \rangle,$$

so dass wir

$$U_2 = \langle e_3 \rangle$$

wählen können. Es ist

$$Me_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in V_1.$$

Somit ist

$$V_1 = \langle \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 7e_2 - 3e_3 \rangle = U_1.$$

Daher ist

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis wie gewünscht. In dieser Basis wird die lineare Abbildung durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

beschrieben.