漢　譯

斯蓋二氏
解析幾何學

譯　者
黃　頌　堯
趙國昌　于勤伯

北平科學社印行
1935

斯米司 蓋 爾

漢 譯

解析幾何學

譯者 黃頌堯 于勤伯 趙國昌

北平科學社印行

1935

譯　者　序

本書譯完後始知龔先生亦譯出　後閱龔先生譯者乃係舊版遂商諸龔先生互相參照作爲合譯．參照之點爲

1. 龔先生均未譯底註，玆底註補譯.
2. 龔先生有許多題未譯，亦補譯.
3. 名詞如 Circle 龔先生有時譯圓，有時譯圓周，玆一律改譯圓. Perpendicular, Orthogonal 龔先生一律譯正交．玆前者譯垂直，後者譯正交．不同之處尙多閱書便知．本書與原排列次序相同亦異於龔先生譯者.
5. 其他參照之點閱書便知．惟此事將完而龔先生去世，故遂擱起，後北平科學社索此稿全以朋友關係，故與之付印．但不敢掠人之美，故序而明之，一則表明龔先生之力居多，二則表明此係最新而改良者．是以爲序.

敬啟者本社出版各書，甚願海內宏達多方指正．此書已商得譯者同意，亦願閱者盡量修改．如有改正者，一面將台銜列爲校者，一面酌贈本社出版圖書若干．此啟.

北平科學社啟

目　　次

第　一　章

代數及三角之復習

第　二　章

卞的爾坐標

第 三 章

曲線及方程式

第 四 章

直線及普通一次方程式

第　五　章

圓及方程式 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

第　六　章

極　坐　標

第　七　章

坐　標　之　移　轉

第　八　章

圓 錐 曲 線 及 二 次 方 程 式

解析幾何學

第一章

代數及三角之復習

1. <u>數</u>　由代數學之計算所生之數有兩種，即實數與虛數.

凡平方必為正之數曰實數.零亦為實數.

凡其平方必為負之數，曰純虛數.任何虛數，必可以$b\sqrt{-1}$表之，而b為實數，且$(\sqrt{-1})^2=-1$.

凡形式如$a+b\sqrt{-1}$之數，曰複數.(Complex number) 而a,b俱為實數，且b不等於零；又複數之平方仍為複數；因若a不等於零，則

$$(a+b\sqrt{-1})^2=a^2-b^2+2ab\sqrt{-1},$$

故也.

2. <u>常數</u>　凡數量之值一定不變者曰常數.

常數無論在何種問題，其值恆不變者，曰絕對常數.如2，-3，$\sqrt{7}$，π等.

[illegible]，均可為某常數之值，此常數曰不定常數.然既指定以後，[illegible]演算而不能變.

不定[illegible]數恆常用首部字母表之，如不足用須上下標.茲舉例如下：

用上標，

a'（讀a初次）a''（讀a二次）a'''（讀a三次）爲不同之常數．

用下標，

b_1（讀b下一）b_2（讀b下二）爲不同之常數．

上下標兼用，

c_1'（讀c一初次）c_3''（讀c三二次）爲不同之常數．

3. 二次式 模範式 任何二次方程式，將其同方次之各項聚集之，必可寫爲模範式．

(1) $$Ax^2+Bx+C=0,$$

式中 x 爲未知數；A, B, C 爲不定常數．但 A 不能等於零，否則方程式非二次矣．C 曰常數項．

方程式之左邊

(2) $$Ax^2+Bx+C$$

二次式，任何二次式，均可寫爲如此之模範式．而B^2-4AC，即爲(1)或(2)之判別式．以△表之．

二次式或二次方程式之判別式，等於其模範式中一次項之係數之平方，減去未知數二次項之係數與常數項之乘積之四倍．

以某數代二次式之未知數，能令此二次式等於零，則某數即爲此二次式之根．

二次式(2)之根，即二次方程式(1)之根；蓋二次方程式之根，即能適合該方程式也．

由代數學已經證明,(2)或(1)必有兩根 x_1 及 x_2, 此兩根為

$$(3)\qquad \begin{cases} x_1=-\dfrac{B}{2A}+\dfrac{1}{2A}\sqrt{B^2-4AC}, \\ x_2=-\dfrac{B}{2A}-\dfrac{1}{2A}\sqrt{B^2-4AC}. \end{cases}$$

兩式加之,得

$$(4)\qquad x_1+x_2=-\frac{B}{A}.$$

兩式相乘,得

$$(5)\qquad x_1x_2=\frac{C}{A}.$$

是以得下定理:

定理I. 二次式兩根之和,等於一次項之係數被未知數二次項之係數除之,而反其號.

兩根之積,等於以二次項之係數除常數項之商.

兩次式(2),可寫為

$$(6)\qquad Ax^2+Bx+C\equiv^{*}A(x-x_1)(x-x_2),$$

此式將右邊乘之,且由(4)(5)代之,即得左邊.

例如二次方程式 $3x^2-4x+1=0$ 之兩根為 1 及 $\frac{1}{3}$,即得

$$3x^2-4x+1=3(x-1)\left(x-\tfrac{1}{3}\right).$$

若 A,B,C 俱為實數,則兩根 x_1,x_2 為實數或虛數,全由判別式而定。其關係以下定理述之。

定理II. 若二次式各項係數,俱為實數,且以△表其判別式,則

當△為正時,兩根俱為實數,且不相等.

當△為零時,兩根俱為實數,且相等.

當△為負時,兩根俱為虛數.

*記號≡讀『恒等於』即兩式只有形式不同之意.

是以二次式，可寫為下列三種形式；式中之數，俱是實數．

$$(7)\begin{cases} Ax^2+Bx+C\equiv A(x-x_1)(x-x_2) & \triangle\text{為正時．}\\ Ax^2+Bx+C\equiv A(x-x_1)^2 & \triangle\text{為零時．}\\ Ax^2+Bx+C\equiv A\left[\left(x+\dfrac{B}{2A}\right)^2+\dfrac{4AC-B^2}{4A^2}\right] & \triangle\text{為負時．}\end{cases}$$

今證明第三式如下：

$$\begin{aligned} Ax^2+Bx+C&\equiv A\left(x^2+\frac{B}{A}x+\frac{C}{A}\right)\\ &\equiv A\left(x^2+\frac{B}{A}x+\frac{B^2}{4A^2}+\frac{C}{A}-\frac{B^2}{4A^2}\right),\\ &\equiv A\left[\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2+\frac{4AC-B^2}{4A^2}\right]\end{aligned}$$

4．　特別二次式　於第2頁(1)內，若 B 為零，或 C 為零，或 B, C 俱為零時，則名此二次式曰特別二次式．今分三段討論之．

I．　$C=0$．

則方程式(1)變為

(1)　　$$Ax^2+Bx\equiv x(Ax+B)=0.$$

其兩根為 $x_1=0$，$x_2=-\dfrac{B}{A}$，故若二次方程式之常數項等於零，則必有一根等於零．反之，若二次方程式有一根等於零，則此方程式，必無常數項；因若 $x=0$ 能適合3節(1)，則代之即得 $C=0$．

II．　$B=0$．

則3節(1)變為

(2)　　$$Ax^2+C=0.$$

由定理I，得 $x_1+x_2=0$ 即

(3)　　$$x_1=-x_2$$

故若二次方程式之一次項之係數為零，則兩根等值而反號．反之，二次方程式之兩根等值而反號時，則一次項之係數必為零．因此時兩根之和等於零．由定理I，必須$B=0$．

III．$B=C=0$．

則3節(1)變為

(4) $$Ax^2=0.$$

A既不能為零，則必$x^2=0$故兩根俱等於零．

5． 二次式之兩根有特別之關係時之情形．

$$Ax^2+Bx+C=0,$$

若模範式之x_1, x_2兩根有關係，則其係數A, B, C亦必有相當之關係，可以另一方程表之；例如兩根相等，則$x_1=x_2$，則準定理II．必有$B^2-4AC=0$，如有一根為零，則$x_1x_2=0$，由定理I．必有$C=0$．

今分兩行排列於下，以表明之．

二次之模範式

兩根之關係	諸係數間之關係
$x_1=x_2$	$B^2-4AC=0$
$x_1x_2=0$	$C=0$

凡習題中，若其係數有一個或幾個為不定常數；且已知其兩根之關係時，則必須先求其係數之關係，以方程式表之．今舉四例如下：

例1. 已知下方程有一根為零，則其不定常數k之值為何.

(1)　　　$$2x^2-6x+k^2-3k-4=0.$$

解　此方程與模範式比較之.則 $A=2, B=-6, C=k^2-3k-4$. 準4節I. 必須$C=0$方有一根等於零，故

$$\therefore k^2-3k-4=0.$$

解之，得

$$k=4, \text{或} k=-1.$$

例2. 當k為何值時，則下方程之根俱為實數且相等.

$$kx^2+2kx-4x=2-3k$$

解　將此方程式寫為模範式，得

(2)　　　$$kx^2+(2k-4)x+(3k-2)=0.$$

則　　　$$A=k, B=2k-4, C=3k-2.$$

求其判別式，得

$$\triangle=(2k-4)^2-4k(3k-2)$$
$$=-8k^2-8k+16=-8(k^2+k-2).$$

由定理II. 必須$\triangle=0$時，方兩根俱為實數且相等.

$$\therefore k^2+k-2=0.$$

解之，得　　$k=-2$ 或 $k=1$

欲證驗之，則將k值代入方程式(2). 當$k=-2$時，則(2)變為$-2x^2-8x-8=0$ 或 $-2(x+2)^2=0$. 當$k=1$時，則(2)變為$x^2-2+1=0$ 或 $(x-1)^2=0$.

是以當k等於-2或1時，則方程(2)之左邊，可以變為第4頁(7)之形式.

例3. 設下方程之兩根相等，則a, b, k, m諸常數間之關係能建設如何之方程式.

(3)　　　$$(b^2+a^2m^2)y^2+2a^2kmy+a^2k^2-a^2b^2=0,$$

解　此方程式與模範式比較之，得

$$A=b^2+a^2m^2,\quad B=2a^2km,\quad C=a^2k^2-a^2b^2.$$

準定理II. 當兩根相等時，其判別式，必等於零，故得

$$\triangle=4a^4k^2m^2-4(b^2+a^2m^2)(a^2k^2-a^2b^2)=0.$$

簡之，得

$$a^2b^2(k^2-a^2m^2-b^2)=0.$$

例4. 當 k 爲何值時,則下聯立方程之兩組根相同.

(4) $$3x+4y=k,$$

(5) $$x^2+y^2=25$$

解 由(4)解之得

(6) $$y=\frac{1}{4}(k-3x).$$

代入(5)且化成模範式,得

(7) $$25x^2-6kx+k^2-400=0.$$

命(7)之兩根爲 x_1, x_2,代入(6)則得 y 之兩值.

(8) $$y_1=\frac{1}{4}(k-3x_1),\quad y_2=\frac{1}{4}(k-3x_2),$$

故(4)(5)兩方程有兩組根,即 (x_1, y_1) (x_2, y_2);但本題旣假定兩組根相同,則必

(9) $$x_1=x_2,\quad y_1=y_2.$$

由(8),若 $x_1=x_2$,則 y_1 必等於 y_2,故必須(7)之兩根相等,則(4)(5)之兩組根相同;是以準定理 II (7)之判別式,必等於零;即

$$\triangle=36k^2-100(k^2-400)=0.$$

解之,得 $k^2=625, k=25$ 或 -25.

証驗:將所得 k 之值代入(7),當 $k=25$ 時,(7)變爲 $x^2-6x+9=0$ 或 $(x-3)^2=0, x=3$,當 $k=-25$ 時,(7)變爲 $x^2+6x+9=0$ 或 $(x+3)^2=0, x=-3$.

再將 k 及 x 之值代入(6),當 $k=25, x=3$ 時。則 $y=\frac{1}{4}(25-9)=4$;當 $k=-25, x=-3$ 時,則 $y=\frac{1}{4}(-25+9)=-4$.

所以若 $k=\pm 25$ 則(4)(5)之兩組根相同,即若

$$k=25 \text{則} x=3,\quad y=4,$$

$$k=-25 \text{則} x=-3, y=-4.$$ Q.E.D.

習　題　1.

1.　試於下列諸二次式，計算其判別式．求其兩根之和及積．判定根之性質．（為實數或虛數或複數）又將諸二次式，寫為第 4 頁 (7) 之形式．

(a) $2x^2-6x+4$.　　(i) $5x^2-x-1$.
(b) $x^2-9x-10$.　　(j) $7x^2-6x-1$.
(c) $1-x-x^2$.　　(k) $3x^2-5$.
(d) $4x^2-4x+1$.　　(l) $2x^2+x-8$.
(e) $5x^2+10x+5$.　　(m) $2x^2+x+8$.
(f) $3x^2-5x-22$.　　(n) $6x^2-x-5$.
(g) $2x^2+13$.　　(o) $10x^2+60x+90$.
(h) $9x^2-6x+1$.　　(p) $7x^2+7x+\frac{7}{4}$.

2.　當 k 為如何之實數值時，則下列諸方程，可有所指定之一根．

(A)一根為零:

(a) $6x^2+5kx-3k^2+3=0$.　　答．$k=\pm 1$.
(b) $2k-3x^2+6x-k^2+3=0$.　　答．$k=-1$ 或 3．
(c) $x^2+10x+k^2+3=0$.　　答．無．
(d) $10x^2-mx+3k^2-8k+2=0$.　　答．$k=\frac{4}{3}\pm\frac{1}{3}\sqrt{10}$

(B)一根為 -2:

(e) $x^2-2kx+3=0$.　　答．$k=-\frac{7}{4}$.
(f) $kx^2-x+3k^2-1=0$.　　答．$k=-\frac{1}{3}$ 或 -1.
(g) $k^2x^2+6x=k^2-16$.　　答．無．
(h) $kx^2+2kx=-3$.　　答．無．
(i) $10x^2-7kx+k^2+9=0$.　　答．$k=-7$.

3.　當 k 及 m 為如何之實數值時，則下列諸方程之兩根。俱等於零。

(a) $5x^2+mx+k-5=x$.　　答．$k=5$, $m=1$.
(b) $x^2+(3k-m)x+k^2-4=0$.　　答．$k=\pm 2$, $m=\pm 6$.
(c) $2x^2+(m^2+1)x+k^2=0$.　　答無．
(d) $x^2+(m^2+2k-3m)x+4k-6m=0$.　　答．$k=0$, $m=0$.
(e) $t^2+(m^2+k^2-5)t+k+m+1=0$.　　答．$k=1$, $m=-2$.
$k=-2$, $m=1$.

4.　當 k 為如何之實數值，則下列諸方程之兩根相等；並將所求得 k 之值，代入原方程以試驗之．

(a) $kx^2-3x-1=0$.　　答．$k=-\frac{9}{4}$.
(b) $x^2-kx+9=0$.　　答．$k=\pm 6$.

(c) $2kx^2+3kx+12=0$. 答. $k=\frac{32}{3}$.

(d) $2x^2+kx-1=0$ 答.無

(e) $5x^2-3x+5k^2=0$ 答. $k=\pm\frac{3}{10}$.

(f) $x^2+kx+k^2+2=0$ 答.無

(g) $x^2-2kx-k-\frac{1}{4}=0$. 答. $k=-\frac{1}{2}$.

(h) $x^2+2bx+2b^2+3b-4=0$. 答. $b=-4$ 或 1.

(i) $(m+2)x^2-2mx+1=0$. 答. $m=-1$ 或 2.

(j) $(m^2+4)x^2+3x+2=0$. 答.無

(k) $x^2+(l-3)x-1=0$. 答.無

(l) $(c^2-8)y^2-(2c-1)y+\frac{1}{2}=0$. 答.無

(m) $az^2+2(a+3)z+16=0$. 答. $a=1$ 或 9.

5. 假定下列各方程之兩根相等，試求表各係數間之關係之方程式.

(a) $m^2x^2+2kmx-2px=-k^2$. 答. $p(p-2km)=0$.

(b) $x^2+2mpx+2bp=0$. 答. $p(m^2p-2b)=0$.

(c) $2mx^2+2bx+a^2=0$. 答. $b^2=2a^2m$.

(d) $(1+m^2)x^2+2bmx+(b^2-r^2)=0$. 答. $b^2=r^2(1+m^2)$.

(e) $(b^2-a^2m^2)y^2-2b^2ky=a^2b^2m^2-b^2k^2$.

答. $a^2b^2m^2(k^2-a^2m^2+b^2)=0$.

(f) $(A+m^2B)x^2+2bmBx+b^2B+C=0$.

答. $b^2AB+m^2BC+AC=0$.

6. 當 b,c,l,k,m 等不定常數，等於任何之實數值時；則下列各對聯立方程之兩組根相同.

(a) $x+2y=k, x^2+y^2=5$. 答. $k=\pm5$.

(b) $y=mx-1, x^2=4y$. 答. $m=\pm1$

(c) $2x-3y=b, x^2+2x=3y$. 答. $b=0$.

(d) $y=mx+10, x^2+y^2=10$. 答. $m=\pm3$.

(e) $lx+y-2=0, x^2-8y=0$. 答.無

(f) $x+4y=c, x^2+2y^2=9$. 答. $c=\pm9$.

(g) $x^2+y^2-x-2y=0, x+2y=c$. 答. $c=0$ 或 5.

(h) $x^2+4y^2-8x=0, mx-y-2m=0$. 答.無

(i) $x^2+y^2-k=0, 3x-4y=25$. 答. $k=25$

(j) $x^2-y^2+2x-y=3, 4x+y=c$. 答. $c=-12$ 或 3.

(k) $2xy-3x-y=0, y+3x+k=0$. 答. $k=-6$ 或 0.

(l) $x^2+4y^2-8y=0, x=c$. 答. $c=\pm2$.

(m) $x^2+4y^2-8y=0, y=b$. 答. $b=0, 2$.

(n) $2x^2+3y^2=35, 4x+9y=k$. 答. $k=\pm35$.

(o) $x^2+xy+2x+y=0, y=-2x+b$. 答. $b=-4$ 或 0.

7.　設下列各對聯立方程之兩組根相同，則表其係數間之關係之方程式.

(a) $bx+ay=ab$, $y^2=2px$.　　答. $ap(2b^2+ap)=0$.

(b) $y=mx+b$, $Ax^2+By=0$.　　答. $B(m^2B-4bA)=0$.

(c) $y=m(x-a)$, $By^2+Dx=0$.　　答. $D(4am^2B-D)=0$.

(d) $bx+ay=ab$, $2xy+c^2=0$.　　答. $ab(ab+2c^2)=0$.

(e) $kx-y=c$, $Ax^2+By^2=C$.　　答. $c^2AB-k^2BC-AC=0$.

(f) $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$, $x^2+y^2=r^2$.　答. $p^2=r^2$.

6.　變數　變數者其值不定，在同一討論中，可有無限多個值.在指定習題中，則依習題之規定，凡在一定界限內之任何數，皆可爲變數之值.其界限以不等式表之甚爲方便.

例如變數x，凡在-2及5之間之任何數，其值x必大於※-2，而小於5，則以聯立不等式表之如下．　　$x>-2$，　　$x<5$

較便之法表以　　$-2<x<5$.

如變數之值.限定小於或等於-2；又限定大於或等於5，則以不等式表之.爲

$$x<-2\text{或}x=-2$$

及

$$x>5\text{或}x=5$$

合之.爲

$$x\leqq-2\text{又}x\geqq5$$

7.　二次式符號之變更　將各種值代入二次式之變未知數.(即未知數之爲變數者)則二次式可得各種之值.有許多問題.常須先定所得二次式之值之符號.則將變數之已知諸值代之.以觀二次式之值之正負也.欲含此事須先明白大於小於之意義.摘其要語如下.

設a爲常數，x爲變數，則

(1)　$\begin{cases} x<a\text{時}, x-a\text{爲負}; \\ x>a\text{時}, x-a\text{爲正}. \end{cases}$

用此兩語及恆等式(7).則易證明下定理.

※討論代數之際，大於或小於之意義如下，若a大於b，則a－b爲正，a 小於 b，則a－b爲負；故任何負數，必小於任何正數，又若a，b俱爲負，則當a之絕對值小於b之絕對值，方能a大於b，例如　3<5，但－3>－5.

定理III. 如判別式爲正，則當變數之值，在兩根之間時二次項之係數與二次式之值※異號．當變數之值，不在兩根之間時，則同號．

如判別式爲零或爲負，則二次項之係數與二次式之值恆同號．

證 命 x 爲變數，寫二次式爲模範式，則由第4頁(7)，得

I. 若△爲正，則

$$Ax^2+Bx+C\equiv A(x-x_1)(x-x_2).$$

II. 若△爲零，則

$$Ax^2+Bx+C\equiv A(x-x_1)^2.$$

III. 若△爲負，則

$$Ax^2+Bx+C\equiv B\left[\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2+\frac{4AC-B^2}{4A^2}\right].$$

今分三步論之．

I. 兩根既不相等，設 $x_1<x_2$，準(1)則得

$x_1<x<x_2$ 時，$(x-x_1)(x-x_2)$ 爲負，因 $x-x_1$ 爲正，而 $x-x_2$ 爲負故也．又當 $x<x_1$，或 $x>x_2$ 時．$(x-x_1)$ $(x-x_2)$ 爲正．因 $x-x_1$ 及 $x-x_2$ 俱爲正或俱爲負故也．是以二次式之值，當變數之值，在兩根之間時，與 $-A$ 同號；變數之值，不在兩根之間時，與 A 同號．

II. $(x-x_1)^2$ 既恆爲正．故二次之值，恆與 A 同號．

III. △既爲負，則 $4AC-B^2\equiv-\triangle$ 爲正，故上方程式括弧內之數恆爲正，故二次式之值，與 A 同號．

例如二次式

$$2t^2-3t+1$$

其 $\triangle=9-8=1$，$A=2$，其兩根爲 $\frac{1}{2}$ 及 1．

$$\therefore\quad 2t^2-3t+1\equiv2(t-\tfrac{1}{2})(t-1).$$

※假定各數皆爲實數，當變數等於根時，二次式之值爲零．如此之值須除外．

將任何實數以代t,則可見

$$\tfrac{1}{2}<t<1\text{時},2t^2-3t+1<0;$$
$$t<\tfrac{1}{2}\text{或}t>1\text{時},2t^2-3t+1>0.$$

又如二次式

$$3r^2+4r+9$$

其$\triangle=16-108=-92$, $A=3$; 準定理III.

任何實數以代r,此二次式之值恆為正.

定理 III 之應用. 下列諸題表明定理 III 之應用.

例1. 假定下列平方根之值,俱為實數,試求其變數可能有之實數值.

(a) $\sqrt{3-2x-x^2}$; (b) $\sqrt{2y^2+3y+9}$.

解 於(a).根號內二次式之判別式為

$$\triangle=4+12=16, \qquad A=-1,$$

其兩根為1及-3.準定理III.

$$\text{當}-3<x<1\text{時},\text{則}3-2x-x^2>0.$$
$$\text{當}x<-3\text{或}x>1\text{時},\text{則}3-2x-x^2<0.$$

但由本題所假定,此二次式之值必須為正式零.是以得

$$-3\leqq x\leqq 1$$

於(b)根號內二次式之判別式為

$$\triangle=9-72=-63, \qquad A=2.$$

準定理 III.此二次式之值恆為正,是以無論 y 為如何之實數,而平方根之值,恆為實數.

例2. 當 k 為何值時,則下方程之兩根為(a)實數且不相等,(b)虛數.

(2) $$kx^2+2kx-4x=2-3k$$

解 先將此方程寫成模範式.

$$kx^2+(2k-4)x+3k-2=0$$

其判別式,為

(3) $$\triangle\equiv B^2-4AC=-8(k^2+k-2)$$

準第3頁,定理II.

(a) 若$-8(k^2+k-2)>0$;則兩根俱為實數且不相等.

(b) 若$-8(k^2+k-2)<0$;則兩根俱為虛數.

引用定理III於二次式$-8(k^2+k-2)$，因其判別式爲

$$\triangle=64+512=576,\qquad A=-8,$$

其兩根爲-2及1，故得

$$-2<k<1\text{時，則}-8(k^2+k-2)>0.$$

$$k<-2,\text{或}k<1\text{時，則}-8(k^2+k-2)<0.$$

是以

(a) 若$-2<k<1$，則(2)之兩根俱爲實數且不相等.

(b) 若$k<-2$或$k>1$，則(2)之兩根俱爲虛數.

例3. 試就所示之聯立方程，證明每對m之一實數值，而聯立方程必有兩組不同之實數根.

(4) $$y=mn+3$$

(5) $$4x^2+y^2+6x-16=0$$

解 由(4)將y之值代入(5)，且寫成模範式，得

(6) $$(4+m^2)x^2+(6m+6)x-7=0;$$

求其判別式，棄去因數4之後，則爲

(7) $$16m^2+18m+37.$$

引用定理III於(7)，其判別式

$$\triangle=324-64\times37$$

爲負，$A=16$.

是以每m之一實數值，而二次式(7)之值恆爲正，則準定理II，(6)之兩根俱實數且不相等，即(6)恆有兩實根x_1，x_2，再代入(4)，則y亦有y_1，y_2之兩值；故(4)(5)每對於m之一實數值，而有(x_1, y_1) (x_2, y_2)之兩組實根.

問題 2.

1. 試以不等式，表明下列諸變數之值.

   (a) x之值在0與5之間.

   (b) y之值恆爲正.

   (c) t之值恆爲負.

   (d) x之值小於-2或大於-1.

   (e) r之值，在-3與8之間.

   (f) z之值爲任何負數或爲不能小於3之任何正數.

   (g) x之值不小於-8，亦不大於2.

2. 試就問題1第一題所列諸二次式，將其變數以所有一總之值代之；以1定諸二次式之值之符號.

3. 當上題諸二次式之平方根，俱爲實數時，試求其變數所有一總之實數值.

4. 設問題1第4題所列諸方程式之根：(a)俱爲實數且不相等；(b)俱爲虛數；試求k所有一切之實數值.

5. 在第9頁問題6內求不定常數之所有實值，若其公解答爲(a)實數而不相等，(b)虛數.

6. 當x爲任何值時，試定下列三次式之值之符號.

$$2(x+1)(x-2)(x-4).$$

提示. 此式之三根，依大小之次序列之，爲$-1,2,4$. 故若$x<-1$. 三因數俱爲負，是以全體爲負，以下可以同法論之.

答 $x<-1$ 全體<0；$-1<x<2$，全體>0，
$2<x<4$ 全體<0；$4<x$，全體>0.

7. 當變數爲任何值時，試定下列諸二次式之值之符號：

提示. 由代數學可知各式爲實數者均化爲一次及二次實因子；當變數爲任何值時，各因子之符號可按第10頁(1)，第11頁定理III決定之. 然後將各根，依大小之次序排列之. 然後引用第6題提示以討論之.

(a) $(x+1)(2x^2-4x+7)$.
(b) $(x^2-2x-3)(x^3-4x^2)$.
(c) $(3x+8)(x^2-4x+4)(x^3-1)$.
(d) $(2x^2+3)(x^2-4)(x^4-1)$.
(e) $(2x+3)(x-1)(x+2)(x-3)$.
(f) $(x^2-9)(x^2-16)(x^2-25)$.
(g) $(3x^2-12)(2-x)(3-2x)(5x+4)$.
(h) $(x-1)^2(3+2x)(4-5x)(6-x)^3$.
(i) $(7(x^2-4)(9-x^2)(16-x^2)$.
(j) $(x^2-8)(2x^2-8)(3x^2-27)$.
(k) $(2x+8)^2(9-3x)(7-6x)(12-11x)$.

8. **無限根** 命二次方程式

$$Ax^2+Bx+C=0 \tag{1}$$

之兩根爲x_1, x_2，則反其係數之順序而得之方程式爲

$$Cx^2+Bx+A=0. \tag{2}$$

其兩根※必爲 $\frac{1}{x_1}$，$\frac{1}{x_2}$，即(1)之兩根之反數。

假定B，C之值†不變，而令A之數值減少至無限，則令A漸次減少而至於零，準第3頁定理I，$\frac{A}{C}$既爲(2)之兩根之積，則此積亦漸次減少而至於零，故(2)必有一根逐漸減少而至零，則此根之反數，即(1)之一根，必逐漸增大至於無窮。

又於(1)(2)兩方程，假定C之值不變，而A，B俱減少而至零，則(2)之兩根之和$-\frac{B}{C}$及其積$\frac{A}{C}$，亦俱減少而至於零，即其兩根減少而至於零，故其反數即(1)之兩根，必增至無窮，是以得

定理IV. 在二次方程式內，若其二次項之係數，亦爲變數，且逐漸減少而至於零，則必有一根增大至於無限；若其一次項之係數，亦爲變數，且逐漸減少而至於零，則其兩根，俱增大至於無限。

例1. 設下方程式有一根增大至無限，則變數 k 所減之界限如何。

$$3x^2+2kx-k^2x^2-3-2kx^2=0$$

解 將方程式寫爲模範式

$$(k^2+2k-3)x^2-2kx+3=0$$

當其一根增大至無限時，則k^2+2k-3 必減少而至於零，則 $k^2+2k-3=0$，是以k之值必爲1或-3。

※此定理已在代數學上証明，用下法証明亦易，兩根既爲$\frac{1}{x_1}$及$\frac{1}{x_2}$，故其方程式爲 $\left(x-\frac{1}{x_1}\right)\left(x-\frac{1}{x_2}\right)=0$，乘之化簡得$x_1x_2x^2-(x_1+x_2)x+1=0$

按第3頁定理I，$x_1x_2=\frac{C}{A}$，$x_1+x_2=-\frac{B}{A}$，以之代入乘以A即得 (2)

†設C爲一非0之值。

‡…數之數值大於任何指名之數者曰無限。

例2.　設下方程之兩根俱增大至無限．則k，m之值如何．

$$(b^2-a^2m^2)x^2-2a^2kmx-a^2k^2-a^2b^2=0.$$

解　準定理IV必

$$b^2-a^2m^2=0;\text{或}\quad m=\pm\frac{b}{a}.$$

及　　$2a^2km=0$;　或　$k=0$;

時，方能令方程之兩根增大之至無限；是以m必為$+\frac{b}{a}$或$-\frac{b}{a}$．而k必為零．

問　題　3.

1．當k至於如何之實數值時，能令下列各方程之一根變為無限．

(a)　$kx^2-3x+5=0$.　　(d)　$(m^2-4)x^2-3x+8=0$.

(b)　$(k^2-1)x^2+6x-5=0$.　　(e)　$(c^2-3)y^2+2cy-6=0$.

(c)　$2x^2-3x+k^2x^2+5=kx^2$.　　(f)　$2b^2y-3y-3by^2+2=-2y^2$.

2．當k及m至於如何之實數值時，能令下列各方程之兩根變為無限．

(a)　$m^2x^2+(2k-m+1)x+6=0$.

(b)　$(m^2-3m+2)y^2+(3k-2m)y+2=0$.

(c)　$(m^2+k^2-25)t^2+(m-7k+25)t+8=0$.

(d)　$m^2x^2+3kx+k^2x^2-4mx+25x-25x^2=2$.

(e)　$(m^2+3)x^2+(2k-5)x+8=0$.

9．多變數之方程式．解析幾何所論常為兩個或多於兩個變數之方程式．

所謂某數值能適合某方程式者，即以該數值代入方程式之變數，能令方程式之兩邊相等之謂也．

例如$x=2$，$y=-3$能適合方程式

$$2x^2+3y^2=35$$

因　$$2(2)^2+3(-3)^2=35.$$

故也．又$x=-1$，$y=0$，$z=-4$能適合方程式．

$$2x^2-3y^2+z^2-18=0.$$

因為　$$2(-1)^2-3\times0+(-4)^2-18=0.$$

凡多變數之方程式，可以移置之，令其兩邊俱爲若干項之和，且各項均爲$ax^m y^n z^p$（a爲常數m,n,p俱爲正整數或零）形式者，謂之代數方程式．

例如　$x^4+x^2y^2-z^3+2x-5=0$，

及　$x^5y+2x^2y^2=-y^3+5x^2+2-x$

皆爲代數方程式．

又　$x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$．

亦爲代數方程式．因兩邊各平方之，得

$$x+2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y=a.$$

移項，得　$2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}=a-x-y$．

平方之，得　$4xy=a^2+x^2+y^2-2ax-2ay+2xy$．

再移置之，得　$x^2+y^2-2xy-2ax-2ay+a^2=0$．

代數方程式之次數※，以方程中次數最高一項爲標準，將方程之各項均移於左邊，且依其變數乘冪遞降排列之，則謂此方程式依某變數之降冪列法．譬如將方程式

$$2x'^2+3y'+6x'-2x'y'-2+x'^3=x'^2y'-y'^2.$$

依x,y之次數遞降排列之，則爲

$$x'^3-x'^2y'+2x'^2-2x'y'+y'^2+6x'+3y'-2=0.$$

此乃三次方程式也．

凡非代數方程式，曰超越方程式．如

$$y=\sin x,\quad y=2^x,\quad \log y=3x$$

等，皆爲超越方程式．

問　題　4．

1　試表明下列各方程，俱爲代數方程式，且依x,y或x,y,z次數遞降排列之，並說明其爲幾次方程式．

(a)　$x^2+\sqrt{y-5}+2x=0$．

(b)　$x^{\frac{2}{3}}+y+3x=0$．

(c)　$xy+3x^4+6x^2y-7xy^3+5x-6+8y=2xy^2$．

(d)　$x+y+z+x^2z-3xy-2z^2=5$．

(e)　$y=2+\sqrt{x^2-2x-5}$．

※計算方程式中每項之次數，將各變數之指數相加卽得．

(f) $y=x+5+\sqrt{2x^2-6x+3}$.

(g) $x=-\frac{1}{2}D+\sqrt{\frac{D^2}{4}-F-Ey-y^2}$.

(h) $y=Ax+B+\sqrt{Lx^2+Mx+N}$.

2. 表明等次式※

$$Ax^2+Bxy+Cy^2$$

可寫成下列各式之一,假如其判別式能適合所示之條件:

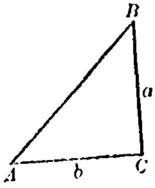
I. 若$\triangle>0$,則$Ax^2+Bxy+Cy^2\equiv A(x-l_1y)(x-l_2y)$.

II. 若$\triangle=0$,則$Ax^2+Bxy+Cy^2\equiv A(x-l_1y)^2$.

III. 若$\triangle<0$,則

$$Ax^2+Bxy+Cy^2\equiv A\left[\left(x+\frac{B}{2A}y\right)^2+\frac{4AC-B^2}{4A^2}y^2\right].$$

10. 直角三角形內一角之諸函數. 於任意之直角三角形內,命一銳角為A,茲將A之函數規定如下:



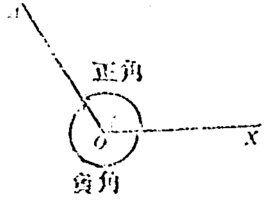
$$\sin A=\frac{對邊}{弦}=\frac{a}{c},\qquad \cot A=\frac{依邊}{對邊}=\frac{b}{a},$$

$$\cos A=\frac{依邊}{弦}=\frac{b}{c},\qquad \sec A=\frac{弦}{依邊}=\frac{c}{b},$$

$$\tan A=\frac{對邊}{依邊}=\frac{a}{b},\qquad \csc A=\frac{弦}{對邊}=\frac{c}{a}.$$

是以直角三角形之一邊,等於其對角之正弦與弦之積;又等於其依角之餘弦與弦之積.

11. 任意角 在三角術,XOA 假定其由 OA 以O為中心,從 OX 起迴轉而成,其迴轉之方向,與時針反向者,則所成之角為正.反之,則為負.固定之OX直線,謂之首線.迴轉之 OA 直線,謂之終線.



※分數A, B, C及數l_1, l_2均假定為實數.

角之度量：計量角之大小有兩法，即有兩種單位：

(1)度，即以OA迴轉一週之三百六十分之一爲一度；

(2)半徑角，即以與其半徑等長之弧所對之角爲單位。

此兩種單位之比較，以方程式表之如下：

$$180\text{度}=\pi\text{半徑角}\ (\pi=3.14159\ldots\ldots).$$

則
$$\text{一度}=\frac{\pi}{180}=.0174\ldots\ldots\text{半徑角},$$

$$\text{一半徑角}=\frac{180}{\pi}=57.29\ldots\ldots\text{度}.$$

由一種單位以變成他種單位，引用上兩方程甚易，然在高等數學及本書後段則多用半徑角。

上圖迴轉線OA，可迴轉至無限週數，是以任何實數，必可爲角之半徑角，反之，任何角度，必可以實數計量之。

12. 三角上緊要之公式及定理.

(1) $\cot=x\dfrac{1}{\tan x}$; $\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$; $\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$.

(2) $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$; $\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$.

(3) $\sin^2x+\cos^2x=1$; $1+\tan^2x=\sec^2x$; $1+\cot^2x=\csc^2x$.

(4) $\sin(-x)=-\sin x$; $\csc(-x)=-\csc x$;

$\cos(-x)=\cos x$; $\sec(-x)=\sec x$;

$\tan(-x)=-\tan x$; $\cot(-x)=-\cot x$.

(5) $\sin(\pi-x)=\sin x$; $\quad \sin(\pi+x)=-\sin x$;
$\cos(\pi-x)=-\cos x$; $\quad \cos(\pi+x)=-\cos x$;
$\tan(\pi-x)=-\tan x$; $\quad \tan(\pi+x)=\tan x$;

(6) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$; $\quad \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$;

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$; $\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$;

$\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cot x$; $\quad \tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\cot x$

(7) $\sin(2\pi-x)=\sin(-x)=-\sin x$.

(8) $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$.

(9) $\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$.

(10) $\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$.

(11) $\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$.

(12) $\tan(x+y)=\dfrac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}$.

(13) $\tan(x-y)=\dfrac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\tan y}$.

(14) $\sin 2x=2\sin x\cos x$; $\quad \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$;

$\tan 2x=\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$.

(15) $\sin\dfrac{x}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}}$; $\quad \cos\dfrac{x}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}$;

$\tan\dfrac{x}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$.

(16) 定理 正弦律 於任意三角形,其邊必與其對角之正弦成正比.即

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

(17) 定理 餘弦律 於任意三角形,任意一邊之平方,必等於餘兩邊平方之和,減去對角之餘弦及餘兩邊之積之兩倍.即

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$$

(18) 定理 三角形之面積 任意三角形之面積,等於任意兩邊及其夾角正弦之積之半,即:

$$\text{面積}=\tfrac{1}{2}ab\sin C=\tfrac{1}{2}bc\sin A=\tfrac{1}{2}ca\sin B.$$

13. 三角函數值之簡表

半徑角	角度	Sin	Cos	Tan	Cot		
.0000	0°	.0000	1.0000	.0000	∞	90°	1.5708
.0873	5°	.0872	.9962	.0875	11.430	85°	1.4835
.1745	10°	.1736	.9848	.1763	5.671	80°	1.3963
.2618	15°	.2588	.9659	.2679	3.732	75°	1.3090
.3491	20°	.3420	.9397	.3640	2.747	70°	1.2217
.4363	25°	.4226	.9063	.4663	2.145	65°	1.1345
.5236	30°	.5000	.8660	.5774	1.732	60°	1.0472
.6109	35°	.5736	.8192	.7002	1.428	55°	.9599
.6981	40°	.6428	.7660	.8391	1.192	50°	.8727
.7854	45°	.7071	.7071	1.0000	1.000	45°	.7854
		Cos	Sin	Cot	Tan	Angle in Degrees	Angle in Radians

半徑角	角度	Sin	Cos	Tan	Cot	Sec	Csc
0	0°	0	1	0	∞	1	∞
$\frac{\pi}{2}$	90°	1	0	∞	0	∞	1
π	180°	0	−1	0	∞	−1	∞
$\frac{3\pi}{2}$	270°	−1	0	∞	0	∞	−1
2π	360°	0	1	0	∞	1	∞

半徑角	度角	Sin	Cos	Tan	Cot	Sec	Csc
0	0°	0	1	0	∞	1	∞
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	90°	1	0	∞	0	∞	1

14. 三角函數之符號定則

象限	Sin	Cos	Tan	Cot	Sec	Csc
第一象限	+	+	+	+	+	+
第二象限	+	−	−	−	−	+
第三象限	−	−	+	+	−	−
第四象限	−	+	−	−	+	−

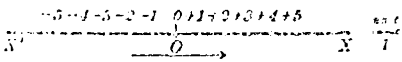
15. 希臘字母

字母	名稱	字母	名稱	字母	名稱
Α α	Alpha	Ι ι	Iota	Ρ ρ	Rho
Β β	Beta	Κ κ	Kappa	Σ σ ς	Sigma
Γ γ	Gamma	Λ λ	Lambda	Τ τ	Tau
Δ δ	Delta	Μ μ	Mu	Υ υ	Upsilon
Ε ε	Epsilon	Ν ν	Nu	Φ φ	Phi
Ζ ζ	Zeta	Ξ ξ	Xi	Χ χ	Chi
Η η	Eta	Ο ο	Omicron	Ψ ψ	Psi
Θ θ	Theta	Π π	Pi	Ω ω	Omega

第二章

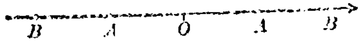
卡的遜坐標

16. **方向直線.** 設$X'X$為無限長之直線,於此直線取定一點O,名曰原點.今以OI長為單位,假定



自O向右量為正,向左量為負;若以任何實數,為OP之長,則能確定直線上之一點P.反之,凡直線上有一點P,則有一相當之實數,即OP之長是也.OP長之正負,依P點在原點之右或左而定.

於$X'X$直線上,自原點O向右之方向,謂之正方向.方向直線者,有原點有長之單位有正方向之直線也.直線之正方向,以矢表之.



設A,B為方向直線上任意兩點,且命

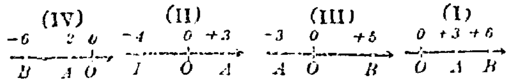
$$OA=a,\quad OB=b.$$

則AB長等於$b-a$,即AB長等於OB與OA之差也.故得下定義:

A，B兩點，在方向直線上任何位置，而AB之長，可以

(1)　　$$AB=OB-OA,$$

表之，但O爲原點.



說明如下：

I. $AB=OB-OA=6-3=+3$,
　$BA=OA-OB=3-6=-3$.

II. $AB=OB-OA=-4-3=-7$,
　$BA=OA-OB=3-(-4)=+7$.

III. $AB=OB-OA=+5-(-3)=+8$,
　$BA=OA-OB=-3-5=-8$.

IV. $AB=OB-OA=-6-(-2)=-4$,
　$BA=OA-OB=-2-(-6)=4$.

計量方向線時，下列諸性質亦易明白.

(2)　$AB=-BA$.

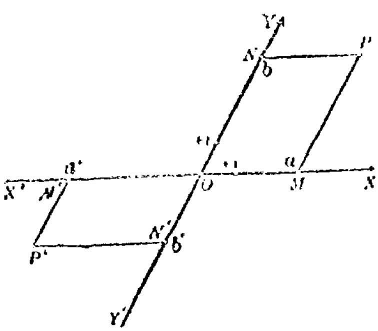
(3)　若由A至B之方向，與方向直線之正方向相同，則 AB 爲正；反之，則爲負.

若兩點在方向直線上，則僅說"兩點間之距離"殊不明確必須說明AB或BA方可；因AB不等於BA，因$AB=-BA$故也.

17. <u>卡的遜坐標※</u> (Cartesian coordinates)　設$X'X$，$Y'Y$ 爲兩方向直線，相交於O；又設P爲同平面上任意一點. 由 P 作兩直線，與 $X'X$，$Y'Y$平行，且命

$$OM=a,\quad ON=b,$$

則a，b 兩數，名曰P點之卡的遜坐標；a謂之橫坐標，b謂之縱坐標. $X'X$，$Y'Y$ 兩方向線謂之坐標軸；交點 O 謂之原點.



※在Descartes，1596—1650，首將坐標之意義引用於幾何學上，故此後方有坐標之名.

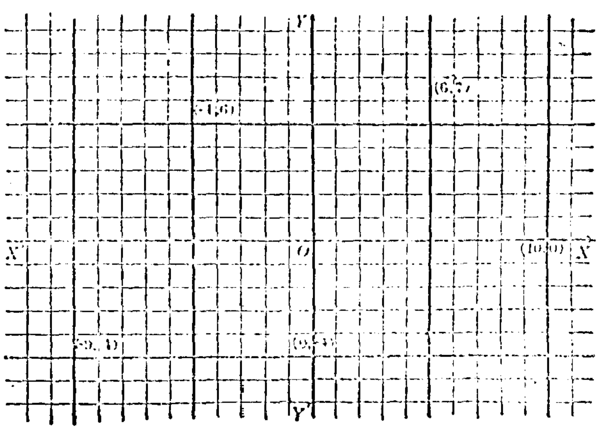
P點之坐標a,b，以(a,b)記之．又記號$P(a,b)$，謂點P之坐標爲a,b．

在平面上，任意一點P，即可定兩數，即P點之坐標是也．反之，已知a',b'兩實數，則於平面上必可作一點P，其坐標爲a',b'，即取$OM'=a'$，$ON'=b'$．通過M'，N'作兩直線，與縱橫兩軸平行，此兩直線之交點，即是P'點．故得

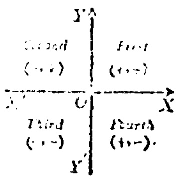
任意一點，必可定兩實數．反之，兩實數，即可定一點．

代數學上所論之虛數，無相當之位置表之，故初等解析幾何之坐標，均以實數爲限．

18．矩形坐標 (Rectangular coordinates) 矩形坐標者，即$X'X$，$Y'Y$兩直線正交之坐標軸也．本書以後均用此坐標軸．



於矩形坐標軸內作點，須用方格紙為最便利；即以縱橫正交且與紙邊平行之兩種直線畫成方格之紙也．其每格之長寬，即等於坐標軸之單位長．由原點O起，沿$X'X$取若干格與已知之橫坐標數相等，以定



一點．再由此點平行$Y'Y$之方向，取若干格，與已知之縱坐標數相等；於此再定一點，此即所作之點也．

坐標正負之定則：

橫坐標自原點向右為正，向左為負；縱坐標自原點向上為正，向下為負．矩形坐標軸，分成四象限，如圖所示．

問　題　5.

1．試精密作$(3,2)$，$(3,-2)$，$(-4,3)$，$(6,0)$，$(-5,0)$，$(0,4)$諸點．

2．試精密作$(1,6)$，$(3,-2)$，$(-2,0)$，$(4,-3)$，$(-7,-4)$，$(-2,4)$，$(0,-1)$，$(\sqrt{3},\sqrt{2})$，$(-\sqrt{5},0)$諸點．

3．原點之坐標為何？

4．設a，b俱為正數，則$(-a,b)$，$(-a,-b)$，$(b,-a)$，(a,b)諸點各在何象限內？

5．有四點：(1)其橫坐標為正；(2)其縱坐標為正；(3)其橫坐標為負；(4)其縱坐標為負；試說明此四點在何象限內？

6．三角形之角點為$(2,-1)$，$(-2,5)$，$(-8,-4)$，試作成之．

7．有以$(-2,0)$，$(5\sqrt{3}-2,5)$，$(-2,10)$為角點之三角形，試作成之．

8．試作一四邊形，其角點為$(0,-2)$，$(4,2)$，$(0,6)$，$(-4,2)$．

9. 有以與x軸平行之方向移動之一點,則其橫坐標是常數耶?抑或與y軸平行耶?

10. 有橫坐標爲零之一點,其能移動否?抑在何處?又有縱橫坐標俱爲零之一點,其能否移動?抑止在何處?

11. 橫坐標爲2之點在何處?又縱坐標爲-3之點在何處?

12. 縱橫兩坐標相等之點,當在何處?

13. 有矩形,其兩邊爲a,b且與x,y兩軸相合:(1)在第一象限時,其角點之坐標如何?(2)在第二象限時,其角點之坐標如何?(3)在第三象限時,其角點之坐標如何?(4)在第四象限時,其角點之坐標如何?

14. 四邊形之角點爲$(-3,6)$,$(-3,0)$,$(3,0)$,$(3,6)$,試作成之,併說明其爲何種四邊形.

15. 將$(3,5)$,$(-3,-5)$,及$(3,-5)$,$(-3,5)$各以直線連之,試求其交點之坐標.

16. 說明(x,y),$(x,-y)$兩點,對於x軸爲對稱;(x,y),$(-x,y)$對於y軸爲對稱;(x,y),$(x,-y)$對於原點對稱.

17. 連兩點而成之直線,被原點分爲兩等分,其一端之坐標爲$(a,-b)$,則其他端之坐標如何?

18. 於縱橫兩軸所成之角之等分線上,任意取一點,其縱橫兩坐標之關係如何?(1)在第一第三兩象限內;(2)在第二第四兩象限內.

19. 有以$2a$爲邊之正方形,其中心與原點相合,(1)若其邊與坐標軸平行,其角點之坐標如何?(2)其對角線與坐標軸相合,角點之坐標如何?

答. (a,a),$(a,-a)$,$(-a,-a)$,$(-a,a)$;

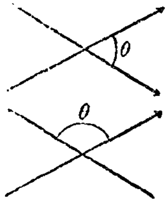
$(a\sqrt{2},0)$,$(-a\sqrt{2},0)$,$(0,a\sqrt{2})$,$(0,-a\sqrt{2})$.

20. 有以a爲邊之等邊三角形,其底與x軸相合,其頂點在x軸之上;(1)其底之中心與原點相合,其角點之坐標如何?(2)其底邊之左端與原點相合,其角點之坐標如何?

$$答.\ \left(\frac{a}{2},0\right),\ \left(-\frac{a}{2},0\right),\ \left(0,\frac{a\sqrt{3}}{2}\right);$$

$$(0,0),(a,0),\left(\frac{a}{2},\ \frac{a\sqrt{3}}{2}\right).$$

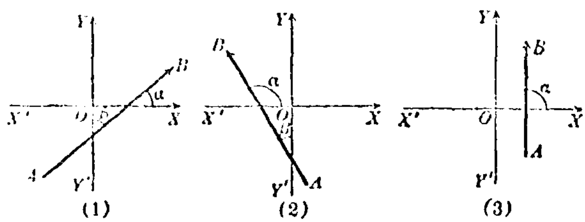
19. 角 兩方向直線之交角,爲兩直線之正方向所夾之角.如圖以θ表之.



當兩直線平行時,若方向相同,則其間之角等於零;方向相反,則其間之角等於π.

兩方向直線間之角,可有自 0至π之任何值.若將兩直線之一,反其方向,則 θ變爲 $\pi-\theta$. 若兩直線之方向俱反之,則θ之值不變.

凡與x軸相交之直線,以向上爲正.



定理I. 命向上之一直線與OX所成之角爲α,與OY所成之角爲β,則

(I) $$\cos\beta=\sin\alpha.$$

證. 在上圖(1) 內 $\beta=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$,

$$\cos\beta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha.\text{(準第20頁之6.)}$$

在上圖(2)內 $\beta=\alpha-\dfrac{\pi}{2}$,

$$\cos\beta=\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\alpha.\qquad \text{(準第19頁4,6)}.$$

在上圖(3)內 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$, $\beta=0$. 故$\cos\beta=1=\sin\alpha$.

凡與$X'X$平行之直線,則以向右為正,此時$\alpha=0,\beta=\dfrac{\pi}{2}$,而定理1仍能成立,因

$$\cos\beta=\cos\frac{\pi}{2}=0=\sin 0=\sin\alpha.$$

問 題 6.

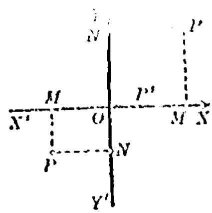
1. 證明凡向下之直線,則$\cos\beta=-\sin\alpha$.

2. 命原點之右,上,左,下,為東,北,西,南,且以E,N,W,S表之;今有直線,其方向為(1)N,E.(2)N,W.(3)S,E.(4)S,W.則α,β之值為何?

3. 有向上且互相正交之兩直線,試求α,β間之關係.

答$\alpha'-\alpha=\dfrac{\pi}{2}$; $\beta'+\beta=\dfrac{\pi}{2}$.

20. **正交投影**. 一點在一直線上之正交投影,即由此點至直線之垂線足.



如圖,M為P點在$X'X$上之正交投影;N在$Y'Y$上之正交投影;P'為P點在$X'X$上之正交投影.

設A,B為方向直線上之兩點,M,N為A,B在另一方向直線CD上之正交投影,則MN即名曰AB在CD上之投影.

定理 II. 第一投影定理 若A,B為方向直線上之兩點,而此方向直線,又與另一方向直線CD成γ角,則

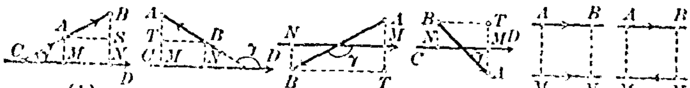
(II) AB在CD上之投影$=AB\cos\gamma$.

證. 在圖上設

$a=AB$之數值長,

$l=AS$或BT之數值長;

則a,l俱為正數,在ABS及ABT兩直角三角形內,準第18頁餘弦之定義,得下列諸式.



(1) (2) (3) (4) (5) (6)

在圖(1)內, $l=a\cos BAS=a\cos\gamma$,

$MN=l$, $AB=a$.

$\therefore MN=AB\cos\gamma$.

在圖(2)內, $l=a\cos ABT=a\cos(\pi-\gamma)$

$=-a\cos\gamma$, (準第20頁,5.)

$MN=l$, $AB=-a$.

$\therefore MN=AB\cos\gamma$.

在圖(3)內, $l=a\cos ABT=b\cos(\pi-\gamma)$

$=-a\cos\gamma$,

$MN=-l$, $AB=a$.

$\therefore MN=AB\cos\gamma$.

在圖(4)內, $l=a\cos ABT=a\cos\gamma$,

$MN=-l$, $AB=-a$.

$\therefore MN=AB\cos\gamma$.

在圖(5)內, $\gamma=0$, $MN=l$, $AB=a$.

故 $MN=AB=AB\cos 0$(因$\cos 0=1$).

$\therefore MN=AB\cos\gamma$.

在圖(6)內, $\gamma=\pi$, $MN=-l$, $AB=a$.

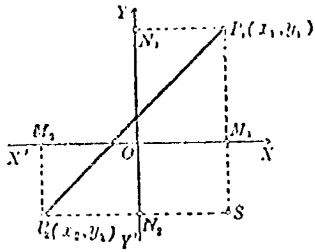
故 $MN=-AB=AB\cos\pi$(因$\cos\pi=-1$).

$\therefore MN=AB\cos\gamma$.

設有任意兩點$P_1(x_1,y_1)$.$P_2(x_2,y_2)$.則

$M_1M_2=P_1P_2$在$X'X$上之投影.

$N_1N_2=P_1P_2$在$Y'Y$上之投影.



準24頁(1),

$$M_1M_2=OM_2-OM_1=x_2-x_1,$$

$$N_1N_2=ON_2-ON_1=y_2-y_1.$$

是以得:

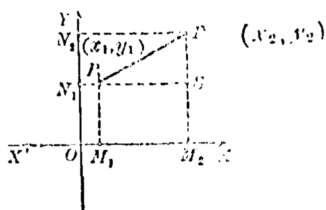
定理 III. 已知任意兩點$P_1(x_1,y_1)$,$P_2(x_2,y_2)$,則

(III) $\begin{cases} x_2-x_1=P_1P_2\text{在}X'X\text{上之投影.} \\ y_2-y_1=P_1P_2\text{在}Y'Y\text{上之投影.} \end{cases}$

21. 長 以下定理甚緊要,亦甚易證明.

定理 IV. 連$P_1(x_1,y_1)$,$P_2(x_2,y_2)$兩點之直線,其長爲

(IV) $l=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$.



證. 由P_1,P_2兩點作x,y軸之垂線,成P_1SP_2直角三角形,則

$$SP_1=M_2M_1=x_1-x_2, \qquad (\text{準定理III})$$

$$P_2S=N_2N_1=y_1-y_2, \qquad (\text{準定理III})$$

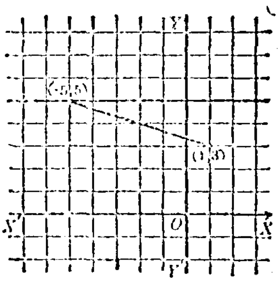
$$P_1P_2=\sqrt{\overline{P_2S}^2+\overline{SP_1}^2};$$

$$\therefore\ l=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}. \qquad \text{Q.E.D.}$$

當P_1，P_2在任意位置時，則(IV)可用下法求之.

先由P_1，P_2兩點，作x，y兩軸之垂線，以成直角三角形，其邊即等於P_1P_2在x，y兩軸上之投影；引用(III)即可得(IV).學者當取P_1，P_2之種種位置，自求之以資明白.

例1. 試求連(1,3)；(—5,5)兩點之直線之長.



解　命(1,3)為P_1，(—5,5)為P_2，則

$$x_1=1,\ y_1=3;\ x_2=-5,\ y_2=5.$$

代入(IV)，即得

$$l=\sqrt{(1+5)^2+(3-5)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}.$$

觀圖，可知所求得之長，乃一直角三角形之弦，其他兩邊為6及2.

注意. (III)(IV)兩式，無論P_1，P_2之位置如何均合；故演算時，將已知之數代入即得.且所得之長均假定為正.

問　題　7.

1. 求連下列各兩點之直線之長；並其在坐標軸上之投影.

(a.) (—1，—1)，(1，3).　　　答.投影為2，4.長$=\sqrt{20}$.

(b.) $(-\sqrt{2},\sqrt{3})$，$(\sqrt{3},\sqrt{2})$.

答.投影為$\sqrt{3}+\sqrt{2}$，$\sqrt{2}-\sqrt{3}$；長$=\sqrt{10}$.

(c)　$(0,0)$, $\left(\frac{a}{2},\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$.　　　答．長$=a$,投影為$\frac{a}{2}$，$\frac{a}{2}\sqrt{3}$。

(d)　$(a+b,c+a)$,$(c+a,b+c)$

答．投影為$c-b$,$b-a$,長$=\sqrt{(b-c)^2+(a-b)^2}$

2．　連下列各三點,各成三角形,試求其各邊在坐標軸之投影．

(a)　$(0,6)$,$(1,2)$,$(3,-5)$．

(b)　$(1,0)$,$(-1,-5)$,$(-1,-8)$．

(c)　(a,b),(b,c),(c,d)．

3．　於上題各三角形,求其各邊之長．

4．　若(a)$x_1=x_2$,(b)$y_1=y_2$,則(III)(IV)兩式如何?

5．　三角形之角點為$(4,3)$,$(2,-2)$,$(-3,5)$,求其各邊之長．

6．　證明$(1,4)$,$(4,1)$,$(5,5)$為兩等邊三角形之角點．

7．　證明$(2,2)$,$(-2,-2)$,$(2\sqrt{3},-2\sqrt{3})$為等邊三角形之角點．

8．　證明$(3,0)$,$(6,4)$,$(-1,3)$為直三角形之角點;並求其面積．

9．　證明$(-4,-2)$,$(2,0)$,$(8,6)$,$(2,4)$為平行四邊形之角點;並求其對角線之長．

10．　證明$(11,2)$,$(6,-10)$,$(-6,-5)$,$(-1,7)$為正方形之角點;並求其面積．

11．　證明$(1,3)$,$(2,\sqrt{6})$,$(2,-\sqrt{6})$三點,各與原點之距離相等,即證明此三點同在以原點為心之圓周上,其半徑為$\sqrt{10}$.

12．　證明任何矩形之對角線必相等．

13．　三角形之角點為(a,b),$(-a,b)$,$(-a,-b)$;試求其週之長．

14．　將$(6,4)$,$(4,-3)$,$(0,-1)$,$(-5,-4)$,$(-2,1)$,連成多邊形;試求其週之長．

15．　有長13之直線,其一端之坐標為$(-4,8)$,他端之縱坐標為3,求其橫坐標．　　　答．8,或-16．

16．　$P(x,y)$點與$(1,-2)$之距離為11;則x,y能適合如何之方程式?

17. $P(x,y)$與$(2,3)$, $(4,5)$ 兩點之距離相等,問此關係可以如何之方程式表之.

18. 於17節圖,命XOY角為ω,試證明連$P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$兩點之直線之長,可以下式表之.

$$l=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+2(x_1-x_2)(y_1-y_2)\cos\omega}.$$

19. 若$\omega=\frac{\pi}{3}$, 則$(-3,3)$, $(4,-2)$兩點間之距離幾何?

20. 若$\omega=\frac{\pi}{3}$,則連$(1,3)$, $(2,7)$, $(-4,-4)$三點之三角形其週長幾何? 答. $\sqrt{21}+\sqrt{223}+\sqrt{109}$.

21. 若$\omega=\frac{\pi}{6}$,則連$(1,2)$, $(-2,-4)$, $(3,-5)$之三角形其週長幾何?

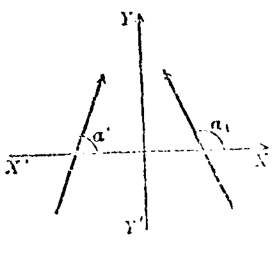
22. 證明$(6,6)$, $(7,-1)$, $(0,-2)$ $(-2,2)$同在以$(3,2)$為心之圓週上.

23. 若$\omega=\frac{3\pi}{4}$, 則$(\sqrt{3},\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2},\sqrt{3})$間之距離幾何?

答. $\sqrt{10+\sqrt{2}}$.

24. 任何多邊形,若其各邊以由一點起沿各邊依次進行一週之方向為方向,則其各邊在坐標軸上之投影之總和,必等於零,試證明之.

22. 傾角及斜度. 傾角者乃向上之直線,與x軸所成之角也.斜度者傾斜角之正切也.

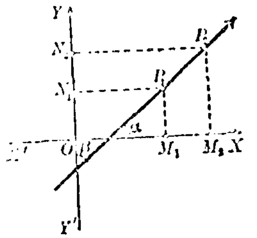


直線之傾角,恒以α, α_1, α_2, α'等表之.斜度則以m, m_1, m_2, m'等表之.故$m=\tan\alpha$, $m_1=\tan\alpha_1$,等等.

傾角可有自0至π之任何值,(閱28節)故任何實數,皆可為斜度之值,因角度在第一第二兩象限時,其正切之值,無論正負大小皆有也.與$X'X$平行之直線,其斜度為零,因其傾角為零故也.與$Y'Y$平行之直線其斜度為無限.

定理 V. 通過$P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$兩點之直線，其斜度為

$$(\mathrm{V}) \qquad m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$



證.　$M_1M_2 = x_2 - x_1$　　　　(準31頁III)

$\qquad = P_1P_2\cos\alpha$　　　　(準30頁II)

(1)　$\therefore P_1P_2\cos\alpha = x_2 - x_1.$

同理，　$N_1N_2 = y_2 - y_1.$　　　　(準31頁III)

$\qquad = P_1P_2\cos\beta.$　　　　(準30頁II)

(2)　$\therefore P_1P_2\cos\beta = y_2 - y_1.$

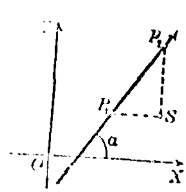
但　$\cos\beta = \sin\alpha.$　　　　(準28頁I)

故由(2)，

(3)　$P_1P_2\sin\alpha = y_2 - y_1.$

以(1)除(3)則得，$\tan\alpha = m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$

注意. 公式(V)可用31頁之法作成直角三角形證明之，即作P_2S平行OY，P_1S平行OX.



則　$\tan\alpha = \tan SP_1P_2 = \dfrac{P_2S}{P_1S}$,

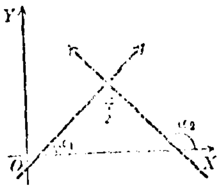
但　$P_1S = x_2 - x_1$, $P_2S = y_2 - y_1$,

$\therefore \tan\alpha = m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$※

※作一線過已知點P_1，其斜度為正分數$\frac{a}{b}$，則點S在P_1右相距b單位，P_2在S上相距a單位。若作P_1P_2其斜度為負分數$-\frac{a}{b}$，則S或在P_1左或在P_2上。

定理VI. 若兩直線平行,則其斜度相等;若兩直線正交,則其一斜度,為其他之負反數.

證. 命 $\alpha_1, \alpha_2, m_1, m_2$ 為兩直線之傾角及斜度. 兩直線平行時,則 $\alpha_1=\alpha_2$, 故 $m_1=m_2$ 兩直線正交,則



$$\alpha_2=\alpha_1+\frac{\pi}{2}, \text{ 或 } \alpha_1=\alpha_2-\frac{\pi}{2}.$$

$$\therefore m_1=\tan\alpha_1=\tan\left(\alpha_2-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=-\cot\alpha_2 \qquad \text{(準19頁4與6)}$$

$$=-\frac{1}{\tan\alpha_2}. \qquad \text{(準19頁1)}$$

$$\therefore m_1=-\frac{1}{m_2}. \qquad Q.E.D.$$

此逆定理之證明將上之步驟倒之仍假定 α_2 大於 α_1.

問 題 8.

1. 試求連(1,3),(2,7)兩點之直線之斜度.
2. 以直線連(2,7),(−4,−4),求其斜度. 答. $\frac{11}{6}$
3. 將$(\sqrt{3},\sqrt{2})$,$(-\sqrt{2},\sqrt{3})$以直線連之,則其斜度如何? 答. $2\sqrt{6}-5$.
4. 直線兩端之坐標為$(a+b,c+a)$,$(c+a,b+c)$求其斜度. 答. $\frac{b-a}{c-b}$.
5. 以直線將(1,1),(−1,−1),$(\sqrt{3},-\sqrt{3})$連成三角形. 試求其各邊之斜度. 答. $1, \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}, \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$.
6. 以求斜度,證明(−4,−2),(2,0),(8,6),(2,4)為平行四邊形之頂.
7. 以求斜度,證明(3,0),(6,4),(−1,3)為直角三角形之頂.
8. 以求斜度,證明(0,−2),(4,2),(0,6),(−4,2)為矩形之頂.並引用(IV),以證明其為正方形.
9. 以求斜度,證明上題矩形之對角線,互相垂直.

10. 用求斜度法證明(10,0),(5,5),(5,—5),(—5,5)爲梯形之頂.

11. 證明連(a,b),$(c,-d)$之直線,與連$(-a,-b)$,$(-c,d)$之直線相平行.

12. 證明連原點與(a,b)之直線,與連原點與$(-b,a)$之直線互垂直.

13. 直線(1)平行$Y'Y$,(2)垂直$Y'Y$,其傾角爲何?

14. 直線(1)平行$Y'Y$,(2)垂直$Y'Y$,其斜度爲何?

15. 連(2,2),(—2,—2)兩點之直線,其傾角爲何? 答.$\frac{\pi}{4}$.

16. 連(—2,0),(—5,3)兩點之直線,其傾角爲何? 答.$\frac{3\pi}{4}$.

17. 將(3,0),$(4,\sqrt{3})$以直線連之,求其傾角. 答.$\frac{\pi}{3}$.

18. 連(3,0),$(2,\sqrt{3})$以直線,則其傾角爲何? 答.$\frac{2\pi}{3}$.

19. 通過(0,—4),$(-\sqrt{3},-5)$兩點之直線,求其傾角. 答.$\frac{\pi}{6}$.

20. 有直線通過(0,0),$(-\sqrt{3},1)$兩點,試求其傾角. 答.$\frac{5\pi}{6}$.

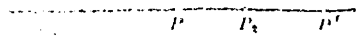
21. 以求斜度法證明 (2,3),(1,—3),(3,9) 三點,同在一直線內.

22. 證明$(a,b+c)$,$(b,c+a)$,$(c,a+b)$三點,同在直線內.

23. 證明(1,5)在連(0,2),(2,8)兩點之直線內,并與兩點之距離相等.

24. 證明連(3,—2),(5,1)之直線與連(10,0),(13,—2)之直線相垂直.

23. 分點．在直線P_1P_2上取一點P，則得兩距離P_1P，PP_2；又取一點P'得兩距離P_1P'，$P'P_2$；前者曰內分點，後者曰外分點．



分點之位置依點與P_1，P_2之距離之比而定．然分點旣在方向綫上，則須注意其距離之正負，故特說明於下．

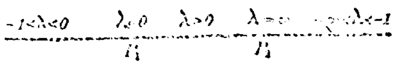
若P爲通過P_1、P_2兩點之方向直線上之分點，則P分P_1P_2爲兩段P_1P及PP_2，其比※爲$\dfrac{P_1P}{PP_2}$．今將此比以λ表之，則

$$\lambda=\frac{P_1P}{PP_2}.$$

若內分時，則P_1P，PP_2之方向相同，故λ爲正；外分時，則P_1P，PP_2，之方向不同，而λ爲負．

故觀λ之正負，則可知分點P是否在P_1，P_2之間；觀λ數值之大小，則可知P近於P_1或近於P_2．

λ之值必以PP_2除P_1P，不能互易；λ之值旣依於分點之位置，故其界限，可以下圖表之．

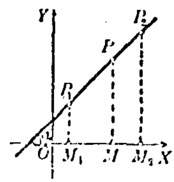


即分點在P_1P_2之間時，λ可有任何正數值，分點在P_1之左邊則λ爲負，且恆在0與-1之間；分點在P_2之右邊；λ恆在-1與$-\infty$之間．

※當此時須注意分點P在分子之末在分母之首．

茲同坐標證明下定理：

定理 VII. 分點連$P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$兩點之直線，被P點分成二段，其比爲



$$\frac{P_1P}{PP_2}=\lambda,$$

則P之坐標x, y爲

(VII) $$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\qquad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

證. 既$\lambda=\dfrac{P_1P}{PP_2}$命$\alpha$爲$P_1P_2$之傾角，投$P_1$，$P$，$P_2$之影於$x$軸上，則準第一投影定理，〔第30頁(II)〕得

$$M_1M=P_1P\cos\alpha,$$
$$MM_2=PP_2\cos\alpha.$$

除之 $$\frac{M_1M}{MM_2}=\frac{P_1P}{PP_2}=\lambda.$$

但 $$M_1M=x-x_1,$$
$$MM_2=x_2-x,\qquad\text{(定理III)}$$

代之，得 $$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda.$$

解之，得 $$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}.$$

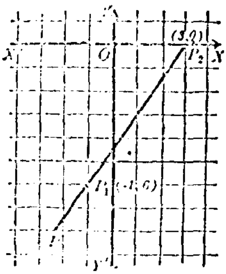
同理可證明 $$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

推論．中點．若分點在P_1P_2之中點，則其坐標爲

$$x=\tfrac{1}{2}(x_1+x_2),\ y=\tfrac{1}{2}(y_1+y_2).$$

因P爲P_1P_2之中點則$\lambda=1$.

例1. 連$P_1(-1,-6)$, $P_2(3,0)$之直線，被P分成兩段其比 $\lambda=-\frac{1}{4}$，求P之坐標.



解. 用VII. $x_1=-1$, $y_1=-6$, $x_2=3$, $y_2=0$.

$$\therefore x=\frac{-1-\frac{1}{4}\times 3}{1-\frac{1}{4}}=\frac{-\frac{7}{4}}{\frac{3}{4}}=-2\tfrac{1}{3},$$

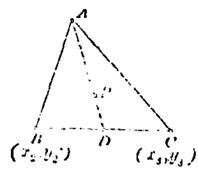
$$y=\frac{-6-\frac{1}{4}\times 0}{1-\frac{1}{4}}=\frac{-6}{\frac{3}{4}}=-8.$$

是以P之坐標為$(-2\frac{1}{3},-8)$.

例2. 三角形之頂為(x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3)，試求其諸中線之交點坐標.

解. 由平面幾何知$AP=\frac{2}{3}AD$則$AP:PD=2:1$，即$\lambda=2$.

準上系，D之坐標為$(\frac{1}{2}(x_2+x_3),\frac{1}{2}(y_2+y_3))$.



用定理VII於AD直線上求P之坐標，則A之坐標，與定理之(x_1,y_1)相當，D之坐標，與(x_2,y_2)相當是以得P之坐標.

$$x=\frac{x_1+2\times\frac{1}{2}(x_2+x_3)}{1+2},$$

$$y=\frac{y_1+2\times\frac{1}{2}(y_2+y_3)}{1+2}.$$

$$\therefore x=\tfrac{1}{3}(x_1+x_2+x_3),\ y=\tfrac{1}{3}(y_1+y_2+y_3).$$

故三角形中線之交點之坐標，等於諸頂之坐標之平均數.

問　　題　9.

1. 求連$(4,-6)$,$(-2,-4)$之直線之中點之坐標.　　答.$(1,-5)$.

2. 將$(a+b,c+d)$,$(a-b,d-c)$連成直線，求其中點之坐標.　　答.(a,d).

3. 以$(2,3)$,$(4,-5)$,$(-3,-6)$為角點之三角形，其各邊中點之坐標如何，并其諸中線之長如何？

4. 連$(-1,4)$,$(-5,-8)$之直線，被P點所分兩段之比為$1:3$，試求P點之坐標.　　答.$(-2,1)$.

5. 連$(-3,-5)$,$(6,9)$之直線，被P點所分兩段之比為$2:5$，試求P點之坐標.　　答.$(-\frac{3}{7},-1)$

6. 連$(-2,6)$,$(-4,8)$之直線，被P點分成兩段之比為$-\frac{4}{3}$求P點之坐標.　　答.$(-22,14)$

7. 上題之兩點為(−3,−1),(7,2),其比為−[illegible],則P之坐標如何?
答(−1[illegible],−16).

8. 連(−2,−1),(3,2)之直線,被兩點分成三等分,試求兩分點之坐標.
答(−$\frac{1}{3}$,0),($\frac{4}{3}$,1).

9. 證明直角三角形弦之中點,距三角點等遠.

10. 將(1,2),(−5,−3),(7,−6),(1,−11)連成平行四邊形,證明兩對角線互相等分.

11. 證明任意之平行四邊形,其兩對角線必互相等分.

12. 以(6,8),(−4,0),(−2,−6),(4,−4)為角點之四邊形,將其每相對兩邊之中點,各以直線連之;試證明兩連線互相等分.

13. 於上題之四邊形,每相隣兩邊之中點,各以直線連之,則成一平行方形,試求斜度以證明之.

14. 梯形之角點為(−8,0),(−4,−4),(−4,4),(4,−4)將其不平行兩邊之中點,以直線連之,試證明此連線之長,等於平行兩邊和之半.又證明此連線必與平行之兩邊平行.

15. 連(−3,5),(4,−1)之直線,被P(−2,3)分成兩段,其比如何?
答.$\frac{1}{6}$.

16. 以(−2,3)分(−5,0),(2,1)之連線為兩段,其比如何?
答.$-\frac{3}{8}$.

17. 三角形之角點為(−5,3),(1,−3),(7,5),將其任意兩邊之中點以直線連之,證明此連線必與第三邊平行.且連線之長,等於第三邊之半.

18. 三角形之三邊中點之坐標,為(2,1),(3,3),(6,2),則其諸角點之坐標如何?
答(−1,2),(5,0),(1,4).

19. 平行四邊形之三角點為(1,2),(−5,−3),(7,−6),求第四角點.
答(1,−11),(−11,5),(13,−1).

20. 直線之中點為(6,4),其一端為(5,7),試求其他端.
答(7,1).

21. 三角形之角點為(2,3),(4,−5),(−3,−6),求其諸中線交點之坐標.

22. 先求底之長及高，以三角形之面積，而其角點為(1,5),([illegible],1),(—9,—[illegible]).

23. 引長AB直線至C，令$BC=\frac{1}{2}AB$. 若A, B之坐標為(5,6),(1,2). 則C之坐標如何?　　答.(8,0).

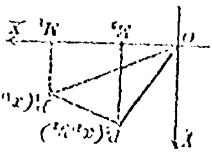
24. 證明定理VII引用於斜軸(即x, y兩軸非正交者)亦合理，即設XOY角為任何值皆可也.

25. 連(5,6),(3,7)之直線之中點，距原點幾何遠，又此直線之斜度幾何?　　答$2\sqrt{13}$, $\frac{1}{2}$.

26. **面積**. 本節所論者，乃已知多邊形之頂，以求其面積.

定理 VIII. 以原點及$P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$為頂之三角形，其

(VIII)　　面積$OP_1P_2=\frac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1)$.



證. 由圖得

$$\alpha=\angle XOP_1,$$
$$\beta=\angle XOP_2,$$
$$\theta=\angle P_1OP_2.$$

(1)　　$$\therefore\theta=\beta-\alpha.$$

準20頁,18.

(2)　　$$\triangle OP_1P_2\text{之面積}=\frac{1}{2}OP_1\cdot OP_2\sin\theta$$
$$=\frac{1}{2}OP_1\cdot OP_2\sin(\beta-\alpha)$$
(3)　　$$=\frac{1}{2}OP_1\cdot OP_2(\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha).$$

但由圖

$$\sin\beta=\frac{M_2P_2}{OP_2}=\frac{y_2}{OP_2},\quad \cos\beta=\frac{OM_2}{OP_2}=\frac{x_2}{OP_2},$$

$$\sin\alpha=\frac{M_1P_1}{OP_1}=\frac{y_1}{OP_1},\quad \cos\alpha=\frac{OM_1}{OP_1}=\frac{x_1}{OP_1}.$$

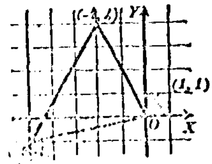
代入(3)則可得

$$\triangle OP_1P_2\text{之面積}=\frac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1),$$

例1. 求以原點及$(-2,4)$,$(-5,-1)$為頂之三角形之面積.

解. 設$(-2,4)$為P_1,$(-5,-1)$為P_2,則

$x_1=-2, y_1=4, x_2=-5, y_2=-1.$



代入(VIII)得

面積$=\frac{1}{2}\{-2\times(-1)-(-5)\times 4\}=11.$

則面積$=11$平方單位也.

假如以$(-2,4)$為P_2,$(-5,-1)$為P_1,則其結果為-11,今說明正負之原因於下.

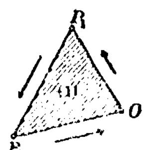


Fig. 1

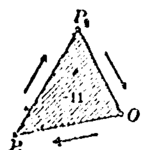


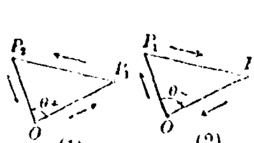
Fig. 2

定理IX. 沿三角形之周界,依O,P_1,P_2之順序計算之.

若面積在左,如圖(1)則由(VIII)而得之面積為正.

若面積在右,如圖(2)則由(VIII)而得之面積為負.

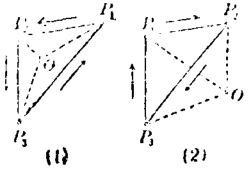
證 當面積在左,如圖(1),則$\beta>\alpha$. 由上(1)得θ為正,故$\sin\theta$亦為正,因而上(2)式之右邊為正,故面積為正.但當面積在右,如圖(2),則$\beta<\alpha$,由上(1)式得θ為負,則$\sin\theta$為負.因由上(2)式面積亦為負.



定理VIII 於任何多邊形,均可應用,祇須以多邊形之任意一角為公共角頂,以分多邊形為若干三角形即得.

定理X. 各頂為$P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$, $P_3(x_3,y_3)$之三角形其面積

$$\triangle P_1P_2P_3=\tfrac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1+x_2y_3-x_3y_2+x_3y_1-x_1y_3).$$



證. 有兩種情形,(1)原點在三角形之內,(2)原點在三角形之外.

於圖(1)原點在三角形之內,則

(5) $\triangle P_1P_2P_3=\triangle OP_1P_2+\triangle OP_2P_3+\triangle OP_3P_1$,

因此四個三角形之面積俱同號故也.

於圖(2)原點在三角形之外,則

(6) $\triangle P_1P_2P_3=\triangle OP_1P_2+\triangle OP_2P_3+\triangle OP_3P_1$.

因OP_1P_2, OP_3P_1同號,而OP_2P_3則異號,故其和仍等於$\triangle P_1P_2P_3$.

若以角點之坐標表三角形之面積,則準定理VIII,得

$$\triangle OP_1P_2=\tfrac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1),$$
$$\triangle OP_2P_3=\tfrac{1}{2}(x_2y_3-x_3y_2),\ \triangle OP_3P_1=\tfrac{1}{2}(x_3y_1-x_1y_3).$$

代入(5),(6),則得(X),但(5)所得之數為正,(6)所得之數為負. Q.E.D.

法則 準定理X以求三角形面積之法如下.

第一步. 將各頂之坐標寫成兩行,且重寫第一頂之坐標如右.

$$\begin{array}{cc} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{array}$$

第二步. 求諸x與其次列之y相乘諸積之和,則

$$x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1.$$

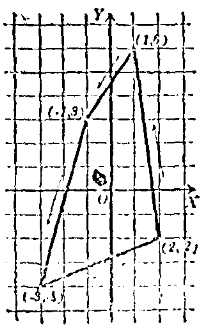
第三步. 求諸y與其次列之x相乘諸積之和,則

$$y_1x_2+y_2x_3+y_3x_1.$$

第四步. 由第二步所得之數,減去第三步所得之數,且以2除之,則得所求之面積,公式(X).

此法術於求任何多邊形之面積時，均可引用；惟於第一步，必先將所已知之各頂作圖，然後將各頂之坐標，依次排成兩行.

例2. 四邊形之各頂為 $(1,6)$，$(-3,-4)$，$(2,-2)$，$(-1,3)$. 求其面積.



解 先作圖以求得諸角點之順序，如矢所示.

$$\begin{array}{rr} 1 & 6 \\ -1 & 3 \\ -3 & -4 \\ 2 & -2 \\ 1 & 6 \end{array}$$

第一步. 將各頂之坐標，依次排列之.

第二步. 將各橫坐標各與其次列之縱坐標相乘而和之，得

$$1\times 3+(-1)\times(-4)+(-3)\times(-2)+2\times 6=25.$$

第三步. 將各縱坐標各與其次列之橫坐標相乘而和之，得

$$6\times(-1)+3\times(-3)+(-4\times 2)+(-2\times 1)=-25.$$

第四步. 由第二步減去第三步，以2除之，得

$$\text{面積}=\frac{25-(-25)}{2}=25.$$

此四邊形之面積在左，故所得之數為正.

問　題　10.

1. 三角形之各頂為$(2,3)$，$(1,5)$，$(-1,-2)$，求其面積.
答. $\frac{11}{2}$.

2. 三角形之各頂為$(2,3)$，$(4,-5)$，$(-3,-6)$，求其面積.
答. 29.

3. 三角形之各頂為$(8,3)$，$(-2,3)$，$(4,-5)$，求其面積.
答. 40.

4. 三角形之各頂為$(a,0)$，$(-a,0)$，$(0,b)$，求其面積.
答. ab.

5. 以$(0,0)$，(x_1,y_1)，(x_2,y_2)為各頂之三角形，其面積幾何？
答. $\frac{x_1y_2-x_2y_1}{2}$.

6. 求三角形之面積,其角點爲$(a,1)$,$(0,b)$,$(c,1)$,

答. $\frac{(a-c)(b-1)}{2}$.

7. 各頂爲(a,b),(b,a),$(c,-c)$之三角形,其面積幾何?

答. $\frac{1}{2}(a^2-b^2)$.

8. 有三角形,其各頂爲$(3,0)$,$(0,3\sqrt{3})$,$(6,3\sqrt{3})$試求其面積.

答. $9\sqrt{3}$

9. 證明以$(2,3)$,$(5,4)$,$(-4,1)$爲各頂之三角形,其面積等於零,故三點同在一直線內.

10. 三角形之各頂爲$(a,b+c)$,$(b,c+a)$,$(c,a+b)$,試證明其面積等於零,且三點同在一直線內.

11. 若以$(a,c+a)$,$(-c,0)$,$(-a,c-a)$爲三角形之各頂,則其面積必等於零,且三點同在一直線內,試證明之.

12. 四邊形之各頂爲$(-2,3)$,$(-3,-4)$,$(5,-1)$,$(2,2)$,求其面積.

答. 31.

13. 五邊形之各頂爲$(1,2)$,$(3,-1)$,$(6,-2)$,$(2,5)$,$(4,4)$,其面積幾何?

答. 18.

14. 平行四邊形之各頂爲$(10,5)$,$(-2,5)$,$(-5,-3)$,$(7,-3)$,其面積幾何?

答. 96.

15. 以$(0,0)$,$(5,0)$,$(9,11)$,$(0,3)$爲各頂之四邊形,其面積幾何?

答. 41.

16 有四邊形其各頂爲$(7,0)$,$(11,9)$,$(0,5)$,$(0,0)$,試求其面積.

答. 59.

17. 以$(4,6)$,$(2,-4)$,$(-4,2)$爲各頂之三角形,將其各邊之中點以直線連成小三角形;試證明大三角形之面積,等於小三角形之四倍.

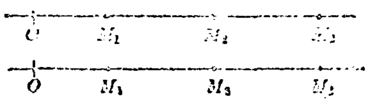
18. 自三角形之各頂$(3,-8)$,$(-4,6)$,$(7,0)$至其中心,各連以直線,則分原三角形爲三個等面積之三角形,試證明之.

19. 四邊形之各頂爲$(0,0)$,$(6,8)$,$(10,-2)$,$(4,-4)$,每相隣兩邊之中點,各以直線連之,以成一小四邊形,試證明小四邊形之面積,等於大四邊形之半.

25. 第二投影定理.

預理I. 設M_1, M_2, M_3為方向線上任意三點,則恆有

$$M_1M_3=M_1M_2+M_2M_3$$



證. 設O為原點,準24頁(1),

$$M_1M_2=OM_2-OM_1,$$

$$M_2M_3=OM_3-OM_2.$$

相加,得 $$M_1M_2+M_2M_3=OM_3-OM_1.$$

但 $$M_1M_3=OM_3-OM_1.$$

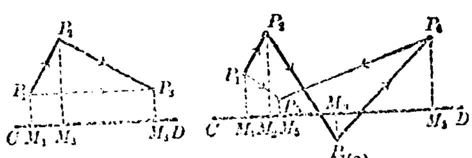
$$\therefore M_1M_3=M_1M_2+M_2M_3.$$

預理II. 設$M_1, M_2, M_3, \ldots, M_{n-1}, M_n$為方向線上任意$n$點則

$$M_1M_n=M_1M_2+M_2M_3+M_3M_4+\ldots\ldots+M_{n-1}M_n,$$

寫右端時各段之末即下段之首.

連折線之起點與末點之直線,謂之閉線.



(1) (2)

圖(1)之P_1P_3,圖(2)之P_1P_5皆為閉線.

定理 XI. 第二投影定理. 設折線各段之方向，以由折線之一端起，接續通過各線之方向為方向，則各折線各段在任意方向線上之投影之和等於閉線之投影.

證. 由上圖(1)得

$$M_1M_2=P_1P_2\text{之投影};$$
$$M_2M_3=P_2P_3\text{之投影};$$
$$M_1M_3=\text{閉線}P_1P_3\text{之投影}.$$

但準預理I，

$$M_1M_2+M_2M_3=M_1M_3,$$

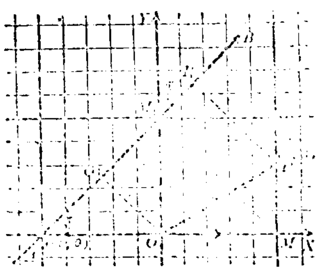
此即本定理之證明.

由圖(2)亦同.

推論. 沿周界於已知方向閉合多邊形各，邊則各邊在任意方向直線上之投影之和，必等於零.

因其閉線為零.

例1. 通過(—5,0) 之直線，其傾斜為$\frac{\pi}{4}$；另有OP直線，通過原點



及$P(5,3)$，試求OP直線在此直線上之投影.

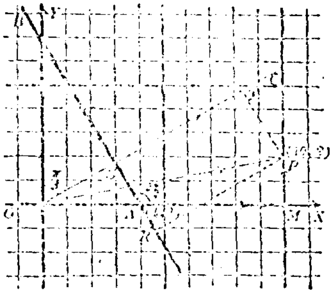
解. 由圖且準第二投影定理，得

OP在AB上之投影

$$=OM\text{之投影}+MP\text{之投影},$$
$$=OM\cos\frac{\pi}{4}+MP\cos\frac{\pi}{4}$$
$$=\frac{5}{2}\sqrt{2}+\frac{3}{2}\sqrt{2}=4\sqrt{2}.$$

解此類問題時，須注意之要點，即必須以折線代已知之直線，而此折線之兩段，必須平行x，y兩軸，然後再引用定理XI以解之可也.

例2. 傾角為$\frac{2\pi}{3}$之直線,且通過(4,0),試求此直線與(10,2)之垂直距離.



解. 於圖作直線OC垂直AB,因

$\angle XAS=\frac{2\pi}{3}$,或$120°$.

$\therefore \angle XOS=30°, \angle SOY=60°$.

則RP即所求之距離.

投OMP之影於OC上,則準第二投影定理,得

$$\begin{aligned} OP\text{之投影} &= OM\text{之投影}+MP\text{之投影} \\ &= OM\cos\angle XOS+MP\cos\angle SOY \\ &= 10\times\tfrac{1}{2}\sqrt{3}+2\times\tfrac{1}{2} \\ (1)\qquad &= 1+5\sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{但}OP\text{之投影} &= OS+ST \\ &= OA\cos XOS+RP \\ (2)\qquad &= 4\times\tfrac{1}{2}\sqrt{3}+RP. \end{aligned}$$

將(1)(2)等之,得

$$RP+2\sqrt{3}=1+5\sqrt{3}.$$

$$\therefore RP=1+3\sqrt{3}.\ \text{答.}$$

問　題　11.

1. x軸上有四點,其距原點為1,3,6,10,試準前理以求P_1P_4.

2. 將(−1,4),(3,6),(6,−2),(8,1),(1,−1)依次連成折線,試證明投各段之影於x軸上於第二投影定理亦合.

3. 將(1,2),(5,4),(−1,−4),(3,−1),(1,2)連成折線,試作圖以證其投在任何直線上之影,必等於零.

4. 通過(−1,1)之直線,其傾角為$\frac{\pi}{6}$,試求$A(2,1)$,$B(5,3)$直線投在此直線上之投影.　　答. $\frac{3\sqrt{3}+2}{2}$.

5. 連$(-1,3)$,$(2,4)$之直線,試求其在傾角$\frac{3}{4}\pi$之直線上之投影.

答. $-\sqrt{2}$.

6. 連$(-1,4)$,$(3,6)$,$(5,0)$之折線,試求其在傾角$\frac{\pi}{4}$之直線上之投影.亦另求閉線之投影,以驗其相等否.　　答. $\sqrt{2}$.

7. 將$(0,0)$,$(4,2)$,$(6,-3)$連成折線,試求其在傾角$\frac{2}{3}\pi$之直線上之投影.

答. $\frac{-6-3\sqrt{3}}{2}$.

8. 證明三角形$(2,1)$,$(-1,5)$,$(-3,1)$之各邊投在傾角$\frac{\pi}{6}$之直線上之投影等於零.

9. 通過$(-4,0)$之直綫,其傾角為$\frac{\pi}{4}$,試求此直線與$(6,3)$之垂直距離.

答. $\frac{7}{\sqrt{2}}$.

10. 傾角$\frac{3}{4}\pi$之直線,且通過$(6,0)$,試求其與$(-5,-1)$之垂直距離.

答. $6\sqrt{2}$.

11. 傾角$\frac{\pi}{6}$且通過$(5,0)$之直線,試求其與另一平行且通過$(0,2)$之直線之垂直距離.

答. $\frac{5+2\sqrt{3}}{2}$.

第　三　章

曲 線 及 方 程 式

26．<u>點之軌跡之能適合一要件者</u>．凡曲線※通過能適合一要件之許多點，不再通過別種點者，名曰能適合一要件諸點之軌跡．

例如，平面幾何學所證明之下列諸事．

連固定兩點之直線之垂直平分線，爲至固定兩點等距離諸點之軌跡．

凡角之平分線爲至角之兩邊等距離諸點之軌跡．

故解軌跡問題，必有兩事：

1．先求得能適合已知之要件之若干點，以曲線連之；

2．討論軌跡之性狀，即說明此曲線爲如何之形狀也．†

解析幾何，即解合上述兩事之軌跡問題之學科也．

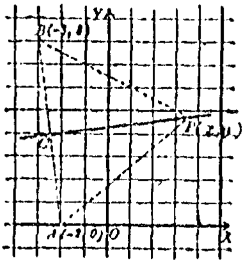
27．<u>能適合一要件諸點之軌跡之方程式</u>．今討論一軌跡問題，以表坐標之用．設P爲能適合已知要件之一點，其坐標爲x,y，則P必在軌跡之內；是以由已知之要件，即可得含x,y之方程式．下例即所以證明此事，故甚緊要．

※曲線二字以後表連續線或曲或直．

†初等幾何學只論直線與圓，故只用直尺與圓規即可將其軌跡作出，而第二部便無此限制．

例1. 設有一點P,其與$A(-2,0)$,$B(-3,8)$兩點之距離恒相等試求含P之坐標x,y,且能適合此要件之方程式.

解. 設P為軌跡上任意一點,則由已知要件,得



(1) $PA=PB$.

但由31頁,公式IV,

$$PA=\sqrt{(x+2)^2+(y-0)^2}$$

$$PB=\sqrt{(x+3)^2+(y-8)^2}$$

代入(1),得

(2) $$\sqrt{(x+2)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x+3)^2+(y-8)^2}.$$

平方之,簡之,得

(3) $$2x-16y+69=0.$$

(3)之x,y為變數,代表軌跡中任意之坐標,即AB之垂直平分線內任意一點之坐標也.此方程有兩種緊要之特性.

1. 將軌跡內任何點之坐標代入(3),而此方程均能成立.

試設$P_1(x_1,y_1)$為軌跡內任意點,則$P_1A=P_1B$,由定義及31頁公式IV,必有

(4) $$\sqrt{(x_1+2)^2+y_1^2}=\sqrt{(x_1+3)^2+(y_1-8)^2},$$

平方之,簡之,得

(5) $$2x_1-16y_1+69=0.$$

故x_1,y_1能適合(3).

2. 任何點,若其坐標能適合方程式(3),則必在軌跡之內.今設$P_1(x_1,y_1)$為任意之點,其坐標能適合(3),則(5)(4)亦必能成立.例如AB之中點C,其坐標為$x=-2\frac{1}{2}$,$y=4$能適合(3),因$2(-2\frac{1}{2})-16\times4+69=0$故也.

此例表明純粹幾何學與解析幾何學關於問題之對應.

軌跡問題

純粹幾何	解析幾何
幾何上之要件.(軌跡上各點皆能適合之.)	代表坐標之兩變數x及y之方程式.(軌跡上各點之坐標皆能適合之.)

由上討論，得下定義：

能適合一要件諸點之軌跡之方程式，即含諸點之坐標x,y之方程式，且(1)軌跡上任何點之坐標，必能適合此方程式；(2)反之，凡點之坐標能適合此方程式者，則此點必在軌跡內。

準此定義，凡求得軌跡之方程式後，必以兩法試之，如例1所示，以觀其合理否。

推論　如點之坐標能適合曲線之方程式，則此點必在曲線上。

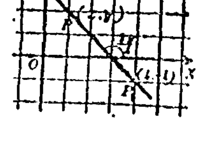
28．**第一基本問題．**　求曲線之方程式，而此曲線即是能適合一要件諸點之軌跡，其法則如下：

法則．第一步．　設$P(x,y)$爲適合已知要件之一點，故必在曲線上。

第二步．寫出已知要件．

第三步．將P之坐標，表此已知要件，且簡單之，則所得含x，y之方程式，則所求之方程式也．

例1．　傾角爲$\frac{3\pi}{4}$且通過$P_1(4,-1)$之直線，其方程式如何？



解．第一步．設$P(x,y)$爲直線上任意一點．

第二步．直線之傾角α既爲$\frac{3\pi}{4}$，則已知之要件可寫爲

(1)　　P_1P之斜度$=\tan\alpha=-1$．

第三步．由35頁(V)，

(2)　　P_1P之斜度$=\tan\alpha=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{y+1}{x-4}$．

〔以(x,y)代(x_1,y_1)，以$(4,-1)$代(x_2,y_2)〕，

則
$$\frac{y+1}{x-4}=-1,$$

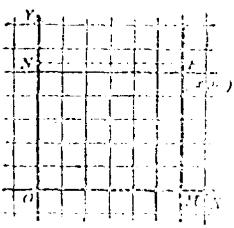
(3)
$$x+y-3=0.\qquad\text{答.}$$

此則所求之方程式也．今證明於下:

1. 直線上任何點之坐標$(x_1 y_1)$,必能適合(3);因連(x_1,y_1),$(4,-1)$之直線,其斜度為-1,故22節定理V以$(4,-1)$代(x_2,y_2)得
$$-1=\frac{y_1+1}{x_1-4},$$
則
$$x_1+y_1-3=0.$$

2. 反之任何點,若其坐標能適合(3),則必在直線上,設(x_1,y_1)為能適合(3),則$x_1+y_1-3=0$,則$-1=\frac{y_1+1}{x_1-4}$亦必能成立,故(x_1,y_1)為斜角$\frac{3}{4}\pi$,且通過$(4,-1)$之直線上之一點.

例2. 平行y軸且在其右距離6之處之直線,其方程式如何?



解. 第一步. 設$P(x,y)$為直線上任意一點,作NP垂線.

第二步. 寫已知之要件,則

(4)
$$NP=6.$$

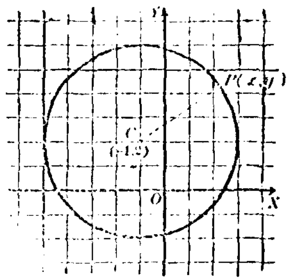
第三步. 因$NP=OM=x$,是以

(5)
$$x=6.$$

與上例同法可證明(5),即所求之方程式.

上述兩種特性,極其緊要,學者當細心研究,且引用於下列諸例題,以資熟悉.

例3. 與(—1,2)之距離恆爲4之一點,試求其軌跡之方程式.



解. 第一步.設$P(x,y)$爲軌跡上任意一點.

第二步.命(—1,2)爲C,則得

(6) $PC=4$.

第三步.準31頁(IV).得

$$PC=\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}$$

代入(6).

$$\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}=4.$$

平方之,簡之,得

(7) $$x^2+y^2+2x-4y-11=0.$$

即所求之方程式也.

問 題 12.

1. 求下列諸直線之方程式,俱平行OY,且

(a) 在OY之右相距6.

(b) 在OY之左相距7.

(c) 在(3,2)之右相距2.

(d) 在(2,—2)之左相距5.

2. 一線平行OY且至OY之距離爲$a-b$單位.其方程式爲何?若$a>b>0$此線與OY有如何之關係?若$b>a>0$又如何?

3. 求下列諸直線之方程式,俱平行OX,且

(a) 在OX之上相距3.

(b) 在OX之下相距6.

(c) 在(—2,—3)之上相距7.

(d) 在(4,—2)之下相距5.

4. XX'及YY'之方程式如何?(方向注意.)

5. 與直線$x=4$平行之直線,且在其右相距3之處,其方程式如何?若在其左相距8之處,又如何?

6. 與直線$y=-2$平行之直線,(1)在其下,相距4;(2)在其上,相距5;其方程式如何?

7. (1)若$a>b>0$(2)若$b>a>0$,則直線$y=a-b$之位置如何?

8. x軸及y軸之方程式如何?

9. 有移動之一點,其與(1)x軸,(2)y軸,(3)直線$x=-5$,(4)直線$y=4$之距離,恆爲2;試求此點軌跡之方程式.

10. 有移動之一點，其與(1)直線$x=5$及$x=9$，(2)直線$y=3$及$y=-7$之距離恆相等，試求此點軌跡之方程式.

11. 以(5,2)，(5,5)，(—2,2)，(—2,5)為頂之矩形，試求各邊之方程式.

於下12,13兩題，P_1為所求之直線上已知之一點，m為直線之斜度，α為其傾角.

12. 求下列諸直線之方程式:

(a) P_1為$(0,3)$，$m=-3$. 答. $3x+y-3=0$.

(b) P_1為$(-4,-2)$，$m=\frac{1}{3}$. 答. $x-3y-2=0$.

(c) P_1為$(-2,3)$，$m=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

答. $\sqrt{2}x-2y+6+2\sqrt{2}=0$.

(d) P_1為$(0,5)$，$m=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 答. $\sqrt{3}x-2y+10=0$.

(e) P_1為$(0,0)$，$m=-\frac{2}{3}$. 答. $2x+3y=0$.

(f) P_1為(a,b)，$m=0$. 答. $y=b$.

(g) P_1為$(-a,b)$，$m=\infty$. 答. $x=-a$.

13. 求下列諸直線之方程式.

(a) P_1為$(2,3)$，$\alpha=45°$. 答. $x-y+1=0$.

(b) P_1為$(-1,2)$，$\alpha=45°$. 答. $x-y+3=0$.

(c) P_1為$(-a,-b)$，$\alpha=45°$. 答. $x-y=b-a$.

(d) P_1為$(5,2)$，$\alpha=60°$. 答. $\sqrt{3}x-y+2-5\sqrt{3}=0$.

(e) P_1為$(0,-7)$，$\alpha=60°$. 答. $\sqrt{3}x-y-7=0$.

(f) P_1為$(-4,5)$，$\alpha=0°$. 答. $y=5$.

(g) P_1為$(2,-3)$，$\alpha=90°$. 答. $x=2$.

(h) P_1為$(3,-3\sqrt{3})$，$\alpha=120°$. 答. $\sqrt{3}x+y=0$.

(i) P_1為$(0,3)$，$\alpha=150°$. 答. $\sqrt{3}x+3y-9=0$.

(j) P_1為(a,b)，$\alpha=135°$. 答. $x+y=a+b$.

14. (3,9)，(4,6)，(5,5)三點，是否在直線$3x+2y=25$上.

15. 求下列諸圓之方程式:

(a) 心為$(3,2)$，半徑$=4$. 答. $x^2+y^2-6x-4y-3=0$.

(b) 心為$(12,-5)$，$r=13$. 答. $x^2+y^2-24x+10y=0$.

(c) 心為$(0,0)$，半徑$=r$. 答. $x^2+y^2=r^2$.

(d) 心為$(0,0)$，$r=5$. 答. $x^2+y^2=25$.

(e) 心為$(3a,4a)$，$r=5a$. 答. $x^2+y^2-2a(3x+4y)=0$.

(f) 心為$(b+c,b-c)$，$r=c$.

答. $x^2+y^2-2(b+c)x-2(b-c)y+2b^2+c^2=0$.

16. 圓心爲$(5,-4)$,圓周通過$(-2,3)$,試求其方程式.

17. 圓徑之兩端爲$(3,-5)$,$(-2,2)$求圓之方程式.

18. 圓周與x,y兩軸之切點,距原點俱等於6,求圓之方程式.

19. 以連$(-6,8)$與原點之直線之中點爲圓心,且圓周通過$(2,3)$求此圓之方程式.

20. 移動之一點,其距固定兩點$(2,-3)$,$(-1,4)$恒相等.求此點軌跡之方程式,並作圖以表之.　答. $3x-7x+2=0$.

21. 試求連下列各兩點之直線之垂直二等分線之方程式.

(a) $(2,1)$,$(-3,-3)$.　答. $10x+8y+13=0$.

(b) $(3,1)$,$(2,4)$.　答. $x-3y+5=0$.

(c) $(-1,-1)$,$(3,7)$.　答. $x+2y-7=0$.

(d) $(0,4)$,$(3,0)$.　答. $6x-8y+7=0$.

(e) (x_1,y_1),(x_2,y_2).

答. $2(x_1-x_2)x+2(y_1-y_2)y+x_2^2-x_1^2+y_2^2-y_1^2=0$.

22. 於上題證明諸連線中點之坐標,亦能適合垂直二等分線之方程式.

23. 試求三角形$(4,8)$,$(10,0)$,$(6,2)$各邊之垂直二等分線之方程式,並證明諸二等分線同相交於$(11,7)$.

24. 試以方程式表明(h,k)距$(-1,1)$及$(1,2)$等遠;又距$(1,2)$及$(1,-2)$等遠.由此再證明$(\frac{3}{4},0)$距$(-1,1)$,$(1,2)$,$(1,-2)$三點俱等遠.

29. <u>直線及圓之普通方程式</u>　由上節所證明諸法,可得下列兩結果.

1. 凡平行y軸之直線,其方程式必爲$x=k$.(k爲常數.)

2. 凡平行x軸之直線,其方程式必爲$y=k$.

定理I. 斜度爲m,且通過y軸上之一點$B(0,b)$之直線,其方程式爲

(I) $$y=mx+b.$$

證. 第一步.假定$P(x,y)$爲直線上任意一點.

第二步.寫已知要件.

$$PB\text{之斜度}=m.$$

第三步.準35頁,定理V,

$$PB\text{之斜度}=\frac{y-b}{x-0},$$

以(x,y)代(x_1,y_1),$(0,b)$代(x_2,y_2),得

$$\frac{y-b}{x}=m;\text{則}y=mx+b.$$

定理II. 以(α,β)爲心,r爲半徑之圓,其方程式爲

(II) $$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\alpha^2+\beta^2-r^2=0.$$

證. 第一步.假定$P(x,y)$爲軌跡上任意一點.

第二步.以(α,β)爲C,則得

$$PC=r.$$

第三步.準31頁(IV),得

$$PC=\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}.$$

$$\therefore\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}=r.$$

平方之,移之,即得(II).

推論. 以原點爲心,以r爲半徑之圓,其方程式爲

$$x^2+y^2=r^2.$$

細察上述,可得下列諸事:

直線方程式乃含x,y之一次方程式.

圓方程式,乃含x,y之兩次方程,且必有x^2及y^2之兩項.

30. 方程式之軌跡. 上數節已表明解析幾何學由點之軌跡之問題,可得含亦類x, y之方程式,解釋此方程式有兩要事, 前已述之(51頁)即:

1. 先求能適合此方程式之若干點,連以曲線,即得軌跡.(即下述之第二基本問題.)

2. 討論軌跡之性狀.(即下述之第三基本問題.)

凡通過能適合此方程式※之諸點,不再通過別種點之曲線.即是含兩變數之方程式之軌跡.此兩變數,即代表軌跡內各點之坐標.

由定義顯然可得下定理:

定理 III. 將方程式之形式任意改變之,(如以常數乘除全方程式將各項移置之.)其軌跡不變.

※有時兩變數x及y之方程式,任何點之坐標皆不能適合,因坐標表實數而方程式當不能以實值適合之.如在

$$x^2+y^2+1=0$$

內x及y既為實數而 x^2 及 y^2 必為正數(或零);則x^2+y^2+1恒為大於或等於1之正數故,不能等於零,故此類方程式無軌跡.但「此類方程式之軌跡為虛數」仍適用.

尚有一類方程式僅為數點或一點之坐標適合此如 $x^2+y^2=0$,只$x=0$, $y=0$,能適合而無他實值能適合也.此數點或一點因方程式之軌跡.

31. 第二基本問題. 求已知方程式之軌跡之法則:

第一步. 解已知方程式,將其一變數之值,以他變數表之*.

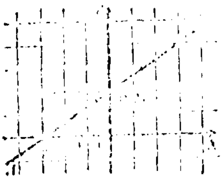
第二步. 假定一變數以各種實數值,則他變數可得各相當值.

第三步. 作相當中變值之諸點†.

第四步. 通過諸點,以曲線連之,則所求之軌跡.

於第二第三兩步,可求得之點無限,點數愈多,則軌跡愈精確.

今演數例於下,演算之層次,學者當細心考察之.



例1. 作$2x-3y+6=0$之軌跡.

解. 第一步. 解方程以求y之值,得

$$y=\tfrac{2}{3}x+2.$$

第二步. 與x以各種值以求y之值. 如

$$x=1,\ y=\tfrac{2}{3}\times1+2=2\tfrac{2}{3},$$

$$x=2,\ y=\tfrac{2}{3}\times2+2=3\tfrac{1}{3}.$$

將此等值列成一表.

x	y	x	y
0	2	0	2
1	$2\frac{2}{3}$	-1	$1\frac{1}{3}$
2	$3\frac{1}{3}$	-2	$\frac{2}{3}$
3	4	-3	0
4	$4\frac{2}{3}$	-4	$-\frac{2}{3}$
	⋮	⋮	⋮

第三步. 描表上諸點.

第四步. 通過諸點作曲線,即得.

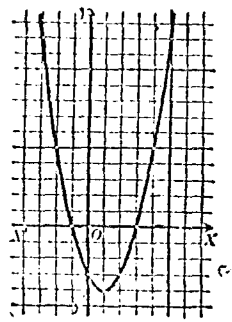
*解已知方程式常有一變數易解一變數難解,學者可選較易之解法.

†須注意者只有實數可當作坐標.

例2. 作$y=x^2-2x-3$之軌跡.

解. 第一步. 解方程以x表y之值.
第二步. 與x以各種值以求y,列成一表.
第三步. 描諸點.
第四步. 通過諸點作曲線,即得.

x	y	x	y
0	-3	0	-3
1	-4	-1	0
2	-3	-2	5
3	0	-3	12
4	5	-4	21
5	12	⋮	⋮
6	21		
⋮	⋮		

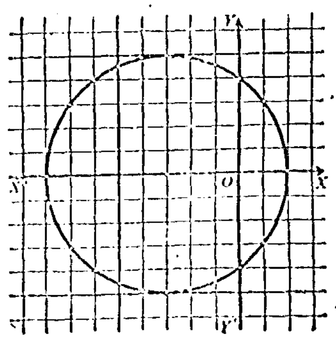


例3. 作$x^2+y^2+6x-16=0$之軌跡.
第一步. 解方程以求y,得

$$y=\pm\sqrt{16-6x-x^2}.$$

第二步. 與x以任意實數值,以求y之值,列表於下:

x	y	x	y
0	±4	0	±4
1	±3	-1	±4.6
2	0	-2	±4.9
3	虛數	-3	±5
4	"	-4	±4.9
5	"	-5	±4.6
6	"	-6	±4
7	"	-7	±3
		-8	0
		-9	虛數



如，　$x=1, y=\pm\sqrt{16-6-1}=\pm3$.

$x=3, y=\pm\sqrt{16-18-9}=\pm\sqrt{-11}$.

$x=-1, y=\pm\sqrt{16+6-1}=\pm4.6$.

第三步．描求得諸點．

第四步．通過諸點作曲線即得．

問　題　13．

1．試作下列諸方程之軌跡．

(a) $x+2y=0$.
(b) $x+2y=3$.
(c) $3x-y+5=0$.
(d) $y=4x^2$.
(e) $x^2+4y=0$.
(f) $y=x^2-3$.
(g) $x^2+4y-5=0$.
(h) $y=x^2+x+1$.
(i) $x=y^2+2y-3$.
(j) $4x=y^3$.
(k) $4x=y^3-1$.
(l) $y=x^3-1$.
(m) $y=x^3-x$.
(n) $y=x^3-x^2-5$.
(o) $x^2+y^2=4$.
(p) $x^2+y^2=9$.
(q) $x^2+y^2=25$.
(r) $x^2+y^2+9x=0$.
(s) $x^2+y^2+4y=0$.
(t) $x^2+y^2-6x-16=0$.
(u) $x^2+y^2-6y-16=0$.
(v) $4y=x^4-8$.
(w) $4x=y^4+8$.
(x) $y=\dfrac{x}{1+x^3}$.
(y) $x=\dfrac{1-y^2}{1+y^2}$.
(z) $x=\dfrac{2}{1+y^2}$.

2．證明下列諸方程式，不能有軌跡．

(a) $x^2+y^2+1=0$.
(b) $2x^2+3y^2=-8$.
(c) $x^2+4=0$.
(d) $x^4+y^2+8=0$.
(e) $(x+1)^2+y^2+4=0$.
(f) $x^2+y^2+2x+2y+3=0$.
(g) $4x^2+y^2+8x+5=0$.
(h) $y^4+2x^2+4=0$.
(i) $9x^2+4y^2+18x+8y+15=0$.
(j) $x^2+xy+y^2+3=0$.

提示：將方程式寫兩平方之和，或解之以一變數表他變數之値，再引用11頁定理III於平方根內之二次式，即可證明．

32．<u>比較原理</u>．於60頁例1及61頁例3．其軌跡之形狀，均可以已知方程式與58頁之(I)(II)兩式比較而得．此法謂之比較原理．

求方程式之軌跡之性質可與一普通已知方程式比較之．若兩方程式化爲同一形式使其係數相等．

茲述比較原理之法則如下：

法則：第一步．變已知方程之形式※，令其一項或數項與直線之普通方程式相同．

第二步．令兩方程相當各項之係數相等．如普通方程式所有而已知方程式所缺之各項，則令其係數等於零．

第三步．將第二步所得各係數方程式解之，則得普通方程式之係數之值†

例1．證明$2x-3y+6=0$爲直線之方程式．(閱61頁之圖)

解．第一步．改已知方程爲58頁之普通方程式：

(1)　$$y=mx+b.$$

(2)　$$y=\frac{2}{3}x+2.$$

第二步．令相當各項之係數及常數項各相等，得

(3)　$$m=\frac{2}{3}.$$

(4)　$$b=2.$$

第三步．準34頁直線之斜度，既可有任意之實數值，而b爲一點$(0,b)$之縱坐標，是以由(3)，(4)兩式，則證明$2x-3y+6=0$之軌跡爲通過$(0,b)$之直線，其斜度等於$\frac{2}{3}$．

※此條或變曰「使已知方程式化爲普通方程式」．

†此等值若無法求之(如爲虛數)，可得兩結果：方程式無軌跡或不能化爲所求之式．

例2. 證明下式之軌跡爲圓.

(5) $$x^2+y^2+6x-16=0.$$

解. 第一步. 將已知方程式與

(6) $$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\alpha^2+\beta^2-\gamma^2=0.$$

相比既有右邊及x^2,y^2兩項相同,故不必改變.

第二步. 令相當各項之係數相等,得

(7) $$-2\alpha=6.$$

(8) $$-2\beta=0.$$

(9) $$\alpha^2+\beta^2-\gamma^2=-16.$$

第三步. 由(7)(8)得

$$\alpha=-3,\ \beta=0.$$

代入(9),得

$$\gamma^2=25,\ \gamma=5.$$

α,β,γ既可有任意之實數值,故已知方程式之軌跡爲圓,其心爲(—30),其半徑等於5.

問　題　14.

1. 作下列諸方程式之軌跡,並證明俱爲直線,且求m及b之值.

(a) $2x+y-6=0$.　　答. $m=-2, b=6$.

(b) $x-3y+8=0$.　　答. $m=\frac{1}{3}, b=2\frac{2}{3}$.

(c) $x+2y=0$.　　答. $m=-\frac{1}{2}, b=0$.

(d) $5x-6y-5=0$.　　答. $m=\frac{5}{6}, b=-\frac{5}{6}$.

(e) $\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}y-\frac{1}{8}=0$.　　答. $m=\frac{3}{4}, b=-\frac{3}{16}$.

(f) $\frac{x}{5}-\frac{y}{6}-1=0$.　　答. $m=\frac{6}{5}, b=-6$.

(g) $7x-8y=0$.　　答. $m=\frac{7}{8}, b=0$.

(h) $\frac{3}{2}x-\frac{2}{3}y-\frac{7}{8}=0$.　　答. $m=\frac{9}{4}, b=-1\frac{5}{16}$.

2. 作下列諸方程式之軌跡,並證明俱爲圓,且求圓心(α,β)及半徑γ.

(a) $x^2+y^2-16=0$. 　答. $(\alpha,\beta)=(0,0)$, $\gamma=4$.
(b) $x^2+y^2-49=0$. 　答. $(\alpha,\beta)=(0,0)$, $\gamma=7$.
(c) $x^2+y^2-25=0$. 　答. $(\alpha,\beta)=(0,0)$, $\gamma=5$.
(d) $x^2+y^2+4x=0$. 　答. $(\alpha,\beta)=(-2,0)$, $\gamma=2$.
(e) $x^2+y^2-8y=0$. 　答. $(\alpha,\beta)=(0,4)$, $\gamma=4$.
(f) $x^2+y^2+4x-8y=0$. 　答. $(\alpha,\beta)=(-2,4)$, $\gamma=\sqrt{20}$.
(g) $x^2+y^2-6x+4y-12=0$. 　答. $(\alpha,\beta)=(3,-2)$, $\gamma=5$.
(h) $x^2+y^2-4x+9y-\frac{3}{4}=0$. 　答. $(\alpha,\beta)=\left(2,-\frac{9}{2}\right)$, $\gamma=5$.
(i) $3x^2+3y^2-6x-8y=0$. 　答. $(\alpha,\beta)=\left(1,\frac{4}{3}\right)$, $\gamma=\frac{5}{3}$.

3. 有一點,其與XX', YY'兩軸距離之比爲$\frac{2}{3}$. 試求此點軌跡之方程式. 　答. 直線$2x-3y=0$.

4. 有一點,其與兩坐標軸之距離之和,恒等於10,試求此點軌跡之方程式. 　答. 直線$x+y-10=0$.

5. 一動點至兩點$(3,0)$, $(0,-2)$之距離之平方之差,恒等於8. 試求其軌跡並作圖以表之.

答. 平行兩直線$6x+4y+3=0$, $6x+4y-3=0$.

6. 一動點距兩坐標軸恒相等,試求其軌跡之方程式,並作其圖.

答. 互相垂直之兩直線$x+y=0$, $x-y=0$.

7. 一動點距兩直線$x-4=0$, $y+5=0$恒相等,求其軌跡之方程式,並作其圖. 　答. 互相垂直之兩線$x-y-9=0$, $x+y+1=0$.

8. 一動點至$(3,0)$, $(-3,0)$之距離平方之和恒等於68,求其軌跡之方程式,並作圖. 　答. 圓$x^2+y^2=25$.

9. 一動點至$(8,0)$, $(2,0)$之距離之比恒等於2,求其軌跡之方程式,並作其圖. 　答. 圓$x^2+y^2=16$.

10. 一動點至$(2,1)$, $(-4,2)$之距離之比恒等於$\frac{1}{2}$,求其軌跡之方程式,並作圖. 　答. 圓$3x^2+3y^2-24x-4y=0$.

下列諸題，其坐標軸之位置，均不說明，演習者擇其證明本題最便當之位置可也．

11． 一動點至互相垂直兩直線之距離之和，恆等於常數，證明其軌跡為一直線．

提示： 以x，y兩軸為垂直之兩直垂線，其方程式為$x+y=$常數．

12． 一動點至固定兩點之距離平方之差，恆等於常數，證明其軌跡為一直線．

提示： 作XX'通過固定兩點，作YY'通過固定兩點之中點，則固定兩點之坐標可假定為$(a,0)$ $(-a,0)$，再命平方之差為k，則得軌跡之方程式，為$4ax=k$或$4ax=-k$．

13． 於上題其兩距離平行之和，恆等於常數，試證明其軌跡為圓．

提示： 坐標軸與上題同．

14． 移動之點，其與固定兩點之距離之比為常數，則其軌跡如何？

答． 其比不等於1時為圓，然等於1時則為直線．

定理． 若等於零之方程式，可分為含變數之幾個因數，則命諸因數各等於零，求各軌跡，即得全方程之軌跡．

下列諸題，即此定理之證明也．

15． 作$4x^2-9y^2=0$之軌跡．

解． 分已知方程為兩因數，

(1) $$(2x-3y)(2x+3y)=0.$$

準上定理，此方程之軌跡為直綫，

(2) $$2x-3y=0.$$

(3) $$2x+3y=0.$$

證 1． 任意一點之坐標(x_1, y_1)，若能適合(1)，必能適合(2)及(3)．

因(x_1, y_1)既能適合(1)，則

(4) $$(2x_1-3y_1)(2x_1+3y_1)=0.$$

則必

$$2x_1-3y_1=0,$$

$$或 2x_1+3y_1=0,$$

證2. 一點(x_1, y_1)既在直線(2)或(3)內，則必在(1)之軌跡內.
若因(x_1, y_1)在直線

$$2x-3y=0,$$

內，準53頁推論，必有

(5) $$2x_1-3y_1=0.$$

則 $$(2x_1-3y_1)(2x_1+3y_1)=0.$$

故(x_1, y_1)能適合(1).

是以任何點，若在(1)之軌跡內，必在(2)及(3)之軌跡內，反之亦然，此即上定理之證明也.

16. 證明下列諸方程之軌跡為一對直線並描各線.

(a) $x^2-y^2=0.$ (j) $3x^2+xy-2y^2+6x-4y=0.$

(b) $9x^2-y^2=0.$ (k) $x^2-y^2+x+y=0.$

(c) $x^2=9y^2.$ (l) $x^2-xy+5x-5y=0.$

(d) $x^2-4x-5=0.$ (m) $x^2-2xy+y^2+6x-6y=0.$

(e) $y^2-6y=7.$ (n) $x^2-4y^2+5x+10y=0.$

(f) $y^2-5xy+6y=0.$ (o) $x^2+4xy+4y^2+5x+10y+6=0.$

(g) $xy-2x^2-3x=0.$ (p) $x^2+3xy+2y^2+x+y=0.$

(h) $xy-2x=0.$ (q) $x^2-4xy-5y^2+2x-10y=0.$

(i) $xy=0.$ (r) $3x^2-2xy-y^2+5x-5y=0.$

17. 證明 $Ax^2+B+C=0$之軌跡，或為一對平行直線，或為一直線，或不能有軌跡，依$\triangle=B^2-4AC$或為正或為零或為負而定.

18. 證明 $Ax^2+Bxy+Cy^2=0$之軌跡，或為相交之一對直線，或為一直線，或為一點，依$\triangle=B^2-4AC$或為正或為零或為負而定.

33. 第三基本問題. 方程式之討論於第二基本問題,曲線之形狀,尙未討論,僅將其坐標能適合已知方程式之各點求得,再以曲線連之,以此法作成之軌跡不甚精確,因其每兩點間之形狀,不能詳悉故也. 本節所論,先就已知方程式,討論其軌跡之形狀,則所作之軌跡,可較精確.

軌跡之性狀,關於方程之形式,故討論之層次,亦隨問題而不同,然下列兩事,則不難先知也.

1. 此曲線是否閉合,抑或其兩端延長至無窮.

2. 此曲線是否對於某坐標軸或原點對稱.

檢別此兩事之法,用下數例表明之.

例1. 作下式之軌跡,並先討論之.

(1) $$x^2+4y^2=16.$$

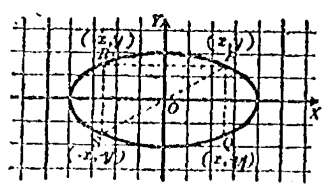
解. 第一步. 解方程式以求x,得

(2) $$x=\pm 2\sqrt{4-y^2}.$$

第二步. 與y以各種實數值,以求x之值列表於下.

第三步. 將求得諸點以曲線連之.

x	y	x	y
± 4	0	± 4	0
± 3.4	1	± 3.4	-1
± 2.7	$1\frac{1}{2}$	± 2.7	$-1\frac{1}{2}$
0	2	0	-2
虛數	3	虛數	-3



討論1. 於方程式$x^2+4y^2=16$,可知無論x或y,均不能為無限,因x,y為任何實數值,而x^2,$4y^2$恆為正,其和必等於16,故無論x或y均不能大於16,是以其軌跡必為閉合曲線.

由(2)y不能大於2,亦不能小於-2,因$4-y^2$不能為負故也. 又x必在-4與4之間.

2. 檢別此曲線是否對於某軸對稱.

於$x^2+4y^2=16$內無x,y之奇次項故,可改為:

(3) $(x)^2+4(-y)^2=16$,〔以$(x,-y)$代(x,y)〕;

(4) $(-x)^2+4(y^2)=16$,〔以$(-x,y)$代(x,y)〕,

(5) $(-x)^2+4(-y^2)=16$.〔$(-x,-y)$代(x,y)〕.

當原方程改為(3)時,按上之圖,則以$Q(x,-y)$代$P(x,y)$.但P,Q對於XX'對稱.又準69頁定理III.原方程與(3)同一軌跡,故原方程之軌跡,對於x軸對稱.同理由(4),可證明對於y軸對稱.由(5)可證明對於原點對稱.

此方程之軌跡名曰橢圓.

例2. 作

(6) $$y^2-4x+15=0.$$

之軌跡,並討論之.

解. 第一步. 解方程以求x,得

(7) $$x=\frac{1}{4}(y^2+15).$$

第二步. 與y以各種實數值,以求x之值如下表;但於(7),y既為平方,則每與y以正負兩值,而所得x之值同,譬如

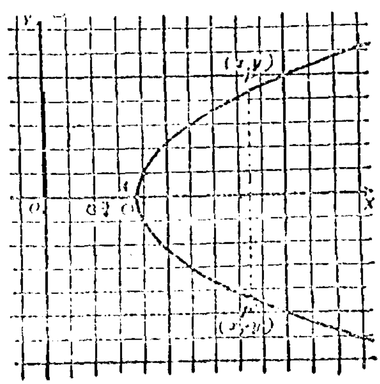
$$y=\pm3,$$

則 $$x=\frac{1}{4}(9+15)=6.$$

第三步. 作所得表上諸點.

第四步. 通過諸點作曲線.

x	y
$3\frac{3}{4}$	0
4	±1
$4\frac{3}{4}$	±2
6	±3
$7\frac{3}{4}$	±4
10	±5
$12\frac{3}{4}$	±6
⋮	⋮



討論 1． 由(7)，可知當y增大時，x亦因之而大，故曲線由兩軸起延長至無限遠．

2． 於(6)內，既無y之奇次項，則可改爲

$$(-y)^2-4(x)+15=0.$$

故此曲線對於x軸對稱．

此曲線名曰拋物線．

例3． 作下方程之軌跡．

$$xy-2y-4=0. \tag{8}$$

解． 第一步．解方程以求y，得

$$y=\frac{4}{x-2}. \tag{9}$$

第二步．與各種實數值於x，以求y之值．

x	y	x	y
0	-2	0	-2
1	-4	-1	$-\frac{4}{3}$
$1\frac{1}{2}$	-8	-2	-1
$1\frac{3}{4}$	-16	-4	$-\frac{2}{3}$
2	∞	-5	$-\frac{4}{7}$
$2\frac{1}{4}$	16	$\vdots$	$\vdots$
$2\frac{1}{2}$	8	-10	$-\frac{1}{3}$
3	4	$\vdots$	$\vdots$
4	2		
5	$\frac{4}{3}$		
6	1		
$\vdots$			
12	0.4		
$\vdots$	$\vdots$		

當$x=2$，則$y=\frac{4}{0}=\infty$．此時宜與x以微小於2及微大於2之值，如表所示．

第三步．作表內所得諸點．

第四步．通過諸點作曲線此時曲線有兩枝．

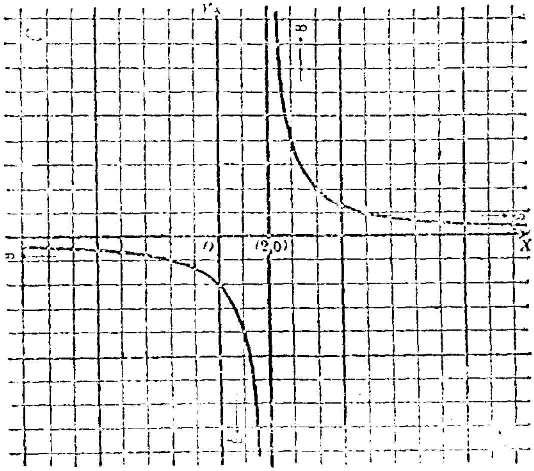
討論． 由(9)可知當x逐漸增大至無窮時，y逐漸減小而至於零，故此曲線向左右延長至於無窮．且漸與x軸相近．

又解(8)以求x得

$$x=2+\frac{4}{y},$$

由此可知當y逐漸增大至於無窮時，x之值漸近於2，故此曲線向上下延長至於無窮，且漸與直線$x=2$相近．

2. 於(8)，欲以$(x,-y)$代(x,y)或$(-x,y)$代(x,y)或以$(-x,-y)$代(x,y)，均不能有相同之軌跡，故曲線無論對於坐標軸或原點均不對稱.



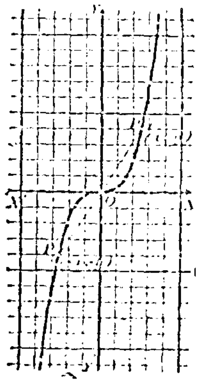
此曲線名曰雙曲線.

例4. 作下方程之軌跡.

(10) $$4y=x^3.$$

x	y	x	y
0	0	0	0
1	$\frac{1}{4}$	-1	$-\frac{1}{4}$
$1\frac{1}{2}$	$\frac{27}{32}$	$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{27}{32}$
2	2	-2	-2
$2\frac{1}{2}$	$3\frac{29}{32}$	$-2\frac{1}{2}$	$-3\frac{29}{32}$
3	$6\frac{3}{4}$	-3	$-6\frac{3}{4}$
$3\frac{1}{2}$	$10\frac{23}{32}$	$-3\frac{1}{2}$	$-10\frac{23}{32}$

解. 第一步. 解方程以求y，得
$$y=\tfrac{1}{4}x^3.$$
第二步. 以各種值與x以求y之值. 但x之值，每兩整數之間，必取其一，如此則每兩點不至相離過遠，譬如
$$x=2\tfrac{1}{2},$$
則 $$y=\tfrac{1}{4}\times\frac{125}{8}=\frac{125}{32}=3\frac{29}{32}.$$



第三步．作所得之諸點．

第四步．連諸點必成曲線．

討論．1．由(10)，可知x，y同時增大，故曲線由兩軸延長至無限遠．

2．於(10)，無偶次方之項，亦無常數項，故(x,y)可以$(-x,-y)$代之，則

$$4(-y)=(-x)^3,$$

故此軌跡對於原點對稱．

此軌跡名曰立方拋物線．

34．對稱　由上諸例可得對稱之定義，若曲線內之點，可排成無限之對數，而各對俱對於某軸或某點對稱，則全曲線亦稱爲對於某軸或某點對稱．

檢別方程式之軌跡，是否對稱，其法如下：

將方程式內所有(x,y)，俱以$(x,-y)$代之；若其軌跡不變，則假如(a,b)，$(a,-b)$同在此軌跡上，$(x,-y)$，$(a,-b)$與(x,y)，(a,b)對於XX'對稱．故得

定理IV．若將方程式內所有之y，俱以$-y$代之，其軌跡不變，則此軌跡對於x軸對稱．

方程式內所有之x，俱以$-x$代之，其軌跡不變，則此軌跡對於y軸對稱．方程式內，所有之x，y，俱以$-x$，$-y$代之，其軌跡不變，則此軌跡對於原點對稱．

含x，y之代數方程式．(觀17頁)其軌跡名曰代數曲線．於代數曲線，其對稱之定理爲

定理V. 方程式內，若無y之奇次項，則其軌跡對於XX'對稱；無x之奇次項，則對於YY'對稱，若方程式內所有各項俱為偶次※或俱為奇次，則對於原點對稱.

35. **較深之討論**. 討論方程式之軌跡，更有三事如下：

3. 原點是否在曲線內？

此問題以下定理斷之.

定理VI. 若代數方程式之軌跡通過原點，則方程式必無常數項.

證. 方程式既無常數項，則原點之坐標(0,0)，必能適合方程式，則原點必在曲線內.(第53頁推論).

4. x，y之何值應略去？

坐標既必須實數故檢別x，y應略去之值之法則如下.

法則. 第一步. 解方程式以y表x之值，再與y以各種實數值，以求x之值，若x為虛數，則相當之y值，必須略去.

第二步. 解方程式以x表y之值，再與x以各種實數值，以求y之值；若y為虛數，則相當之x值，必須略去.

曲線在x軸上之截線，(Intercepts)即曲線與XX'交點之橫坐標.

曲線在y軸上之截線，即曲線與YY'交點之縱坐標.

求截線之法則如下：

法則. 命$y=0$以求得x之實數值，即在x軸上之截線.

命$x=0$以求得y之實數值，即在y軸上之截線.

此法則之證，觀截線之定義，即可瞭然.

5. 軌跡之截線若何？

※常數項恒作爲偶次或奇次.

36．討論方程式之方法．已知其方程式，欲作其軌跡，當先知下列諸事．

1．原點是否在軌跡內．(定理IV.)

2．軌跡是否對於某軸或原點對稱．(定理IV，V)

3．截線如何．(73頁法則)

4．x，y之何值當略去．(73頁法則)

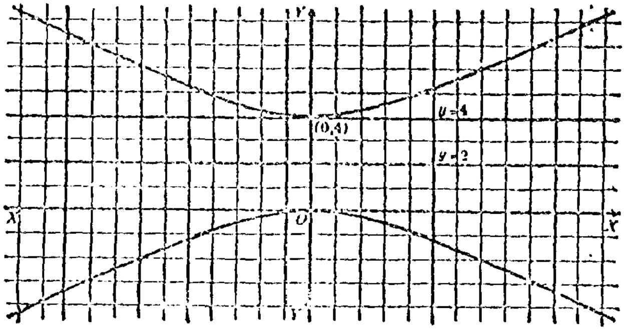
5．曲線是否閉合，抑或延長至無窮．(68頁§33)

此五事名曰方程式之軌跡之普通討論．

例1．討論方程式．

(1) $$x^2-4y^2+16y=0.$$

之軌跡，並作圖．



1．此方程既無常數項，故原點在曲線內．

2．此方程既無x之奇次項，故其軌跡對於YY'對稱．

3．命$y=0$得x軸上之截線，為$x=0$；命$x=0$得y軸上之截線為$y=0$或4．

4．解方程以求x，得

(2) $$x=\pm2\sqrt{y^2-4y}.$$

故y在0與4間之值，均須略去，因此時y^2-4y為負故也．又

(3) $$y=2\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{x^2+16}.$$

x^2+16既恆為正，故x無應略去之值．

5. 由(3)可知x增大時，y亦同增大，故由兩軸延長至無限遠.

由(2)以作成此曲線，乃知其為雙曲線.

問　題　15.

1. 討論下列諸方程,並作圖.

(a) $x^2-4y=0$.

(b) $y^2-4x+3=0$.

(c) $x^2+4y^2-16=0$.

(d) $9x^2+y^2-18=0$.

(e) $x^2-4y^2-16=0$.

(f) $x^2-4y^2+16=0$.

(g) $x^2-y^2+4=0$.

(h) $x^2-y+x=0$.

(i) $xy-4=0$.

(j) $9y+x^3=0$.

(k) $4x-y^3=0$.

(l) $6x-y^4=0$.

(m) $5x-y+y^3=0$.

(n) $9y^2-x^3=0$.

(o) $9y^2+x^3=0$.

(p) $2xy+3x-4=0$.

(q) $x^2-xy+8=0$.

(r) $x^2+xy-4=0$.

(s) $x^2+2xy-3y=0$.

(t) $2xy-y^2+4x=0$.

(u) $3x^2-y+x=0$.

(v) $4y^2-2x-y=0$.

(w) $x^2-y^2+6x=0$.

(x) $x^2+4y^2+8y=0$.

(y) $9x^2+y^2+18x-6y=0$.

(z) $9x^2-y^2+18x+6y=0$.

2. 於下列諸方程,與常數(a,b,m,r)以特別之值,但不能為零,以定其軌跡大略之形狀.※

(a) $y^2=2mx$.

(b) $x^2-2my=m^2$.

(c) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

(d) $2xy=a^2$.

(e) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

(f) $x^2-y^2=a^2$.

(g) $x^2+y^2=r^2$.

(h) $x^2+y^2=2rx$.

(i) $x^2+y^2=2ry$.

(j) $x^2+y^2=2ax+2by$.

(k) $ay^2=x^3$.

(l) $a^2y=x^3$.

※例如，在(a)，(b)內$m=0$為一特別值，實際上在此一切題內零為一切常數之特別值.

3. 作下方程之軌跡.

$$y^2=(x-a)(x-b)(x-c).$$

(a)當$a<b<c$.　(c)當$a<b, b=c$.

(b)當$a=b<c$.　(d)當$a=b=c$.

於上題自(a)至(f)諸方程,其軌跡俱爲圓錐曲線.(Conic section curves)有移動之一點,其與固定一點及一固定之一直綫之兩距離爲常數,則其軌跡名曰圓錐曲線.

4. 證明任何圓錐曲線,必可以含x,y之二次方程表之.

提示:取YY'爲固定之直線,作XX'通過固定之一點,且以$(P,0)$表固定之點,以e爲其比.

答. $(1-e^2)x^2+y^2-2x^2+P^2=0$

5. 討論上題之方程式,並作圖.

(a) 若$e=1$時則爲拋物線.(*Parabola*)

(b) 若$e<1$時則爲橢圓,(*Ellipse*)

(c) 若$e>1$時則爲雙曲線(*Hyperbola*)

6. 作下諸方程之曲線.

(a) $x^2y-5=0$.　(e) $y=\dfrac{5}{x^2-3x}$.　(i) $x=\dfrac{y^2}{y-1}$.

(b) $x^2y-y+2x=0$.　(f) $y=\dfrac{4x^2}{x^2-4}$.　(j) $x=\dfrac{y-2}{y-3}$.

(c) $xy^2-4x+6=0$.　(g) $y=\dfrac{x-3}{x+1}$.　(k) $4x=\dfrac{y^2}{y^2-9}$.

(d) $x^3y-y+8=0$.　(h) $y=\dfrac{x^2-4}{x^2+x}$.　(l) $x=\dfrac{8y}{3-y^2}$.

37. 交點(Points of intersection) 已知相交兩曲線之方程式,則兩曲線交點之坐標,代入兩方程之未知數,必均能適合.於代數上,凡未知數之值,同時能適合含兩未知數之兩方程者,即可作爲聯立以解之,是以已知相交兩曲線之方程,求其交點之法則如下:

法則. 第一步. 將兩方程以解聯立方程法解之.

第二步. 所得未知數之值,分對列之,即得交點之坐標.

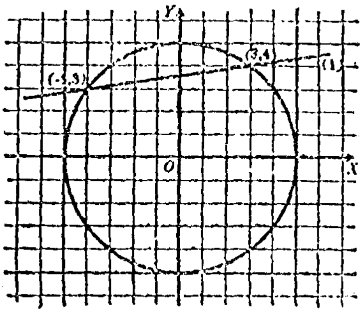
若所得有虛數,必須略去,因交點必爲實數故也.

例1. 求

(1) $x-7y+25=0$,

(2) $x^2+y^2=25$.

之交點.



解. 第一步. 解(1)以求x得

(3) $x=7y-25$.

代入(2),得

$$(7y-25)^2+y^2=25.$$

則 $y^2-7y+12=0$.

$\therefore y=3$與4.

代入(3),得 $x=-4$與$+3$.

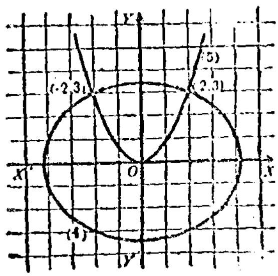
第二步. 配置x,y之值,以成$(-4,3),(3,4)$即得.

於下圖直綫爲(1)之軌跡,圓爲(2)之軌跡.

例2. 求下列兩曲線之交點.

(4) $2x^2+3y^2=35$.

(5) $3x^2-4y=0$.



解. 第一步. 解(5)以求x^2,得

(6) $x^2=\frac{4}{3}y$.

代入(4),簡之,得

$$9y^2+8y-105=0.$$

$\therefore y=3$ 與 $-\frac{35}{9}$.

代入(6),開平方,得

$$x=\pm2\text{與}\pm\tfrac{2}{3}\sqrt{-105}.$$

第二步 將所得x,y之實數值配置之,即得交點$(2,3),(-2,3)$.

於下圖橢圓(4)爲(4)之軌跡,拋物線(5)爲(5)之軌跡.

問　題　16.

求下列諸方程之交點.

1. $\left.\begin{array}{l}7x-11y+1=0\\ x+y-2=0\end{array}\right\}$.　　答. $(\frac{7}{6},\frac{5}{6})$.

2. $\left.\begin{array}{l}x+y=7\\ x-y=5\end{array}\right\}$.　　答. $(6,1)$.

3. $\left.\begin{array}{l}y=3x+2\\ x^2+y^2=4\end{array}\right\}$.　　答. $(0,2),(-\frac{6}{5},-\frac{8}{5})$.

4. $\left.\begin{array}{l}y^2=16x\\ y-x=0\end{array}\right\}$.　　答. $(0,0),(16,16)$.

5. $\left.\begin{array}{l}x^2+y^2=a^2\\ 3x+y+a=0\end{array}\right\}$.　　答. $(0,-a),\left(-\frac{3a}{5},\ \frac{4a}{5}\right)$.

6. $\left.\begin{array}{l}x^2+y^2-4x+6y-12=0\\ 2y=3x+3\end{array}\right\}$.　　答. $\left(\frac{1}{13},\ \frac{21}{13}\right),(-3,-3)$.

7. $\left.\begin{array}{l}x^2-y^2=16\\ x^2=8y\end{array}\right\}$.　　答. $(\pm4\sqrt{2},4)$,

8. $\left.\begin{array}{l}x^2+y^2=41\\ xy=20\end{array}\right\}$.　　答. $(\pm5,\pm4),(\pm4,\pm5)$.

9. $\left.\begin{array}{l}x^2+y^2-6x-2y-15=0\\ 9x^2+9y^2+6x-6y-27=0\end{array}\right\}$.

答. $(-2,1),\left(-\frac{21}{13},-\frac{12}{13}\right)$.

10. $\left.\begin{array}{l}x^2+y^2=49\\ y=3x+b\end{array}\right\}$. 當$b$爲何值時則兩軌跡互相切?

答. $\left(\frac{-3b\pm\sqrt{490-b^2}}{10},\ \frac{b\pm3\sqrt{490-b^2}}{10}\right), b=\pm7\sqrt{10}$.

11. $\left.\begin{array}{l}y^2=2px\\ x^2=2py\end{array}\right\}$.　　答. $(0,0),(2p,2p)$.

12. $\left.\begin{array}{l}4x^2+y^2=5\\ y^2=8x\end{array}\right\}$.　　答. $(\frac{1}{2},2),(\frac{1}{2},-2)$.

13. $\left.\begin{array}{l}x^2=4ay\\ y=\dfrac{8a^3}{x^2+4a^2}\end{array}\right\}$.　　答. $(2a,a),(-2a,a)$.

14. $\left.\begin{array}{l}x^2+y^2=100\\ y^2=\dfrac{9x}{2}\end{array}\right\}$.　　答. $(8,6).(8.-6)$.

15. $\left.\begin{array}{l}x^2+y^2=5a^2\\ x^2=4ay\end{array}\right\}$.　　答. $(2a,a),(-2a,a)$

16． $\left.\begin{array}{l} b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \\ x^2+y^2=a^2 \end{array}\right\}$． 答． $(a,0)$，$(-a,0)$．

17． $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ 及 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=4$ 之軌跡，相交於四點，以直線連成四邊形，試求其各邊及對角線之長．

答． 交點 $(\pm\sqrt{10},\pm\frac{3}{2}\sqrt{6})$；邊 $2\sqrt{10}$，$3\sqrt{6}$；對角線 $\sqrt{94}$．

將下列方程之軌跡，連成三角形或多邊形，試求其面積．

18． $3x+y+4=0$，$3x-5y+34=0$，$3x-2y+1=0$ 答． 36．

19． $x+2y=5$，$2x+y=7$，$y=x+1$． 答． $\frac{3}{2}$．

20． $x+y=a$，$x-2y=4a$，$y-x+7a=0$． 答． $12a^2$．

21． $x=0$，$y=0$，$x=4$，$y=-6$． 答． 24．

22． $x-y=0$，$x+y=0$，$x-y=a$，$x+y=b$． 答． $\frac{ab}{2}$．

23． $y=3x-9$，$y=3x+5$，$2y=x-6$，$2y=x+14$． 答． 56．

24． 求 $3x-2y+6=0$，$x^2+y^2=9$ 軌跡兩交點間之距離．

答． $\frac{18}{13}\sqrt{13}$．

25． $y^2=4x$，$2x+3y+2=0$ 之軌跡，是否相交？ 答． 相交．

26． 當 a 值如何，則 $3x+y-2=0$，$ax+2y-3=0$，$2x-y-3=0$ 三直線過於一點． 答． $a=5$．

27． 求 $x^2+y^2=13$，$y^2=3x+3$ 公弦之長． 答． 6．

28． 設三角形三邊之方程式為 $x+7y+11=0$，$3x+y-7=0$，$x-3y+1=0$ 求各中線(即自角點至對邊中點之直線)之長．

答． $2\sqrt{5}$，$\frac{5}{2}\sqrt{2}$，$\frac{1}{2}\sqrt{170}$．

證明下列各對方程軌跡之兩交點相合，即兩軌跡互相切也．

29． $y^2-10x-6y-31=0$，$2y-10x=47$．

30． $9x^2-4y^2+54x-16y+29=0$，$15x-8y+11=0$．

38． 超越曲線．(Transcendental curves) 以上所論者均是代數方程式，因其變數僅含方次也．今所論超越曲線，其方程式之變數，不僅含方次，且有對數及三角函數等；但60頁之法則仍可引用．

例1. 作下方程之軌跡.

(1)　　　　$y=\log_{10}x$.

解. 與x以各種值則y之值可檢對數而得,或由對數之定義改(1)爲

(2)　　　　$x=10^y$.

x	y	x	y
1	0	.1	-1
3.1	$\frac{1}{2}$	.01	-2
10	1	.001	-3
100	2	.0001	-4
⋮	⋮	⋮	⋮

與y以各種值,亦可得x值;所得之值,列表如左.

次圖XX'以2格爲單位,YY'以4格爲單位.

討論 1. $(0,0)$既不能適合(1),故曲線不通過原點.

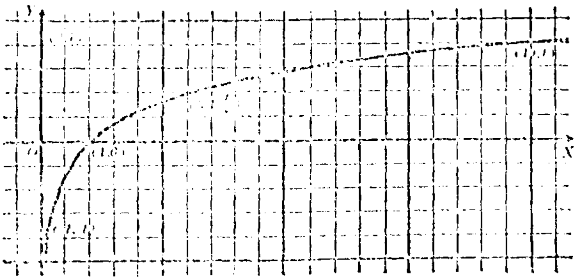
2. 此曲線與x,y兩軸及原點均不對稱.

3. 於(1),命$x=0$得

$y=\log 0=-\infty$,即在YY'上之截線.

於(2),命$y=0$,得

$x=10^0=1$,即XX'上之截線.



4. 由(2),凡x之負值,均須略去,因無負數之對數故也.但y則無應略去之值.

5. 由(2),因y增大,x亦增大,故曲線由兩軸延長至無窮.

由(1),當x逐漸減少至於零,y漸至於負無窮,故曲線向下延長至無限,且漸與YY'相近.

例2. 試作下方程之軌跡.

(3) $$y=\sin x,$$

x為角之弧度.

解. 與x以任意之實數值，且求其相當之度數，則檢三角函數真數表，可得y之值，例如

$$x=1\text{ radian}=57°.29,$$

$$y=\sin 57°.29=.843. \qquad (準(3))$$

為便利計，常取x之值之能以π表者．例如

x	y	x	y
0	0	0	0
$\frac{\pi}{6}$	.50	$-\frac{\pi}{6}$	$-.50$
$\frac{\pi}{3}$	.86	$-\frac{\pi}{3}$	$-.86$
$\frac{\pi}{2}$	1.00	$-\frac{\pi}{2}$	-1.00
$\frac{2\pi}{3}$	.86	$-\frac{2\pi}{3}$	$-.86$
$\frac{5\pi}{6}$	.50	$-\frac{5\pi}{6}$	$-.50$
π	0	$-\pi$	0

$$x=\frac{\pi}{3},$$

則 $$y=\sin\frac{\pi}{3}=\sin 60°=.86.$$

$$x=-\tfrac{2}{3}\pi,$$

則 $$y=\sin(-\tfrac{2}{3}\pi)=-\sin\tfrac{2}{3}\pi.$$

$$=-\sin 120°=-\sin 60°$$

$$=-.86.$$

作圖時，以3格為單位，取

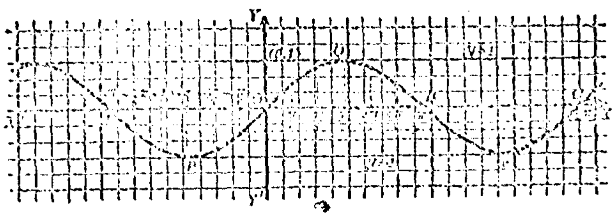
$$AO=OB=\pi=3.1416,$$

又分AO及OB各為6等分，如圖

在B以右之曲線可由

$$\sin(2\pi+x)=\sin x.$$

而得，故 $y=\sin x=\sin(2\pi+x)$，則以$x+2\pi$代x而曲線仍不變也．將曲線之部分APO向右以與XX'平行之方向移動，至A與B相合，則APO曲線與BRC相合也；又OQB亦



向右與XX'平行之方向移動，至O與C相合，故此曲線向左右延長至無限遠.

普通討論. 1. $(0,0)$既能滿足此方程式,故曲線通過原點.

2. 既$\sin(-x)=-\sin x$,故(3)之號

$$-y=-\sin x,$$

則

$$-y=\sin(-x).$$

故$(-x,-y)$代(x,y)軌跡不變,是以曲線對於原點對稱.

3. 於(3),若$x=0$,則

$$y=\sin 0=0,\text{即}y\text{軸上之截線}.$$

解(3)以求x,得

(4) $$x=\sin^{-1}y.$$

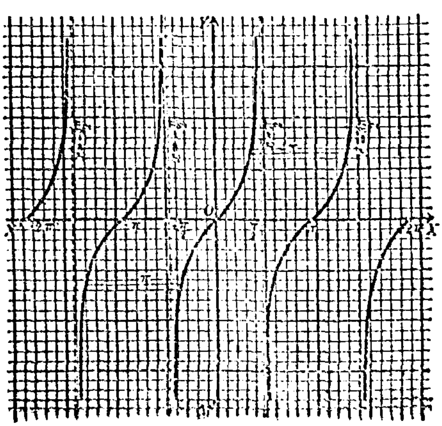
於(4),命$y=0$,則

$$x=\sin^{-1}0=n\pi.\ (n\text{為整數}.)$$

故曲線與x軸之交點,有無限個數,且每兩交點之距離為π.

4. 於(3),x可有任何值,因弧度可有任何值故也.

於(4),y可有-1與$+1$之間之任何值.



5. 曲線沿x軸向左右延長至無窮,但恒在$y=1$及$y=-1$兩直線之間.

此曲線名曰波線.(Wave curve)

例3. 作$y=\tan x$之軌跡.

作此題之層次,與上題均同.

問 題 17.

試作下列諸方程之軌跡.

1. $y=\cos x$. 5. $y=\tan^{-1}x$. 9. $y=\sin 2x$.

2. $y=\cot x$. 6. $y=2^{x}$. 10. $y=\tan\frac{x}{2}$.

3. $y=\sec x$. 7. $y=2\log_{10}x$. 11. $y=2\cos x$.

4. $y=\sin^{-1}x$. 8. $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$. 12. $y=\sin x+\cos x$.

39. 普通圖示法. 含兩變數之任何方程式,必可以曲線表其兩變數相互之關係,即以兩變數爲坐標,而作其軌跡也.凡以曲線表已知定律,在各科學上,亦多用之.

例1. 試作單利律 (*Simple Interest Law*) 之圖解,即所以表明本金,利率,年限,總數間之關係也.

其方程式,代數上所已證明者爲

$$(1)\qquad A=P(1+rn).$$

式中A爲總數,P爲本金,r爲利率,n爲年限.

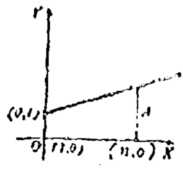
解. 爲便利計,命$P=1$元.

又命圖上沿OX一格$=1$年,
沿OY一格$=1$元.

以横坐標n之值,縱坐標表A之值,則所求之圖,即下方程式之軌跡.

$$(2)\qquad y=rx+1.$$

此方程之軌跡,乃通過$(0,1)$之直線,其斜度爲r.(觀29節定理I).

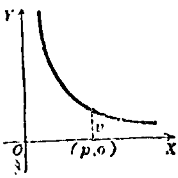


引用此圖,以解單利問題則甚便;例如已知年限n,則由$(n,0)$起向上平行OY量至直線止,所得之數,即本金一元利率rn年後本利和之總數.

例2. 於完全氣體內，容積v壓力p絕對溫度t間之關係，物理學上，所已證明者為

(3) $$pv=kt,$$

k為常數，各種氣體各有一定之值，假定溫度不變，試作其圖.



解. 命

沿OX一格=1單位壓力.

沿OY一格=1單位容積.

則以橫坐標表壓力，縱坐標表容積，則所求之圖，即下方程之軌跡.

(4) $$xy=\text{常數}.$$

其軌跡為僅有一枝之雙曲線，一端向右，一端向左，各延長至無窮，且逐漸各與坐標軸相近，此曲線名曰常溫度曲線，(Isothermals).

問題 18.

1. 試作單利律之圖解，其變數為

(a) n,P. (c) A,P. (e) P,r.

(b) n,r. (d) A,r.

2. 試作例2之圖解，假如其變數為

(a) P,t. (b) v,t.

3. 複利律(*Compound Interest Law*)之方程式，為$A=P(1+r)^n$，試作其圖解，假如其變數為

(a) A,P. (c) A,n. (e) P,n.

(b) A,r. (d) P,r. (f) r,n.

提示：方程式兩邊俱用對數，有時可較便當.

第四章

直線及普通一次方程式

40. 坐標之意義，曲線與方程式之關係，上數章已論述之；但解析幾何學所當論者，更有許多特別之曲線及方程式，今於本章先論直線及含x,y之普通一次方程式.

41. 直線方程式之方次. 方程式

$$(1) \qquad y=mx+b$$

為直線方程式，已於第三章證明，其m為直線之斜度，b為y軸上之截線；且m,b可有任意之數值，或正或負或零(第34頁)；但若平行Y軸之直線，則不能寫成(1)之形式，因其既不與y軸相交，故無截線，且其斜度為無限，則不能代入(1)之m，故凡與Y軸平行之直線，其方程式為

$$(2) \qquad x=\text{常數}.$$

故任何直線之方程式，必可寫成(1)或(2)，因其俱為含x,y之一次方程也，故得

定理I. 任何直線之方程式，必為x,y之一次方程式，其坐標為x,y.

42．普通一次方程式$Ax+By+C=0$，　方程式

(1)
$$Ax+By+C=0,$$

其A,B,C俱爲常數，名曰普通一次方程式．因無論如何之一次方程式，均可寫成此形式也．

例如，$y=mx+b$ 可寫爲 $mx-y+b=0$，與(1)相比，則$A=m$，$B=-1$，$C=b$；又如$x=$常數，可寫爲 $x-$常數$=0$，比之於(1)，則$A=1$，$B=0$，$C=-$常數．

定理II． 普通一次方程式$Ax+By+C=0$之軌跡，必爲一直線．

證． 解方程式(1)以求y，得

(2)
$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}.$$

準59頁定理III，此方程式之軌跡與(1)同．

又準59頁定理I，(2)之軌跡爲一直線，其斜度 $m=-\frac{A}{B}$，y軸上之截線 $b=-\frac{C}{B}$．

但若$B=0$，則不能將(1)寫成(2)之形式，此時

$$Ax+C=0.$$

即
$$x=-\frac{C}{A}.$$

此即平行Y軸之直線之方程式也．故(1)無論如何，其軌跡必爲一直線．

推論I． 直線$Ax+By+C=0$之斜度爲$m=-\frac{A}{B}$；即以y之係數除x之係數而反其號．

推論II．兩直線

$$Ax+By+C=0$$
$$A'x+B'y+C'=0$$

當x之係數及y之係數成正比則．

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}.$$

時，兩直線必平行．

因兩直線平行，即其斜度相等也，而此兩線之斜度，等於
$-\frac{A}{B}=-\frac{A'}{B'}$

則 $$-\frac{A}{B}=-\frac{A'}{B'}.$$

即 $$\frac{A}{B}=\frac{A'}{B'}.$$

推論III．兩直線．

$$Ax+By+C=0$$
$$A'x+B'y+C'=0$$

當$AA'+BB'=0$時，則互相垂直．

因兩直線互相垂直，其斜度必互為負反數，即

$$-\frac{A}{B}=\frac{B'}{A'} \text{ 即 } AA'+BB'=0.$$

推論IV．直線$Ax+By+C=0$、x，y兩軸之截線為．

$$a=-\frac{C}{A}, \quad b=-\frac{C}{B}.$$

因求X軸上之截線(第73頁)須令$y=0$而求x之值，求y軸上之截線詳上之證明內．

推論I及IV僅為參考之用，求截線仍以73頁之法則為便．欲求斜度，將方程式寫成

$$y=mx+b,$$

形式，所得x之係數，即斜度也．

定理I，II可合之如下.

合x，y之一次方程式，其軌跡為直線.

準定理II，凡一次方程式之軌跡，必為直線，則欲求一次方程式之軌跡祇須先求兩點，以直線連之則得．求兩點之最便者，為直線與坐標軸之交點，但若兩交點俱近於原點時，則須引用60頁之法則，別求一點，以資精確.

定理III．當兩個一次方程式.

(3)
$$Ax+By+C=0$$

(4)
$$A'x+B'y+C'=0,$$

其軌跡相符合時，則其相當之係數，必相正比，則

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}.$$

證．(3)，(4)兩方程之直線既相符合，則其斜度及y軸之截線必同，準推論既同斜度，則必有

$$\frac{A}{B}=\frac{A'}{B'},\qquad\text{(推論I, p, 86)}$$

兩直線既同截線，則必有

$$\frac{C}{B}=\frac{C'}{B'},\qquad\text{(推論IV, p, 87)}$$

將此兩式改為

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}\quad\frac{C}{C'}=\frac{B}{B'},$$

即得
$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}.$$

例1. 當a,b之值如何時,則

$$2ax+2y-5=0$$

$$4x-3y+7b=0$$

表同一直線.

解. 準定理III,若兩方程表同一直線,必有

$$\frac{2a}{4}=\frac{2}{-3}=\frac{-5}{7b},$$

合解

$$\frac{2a}{4}=\frac{2}{-3},\quad \frac{2}{-3}=\frac{-5}{7b}.$$

得 $$a=-\frac{4}{3},\quad b=\frac{15}{14}.$$

43. 合解兩個一次方程之幾何解釋.

將

(1) $$Ax+By+C=0$$

(2) $$A'x+B'y+C'=0,$$

合而解之,則得兩直線交點之坐標.但若兩直線平行,則無交點,兩直線相符合,則全直線俱是交點.

今將兩直線相關之位置,及兩方程合解之根之組組數,並立於下.

兩直線之位置	根之組數
兩直線相交	一組根
兩直線平行	無
兩直線符合	組數無限

然如上章所述,不必解二次方程,可知其軌跡之性狀,而兩個一次方程亦可不解,而知其根之組數,其法如下:

定理IV. 將兩次一個方程

$$Ax+By+C=0$$

$$A'x+B'y+C'=0,$$

合而解之,在通常時,可有一組根;然若

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'},$$

則無之,若

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'},$$

則有無限組之根.

此定理之證明,應用87頁推論II及定理III即得.

習 題 19.

1. 求下方程之截線,并作圖.

(a) $2x+3y=6$. 答. 3,2.

(b) $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1$. 答. 2,4.

(c) $\frac{x}{3}-\frac{y}{5}=1$. 答. 3,—5.

(d) $\frac{x}{4}+\frac{y}{-2}=1$. 答. 4,—2.

2. 作下方程之直線.

(a) $2x-3y+5=0$.

(b) $y-5-4x=0$.

(c) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$.

(d) $\frac{x}{3}-\frac{y}{4}=1$.

3. 求下列諸直線之方程式,并寫成普通形式.

(a) $m=2, b=-3$. 答. $2x-y-3=0$.

(b) $m=-\frac{1}{2}, b=\frac{3}{2}$. 答. $x+2y-3=0$.

(c) $m=\frac{2}{5}, b=-\frac{5}{2}$. 答. $4x-10y-25=0$.

(d) $\alpha=\frac{\pi}{4}, b=-2$. 答. $x-y-2=0$.

(e) $\alpha=\frac{3\pi}{4}, b=3$. 答. $x+y-3=0$.

提示. 代入$y=mx+b$.

4. 求下列各對方程之根之組數,并作圖.

(a) $\begin{cases} 2x+3y-6=0, \\ 4x+6y+9=0. \end{cases}$ 答. 無解.

(b) $\begin{cases} x-y=1, \\ x+y=1. \end{cases}$ 答. 一.

(c) $\begin{cases} 2-3x=y \\ 6x+2y=4. \end{cases}$ 答. 無限解.

(d) $\begin{cases} 4x-5y+20=0, \\ 12x-15y+6=0. \end{cases}$ 答. 無解.

5. 作$2x-3y+6=0$, $x-y=0$兩直線,又當$k=0$, ±1, ±2時,作$(2x-3y+6)+k(x-y)=0$之軌跡.

6. 由下列諸方程,檢出平行或正交之各對直線.

(a) $\begin{cases} L_1: y=2x-3, \\ L_2: y=-3x+2, \\ L_3: y=2x+7, \\ L_4: y=\frac{1}{3}x+4. \end{cases}$ 答. $L_1 \parallel L_3$, $L_2 \perp L_4$.

(b) $\begin{cases} L_1: x+3y=0, \\ L_2: 8x+y+1=0, \\ L_3: 9x-3y+2=0. \end{cases}$ 答. $L_1 \perp L_3$.

(c) $\begin{cases} L_1: 2x-5y=8, \\ L_2: 5y+2x=8, \\ L_3: 35x-14y=8. \end{cases}$ 答. $L_2 \perp L_3$.

7. 有四邊形,其邊爲$2x-3y+4=0$, $3x-y-2=0$, $4x-6y-9=0$, $6x-2y+4=0$試證明其爲平行四邊形.

8. 通過$y=3x+4$, $y=-x+4$交點之直線,其斜度爲-2,試求其方程式.

9. 在$y=mx+b$內若b爲常數,m爲眞變數,其軌跡爲何?若m爲常數,b爲眞變數,其軌跡爲何?

10. 試作一方程式,以表與下直線平行所有一切之直線.

(a) $y=2x+7$. (c) $y-3x-4=0$.

(b) $y=-x+9$. (d) $2y-4x+3=0$.

11. 凡與上題(a),(b),(c),(d)在Y軸之截線相同之一切直線.試作一方程以表之.

12. 與$2x-3y=0$平行之直線,其在Y軸之截線爲-2,試求其方程式.

13. 在$Ax+By+C=0$內若B及C爲常數,A爲眞變數,其軌跡爲何?若A與B爲常數,C爲眞變數,其軌跡爲何?

44. 兩要件可決定一直線　在初等幾何學內已知兩要件定一直線，譬如通過已知兩點，祇能作一直線．又如通過一已知點，與另一已知直線平行，亦祇能作一直線．然有時兩直線或多於兩直線，同時能適合兩要件者，例如通過已知點，且與已知圓相切，則可作兩直線，若與不相交兩已知圓相切，則可作四直線．

於直線方程式．

(1)
$$Ax+By+C=0,$$

若其中任意兩係數之值，可以第三係數表之，則此直線之位置已定，例如

$$A=2B,\ C=-3B,$$

則(1)爲

$$2Bx+By-3B=0,$$

即

$$2x+y-3=0.$$

凡直線能適合之要件，於方程式之係數，必有關係，例如直線通過原點，則必$C=0$若其斜度爲3，則有$-\dfrac{A}{B}=3$.

直線能適合兩要件，則由其方程式之各係數間之關係，可得兩方程式，將此兩方程解之，則可以一係數表他兩係數之值，由此即可得直線之方程式．

若兩方程，均是一次，則僅有一直線，能適合已知要件，若有一個二次方程，則有兩直線能適合已知要件．

能適合兩要件之直線，求其方程式之法則．

法則 第一步. 假定其方程式為

$$Ax+By+C=0.$$

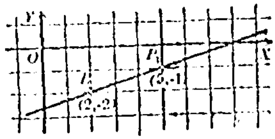
第二步. 於係數A,B,C間,求表兩已知要件之兩方程式.

第三步. 解所得兩方程,將兩係數之值,以第三係數表之.

第四步. 將第三步所得係數之值,代入第一步方程式,並以所有之一係數除之,即直線之方程式也.

例1. 通過$P_1(5,-1)$,$P_2(2,-2)$之直線,試求其方程式.

解. 第一步. 命所求之方程為



(1) $$Ax+By+C=0.$$

第二步. P_1既在(1)之軌跡上,則得

(2) $$5A-B+C=0.$$

又P_2亦在(1)之軌跡上,故

(3) $$2A-2B+C=0.$$

第三步. 解(2),(3)以C表A,B之值,得

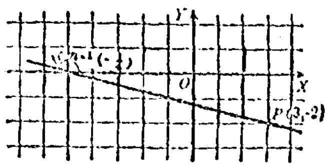
$$A=-\tfrac{1}{8}C,\ B=\tfrac{3}{8}C,$$

第四步. 以A,B之值代入(1),以C除之,以8乘之,即得

$$x-3y-8=0.$$

例2. 直線之斜度為$-\frac{1}{4}$,且通過$P_1(3,-2)$.其方程式如何.

解 第一步. 命所求之方程式為.



(4) $$Ax+By+C=0.$$

第二步. P_1既在(4)上,則有

(5) $$3A-2B+C=0.$$

又其斜度旣為$-\frac{1}{4}$,必有

(6) $$-\frac{A}{B}=-\frac{1}{4}.$$

第三步. 解(5),(6).以B表A,C之值,得

$$A=\tfrac{1}{4}B,\ C=\frac{5}{4}B.$$

第四步. 以所得A,C之值代入(4),得

$$\tfrac{1}{4}Bx+By+\frac{5}{4}B=0.$$

以B除之,以4乘之,則得

$$x+4y+5=0.$$

問題 20.

1. 求下諸直線方程式,并作圖.

(a) 通過(0,0),(8,2)兩點. 答. $x-4y=0$.

(b) 通過(−1,1),(−3,1)兩點. 答. $y-1=0$.

(c) 斜度=2,且通過(−3,1) 答. $2x-y+7=0$.

(d) 截線為$a=3$,$b=-2$. 答. $2x-3y-6=0$.

(e) 斜度=−3,截線$a=4$. 答. $3x+y-12=0$.

(f) 截線$a=-3$,$b=-4$. 答. $4x+3y+12=0$.

(g) 通過(2,3),(−2,−3). 答. $3x-2y=0$.

(h) 通過(3,4),(−4,−3). 答. $x-y+1=0$.

(i) 斜度=−2,且通過(2,3). 答. $2x+y-7=0$.

(j) 截線$a=2$,$b=-5$. 答. $\frac{x}{2}-\frac{y}{5}=1$.

2. 通過原點且平行$2x-3y=4$之直線,其方程式如何.
答. $2x-3y=0$.

3. 通過原點且正交$5x+y-2=0$之直線,其方程式如何.
答. $x-5y=0$.

4. 平行$4x-y-3=0$且通過(3,2)之直線,求其方程式.
答. $4x-y-10=0$.

5. 有直線,通過(3,0)且正交$2x+y-5=0$求其方程式.
答. $x-2y-3=0$.

6. 截線$b=5$且通過(6,3)之直線,其方程式如何.
答. $x+3y-15=0$.

7. 平行$x-4y+2=0$之直線,其截線$a=3$,試求其方程式.
答. $x-4y-3=0$.

8. 通過$x-2y+3=0$, $x+2y-9=0$之交點及原點之直線,其方程式如何. 答. $x-y=0$.

9. 斜度=m之直線,且通過$P_1(x_1,y_1)$,求其方程式.
答. $y-y_1=m(x-x_1)$.

10. 截線爲a, b, 則此直線之方程式如何.

答. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

11. 通過$P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$之直線, 其方程式如何.

答. $(y_2-y_1)x-(x_2-x_1)y+x_2y_1-x_1y_2=0$.

12. 證明上題所得之方程式, 可寫爲

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

提示. 加減x_1y_1再移項分因數, 卽可得.

45. 以斜度及直線上任意一點之坐標表直線之方程式.

本節及以下數節, 均引用上節之法則, 以求直線之普通方程式, 由此等方程式, 若知直線適當之要件, 則能徑寫其方程式, 恰如有$y=mx+b$, 若知直線之斜度及Y軸之截線, 則能徑寫其方程式也.

定理V. 點及斜度式. (Point-slope form) 通過$P_1(x_1, y_1)$且其斜度爲m之直線, 其方程式爲

(V) $$y-y_1=m(x-x_1).$$

證. 第一步. 假設此直線之方程式爲

(1) $$Ax+By+C=0.$$

第二步. P_1旣在直線內, 則必有

(2) $$Ax_1+By_1+C=0.$$

又

(3) $$-\frac{A}{B}=m.$$

第三步. 解(2)及(3), 以B表A, C之值, 得

$$A=-mB,\quad C=B(mx_1-y_1).$$

第四步. 將A,C之值代入(1),得

$$-mBx+By+B(mx_1-y_1)=0.$$

以B除之,得

$$y-y_1=m(x-x_1).$$

若P_1在Y軸上,則$x_1=0$,$y_1=b$即同於

$$y=mx+b.$$

46. 以截線表直線之方程式. 本節所論,乃以兩點定直線之式,且先論在x,y兩軸時.故若平行一軸及通過原點之直線,則本節定理,不能應用.

定理VI. 截線式(Intercept form) 設a,b為X,Y兩軸上之截線,則直線之方程式為

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \tag{VI}$$

證. 第一步. 假設此直線之方程式為

$$Ax+By+C=0. \tag{1}$$

第二步. 準截線之定義,(13頁)$(a,0)$,$(0,b)$兩點必在直線內.故得

$$Aa+C=0, \tag{2}$$
$$Bb+C=0. \tag{3}$$

第三步. 解(2),(3),以C表A,B之值,得

$$A=-\frac{1}{b}C,\ B=-\frac{1}{b}C.$$

第四步. 以A,B之值代入(1),則

$$-\frac{1}{a}Cx-\frac{1}{b}Cy+C=0.$$

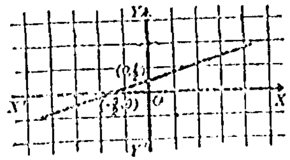
以C除之,即得

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

例1．試改直線方程式$2x-6y+3=0$爲截線式，并作圖．

解．移項，得

$$2x-6y=-3.$$



以-3除之，得

$$\frac{2x}{-3}+2y=1$$

則

$$\frac{x}{-\frac{3}{2}}+\frac{y}{\frac{1}{2}}=1.$$

則

$$a=-\tfrac{3}{2},\ b=\tfrac{1}{2}.$$

先作$(-\frac{3}{2},0)$，$(0,\frac{1}{2})$兩點，以直線通過之，則得．

47．通過已知兩點之直線之方程式．

定理VII．兩點式(Two-points form)．通過$P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$之直線，其方程爲

$$\text{(VII)}\qquad \frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

證．命此直線之方程爲

$$(1)\qquad Ax+By+C=0.$$

P_1，P_2既在直線上，故得

$$(2)\qquad Ax_1+By_1+C=0.$$

$$(3)\qquad Ax_2+By_2+C=0.$$

用93頁之法則第三步第四步，即由(1)，(2)，(3)以消去A，B，C．然本題則以下法爲便．

由(1)減去(2)，得

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)=0,$$

或

$$(4)\qquad A(x-x_1)=-B(y-y_1).$$

再由(3)減去(2)，則得

$$(5)\qquad A(x_2-x_1)=-B(y_2-{}_1y).$$

以(5)除(4)，得

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

推論. 三點同在一直線內，其必要之要件為

$$\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y_3-y_1}{y_2-y_1}.$$

因此式為P_3在連P_1，P_2之直線上必要之要件.

問題 21.

1. 於習題20第一題所列諸直線，試於(V)，(VI)，(VII)三中引用相當之式，以求其方程式.

2. 求下列諸直線之方程式，并作圖.

(a) 斜度$=3$，且通過原點. 答. $3x-y=0$.

(b) 通過$(3,-2)$，$(0,-1)$. 答. $x+3y+3=0$.

(c) 截線$a=4$，$b=-3$. 答. $3x-4y-12=0$.

(d) $b=5$斜度$=3$. 答. $3x-y+5=0$.

(e) 通過$(1,-2)$，$(3,-4)$. 答. $x+y+1=0$.

(f) $a=-1$，$b=-3$. 答. $3x+y+3=0$.

(g) 通過$(-\frac{1}{2},\frac{3}{2})$斜度$=-\frac{2}{3}$. 答. $4x+6y-7=0$.

(h) 通過$(0,0)$斜度$=m$. 答. $y=mx$.

3. 三角形之角點為$(-3,2)$，$(3,-2)$，$(0,-1)$. 求其各邊之方程式.

答. $2x+3y=0$，$x+3y+3=0$，$x+y+1=0$.

4. 求上題三角形三中線之方程式，并證明三線過於一點.

答. $x=0$，$7x+9y+3=0$，$5x+9y+3=0$.

提示. 證明三中線過於一點時，先求兩中線之交點，再證此交點必在第三中線內.

5. 證明任何三角形之三中線，必過於一點.

提示. 命原點為其一角點，又以其一邊為X軸，則其三角點為$(0,0)$，$(a,0)$，(b,c).

6. 試檢定下列各三點,是否皆在一直線內.

(a) (0,0),(1,1),(7,7). 答. 是.

(b) (2,3),(—4,—6),(8,12). 答. 是.

(c) (3,4),(1,2),(5,1). 答. 否.

(d) $(3,-4),(-6,2),\left(-\frac{3}{2},1\right)$. 答. 否.

(e) $(5,6),\left(\frac{5}{6},1\right),\left(-1,-\frac{6}{5}\right)$. 答. 是.

(f) (7,6),(2,1),(6,—2). 答. 否.

7. 改寫下列諸方程式為截線式,並作其軌跡.

(a) $2x+3y-6=0$.

(b) $x-3y+6=0$.

(c) $3x-4y+9=0$.

(d) $3x+4y+1=0$.

(e) $2x-4y-7=0$.

(f) $7x-6y-3=0$.

8. 於上第三題之三角形,將其各邊之中點以直線連之,試求諸連線之方程式,並證明諸連線與原三角形之邊平行.

答. $4x+6y+3=0$, $x+3y=0$, $x+y=0$.

9. 通過$x+2y=1$, $2x-4y-3=0$之交點及原點之直線,其方程式如何.

答. $x+10y=0$.

10. 證明正方形之對角線,互相正交.

略解. 以相鄰兩邊為x,y軸,並命其邊長為a.

11. 證明連三角形兩邊中點之直線,必平行第三邊.

略解. 取適當之坐標軸,令三角形之角點為(0,0),(a,0),(b,c).

12. 通過(3,—4)之直線,且平行$2x-y=3$,其方程式如何.

答. $2x-y-10=0$.

13. 平行$3x+y+1=0$之直線,又通過(—1,4)求其方程式.

答. $3x+y-1=0$.

14. 平行四邊形之兩邊為$2x+3y-7=0$, $x-3y+4=0$又其一角點為(3,2),試求其他兩邊之方程式.

答. $2x+3y-12=0$, $x-3y+3=0$.

15. 垂直$x+2y=1$且通過(—2,3)之直線,其方程式如何.

答. $2x-y+7=0$.

16. 證明無論k值如何，$x-2y=0$，$x+2y-8=0$，$x+2y-8+k(x-2y)=0$三直線，必相遇於一點。

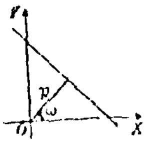
17. 引用35頁定理V及53頁法則，以求(V)(VII)兩式。

18. 用53頁之法則及相似三角形之邊成比例之定理，求(VI)及(VII)。

19. 試引用直角三角形銳角正切之定義及53頁之法則以求

$y=mx+b$及(V)。

20. 求直線之方程式以p及ω表之，而p為原點至直線之垂直距離，ω為垂線正方向與X軸之交角。



提示. 解左圖之直角三角形求截線以p及ω表之，然後代入(VI)。

21. 設x及y為常數m為變數，(V)之軌跡為何?

22. 設a為常數b為變數(VI)之軌跡為何?

23. 寫通過(2，-1)之一切直線之方程式。

24. 寫一切之直線方程式，與在X軸上截線為3。

25. 寫兩個形式各異之直線方程式，其在Y軸之截線為-2。

26. 試寫一方程，以表凡斜度$=-\frac{1}{2}$之直線。

27. 證明若x，y兩軸非正交而成ω角，則$y=mx+b$變為

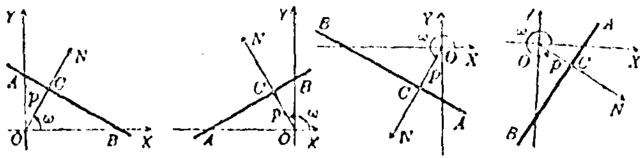
$$y=\frac{\sin\alpha}{\sin(\omega-\alpha)}x+b.$$

28. 證明若x，y兩軸成ω角，則傾斜角為α且通過$P_1(x_1,y_1)$之直線，其方程式為 $y-y_1=\frac{\sin\alpha}{\sin(\omega-\alpha)}(x-x_1)$。

29. 證明(VI)，(VII)兩式，於斜坐標軸亦合。

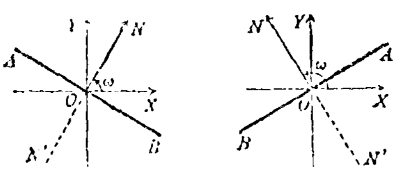
48. <u>以法線表直線之方程式</u>. 上數節所論之直綫,皆以兩點或一點及一方向而定,此等法於初等幾何學,亦常用之,本節所論定直綫之法,乃專屬於解析幾何學.

設AB為任意之直綫,又自原點作AB之垂綫ON,交AB於C,設由O至N為ON之正方向,即以由原點向直綫為正.再命OC之長為p,以XON角為ω,計算之正負,與三角法相同,即以OX為首綫,以ON為終綫,則按圖可知任何直綫之位置,必以ω及p之值而定,且p為正.



$\omega<2\pi$.

反之,非$p=0$時任何直線,必決定p之正值,及ω小於2π之正值,



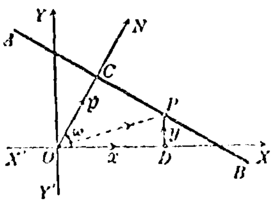
然當$p=0$時則AB直線通過原點上所述者,均不能決定.因ω為XON或為XON'均可,故當$p=0$時,須假定$\omega<\pi$,且以向上為ON之正方向.

注方向線OX與ON間之角ω與第28頁之規定不同.

定理 VIII. **法線式**※(Normal form) 直線之法線式爲

(VIII) $$x\cos\omega+y\sin\omega-p=0.$$

式中 p 爲自原點至直線之垂直距離或法線．ω 爲垂線與 OX 之正方向間之正角．



證． 命 P 爲 AB 直線上任意一點．

AB 既正交 ON，則 OP 在 ON 上之投影等於 p．(29 頁，定義) 又準投影第二定理(48 頁)．OP 在 ON 上之投影等於 OD 及 DP 之投影之和．是以

(1) $$OD\text{ 之投影}+DP\text{ 之投影}=p.$$

準投影第一定理．(30 頁)則

(2) $$OD\text{ 在 }ON\text{ 上之投影}=OD\cos\omega=x\cos\omega$$

(3) $$DP\text{ 在 }ON\text{ 上之投影}=DP\cos\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)=y\sin\omega.$$

因DP與ON兩方向直線所成之角等於OY與ON所成之角，即等於$\frac{\pi}{2}-\omega$．

由(2)，(3)代入(1)，則得

$$x\cos\omega+y\sin\omega-p=0 \qquad \text{Q.E.D.}$$

欲化已知方程式

(4) $$Ax+By+C=0$$

爲法線式，必先求 ω 及 p 之值，以令(4)之軌跡，同於

(5) $$x\cos\omega+y\sin\omega-p=0$$

※此方程式用第九章之法線定義表明之較爲清楚．

再準 88 頁定理 III 可知其相當之係數，必成正比例，則

$$\frac{\cos\omega}{A}=\frac{\sin\omega}{B}=\frac{-p}{C}.$$

設此比等於 r，則

(6) $$\cos\omega=rA,$$

(7) $$\sin\omega=rB,$$

(8) $$-p=rC.$$

欲求 r，則將(6)，(7)平方之，相加，得

$$\sin^2\omega+\cos^2\omega=r^2(A^2+B^2).$$

但 $$\sin^2\omega+\cos^2\omega=1;$$

故 $$r^2(A^2+B^2)=1,\text{或}$$

(9) $$r=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}.$$

欲定 r 之正負，則須考察(8)，p 既恆為正，則 r，C 必異號，若 $C=0$ 時，則 $p=0$ 由上述，此時 ω 必假定小於 π，則 $\sin\omega$ 由(7)r，B 必同號。

將 r 之值代入(6)，(7)，(8)，則得

$$\cos\omega=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}},\ \sin\omega=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}},p=-\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

故得(5)為

(10) $$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y+\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0.$$

此即(4)之法線式，總上所論，則得下之

<u>法則.</u> 而變 $Ax+By+C=0$ 為法線式

第一步. 先求 $\sqrt{A^2+B^2}$ 之數值.

第二步. 上步所得數值之符號，必與 C 相反，若 $C=0$，則與 B 相同.

第三步. 以第二步所得之數除已知方程式，即得所求之法線式.

法線式之便利有二.第一點,任何直線,均可以法線式表之,即使平行坐標軸或通過原點之直線,亦不致失其効用.第二點,在下節內可知由法線式,則易知一點至一直線之距離.

問題 22.

1. 當(1) $\sin\omega$, $\cos\omega$ 俱正.(2)俱負.(3) $\sin\omega$ 為正, $\cos\omega$ 為負.(4) $\sin\omega$ 為負 $\cos$ 為正時, ON 當在第幾象限內.

2. 求下諸直線方程.并作圖.

(a) $\omega=0, p=5$. 答. $x=5$.

(b) $\omega=\frac{3\pi}{2}, p=3$. 答. $y+3=0$.

(c) $\omega=\frac{\pi}{4}, p=3$. 答. $\sqrt{2}x+\sqrt{2}y-6=0$.

(d) $\omega=\frac{2\pi}{3}, p=2$. 答. $x-\sqrt{3}y+4=0$.

(e) $\omega=\frac{7\pi}{4}, p=4$. 答. $\sqrt{2}x-\sqrt{2}y-8=0$.

3. 改下諸方程為法線式.并求 p 及 ω.

(a) $3x+4y-2=0$. 答. $p=\frac{2}{5}$, $\omega=\cos^{-1}\frac{3}{5}=\sin^{-1}\frac{4}{5}$.

(b) $3x-4y-2=0$ 答. $p=\frac{2}{5}$, $\omega=\cos^{-1}\frac{3}{5}=\sin^{-1}(-\frac{4}{5})$.

(c) $12x-5y=0$. 答. $p=0$, $\omega=\cos^{-1}\left(-\frac{12}{13}\right)=\sin^{-1}\frac{5}{13}$.

(d) $2x+5y+7=0$.

答. $p=\frac{7}{+\sqrt{29}}$, $\omega=\cos^{-1}\left(\frac{2}{-\sqrt{29}}\right)=\sin^{-1}\left(\frac{5}{-\sqrt{29}}\right)$.

(e) $4x-3y+1=0$. 答. $p=\frac{1}{5}$, $\omega=\cos^{-1}(-\frac{4}{5})=\sin^{-1}\frac{3}{5}$.

(f) $4x-5y+6=0$.

答. $p=\frac{6}{+\sqrt{41}}$, $\omega=\cos^{-1}\left(\frac{4}{-\sqrt{41}}\right)=\sin^{-1}\left(\frac{5}{+\sqrt{41}}\right)$.

4. 試求由原點至下列諸直線之垂直距離.

(a) $12x+5y-26=0$. 答. 2.

(b) $x+y+1=0$. 答. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

(c) $3x-2y-1=0$. 答. $\frac{1}{13}\sqrt{13}$.

5. 當(a) $\frac{\pi}{2}<\omega<\pi$, (b) $\pi<\omega<\frac{3\pi}{2}$, (c) $\frac{3\pi}{2}<\omega<2\pi$, (d) $p=0, 0<\omega<\frac{\pi}{2}$時.

試求(VIII).

6. p 及 ω 為何值時,則(VIII)之軌跡平行 x 軸? y 軸?通過原點?

7. 凡斜度 $=-2$, 且距原點 5 諸直線之方程式如何?

答. $2\sqrt{5}x+\sqrt{5}y-25=0, 2\sqrt{5}x+\sqrt{5}y+25=0$.

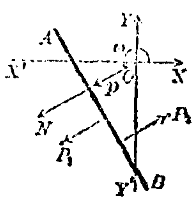
8. 通過 (5,10)且距原點 10 諸直線之方程式如何?

答. $y=10, 4x+3y=50$.

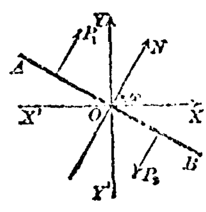
9. 若 p 為常數, ω 為獨變數(VIII)之軌跡為何?若 ω 為常數, p 為獨變數又如何?

10. 試作一方程以表凡距原點 5 之直線.

49. 由直線至一點之距離. 上節所論,由原點 O 至 AB 之垂線 ON,因 0 向 AB 為正,當 AB 通過原點時,則以向上為正. 凡



(1)



(2)

AB 之垂線. 其正負必與 ON 同. 故從直線 AB 至一點 P_1 之距離、若 P_1 不與原點同在直線之一旁則為正. 若 P_1 與原點同在直線之一旁. 則此距離為負. 若 AB 通過原點 則由 AB 至 P_1 之距離, 以向上為正, 向下為負.

於下圖, 自 AB 至 P_1 之距離為正. 自 AB 至 P_2 之距離為負.

定理IV. 由直線

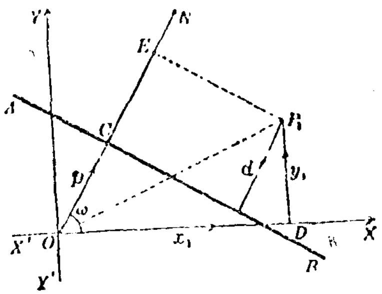
$$x\cos\omega+y\sin\omega-p=0$$

至一點 $P_1(x_1, y_1)$ 之距離 d. 為

(IX) $$d=x_1\cos\omega+y_1\sin\omega-p.$$

證. 命 AB 為已知直線, ON 為其垂線. 由第二投影定理, (48頁)則得

OP_1 在 ON 上之投影 $=OD$ 在 ON 上之投影 $+DP_1$ 在 ON 上之投影.



由圖, OP_1 在 ON 上之投影

$$=OE=p+d.$$

又準第一投影定理, (30頁)則得

OD 在 ON 上之投影

$$=OD\cos\omega=x_1\cos\omega$$

DP_1 在 ON 上之投影 $=DP_1\cos\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)=y_1\sin\omega$.

故 $$p+d=x_1\cos\omega+y_1\sin\omega,$$

$$\therefore d=x_1\cos\omega+y_1\sin\omega-p. \qquad \text{Q.E.D.}$$

從一已知直線至一已知點, 求其距離之法則.

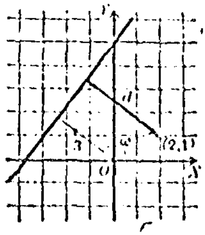
第一步. 先改已知直線之方程式為法線式.

第二步. 將已知點之坐標代入法線式之 x, y, 即得所求之距離.

結果之符號可以表明點在線何邊.

例1. 試求自直線 $4x-3y+15=0$ 至$(2,1)$之距離.

解. 第一步. 改已知方程為法線式,得



$$-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-3=0.$$

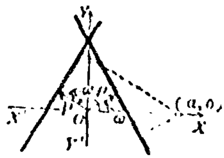
第二步. 以2代x,以1代y, 則得

$$d=-\frac{4}{5}\times 2+\frac{3}{5}(1)-3=-4.$$

說明負號為何意義?

例2. 一等腰三角形,其兩腰至底之任何點距離之和為常數. 試證之.

解. 以底之中點為原點,以底為x軸. 則自兩腰至原點之距離相等,而兩ω互為補角. 是以若兩等邊之一之法線式為



$$x\cos\omega+y\sin\omega-p=0,$$

則其他之法線式,必為

$$x\cos(\pi-\omega)+y\sin(\pi-\omega)-p=0,$$

即

$$-x\cos\omega+y\sin\omega-p=0,$$

命$(a,0)$為底上任意一點,則自兩等邊至$(a,0)$之距離,為$a\cos\omega-p$及$-a\cos\omega-p$,其和為$-2p$,故為常數.

問　題　23.

1. 求其距離,自

(a) $x\cos45^\circ+y\sin45^\circ-\sqrt{2}=0$至$(5,-7)$.　答. $-2\sqrt{2}$.

(b) $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-1=0$至$(2,1)$.　答. $-\frac{3}{5}$.

(c) $3x+4y+15=0$至$(-2,3)$.　答. $-\frac{21}{5}$.

(d) $2x-7y+8=0$至$(3,-5)$.　答. $-\frac{49}{+\sqrt{53}}$.

(e) $x-3y=0$至$(0,4)$.　答. $\frac{12}{+\sqrt{10}}$.

2. 原點與$(3,-2)$是否同在$x-y+1=0$之一旁?　答. 是.

3. 直線 $2x+3y+2=0$ 是否通過原點及$(-2,3)$? 答. 否.

4. 由 $2x+3y=0$, $x+3y+3=0$, $x+y+1=0$ 三直線合成三角形.試求其高. 答. $\frac{3}{\sqrt{13}}$, $\frac{6}{\sqrt{10}}$, $\sqrt{2}$.

5. 試求自直線 $Ax+By+C=0$ 至 $P_1(x_1, y_1)$之距離.

答. $\frac{Ax_1+By_1+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$.

6. 當(a)$p=0$, $\omega<\frac{\pi}{2}$, (b) $\frac{\pi}{2}<\omega<\pi$, (c)$\pi<\omega<\frac{3\pi}{2}$, (d) $\frac{3\pi}{2}<\omega<2\pi$ 時.試証明定理 IX.

7. 求至 $3x-4y+1=0$ 及 $4x+3y-1=0$ 等距離諸點之軌跡.

答. $7x-y=0$, $x+7y-2=0$.

8. 某點距 $12x+5y-1=0$ 為距 y 軸之兩倍,試求其軌跡之方程式. 答. $14x-5y+1=0$.

9. 某點距 $4x-3y+1=0$ 為距 $5x-12y=0$ 之 k 倍.試求此點軌跡之方程式. 答. $(52-25k)x-(39-60k)y+13=0$.

10. 求上題兩直線之交角之平分線.

答. $77x-99y+13=0$, $27x+21y+13=0$.

11. 求上列各對直線間之距離.

(a) $\begin{cases} y=2x+5, \\ y=2x-3. \end{cases}$ 答. $\frac{8}{\mp\sqrt{5}}$. (c) $\begin{cases} 2x-3y+4=0, \\ 4x-6y+9=0. \end{cases}$ 答. $\frac{1}{2\sqrt{13}}$.

(b) $\begin{cases} y=-3x+1, \\ y=-3x+4. \end{cases}$ 答. $\frac{3}{\mp\sqrt{10}}$. (d) $\begin{cases} y=mx+3, \\ y=mx-3. \end{cases}$ 答. $\frac{6}{\mp\sqrt{1+m^2}}$.

12. 試準定理 IX, 以求直線之法線式.

13. 等腰三角形其兩腰上之高必等,試証明之.

14. 試証明等邊三角形之三高俱相等.

15. 証明自等邊三角形之三邊至任意一點之三距離之和必為常數.

提示. 取三角形之中心為原點,且令 x 軸與一邊平行.

16. 試求下列各三直線所成三角形之面積.

(a) $2x-3y+30=0, x=0, x+y=0$. 答. 30.

(b) $x+y=2, 3x+4y-12=0, x-y+6=0$. 答. $\frac{4}{7}$.

(c) $3x-4y+12=0, x-3y+6=0, 2x-y=0$. 答. $3\frac{3}{5}$.

(d) $x+3y-3=0, 5x-y-15=0, x-y+1=0$. 答. 8.

17. 作下列諸直線合成四邊形,并求其面積.

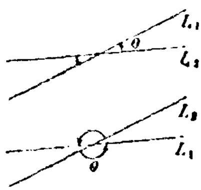
(a) $x=y, y=6, x+y=0, 3x+2y-6=0$. 答. $16\frac{4}{5}$.

(b) $x+2y-5=0, y=0, x+4y+5=0, 2x+y-4=0$. 答. 18.

(c) $2x-4y+8=0, x+y=0, 2x-y-4=0, 2x+y-3=0$.

答. $4\frac{71}{120}$.

60. 一直線與第二直線之交角. 前已說明兩方向直線間之角.(28頁)即是兩直線之正方向所夾之角. 然由方程式所作成之直線,其方向之正負,並無一定. 且任何相交之兩直線,其間必有相等之兩對角. 今定爲凡一直線與第二直線之交角, 必以由第二直線至第一直線之角爲正.



是以凡無方向之一直線 L_1, 與另一直線 L_2 之交角, 必曰一直線與第二直線之交角; 不能祗言曰兩直線間之角, 然則計量角度之法,合 18 頁 28 頁並此而三矣.

定理X. 直線

$$L_1: A_1x+B_1y+C_1=0$$

與

$$L_2: A_2x+B_2y+C_2=0$$

之交角爲

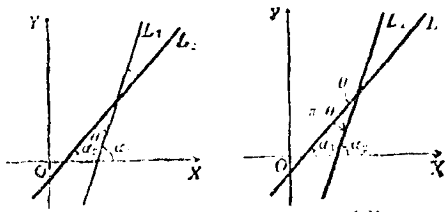
(X) $$\tan\theta=\frac{A_2B_1-A_1B_2}{A_1A_2+B_1B_2}.$$

證. 命α_1, α_2爲L_1, L_2之傾角;而三角形兩內角之和,必等於第三角之外角. 故於(1)圖,得

$$\alpha_1=\theta+\alpha_2 \text{ 或 } \theta=\alpha_1-\alpha_2$$

於(2)圖,得

$$\alpha_2=\pi-\theta+\alpha_1 \text{ 或 } \theta=\pi+(\alpha_1-\alpha_2)$$



(1) (2)

又準(20頁,5).

$$\tan(\pi+\phi)=\tan\phi,$$

無論何種皆得

$$\tan\theta=\tan(\alpha_1-\alpha_2)=\frac{\tan\alpha_1-\tan\alpha_2}{1+\tan\alpha_1\tan\alpha_2}. \quad \text{(準20頁,13)}$$

但$\tan\alpha_1$爲L_1之斜度,$\tan\alpha_2$爲L_2之斜度,故得(86頁推論I)

$$\tan\theta=\frac{-\frac{A_1}{B_1}+\frac{A_2}{B_2}}{1+\left(-\frac{A_1}{B_1}\right)\left(-\frac{A_2}{B_2}\right)}.$$

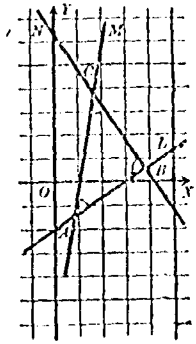
簡之,得 $$\tan\theta=\frac{A_2B_1-A_1B_2}{B_1A_2+B_1B_2}.$$ Q.E.D.

推論. 設m_1, m_2爲兩直線之斜度,則第一直線與第二直線之交角,爲

$$\tan\theta=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}.$$

例1. 由下三直線所成之三角形,求其三內角.

$L: 2x-3y-6=0$,
$M: 6x-y-6=0$,
$N: 6x+4y-25=0$.



解. 先作三直線以成 ABC 三角形. A 爲 M 與 L 之交角. 按諸定理X. M 與 L_1 相當, L 與 L_2 相當,則

$$A_1=6,\ B_1=-1;$$

$$A_2=2,\ B_2=-3.$$

故得

$$\tan A=\frac{A_2B_1-A_1B_2}{A_1A_2+B_1B_2}=\frac{-2+18}{12+3}=\frac{16}{15},$$

$$\therefore A=\tan^{-1}\left(\frac{16}{15}\right).$$

B 爲 L 與 N 之交角,準 87 頁推論 III,得 $B=\frac{\pi}{2}$.

C 爲 N 與 M 之交角,故

$$\tan C=\frac{A_2B_1-A_1B_2}{A_1A_2+B_1B_2},$$

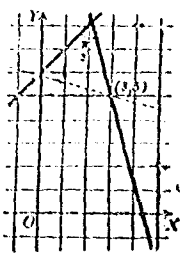
而 $$A_1=6,\ B_1=4;\quad A_2=6,\ B_2=-1.$$

$$\therefore\ \tan C=\frac{24+6}{36-4}=\frac{30}{32}=\frac{15}{16},$$

$$\therefore C=\tan^{-1}\left(\frac{15}{16}\right).$$

所得三角之值,是否合理,証之如下.

既 $B=\frac{\pi}{2}$,則 $A=\frac{\pi}{2}-C$,準(20頁6,19頁1)必有 $\tan A=\cot C=\frac{1}{\tan C}$. 以所得 A,C 之值代之亦合,故知無誤也.



例2. 通過(3,5)之直線 L,與另一直線 $x-y+6=0$ 成 $\frac{\pi}{3}$ 角,試求 L 之方程式.

解. 命 m_1 爲 L 之斜度,準(95頁定理V)其方程式爲

(1) $$y-5=m_1(x-3).$$

今已知直線 $x-y+6=0$ 之斜度等於 1，又 L 旣與此已知直線成 $\frac{\pi}{3}$ 角，此得

$$\tan\frac{\pi}{3}=\frac{m_1-1}{1+m_1}$$

或 $$\sqrt{3}=\frac{m_1-1}{1+m_1}$$

則 $$m_1=\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}=-(2+\sqrt{3})$$

代入(1)，得

$$y-5=-(2+\sqrt{3})(x-3)$$

則 $$(2+\sqrt{3})x+y-(11+3\sqrt{3})=0.$$

本題在平面幾何學有兩種解答，即本題所得之直線，及圖上之虛線，試說明此虛線，何故略去。

問　題　24.

1．試求直線 $3x-y+2=0$ (L_1) 與 $2x+y-2=0$ (L_2) 之交角．又求 L_2 與 L_1 之交角．並證明所得之角互爲補角．　答．$\frac{3\pi}{4}$，$\frac{\pi}{4}$．

2．求下列各第一與第二兩直線之交角．

(a) $2x-5y+1=0$，$x-2y+3=0$．

(b) $x+y+1=0$，$x-y+1=0$．

(c) $3x-4y+2=0$，$x+3y-7=0$．

(d) $6x-3y+3=0$，$x=6$．

(e) $x-7y+1=0$，$x+2y-4=0$．

並作圖．將所求得之角標明之．

答．(a) $\tan^{-1}\left(-\frac{1}{12}\right)$，(b) $\frac{\pi}{2}$，(c) $\tan^{-1}\left(\frac{13}{9}\right)$，(d) $\tan^{-1}(-\frac{1}{2})$，(e) $\tan^{-1}\left(\frac{9}{13}\right)$．

✓3．三角形之邊爲 $x+3y-4=0$，$3x-2y+1=0$，$x-y+3=0$ 求其三內角．

答．$\tan^{-1}\left(-\frac{11}{3}\right)$，$\tan^{-1}(\frac{1}{5})$，$\tan^{-1}(2)$．

提示．先作圖．則可知所求之角爲如何之直線所成．

4．由 $5x-y+3=0$，$y=2$，$x-4y+3=0$ 而成之三角形，其外角如何．　答．$\tan^{-1}(5)$，$\tan^{-1}(-\frac{1}{4})$，$\tan^{-1}\left(-\frac{19}{9}\right)$．

5．合 $2x-3y-6=0$，$3x+4y-12=0$，$x-3y+6=0$ 三直線，以成三角形．試求其一外角及相對之兩內角．並引用 20 頁(12)以證之．

6. $3x+2y-4=0, x-3y+6=0, 4x-3y-10=0$ 爲三角形之邊. 試求其三內角, 并以下式證實之.

$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$ 設 $A+B+C=180°$.

7. 直線通過下列已知點, 并與已知直線成已知角, 試求其方程式.

(a) $(2,1), \frac{\pi}{4}, 2x-3y+2=0$. 答. $5x-y-9=0$.

(b) $(1,-3), \frac{3\pi}{4}, x+2y+4=0$. 答. $3x+y=0$.

(c) $(2,-5), \frac{\pi}{4}, x+3y-8=0$. 答. $x-2y-12=0$.

(d) $(x_1,y_1), \phi, y=mx+b$. 答. $y-y_1=\frac{m+\tan\phi}{1-m\tan\phi}(x-x_1)$.

(e) $(x_1,y_1), \phi, Ax+By+C=0$.

答. $y-y_1=\frac{B\tan\phi-A}{B\tan\phi+B}(x-x_1)$.

8. 已知 $L_1: 3x-4y-3=0$, $L_2: 4x-3y+12=0$ 兩直線. 另有一直線 N, 通過 L_1, L_2 之交點, 并 N 與 L_1 之交角等於 L_2 與 N 之交角. 試求 N 之方程式. 答. $7x-7y+9=0$.

51. 直線系. 含 x, y 之一次方程式中, 若有一個裏變數. (arbitrary constant) 則此方程式, 乃表無限數之直線. 因裏變數每有一値, 此方程式必有一軌跡, 而常數之値不同, 而軌跡亦異故也.

凡含裏變數之一次方程式所表之直線, 名曰直線系. (System of straight line). 凡表示能適合一要件諸直線之方程式, 必含有一裏變數.

例如方程式 $y=2x+b$, 而 b 爲裏變數. 則表一直線系其斜坡爲 2. 又方程式 $y-5=m(x-3)$, 而 m 爲裏變數, 則表一直線系通過 $(3,5)$.

能適合兩要件之直線，求其方程式之第二法則．

第一步． 先寫出能滿足一要件之直線系方程式．

第二步． 測定不定常數之值，以適合第二要件．

第三步． 將第二步所得不定常數之值，代入第一步之方程式即得．

此法則較 44 節之法則應用更便，以後常用之．

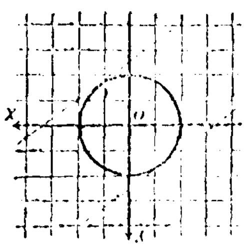
第二步所得實變數之實數值之個數，即能適合兩要件之直線之數．

例 1． 凡斜度爲$\frac{3}{4}$且與圓 $x^2+y^2=4$ 相切之直線，其方程式如何．

解． 第一步． 命方程式

$$y=\tfrac{3}{4}x+b$$

爲斜度等於$\frac{3}{4}$之直線系．



第二步． 將直線及圓之方程式合而解之，以求切點之坐標；即將直線方程式內 y 之值代入圓方程內，得

$$x^2+(\tfrac{3}{4}x+b)^2=4$$

即 $$25x^2+24bx+(16b^2-64)=0$$

而直線與圓祇相切於一點，則 x 祇有一值，即此方程之兩根必相等，其判別式必等於零，即

$$576b^2-100(16b^2-64)=0$$

即 $$b=\pm\tfrac{5}{2}$$

第三步． 以 b 之值代入第一步之方程式，得

$$y=\tfrac{3}{4}x+\tfrac{5}{2}$$

$$y=\tfrac{3}{4}x-\tfrac{5}{2}$$

問　題　25.

1. 試求下列各直線系之方程式.

(a) 通過$(-2,3)$.

(b) 斜度$=-\frac{2}{3}$.

(c) 至原點之距離爲3.

(d) y 軸之截線爲-3.

(e) 通過$(6,-1)$

(f) x 軸之截線爲 6.

(g) 斜度$=\frac{1}{3}$.

(h) y 軸之截線等於 5.

(i) 至原點之距離等於 4.

2. 以下諸方程式所表之直線系其幾何條件爲何?

(a) $2x-3y+4k=0$.

(b) $kx-3y-7=0$.

(c) $x+y-k=0$.

(d) $x+k=0$.

(e) $x+2ky-3=0$.

(f) $2kx-3y+2=0$.

(g) $x\cos\alpha+y\sin\alpha+5=0$.

3. 試求 k 之值.

(a) 直線 $2x-3y+k=0$ 通過 $(-2,1)$.　　答. $k=7$.

(b) 直線 $2kx-5y+3=0$ 之斜度$=3$.　　答. $k=\frac{15}{2}$.

(c) 直線 $x+y-k=0$ 通過$(3,4)$.　　答. $k=7$.

(d) 直線 $3x-4y+k=0$ 在 x 軸之截線$=2$.　　答. $k=-6$.

(e) 直線 $x-3ky+4=0$ 在 y 軸之截線$=-3$.　　答. $k=-\frac{4}{9}$.

(f) 直線 $4x-3y+6k=0$ 與原點之距離$=3$.　　答. $k=\pm\frac{5}{2}$.

✓4. 求斜度等於$-\frac{5}{12}$且割圓 $x^2+y^2=1$ 於一點之直線之方程式.

答. $5x+12y=\pm 13$.

5. 求通過$(1,2)$且割圓 $x^2+y^2=4$ 於一點之直線之方程式.

答. $y=2$, $4x+3y=10$.

6. 通過 $(-2,5)$且與 y 軸成 $45°$ 角之直線, 其方程式如何?

答. $x+y-3=0$.

7. 求通過$(2,-1)$且距原點等於2之直線之方程式.

答. $x=2, 3x-4y=10$.

8. 斜度等於$\frac{3}{4}$之直線至$(2,4)$之距離為2,試求此直線之方程式.

答. $3x-4y=0$.

52. 與一已知直線平行之直線系.

定理XI. 與已知直線

$$Ax+By+C=0$$

平行之直線系,其方程式為

$$\text{(XI)} \qquad Ax+By+k=0$$

式中k為任變數.

證. 凡(XI)所表之直線,必平行此已知直線(87頁推論II). 反之,凡平行此已知直線之直線,必為(XI)所表. 則須證明,凡與已知直線平行之直線,可由彼此直線所通過之一點$P_1(x_1, y_1)$而定之. 今假定P_1在直線(XI)內,則有

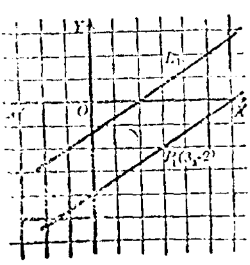
$$Ax_1+By_1+k=0;$$

即

$$k=-Ax_1-By_1.$$

給k以適當之值,可令(XI)之軌跡通過P_1. 是以凡與已知直線平行之直線,均為(XI)所表之.

例1. 求通過$P_1(3,-2)$且平行$L_1: 2x-3y-4=0$之直線之方程式.



解. 用114頁之法則.

第一步. 平行此已知直線之方程式為

$$2x-3y+k=0$$

第二步. 所求之直線既通過P_1,故

$$2\times 3-3(-2)+k=0$$

則

$$k=-12$$

第三步. 以k值代入第一步之方程式,即得所求之方程式.

$$2x-3y-12=0$$

5. 與一已知直線垂直之直線系.

定理XII. 與已知直線

$$Ax+By+C=0$$

垂直之直線系,其方程式為

$$\text{(XII)}\qquad Bx-Ay+k=0$$

式中 k 為變數.

證. 凡(XII)所表之直線,均與已知直線垂直 (87頁推論 III).因 $AB-BA=0$ 故也.反之,凡與已知直線垂直之直線,皆為(XII)所表.則須證明,凡垂直已知直線之直線,可由彼此直線所通過之一點 P_1 (x_1,y_1)而定之.今假定 P_1 為直線(XII)之一點,則有

$$Bx_1-Ay_1+k=0$$

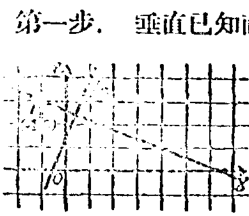
則
$$k=Ay_1-Bx_1$$

給 k 以適當之值,可令(XII)之軌跡通過 P_1;是以凡垂直已知直線之直線,均為(XII)所表之.(XII)內 x,y 之係數即已知直線之方程式內 y,x 之係數,而反其號.

例1. 求通過 $P_1(-1,3)$且垂直 $L_1:5x-2y+3=0$ 之直線之方程式.

解. 用114頁之法則.

第一步. 垂直已知直線之直線系,其方程式為



$$2x+5y+k=0$$

第二步. 所求之直線旣通過 P_1;則有

$$2(-1)+5\times3+k=0$$

則
$$k=-13$$

第三步. 以 k 值代入第一步方程式,即得所求之方程式為

$$2x+5y-13=0$$

問　題　26.

1．求下直線之方程式，通過

(a) $(0,0)$且平行 $x-3y+4=0$.　　答．$x-3y=0$.

(b) $(3,-2)$且平行 $x+y+2=0$.　　答．$x+y-1=0$.

(c) $(-5,6)$且平行 $2x+4y-3=0$.　　答．$x+2y-7=0$.

(d) $(-1,2)$且垂直 $3x-4y+1=0$.　　答．$4x+3y-2=0$.

(e) $(-7,2)$且垂直 $x-3y+4=0$.　　答．$3x+y+19=0$.

√2．有三角形，其頂點爲$(-3,2)$，$(3,-2)$，$(0,-1)$；通過此三點作三直線，各與對邊平行，試求此三直線之方程式．

答．三角形之邊爲 $2x+3y=0$，$x+3y+3=0$，$x+y+1=0$．所求之三直線爲 $2x+3y+3=0$，$x+3y-3=0$，$x+y-1=0$.

√3．於上題三角形，通過頂點作三直線各垂直其對邊，則此三直線之方程式如何．并證明此三直線相遇於一點．

答．$3x-2y-2=0$，$3x-y+11=0$，$x-y-5=0$.

4．於第二題三角形三邊之中點，各作垂線．試求三垂線之方程式．并證明其相遇於一點．

答．$3x-2y=0$，$3x-y-6=0$，$x-y+2=0$.

5．平行四邊形之兩邊爲 $3x-4y+6=0$，$x+5y-10=0$ 其餘兩邊之交點爲 $(4,9)$．試求其方程式．

答．$3x-4y+24=0$，$x+5y-49=0$.

6．三角形之頂點爲$(2,1)$，$(-2,3)$，$(4,-1)$．試求(a)三邊之方程式．(b)三邊中點之垂線方程式．(c)由三頂點至對邊之垂線方程式．并於(b)，(c)兩步證明其各相遇於一點．

7．於任意三角形內，其各邊中點之垂線，必相遇於一點．試說明之．

8．於任意三角形內，自角點至對邊之垂線，必相遇於一點．試證明之．

9．設直線 $Ax+By+C=0$ 通過已知點 $P_1(x_1,y_1)$；試以 A,B 表 C 之值．并證明通過 P_1 之直線方程式爲 $A(x-x_1)+B(y-y_1)=0$.

64. 通過已知兩直線之交點之直線系.

定理XIII. 通過兩已知直線

$$L_1: A_1x+B_1y+C_1=0$$
$$L_2: A_2x+B_2y+C_2=0$$

之交點之直線系其方程式爲

$$A_1x+B_1y+C_1+k(A_2x+B_2y+C_2)=0 \tag{XIII}$$

式中 k 爲襄變數.

證. 凡(XIII)所表之直線,旣盡通過 L_1, L_2 之交點.今設 $P_1(x_1, y_1)$ 爲交點.則(83頁推論).

$$A_1x_1+B_1y_1+C_1=0$$
$$A_2x_1+B_2y_1+C_2=0$$

以 k 乘次式,而加於前式,則得

$$A_1x_1+B_1y_1+C_1+k(A_2x_1+B_2y_1+C_2)=0$$

此乃 P_1 在(XIII)內之要件.

至於凡通過 L_1, L_2 之交點之直線,均爲(XIII)所表.則須另証,其法與(XI),(XII)兩式同.

推論. 若 L_1, L_2 平行,則(XIII)乃表平行 L_1, L_2 之直線系.

因 L_1, L_2 旣平行,則

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2},$$

則
$$\frac{A_1}{kA_2}=\frac{B_1}{kB_2}.$$

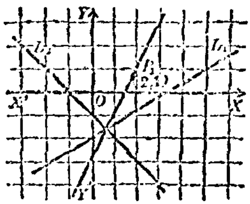
準比例定理,
$$\frac{A_1+kA_2}{A_1}=\frac{B_1+kB_2}{B_1}.$$

故 L_1 必與(XIII)平行.(87頁推論II).

須注意者此方程式(XIII)乃以 k 乘 L_2 之方程式,再與 L_1 之方程式相加而得.

例1. 求通過 $P_1(2,1)$ 及 $L_1: 3x-5y-10=0$ 與 $L_2: x+y+1=0$ 之交點之直線之方程式.

解. 用114頁之法則.



通過兩已知直線交點之直線系之方程式爲

$$3x-5y-10+k(x+y+1)=0$$

P_1 既在此直線內, 則

$$6-5-10+k(2+1+1)=0$$

則
$$k=\frac{9}{4}.$$

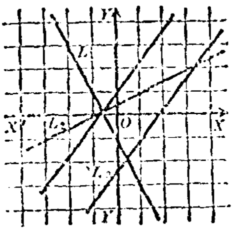
以 k 值代入上式, 即得所求之方程式

$$21x-11y-31=0$$

例2. 求通過 $L_1: 2x+y+1=0$ 及 $L_2: x-2y+1=0$ 之交點. 又平行 $L_3: 4x-3y-7=0$ 之直線之方程式.

解. 用114頁之法則.

凡通過 L_1, L_2 交點之直線系之方程式必爲



$$2x+y+1+k(x-2y+1)=0$$

則
$$(2+k)x+(1-2k)y+(1+k)=0$$

而此直線平行 L_3, 準(87頁推論II)必有

$$\frac{2+k}{4}=\frac{1-2k}{-3}$$

則
$$k=2$$

代入上式, 得

$$4x-3y+3=0$$

定理XIV. 自兩直線

$$L_1: x\cos\omega_1+y\sin\omega_1-p_1=0$$
$$L_2: x\cos\omega_2+y\sin\omega_2-p_2=0$$

至直線

$$L: x\cos\omega_1+y\sin\omega_1-p_1+k(x\cos\omega_2+y\sin\omega_2-p_2)=0$$

內任意點之距離之比爲常數, 且等於 $-k$.

證．命 $P_1(x_1,y_1)$ 爲 L 上任意一點，則

$$x_1\cos\omega_1+y_1\sin\omega_1-p_1+k(x_1\cos\omega_2+y_1\sin\omega_2-p_2)=0,$$

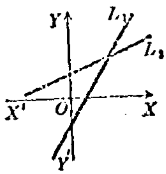
即
$$-k=\frac{x_1\cos\omega_1+y_1\sin\omega_1-p_1}{x_1\cos\omega_2+y_1\sin\omega_2-p_2}.$$

此分數之分子，即自 L_1 至 P_1 之距離，分母自 L_2 至 P_1 之距離．(106 頁定理 IX)．是以 $-k$ 爲自 L_1 及 L_2 至 L 上任意一點之距離．

推論． 若 $k=\pm1$，則 L 爲 L_1,L_2 所作之一角之平分線．故欲求角之平分線方程式．則改其兩邊之方程式爲法線式．而後加之或減之即得．

因 $k=\pm1$ 時，則從 L_1,L_2 至 L 上任何點之距離，恆相等故也．

於 L_1,L_2 兩直線所作諸角，凡原點所在之角，謂之內角(Internal angle)，其鄰角謂之外角，(External angle)．



當 L 在內角時，k 爲負．L 在外角時，則 k 爲正．

若原點在 L_1 或 L_2 內，必須先作圖，而後 k 之正負可由圖而定．

問　　題　　27．

1．試應用本節諸定理以求下列諸直線之方程式，俱通過 $2x-3y+2=0$，$3x-4y-2=0$ 之交點，且

(a) 通過原點．　　答．$5x-7y=0$．

(b) 平行於 $5x-2y+3=0$．　　答．$5x-2y-50=0$．

(c) 正交 $3x-2y+4=0$．　　答．$2x+3y-58=0$．

2．三角形之三邊爲 $2x-3y+1=0$，$x-y=0$，$3x+4y-2=0$；通過頂點作三直線，(a)各與對邊平行．(b)各與對邊垂直．試求其方程式．

答．(a) $3x+4y-7=0, 14x-21y+2=0, 17x-17y+5=0$.

(b) $4x-3y-1=0, 21x+14y-10=0, 17x+17y-9=0$.

√3．試求 $4x-3y-1=0, 3x-4y+2=0$ 所作諸角之平分線之方程式．幷證明此兩直線互相垂直．　答．$7x-7y+1=0, x+y-3=0$.

4．試求 $5x-12y+10=0, 12x-5y+15=0$ 所作諸角之平分線之方程式．

√5．自 $4x-3y+4=0, 5x+12y-8=0$ 兩直線至某點之距離之比，恆爲 13 比 5．試求此點軌跡之方程式．　答．$9x+9y-4=0$.

6．三角形之三邊爲 $4x-3y=12$，$5x-12y-4=0$，$12x-5y-13=0$；試求其三內角之兩等分線．幷證明諸平分線過於一點．

答．$7x-9y-16=0, 7x+7y-9=0, 112x-64y-221=0$.

7．以 $5x-12y=0, 5x+12y+60=0$，$12x-5y-60=0$ 爲邊之三角形，其諸內角之平分線之方程式如何．幷證明其相遇於一點．

答．$2y+5=0, 17x+7y=0, 14x-17y-60=0$.

8．三角形之邊爲 $3x+4y-12=0$，$3x-4y=0$，$4x+3y+24=0$．證明首兩邊所作內角之平分線必與其他兩內角之平分線相遇於一點．

9．求直線通過 $x+y-2=0$，$x-y+6=0$ 之交點．又通過 $2x-y+3=0, x-3y+2=0$ 之交點之方程式．　答．$19x+3y+26=0$.

提示．通過此兩對直線交點之直線系，方程式爲

$$x+y-2+k(x-y+6)=0$$

$$2x-y+3+k'(x-3y+2)=0$$

準 88 頁定理 III．若

$$\frac{1+k}{2+k'}=\frac{1-k}{-1-3k'}=\frac{-2+6k}{3+2k'}.$$

則上兩方程之直線相密合，今命此三比之值爲 ρ，則得

$$1+k=2\rho+\rho k'$$

$$1-k=-\rho-3\rho k'$$

及
$$-2+6k=3\rho+2\rho k'.$$

由此三式以求得 k 之值，代之即易得所求之方程式．

10. 某直線通過 $2x+5y-3=0$, $3x-2y-1=0$ 之交點, 又通過 $x-y=0$, $x+3y-6=0$ 之交點, 求其方程式.

答. $43x-35y-12=0$.

將非平行四邊形之相對各兩邊引長之各相交. 再以直線連此兩交點. 名曰第三對角線. 名此四邊形, 曰 完全四邊形. (Complete quadrilateral) 故此四邊形共有六頂點三對角線.

11. 完全四邊形之邊為 $x+2y=0$, $3x-4y+2=0$, $x-y+3=0$, $3x-2y+4=0$; 試求其三對角線之方程式.

12. 證明任意兩直線之交角之平分線必互相垂直.

13. 任何三角形之內角之平分線必相遇於一點.

55. 直線之補徑式. (Parametric equation) 向上※之直線與坐標軸所作之角 α, β, (28 頁)名曰直線之方向角. (Directed angle). 其餘弦曰方向餘弦, (Directed cosine) 且能適合.

(1) $$\cos^2\alpha+\sin^2\beta=1$$

因(28 頁定理 I) $\cos\beta=\sin\alpha$ 且 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

已知方向角 α, β, 且通過一點 $P_1(x_1, y_1)$, 則此直線已定. 今設 $P(x, y)$ 為此直線上任意一點. 且以 P_1P 之長為 ρ. 則(31 頁定理 III) P_1P 在坐標軸上之投影為

$$x-x_1, \qquad y-y_1;$$

或 $$\rho\cos\alpha, \qquad \rho\cos\beta.$$

※若為水平線假定其方向向右, 而 $\alpha=0$, $\beta=\frac{\pi}{2}$.

所以 $x-x_1=\rho\cos\alpha,\quad y-y_1=\rho\cos\beta;$

則
$$x=x_1+\rho\cos\alpha$$
$$y=y_1+\rho\cos\beta.$$

故得下定理

定理XV. 補徑式 (Parametric form). 方向角為 α, β 且通過已知點 $P_1(x_1, y_1)$ 之直線上任意一點 $P(x, y)$ 之坐標為

$$\text{(XV)}\qquad \begin{cases} x=x_1+\rho\cos\alpha, \\ y=y_1+\rho\cos\beta, \end{cases}$$

式中 ρ 為 P_1P 之變數長.

(XV) 名曰直線之補徑方程式. (Parametric equation) 依 ρ 由 $-\infty$ 變至 $+\infty$ 時, $P(x, y)$ 依正方向作成此直線. 以後所討論之問題, 凡含有自直線內一點至其與另一曲線之交點之距離, 均須應用此式.

定理XVI. 對稱式 (Symmetric form) 凡以直線內一點 $P_1(x_1, y_1)$ 之坐標, 及方向餘弦所表直線之方程式, 為

$$\text{(XVI)}\qquad \frac{x-x_1}{\cos\alpha}=\frac{y-y_1}{\cos\beta}.$$

提示. 將(XV)解之以求 ρ 之值, 再令 ρ 之兩值相等則得.

定理XVII. 直線
$$Ax+By+C=0$$
之方向餘弦為
$$\cos\alpha=\frac{-B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}},\qquad \cos\beta=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}.$$
根之號同於 A.

證. 設 $P_1(x_1, y_1)$ 為已知直線上之一點, 則
$$Ax_1+By_1+C=0$$

從直線之原方程減之，得

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)=0.$$

移項并以$-AB$除之；得

$$\frac{x-x_1}{-B}=\frac{y-y_1}{A}.$$

再以(XVI)除之，則得

$$\frac{\cos\alpha}{-B}=\frac{\cos\beta}{A}.$$

命此方程等於r，則有

$$\cos\alpha=-Br,\quad \cos\beta=Ar.$$

平方而加之，得

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta=(A^2+B^2)r^2$$

但 $$\cos^2\alpha+\cos^2\beta=1$$

故 $$r=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

於是

(2) $$\cos\alpha=\frac{-B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}},\quad \cos\beta=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}.$$

根之符號同於A. *Q.E.D.*

(因直線既向上，則$\beta\leqq\frac{\pi}{2}$，故$\cos\beta$恒爲正.)

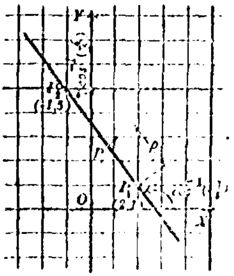
推論. 若$\cos\alpha$，$\cos\beta$與a,b兩數成比例，則

$$\cos\alpha=\frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}},\quad \cos\beta=\frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}.$$

平方根必與b同號.

欲改已知直線之方程式爲對稱式或補徑式，必須知直線上一點之坐標(此事可由60頁之法則而得.)又必須知其方向餘弦.(此事可應用本節定理XVII而得.)如此再應用定理XV及XVI，即可得所求之方程式.

例1. 描補徑方程式為 $x=2-\frac{3}{5}\rho,\ y=1+\frac{4}{5}\rho$ 之直線.



解. 與定理 XV 比較之可知 $P_1(2,1)$ 為直線上之一點. 又若得另一點, 則可作此直線. 先作下表:

ρ	x	y
0	2	1
5	-1	5

故連兩點 $P_1(2,1)$ 及 $P_2(-1,5)$ 之直線即所求之直線.

(x,y) 或 $(2-\frac{3}{5}\rho,\ 1+\frac{4}{5}\rho)$ 為不定點 P 之坐標至 P_1 之距離為變數 ρ.

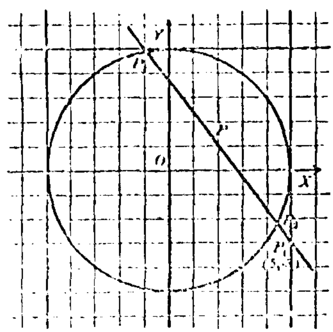
例2. 已知圓之方程 $C: x^2+y^2=25$ 直線之補徑式為 $x=5-\frac{3}{5}\rho$, $y=-3+\frac{4}{5}\rho$; 試求自 $P_1(5,-3)$ 至直線與圓兩交點之距離之積. 并求兩交點間之中點.

解. 準定理 XV, 直線上任意一點之坐標為 $(5-\frac{3}{5}\rho,\ -3+\frac{4}{5}\rho)$. ρ 乃自 P_1 至此任意點之距離. 若此任意點在圓周上, 則有

$$\left(5-\tfrac{3}{5}\rho\right)^2+\left(-3+\tfrac{4}{5}\rho\right)^2=25,$$

簡之, 得

$$(3)\qquad \rho^2-\frac{54}{5}\rho+9=0.$$



此方程之兩根 ρ_1, ρ_2 即自 P_1 至兩交點 P_2, P_3 之距離. 若 $P_2(5-\frac{3}{5}\rho_1,\ -3+\frac{4}{5}\rho_1)$ 在圓上, 則有

$$\left(5-\tfrac{3}{5}\rho_1\right)^2+\left(-3+\tfrac{4}{5}\rho_1\right)^2=25$$

則

$$\rho_1^2-\frac{54}{5}\rho_1+9=0.$$

故 ρ_1 為(3)之一根. 同理可證 ρ_2 亦為(3)之一根. (準 3 頁定理 I). 此兩距離之積等於 9.

兩距離間之中點 等於此兩根和之半, 即等於$\frac{27}{5}$. 是以$x=\frac{44}{25}$, $y=\frac{33}{25}$ 即中點之坐標.

問　題　28.

1. 作下列諸直線.

(a) $\begin{cases} x=2+\frac{4}{5}\rho, \\ y=-1+\frac{3}{5}\rho. \end{cases}$　　(c) $\begin{cases} x=-3-\frac{12}{13}\rho, \\ y=\frac{5}{13}\rho. \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x=1-\frac{5}{13}\rho, \\ y=2+\frac{12}{13}\rho. \end{cases}$　　(d) $\begin{cases} x=-1-\frac{1}{\sqrt{5}}\rho, \\ y=5+\frac{2}{\sqrt{5}}\rho. \end{cases}$

2. 某直線,若取其向上之方向,方向餘弦為 $\cos\alpha$, $\cos\beta$. 則取其向下之方向,其方向餘弦,必為 $-\cos\alpha$, $-\cos\beta$; 試證明之.

3. 於直線 $x=3-\frac{4}{5}\rho$, $y=-2+\frac{3}{5}\rho$ 上, 試求 $\rho=3, -2, 4$, 諸點之坐標.

4. 試求自 $P_1(2,1)$ 至直線 $x=2-\frac{3}{5}\rho$, $y=1+\frac{4}{5}\rho$ 與圓 $x^2+y^2=25$ 兩交點之距離之積, 并說明所得結果之符號.

5. 已知橢圓 $x^2+4y^2=16$ 及直線 $x=x_1-\frac{4}{5}\rho$, $y=y_1+\frac{3}{5}\rho$; 試求一方程式, 其兩根等於自 $P_1(x_1, y_1)$ 至橢圓與直線兩交點之距離.

答. $\frac{52}{25}\rho^2-\frac{8x_1-24y_1}{5}\rho+x_1^2+4y_1^2-16=0$.

6. 在問題 5 內若 P_1 為弦之中點求其條件.

提示. ρ 之兩數值相等, 符號相反.

7. 已知拋物線 $y^2=4x$, 及直線 $x=2+\rho\cos\alpha$, $y=-4+\rho\cos\beta$; 若直線遇拋物線於一點; 求 $\cos\alpha$ 與 $\cos\beta$ 所適合之條件.

答. $\cos^2\alpha+4\cos\alpha\cos\beta+2\cos^2\beta=0$.

8. 設 a, b 為兩數, 且 $a^2+b^2=1$, 試証明 a, b 可為直線之方向餘弦.

9. 用定理 V(95 頁)及定理 I(28 頁)求出方程式(XVI).

10. 證明在(XVI)內比之公共值為 P_1P 之長.

提示. 平方(XVI), 用前項之和及後項之和之定理然後開方.

11. 用問題 10 之方法, 由(XVI)求出方程式(XV).

雜題 1.

1. 求一點在線 $3x-5y+6=0$ 內至兩點 $(3,-4)$ 及 $(2,1)$ 等距離.

2. 通過 $7x+y-3=0$, $3x+6y-11=0$ 兩直線交點之直線, 又與連此交點及原點之直線垂直. 試求其方程式.

3. 通過 $(2,5)$ 之直線, 其在 x, y 兩軸之間之一段, 被此點分成兩等分. 試求此直線之方程式.

4. 通過 $(2,-3)$ 之直線, 其在 $3x+y-2=0$, $x+5y+10=0$ 兩直線間之一段, 被此點分爲兩等分, 試求此直線之方程式.

5. 證明斜方形之兩對角線, 互相垂直.

6. 設 x, y 兩軸非垂直, 而作 ω 角, 試求以在 y 軸之截線 b 及傾角 α 所表之直線方程式.

7. 設 x, y 兩軸作 ω 角, 試求傾角爲 α, 且通過 $P_1(x_1, y_1)$ 之直線方程式.

8. 設 x, y 兩軸作 ω' 角, 試求直線之法線式.

9. 當 x, y 兩軸非垂直時, 試求一直線與他直線所作之角之正切.

10. 證明凡 $m=b$ 之直線, 必通過相同之一點, 并求此點之坐標.

11. 證明凡 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=$ 常數之直線, 必通過相同之一點, 并求此點之坐標.

12. 證明凡 $Ax+By+C=0$ 所表之直線, 若 $A+B+C=0$ 必通過相同之一點, 并求此點之坐標.

13. 求 $2x-3y=0$, $x+4y-2=0$, $2x-3y+\lambda(x+4y-2)=0$, $2x-3y-\lambda(x-4y-2)=0$ 割 x 軸之割點. 又將前兩直線之兩割點, 以直線連之, 証明後兩直線之兩割點內分及外分此連線於相等之比.

14. 試証若 P_1P_2 落於方程 $Ax+By+C=0$ 之軌跡上, 且分 P_1P_2 爲 λ 之點亦落於此方程軌跡上, 則此方程代表一直線.

15. 三角形之邊爲 $2x-3y+12=0$, $x+y=0$, $3x+4y-6=0$; 求其三外角之平分線, 又引長諸平分線, 各與對邊相交, 証明此三交點, 同在一直線內.

16. 求一直線之方程式，此線通過 $Ax+By+C=0$ 及 $A'x+B'y+C'=0$ 之交點；並(a)通過原點；(b)平行於 X 軸；(c)平行於 Y 軸.

17. 若 λ 爲褒變數，其餘字母爲常數，證明線 $(A+\lambda A')x+(B+\lambda B')y+(C+\lambda C')=0$ 經一點.

18. 設已知三直線 $A_1x+B_1y+C_1=0$，$A_2x+B_2y+C_2=0$，$A_3x+B_3y+C_3=0$ 合成一三角形，証明任意直線之方程式 $Ax+By+C=0$ 必可寫爲

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2)+\gamma(A_3x+B_3y+C_3)=0$$

式中 α，β，γ 爲一定之常數.

提示．用 88 頁定理 III.

19. 以直線連 $P_1(1,3)$，$P_2(7,2)$ 兩點，求此連線被直線 $2x-5y+8=0$ 分成兩段之比.

提示．分 P_1P_2 爲兩段，其比等於 λ，此分點之坐標等於 $\left(\frac{1+7\lambda}{1+\lambda}, \frac{3+2\lambda}{1+\lambda}\right)$．但此分點在已知直線上，故代入之，則可得 λ 之值.

20. 求直線 $x+3y-6=0$ 分 $(-3,2)$，$(6,1)$ 之連線兩段之比.

21. 直線 $y=mx-7$ 分 $(3,2)$，$(1,4)$ 之連線兩段之比等於 3:2，求 m.

22. 通過 $(2,-3)$ 之直線，分 $(6,3)$，$(3,-1)$ 之連線兩段之比等於 2:5．求此直線之方程式.

23. 証明自直線 $Ax+By+C=0$ 至 $P_1(x_1,y_1)$ 及 $P_2(x_2,y_2)$ 兩距離之比爲 $\frac{Ax_1+By_1+C}{Ax_2+By_2+C}$.

24. 證明直線 $Ax+By+C=0$ 分連兩點 $P_1(x_1,y_1)$ 及 $P_2(x_2,y_2)$ 之直線爲兩段，其比爲 $-\frac{Ax_1+By_1+C}{Ax_2+By_2+C}$.

25. 由上題以證明任何直線割三角形之三邊 P_1P_2，P_2P_3，P_3P_1 於 L，M，N 三點．則 $\frac{P_1L}{LP_2}\times\frac{P_2M}{MP_3}\times\frac{P_3N}{NP_1}=-1$.

26. 描直線 $2x-3y+5=0$，並指明 $2x-3y+5>0$ 之一切點.

27. 三角形之邊爲 $A_1x+B_1y+C_1=0$，$A_2x+B_2y+C_2=0$，$A_3x+B_3y+C_3=0$；求其面積.

第　五　章

圓及方程式$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

56. 圓之普通方程式. 設(α,β)為圓心之坐標,其半徑為r. 則(58頁定理II)此圓之方程式為

(1) $$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\alpha^2+\beta^2-r^2=0$$

或

(2) $$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$$

若圓心與原點相合,則$\alpha=0,\beta=0$, 而(2)為

(3) $$x^2+y^2=r^2$$

方程式(1)可寫為

(4) $$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0,$$

式中

(5) $$D=-2\alpha,E=-2\beta,F=\alpha^2+\beta^2-r^2.$$

是以任何圓,其方程式必可寫成(4)之形式. 反之凡方程式為(4)之形式者,其軌跡如何,則討論如下.

由(5),得

(6) $$\alpha=-\frac{D}{2},\beta=-\frac{E}{2},r^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4}.$$

α,β必為實數,若D^2+E^2-4F為正,則r亦為實數,而(4)之軌跡為圓.

用60頁之法則以作(4)之軌跡時,先求y,得

(7) $$y=-\frac{E}{2}\pm\sqrt{-x^2-Dx+\left(\frac{E^2-4F}{4}\right)}$$

根號內二次式之判別式,為

$$\Theta=D^2-4(-1)\left(\frac{E^2-4F}{4}\right)=D^2+E^2-4F,$$

此即(6)內r^2之分子也.

若Θ為正，則當 x 之值在兩根之間時，根號內之二次式亦為正，(第11頁定理III)故所論之方程式有軌跡．

若Θ為零，則根號內二次式之兩根俱為實數，且相等，但 x 除此值以外，則次式為負，故所論之方程式，其軌跡為一點$\left(-\frac{D}{2},\ -\frac{E}{2}\right)$．

因 $x=-\frac{D}{2}$時，(7)內之二次式等於零，(2頁)，由(7)得 y 之相當值為$-\frac{E}{2}$，若 r 漸近於零，由(6)得此圓與其圓心$\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$相合．

若Θ為負，無論 x 為任何實值，在(7)內之二次式恆為負，(11頁定理III 及 3 頁定理 II) 故所論之方程無軌跡．

$\Theta=D^2+E^2-4F$ 名曰(4)之判別式．當 $\Theta=0$ 時，則(4)之軌跡為點圓，(Point-circle)即以零為半徑之圓也．

由上所論，得

定理I． 方程式

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0 \tag{I}$$

其判別式為 $\Theta=D^2+E^2-4F$，其軌跡可確定之如下

若Θ為正，則為圓，其心為$\left(-\frac{D}{2},\ -\frac{E}{2}\right)$，半徑為

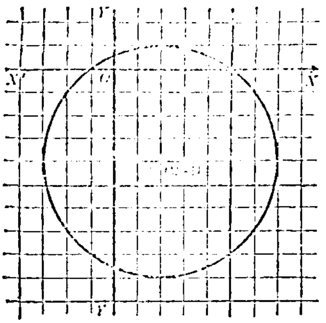
$$r=\tfrac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}=\tfrac{1}{2}\sqrt{\Theta}.$$

若Θ為零，則為一點$\left(-\frac{D}{2},\ -\frac{E}{2}\right)$．

若Θ為負，則不能有軌跡

推論． 若 $E=0$，則(I)之圓心在 x 軸上；$D=0$，則圓心在 y 軸上．故若Θ 為正，方程式 (I) 之軌跡為圓．

例1. 求 $x^2+y^2-4x+8y-5=0$ 之軌跡.



解. 已知方程與(1)比較之,得

$$D=-4,E=8,F=-5.$$

故 $\Theta=16+64+20=100>0$,是以所求之軌跡為圓,其心為$(2,-4)$,半徑為等於 $\frac{1}{2}\sqrt{100}=5$.

方程式 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 名曰 **普通二次方程式**. 因任何二次方程式,必可寫成此形式也.

定理II. 普通二次方程式

$$\text{(II)} \qquad Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

必須 $A=C,B=0,\dfrac{D^2+E^2-4AF}{A^2}$ 為正,則其軌跡為圓.

證. 由上定理I,凡圓之方程式必為(I)之形式,故 x^2,y^2 之係數必相等,xy 項必不存在,若(II)能適合此兩要件,則可寫為

$$x^2+y^2+\frac{D}{A}x+\frac{E}{A}y+\frac{F}{A}=0$$

而此方程之軌跡為圓,必須其判別式 $\dfrac{D^2+E^2-4AF}{A^2}$ 為正.

57. 三要件決定一圓. 任意圓之方程式,必可寫為

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2,$$

或

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0.$$

此兩式均含三個獨立變數，故必須三要件以決定之，且凡圓能適合之要件，則其方程式之諸係數，必有一定之關係。

能適合三要件之圓，求其方程式之法則．

第一步． 設所求之方程式爲

$$(1)\qquad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$$

或

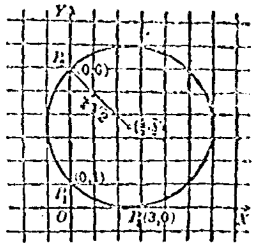
$$(2)\qquad x^2+y^2+Dx+Ey+F=0.$$

第二步． 於 α,β,r（或 D,E,F）之間，求得三個方程式，以表此圓能適合之三要件．

第三步． 將第二步所得之方程式解之，以求 α,β,r（或 D,E,F）．

第四步． 將第三步所得之值，代入(1)或(2)，則得所求之方程式．

例1． 求通過 $P_1(0,1)$，$P_2(6,6)$，$P_3(3,0)$ 三點之圓之方程式．



解． 第一步． 設所求之方程式爲

$$(3)\qquad x^2+y^2+Dx+Ey+F=0.$$

第二步． P_1,P_2,P_3 既均在圓上，則其坐標必能適合圓方程式(3)．代入之，則得

$$(4)\qquad 1+E+F=0,$$

$$(5)\qquad 36+6E+F=0,$$

$$(6)\qquad 9+3D+F=0$$

第三步． 解(4)，(5)，(6)三式，得

$$E=-7,F=6,D=-5.$$

第四步． 將 E,F,D 之值代入(3)，則得所求圓之方程式爲

$$x^2+y^2-5x-7y+6=0.$$

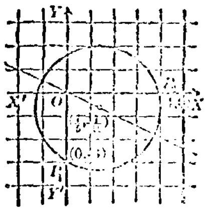
準定理 1. 此圓之半徑等於 $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. ※圓心之坐標等於$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

例 2. 通過$P_1(0,-3)$, $P_2(4,0)$之圓，其圓心在直線 $x+2y=0$上. 求其方程式.

解. 第一步. 設所求之方程式爲

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0. \tag{7}$$

第二步. P_1, P_2既在圓周上，則必有



$$9-3E+F=0 \tag{8}$$

$$16+4D+F=0 \tag{9}$$

而此圓之心爲$\left(-\frac{D}{2},\ -\frac{E}{2}\right)$，既在已知直線 $x+2y=0$ 上，代之，則得

$$-\frac{D}{2}+2\left(-\frac{E}{2}\right)=0$$

即

$$D+2E=0 \tag{10}$$

第三步. 解(8), (9), (10)三式，得

$$D=-\frac{14}{5},\quad E=\frac{7}{5},\quad F=-\frac{24}{5}.$$

第四步. 將 D, E, F 之值代入(7)，得

$$x^2+y^2-\frac{14}{5}x+\frac{7}{5}y-\frac{24}{5}=0$$

即

$$5x^2+5y^2-14x+7y-24=0$$

其圓心爲$\left(\frac{7}{5},\ -\frac{7}{10}\right)$，半徑爲$\frac{1}{2}\sqrt{29}$.

問題 29.

1. 求下列諸圓之方程式，其圓心爲

(a) $(0,1)$半徑$=3$. 答. $x^2+y^2-2y-8=0$.

(b) $(-2,0)$半徑$=2$. 答 $x^2+y^2+4x=0$.

(c) $(-3,4)$半徑$=5$. 答. $x^2+y^2+6x-8y=0$.

(d) $(\alpha,0)$半徑$=\alpha$. 答. $x^2+y^2-2\alpha x=0$.

(e) $(0,\beta)$半徑$=\beta$. 答. $x^2+y^2-2\beta y=0$.

(f) $(0,-\beta)$半徑$=\beta$ 答. $x^2+y^2+2\beta y=0$.

※求此半徑甚易，因以單位爲邊作正方形其對角線之長爲$\sqrt{2}$，若一線之長爲$\sqrt{n}$，可作一半圓其直徑爲$n+1$於距一端1單位之處立垂線，此垂線之長爲$\sqrt{n}$.

2. 求下列諸方程之軌跡

(a) $x^2+y^2-6x-16=0$.

(b) $3x^2+3y^2-10x-24y=0$.

(c) $x^2+y^2=0$.

(d) $x^2+y^2-8x-6y+25=0$.

(e) $x^2+y^2-2x+2y+5=0$.

(f) $x^2+y^2-6x+4y-5=0$.

(g) $(x+1)^2+(y-2)^2=0$.

(h) $7x^2+7y^2-4x-y=3$.

(i) $x^2+y^2+2ax+2by+a^2+b^2=0$.

(j) $x^2+y^2+16x+100=0$.

3. 求下諸圓之方程式.

(a) 中心為(2,3)且通過(3,—2)
答. $x^2+y^2-4x-6y-13=0$.

(b) 通過三點(0,0),(8,0),(0,—6).
答. $x^2+y^2-8x+6y=0$.

(c) 通過三點(4,0),(—2,5),(0,—3).
答. $19x^2+19y^2+2x-47y-312=0$.

(d) 通過兩點(3,5),(—3,7)其圓心在 x 軸上.
答. $x^2+y^2+4x-46=0$.

(e) 通過兩點(4,2),(—6,—2)其圓心在 y 軸上.
答. $x^2+y^2+5y-30=0$.

(f) 通過兩點(5,—3),(0,6)其圓心在直線 $2x-3y-6=0$ 上.
答. $3x^2+3y^2-114x-64y+276=0$.

(g) 其圓心為(—1,—5)且與 x 軸相切.
答. $x^2+y^2+2x+10y+1=0$.

(h) 通過兩點(1,0),(5,0)且與 y 軸相切.
答. $x^2+y^2-6x\pm2\sqrt{5}y+5=0$.

(i) 通過三點(0,1),(5,1),(2,—3).
答. $2x^2+2y^2-10x+y-3=0$.

(j) 以連兩點(3,2),(—7,4)之直線為直徑.
答. $x^2+y^2+4x-6y-13=0$.

(k) 以連兩點(3,—4),(2,—5)之直線為直徑.
答. $x^2+y^2-5x+9y+26=0$.

(l) 三角形之外切圓,而此三角形之邊為 $x-6=0$, $x+2y=0$, $x-2y=8$.
答. $2x^2+2y^2-21x+8y+60=0$.

(m) 通過三點(1,—2),(—2,4),(5,—6),并引用98頁之推論以解釋所得之結果.

(n) 以 $4x+3y-12=0$, $y-2=0$, $x-10=0$ 為邊之三角形之內切圓.
答. $36x^2+36y^2-516x+60y+1585=0$.

4. 試作 $x^2+y^2-2x+4y+k=0$ 之軌跡,命 $k=0,2,4,5,-2,-4,-8$,并說明 k 之何值須略去.
答. $k>5$.

5. 設 D, E 不變，而 F 漸變，則 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 之軌跡為何?

6. 當 k 為何值，則 $x^2+y^2-4x+2ky+10=0$ 可有軌跡.

答. $k>+\sqrt{6}, k<-\sqrt{6}$.

7. 當(a) F 為正,(b) F 為零,(c) F 為負時，則 k 為何值，而 $x^2+y^2+kx+F=0$ 可有軌跡?

答. (a) $k>2\sqrt{F}$, 及 $k<-2\sqrt{F}$; (b)及(c) k 值無論如何，俱有軌跡.

8. 上題之方程式，其點圓有若干?　　答. (a)2,(b)1,(c)無.

9. 設 ω 為 x, y 兩軸之交角，而不等於 90°; 試求圓之方程式.

答. $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+2(x-\alpha)(y-\beta)\cos\omega=r^2$.

10. 凡以 5 為半徑，其心在(a) x 軸上,(b) y 軸上之任何圓，試求一方程式以表之.

11. 當下列三方程之軌跡為點圓時，試求 k 可有之值之個數.

(a) $x^2+y^2+4kx-2y+5k=0$,

(b) $x^2+y^2+4kx-2y-k=0$,

(c) $x^2+y^2+4kx-2y+4k=0$.

答. (a)兩值,(b)無,(c)一值.

12. 設 $k=\pm1, \pm3, \pm\frac{1}{3}, -5, -\frac{1}{5}$; 試作三圓 $x^2+y^2+4x-9=0$, $x^2+y^2-4x-9=0$, $x^2+y^2+4x-9+k(x^2+y^2-4x-9)=0$, 並說明 k 有無當略去之值.

13. 設 k 值與上題同，試作三圓 $x^2+y^2+4x=0$, $x^2+y^2-4x=0$, $x^2+y^2+4x+k(x^2+y^2-4x)=0$, 並說明 k 有無當略去之值.

14. 設 $k=-3, -\frac{1}{3}, -5, -\frac{1}{5}, -\frac{7}{3}, -\frac{3}{7}, -1$, 試作三圓 $x^2+y^2+4x+9=0$, $x^2+y^2-4x+9=0$, $x^2+y^2+4x+9+k(x^2+y^2-4x+9)=0$ 說明 k 之何值當略去.

58. <u>圓系(Systems of circles)</u> 於方程式

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

若有一係數漸變時，則表一系統之圓，名曰圓系. 例如方程式

$$x^2+y^2-r^2=0$$

若 r 為不定常數，則此方程式乃表無數之同心圓.

普通圓系方程式，與直線系方程式(119 頁, XIII)相似，今先論之.

定理III. 已知兩圓方程式

$$C_1: x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$$

$$C_2: x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$$

則

(III)　$x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1+k(x^2+y^2+D_2x+Ey_2+F_2)=0$

之軌跡,仍為圓,惟 $k=-1$ 時 則為一直線.

證. 將(III)改寫為

$$(1+k)x^2+(1+k)y^2+(D_1+kD_2)x+(E_1+kE_2)y+(F_1+kF_2)=0$$

以 $1+k$ 除之,得

$$x^2+y^2+\frac{D_1+kD_2}{1+k}x+\frac{E_1+kE_2}{1+k}y+\frac{F_1+kF_2}{1+k}=0$$

準 131 頁定理 I,此方程之軌跡必為圓.但若 $k=-1$ 時,則不能以 $1+k$ 除之,此時(III)變成

$$(D_1-D_2)x+(E_1-E_2)y+(F_1-F_2)=0$$

此式既屬一次方程,其軌跡必為直線,此直線名曰 C_1, C_2 之根軸(Radical axis).

推論I. (III)所表之圓,其中心必在連 $C_1 \cdot C_2$ 兩圓中心之直線上.並分此連線為兩段,其比等於 k.

證. 準 131 頁定理 I,C_1 之中心為 $P_1\left(-\frac{D_1}{2}, -\frac{E_1}{2}\right)$,$C_2$ 之中心為 $P_2\left(-\frac{D_2}{2}, -\frac{E_2}{2}\right)$ 又準 30 頁定理 VII,分 P_1P_2 為兩段,其比等於 k 之分點,為 $\left[\frac{-\frac{D_1}{2}+k\left(-\frac{D_2}{2}\right)}{1+k}, \frac{-\frac{E_1}{2}+k\left(-\frac{E_2}{2}\right)}{1+k}\right]$

簡之,即為 $\left(-\frac{D_1+kD_2}{2(1+k)}, -\frac{E_1+kE_2}{2(1+k)}\right)$ 此即方程式(III)之中心也.

推論II. C_1, C_2 之根軸之方程式為

$$(D_1-D_2)x+(E_1-E_2)y+(F_1-F_2)=0$$

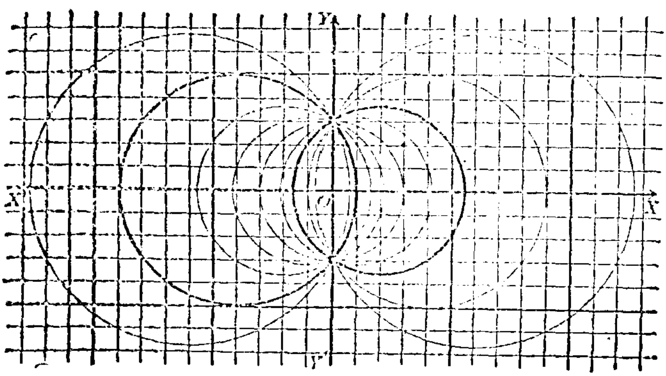
推論III. 兩圓之根軸,必正交兩中心之連線.

提示. 先引用 97 頁定理 VII 以求連 C_1, C_2 兩中心之直線,再引用 87 頁推論 III,以證根軸正交此連線.

圓系有三種,如下:(1)兩圓相交於兩點,(2)互相切,(3)不相遇.

例1. 試作圓系

$$x^2+y^2+8x-9+k(x^2+y^2-4x-9)=0$$



解. 先作

$$x^2+y^2+8x-9=0,\quad x^2+y^2-4x-9=0$$

兩圓,如圖之兩粗線圓,再令

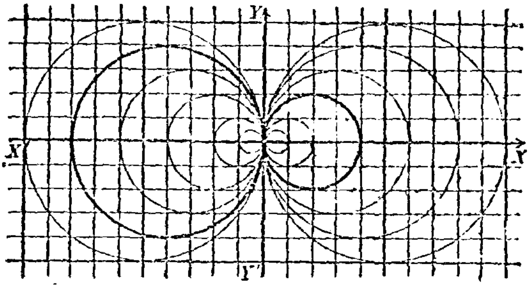
$$k=2,5,1,\tfrac{1}{2},-4,-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{4}$$

以作圓系,如圖上之細線圓,諸細線圓,均通過兩粗線圓之交點.

令 $k=-1$ 則得兩粗線圓之根軸適與 y 軸相合.

例2. 試作圓系

$$x^2+y^2+8x+k(x^2+y^2-4x)=0$$



解. 先作

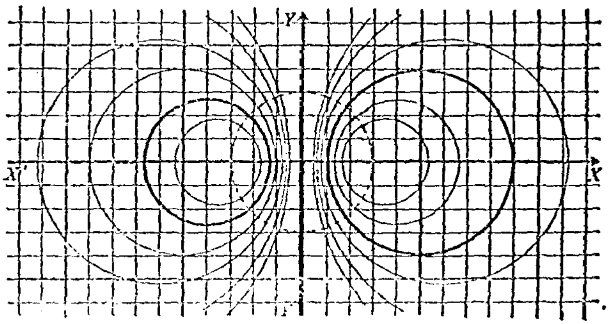
$$x^2+y^2+8x=0,\ x^2+y^2-4x=0.$$

兩圓,於圖上以粗線圓表之,命

$$k=2,3,\frac{7}{5},5,1,\frac{1}{2},-7,\frac{1}{5},-4,-3,-\frac{1}{7}$$

則得諸細線圓,均通過兩粗線圓之切點,當 $k=2$ 時,系圓方程式之軌跡,即是原點.

例3. 試作圓系 $x^2+y^2-10x+9+k(x^2+y^2+8x+9)=0$



解. 由方程式

$$x^2+y^2-10x+9=0,\quad x^2+y^2+8x+9=0$$

作兩粗線圓,再命

$$k=\frac{1}{5},17,\frac{1}{8},-10,-\frac{1}{10},-\frac{11}{2}$$

以作諸細線圓，均與虛線圓相正交，虛線圓之性質，說明在後．

$k=-1$ 則得根軸與 y 軸密合．

定理VI. 設

$$C_1: x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$$

$$C_2: x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$$

兩圓相交於兩點 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ 則

$$x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1+k(x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2)=0$$

乃表凡通過 P_1、P_2 所有之圓．

證．（1）先證此圓系方程式所表之任何圓，必通過 P_1、P_2 兩點．

P_1 既在 C_1 又在 C_2 則必有

$$x_1^2+y_1^2+D_1x_1+E_1y_1+F_1=0$$
$$x_1^2+y_1^2+D_2x_1+E_2y_1+F_2=0$$

以 k 乘第二方程而加之，則得

$$x_1^2+y_1^2+D_1x_1+E_1y_1+F_1+k(x_1^2+y_1^2+D_2x_1+E_2y_1+F_2)=0$$

此即 P_1 必在圓系方程式所表之任何圓上之要件．

同法可證圓系方程式所表之任何圓，必通過 P_2．

（2）證明凡通過 P_1, P_2 之圓，必爲此圓系方程式所表．

因凡通過 P_1, P_2 之圓，必可以三點 P_1、P_2、P_3 定之，但 P_3 不能與 P_1、P_2 同在一直線內，是則 P_3 既在圓系上，則有

$$x_3^2+y_3^2+D_1x_3+E_1y_3+F_1+k(x_3^2+y_3^2+D_2x_3+E_2y_3+F_2)=0$$

由此得

$$k=-\frac{x_3^2+y_3^2+D_1x_3+E_1y_3+F_1}{x_3^2+y_3^2+D_2x_3+E_2y_3+F_2}$$

因此必可得 k 之一值，令其相當之圓通過 P_3，然 P_3 乃不與 P_1, P_2 同在一直線內之任意點，則凡通過 P_3 之圓，即爲通過 P_1, P_2 之任意圓．是以凡通過 P_1, P_2 之圓，必屬於此圓系內．

推論. 互相交兩圓之根軸,即兩圓之公弦.

定理V. 設

$$C_1: x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$$

$$C_2: x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$$

兩圓互相切於 $P_1(x_1, y_1)$,則

$$x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1+k(x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2)=0$$

所表之圓系,乃包括凡與 C_1, C_2 相切於 P_1 所有一切之圓.

此定理之證,與上定理相似,學者可自證之.

IV, V 兩定理,乃說明當 C_1, C_2 兩圓互相交或互相切時,求其圓系之法則.然當兩圓不相遇時,則無相當之定理,但由下列諸定理,可得一通法,即使兩圓不相遇時,亦可適用.

定理VI. 設 x 軸與連 C_1, C_2 兩圓心之直線相合,y 軸與兩圓之根軸相合,則137頁(III)可寫爲

$$x^2+y^2+k'x+F=0 \tag{VI}$$

式中 k' 爲褎變常數.

證. 無論 x, y 兩軸如何,而 C_1, C_2 之方程式,必爲

$$C_1: x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$$

$$C_2: x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$$

若兩圓之中心,俱在 x 軸上,則 $E_1=0, E_2=0$ (131 頁推論)故等根軸之方程式,(138 頁推論 ii)變爲

$$(D_1-D_2)x+(F_1-F_2)=0$$

又若根軸與 y 軸相合,則因 y 軸之方程式爲 $x=0$,而根軸之方程式變成 $F_1-F_2=0$ 即 $F_1=F_2$ 今以 F 代入(III),命 $E_1=0$, $E_2=0$ 則得

$$x^2+y^2+D_1x+F+k(x^2+y^2+D_2x+F)=0$$

集 x,y 之同次項，以 $1+k$ 除之，得

$$x^2+y^2+\frac{D_1+kD_2}{1+k}x+F=0$$

因 D_1,D_2 俱是常數，故 x 之係數，依 k 而變，命

$$\frac{D_1+kD_2}{1+k}=k'$$

即得(VI)。

推論. 圓系(VI)之心均在 x 軸上.

(VI)較(III)137 頁更簡，故研究(VI)之後，於(III)可更明白.

定理VII. 設 r' 爲圓系

$$x^2+y^2+k'x+F=0$$

之半徑，且圓心爲$(\alpha',0)$，則

$$r'^2=\alpha'^2-F$$

證. 準131頁定理I，得 $r'^2=\frac{k'^2-4F}{4}$ 及 $\alpha'^2=\frac{k'^2}{4}$ 是以 $r'^2=\alpha'^2-F$.

推論I. 若 F 爲負，則 r' 爲直角三角形之弦，其他兩邊等於 α' 及 $\sqrt{-F}$. ※

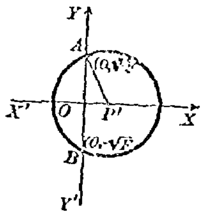
推論II. 若 $F=0$ 則 $r'=\alpha'$.

推論III. 若 F 爲正，則 α' 爲直角三角形之弦，其他兩邊等於 r' 及 $\sqrt{F}$.

由此則(VI)所表之圓系，甚易作成，又圓系之心，均在 x 軸上，今分三段論之.

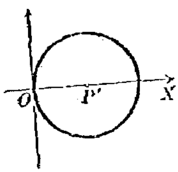
※當 F 爲負，$-F$ 爲正，故 $\sqrt{-F}$ 爲實數.

I. $F<0$ 此時無論 α' 為如何之實數值，而 $r'^2=\alpha'^2-F$ 恆為正，故 x 軸上之任何點，均可為此圓系之心．

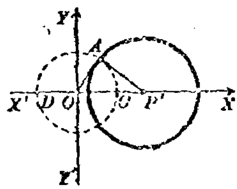


令於 y 軸取 $OA=\sqrt{-F}$，於 x 軸上任意取一點 P' 為圓心，以 $P'A$ 為半徑，作圓．則此圓必屬於此圓系內，因若命 $OP'=\alpha'$ 則 $P'A=r'$（推論 I）是以此圓系乃由通過兩點 $A(0,+\sqrt{-F})$，$B(0,-\sqrt{-F})$ 且圓心均在 x 軸上之圓所組織而成．

II. $F=0$ 此時 $r'^2=\alpha'^2$ 故 x 軸上之任意點，皆可為圓心，又(準73頁定理VI)，此圓系必通過原點．是以於 x 軸上任意取一點 P' 為心，以 $P'O$ 為半徑作圓．必屬於此圓系內，且諸圓均與 y 軸相切於原點，又 y 軸左右兩邊之圓，均互相切．



III. $F>0$ 此時僅有 α' 之絕對值大於 $\sqrt{F}$ 之絕對值時，則 $r'^2=\alpha'^2-F$ 為正，故凡 x 軸上 α' 之絕對值小於 $\sqrt{F}$ 之絕對值之點，均不能為圓心，今以 O 為心，以 $\sqrt{F}$ 為半徑作一虛線圓．



於虛線圓外之 x 軸上，任意取一點 P'．作 $P'A$ 直線，與虛線圓相切，再以 P' 為心，$P'A$ 為半徑作圓，則此圓必屬於圓系內．

既 $OA=\sqrt{F}$，又 A 為直角，故若命 $P'O=\alpha'$ 則 $P'A=r'$（推論III）．此兩圓之交點之兩切線，互相垂直，是以此圓系之任何圓，其心均在 x 軸上，且與虛線圓相垂直．

若 P' 與 C 或 D 相合，則半徑等於零，即 CD 兩點亦屬於此圓系內，名曰極限點 (Limiting points)．

總上所述，得下定理．

定理VII． 方程式

$$x^2+y^2+k'x+F=0$$

所表之圓系，其圓心均在 x 軸上，且

(a) 若 $F<0$ 則通過兩點 $(0,+\sqrt{-F})$，$(0,-\sqrt{-F})$．

(b) 若 $F=0$ 則互相切於原點．

(c) 若 $F>0$ 則與圓 $x^2+y^2=F$ 相垂直．

觀圖，可知當 $F>0$ 時，則圓系中無點圓，$F=0$ 則有一點圓，$F=0$ 則有兩點圓．

49. 切線之長

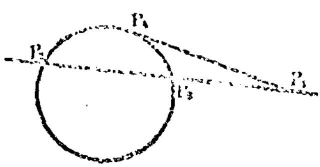
定理IX． 已知一點 $P_1(x_1, y_1)$ 及圓

$$C: x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

則通過 P_1 之任意割線與其圓外一段之乘積，必等於

$$\text{(IX)} \qquad x_1^2+y_1^2+Dx_1+Ey_1+F$$

證． 命通過 P_1 之任意直線之方程式爲（124 頁定理 XV），



$$x=x_1+\rho\cos\alpha,$$

$$y=y_1+\rho\cos\beta.$$

若 (x, y) 或 $(x_1+\rho\cos\alpha, y_1+\rho\cos\beta)$ 在圓周上，則得（53頁推論）

$$(x_1+\rho\cos\alpha)^2+(y_1+\rho\cos\beta)^2$$
$$+D(x_1+\rho\cos\alpha)+E(y_1+\rho\cos\beta)+F=0$$

簡之，幷依 ρ 之降冪排列之，得

$$\rho^2+\rho((2x_1+D)\cos\alpha+(2y_1+E)\cos\beta)$$
$$+x_1^2+y_1^2+Dx_1+Ey_1+F_1=0$$

此方程之兩根，即等於 P_1P_3 及 P_1P_2，是以準 3 頁定理 I，P_1P_3 及 P_1P_2 之乘積等於

$$x_1^2+y_1^2+Dx_1+Ey_1+F$$

式中旣不含 $\cos\alpha$，及 $\cos\beta$ 故與割線之方向無關係.

推論． 由 P_1 作圓之切線，其長之平方，等於(IX).

證． 依割線 P_1P_3 逐漸移動，至與切線 P_1P_4 相合，則 P_1P_2 及 P_1P_3 俱等於 P_1P_4. 故 P_1P_2 及 P_1P_3 之乘積即等於 P_1P_4 之平方.

定理X． 由圓

$$C_k: x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1+k(x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2)=0$$

上任意一點，至兩圓

$$C_1: x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$$

$$C_2: x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$$

作兩切線，其長之平方之比爲常數，且等於 $-k$.

證． 命 $P_1(x_1, y_1)$ 爲 C_k 之任意一點，則有

$$x_1^2+y_1^2+D_1x_1+E_1y_1+F_1+k(x_1^2+y_1^2+D_2x_1+E_2y_1+F_2)=0$$

以括弧內之數除之，則得

$$\frac{x_1^2+y_1^2+D_1x_1+E_1y_1+F_1}{x_1^2+y_1^2+D_2x_1+E_2y_1+F_2}=-k$$

由定理 IX 之系，此分子等於由 P_1 至 C_1 之切線之長之平方，分母等於由 P_1 至 C_2 之切線之長之平方，是以其比爲常數，且等於 $-k$.

推論I. 設有一點 P,自 P 至 C_1、C_2 兩圓之切線之平方之比爲常數,且等於 $-k$,則 P 之軌跡卽圓 C_k.

推論II. 設有一點 P,自 P 至兩圓之切線,恆等長,則 P 之軌跡卽兩圓之根軸.

問 題 30.

1. 試應用定理 VIII,以作成下列諸圓系.

(a) $x^2+y^2+4x-1+k(x^2+y^2-2x-1)=0$

(b) $x^2+y^2+4x+1+k(x^2+y^2-4x+1)=0$

(c) $x^2+y^2+4x+k(x^2+y^2-2x)=0$

(d) $x^2+y^2+2x-4+k(x^2+y^2+6x-4)=0$

(e) $x^2+y^2+2x+9+k(x^2+y^2-4x+9)=0$

(f) $x^2+y^2-6x+k(x^2+y^2+8x)=0$

2. 試求下諸切線之長.

(a) 自 $(5,2)$ 至 $x^2+y^2-4=0$. 答. 5.

(b) 自 $(-1,2)$ 至 $x^2+y^2-6x-2y=0$ 答. $\sqrt{7}$.

(c) 自 $(2,5)$ 至 $2x^2+2y^2+2x+4y-1=0$ 答. $\frac{9}{2}\sqrt{2}$.

(d) 自 $(1,5)$ 至 $x^2+y^2=25$ 答. $\sqrt{-20}$.

切線之長爲虛數,其意義爲何? 答. 在圓內.

3. 試定下列諸圓系之性狀.

(a) $x^2+y^2+2x-4y+k(x^2+y^2-2x+4y)=0$

(b) $x^2+y^2+4x-2y+k(x^2+y^2-4x+y-4)=0$

(c) $x^2+y^2+2x-4y+1+k(x^2+y^2-2x+4y+1)=0$

4. 一圓通過兩圓 $x^2+y^2-1=0$, $x^2+y^2+2x=0$, 之交點且通過 $(3,2)$,求其方程式. 答. $7x^2+7y^2-24x-19=0$.

5. 一圓通過兩圓 $x^2+y^2-6x=0$, $x^2+y^2-4=0$ 之交點, 又通過 $(2,-2)$,試求其方程式. 答. $x^2+y^2-3x-2=0$

6. 圓系 $x^2+y^2-4x-3+k(x^2+y^2-4y-3)=0$ 中之一圓, 其心在直線 $x-y-4=0$ 上,試求此圓之方程式.

答. $x^2+y^2-6x+2y-3=0$.

7．一圓通過兩圓 $x^2+y^2-4x+2y=0$，$x^2+y^2-2y-4=0$ 之交點其圓心在直線 $2x+4y-1=0$ 上，試求此圓之方程式．

答．$x^2+y^2-3x+y-1=0$．

8．通過兩圓 $x^2+y^2-1=0$，$x^2+y^2+2x-3=0$ 之交點之諸圓，其半徑俱等於4，求其方程式．

答．$x^2+y^2-6x-7=0$，$x^2+y^2+8x=0$．

9．試求兩圓 $x^2+y^2-4x=0$，$x^2+y^2+6x-8y=0$ 之根軸．

10．試求 $3x^2+3y^2-6x+8y-1=0$，$x^2+y^2+8y=0$ 兩圓之根軸．

11．任意三圓，其各兩圓間之諸根軸，必相遇於一點，試證明之．

12．自圓周上任意一點 P_1 至另一圓之切線，其平方必與此兩圓之根軸至 P_1 之距離相正比，試證明之．

13．數圓經過兩定點與一定圓相交之弦通過一定點，用問題11之法證明之．

14．自一圓上任一點 P_1 至他圓之切線之平方與 P_1 至兩圓之根軸之距離成比例．

15．於定理III，若 C_1，C_2 爲同心圓，則(III)所表之圓系俱同心，試證明之．

16．於定理III，若 C_1，C_2 兩圓同心，則(III)不能寫成(VI)之形式，試證明之．

17．證明(III)所表之圓系中任意一對圓之根軸，必同於 C_2，C_1 之根軸．

18．於上11題之三圓俱爲點圓時，如何．

雜 題

1．三角形之邊爲 $x+2y=0$，$3x-2y=6$，$x-y=5$ 試求其外接圓之方程式．

2．試求上題三角形之內切圓方程式．

3. 由 $x^2+y^2=25$, $x^2+y^2-16x+39=0$ 兩圓之一交點至兩圓心作兩半徑，試求此兩半徑所作之角.

提示. 先求兩半徑，次求連兩圓心之直線之長，則引用 20 頁(17)，即可得兩半徑之交角.

4. 由 $x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$, $x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$ 兩圓之一交點，作兩半徑，求此兩半徑之交角.

5. 當上題兩半徑之交角爲直角時，其必要之要件如何.

6. 自圓上任意一點至其直徑之兩端，作兩直線，試證明此兩直線之交角必爲直角.

7. 自圓上任意一點作直徑之垂線，分直徑爲兩段，試證明此垂線爲直徑兩段之比例中項.

8. 設 ω 爲 x, y 兩軸所作之角，則方程式 $x^2+2\cos\omega\,xy+y^2+Dx+Ey+F=0$ 之軌跡爲一圓，試證明之.

9. 已知一圓 $C: x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 及一直線 $L: Ax+By+C=0$ 通過 C 之心，作一直線 L'，與 L 垂直，試證明凡心在直線 L' 上之圓，俱包括於方程式 $x^2+y^2+Dx+Ey+F+k(Ax+By+C)=0$ 之內.

10. 由上題諸圓，求其任意兩圓之根軸.

11. 試以幾何理解釋第 9 題第三方程式內 k 之意義.

12. 設於第 9 題(a) y 軸與 L 符合，x 軸通過 C 之心，(b) C 之心與原點符合，且 y 軸平行 L，則其第三方程式變成如何形式.

13. 當 (a) $r<a$, (b) $r=a$, (c) $r>a$ 時，則圓系 $x^2+y^2-r^2+k(x-a)=0$ 應如何作法.

14. 試證明(III)之判別式，爲

$$\frac{r_2^2k^2-(d^2-r_1^2-r_2^2)k+r_1^2}{(1+k)^2}$$

但式中 r_1, r_2 爲 C_1, C_2 之心，d 爲連兩圓心之直線之長.

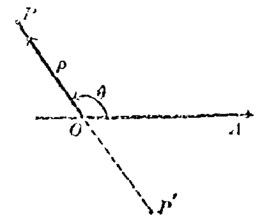
15. 試由上題，證明若圓系(III)無點圓時，則 C_1, C_2 兩圓互相交，有一點圓，則兩圓互相切，有兩點圓，則兩圓不相遇.

第六章

極坐標

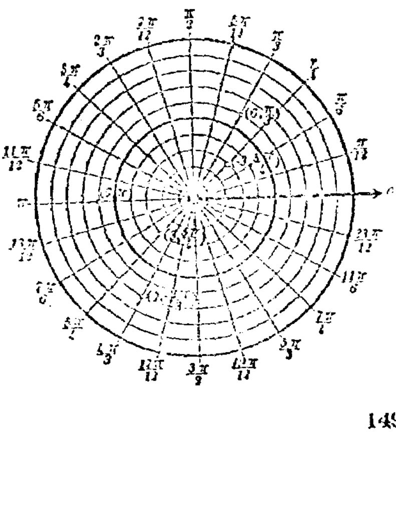
60. 極坐標. 本章所論,乃以兩實數定平面上之點之第二法.

設有定點O名曰極(Pole),通過O之定直線OA,名曰極軸,(Polar axis)則任意一點P,則可定$OP=\rho$之長及$AOP=\theta$角,ρ名曰帶徑,(Radians vector),θ名曰帶徑角,(Vectorial angle) ρ, θ總名曰P點之極坐標。(Polar coordinates)



帶徑角之正負,同於三角法,ρ之正負,依P點之位置而定,P在θ角之終線(Terminal line)上,則ρ為正,P在終線過原點之引長線上,則ρ為負,如圖P之帶徑為正,P'之帶徑為負.

任意兩實數(ρ,θ),必可定一點,故已知此兩實數時求其點之法則如下.

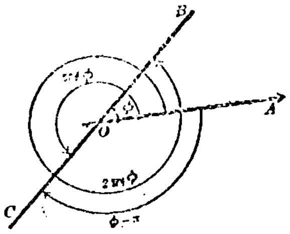


第一步. 先依三角法作帶徑角θ.

第二步. 若帶徑為正,則於θ角之終線上取$OP=\rho$,若帶徑為負,則將θ角之終線通過原點引長之,再於引長線取$OP=\rho$,則P即所求之點.

下圖即已知五點之極坐標，$\left(6,\frac{\pi}{3}\right)$，$\left(3,\frac{5\pi}{4}\right)$，$\left(-3,\frac{5\pi}{4}\right)$，$(6,\pi)$，$\left(7,-\frac{2\pi}{3}\right)$依此法則而作成者.

任意一點 P，即可定無限對之實數(ρ,θ).



θ之值，因π之倍數而異，譬如ϕ為θ之一值，則其餘諸值為$\phi+k\pi$，(k為正或負之整數) ρ之值，數雖同而正負可不同，譬如θ之值等於ϕ，則 OB 為θ之終線，θ之值等於$\phi+\pi$，則 OC 為θ之終線，故若$OB=\rho$ 則 B 之座標可寫為(ρ,ϕ)，$(-\rho,\pi+\phi)$，$(\rho,2\pi+\phi)$，$(-\rho,\phi-\pi)$.

但平常恆假定θ之值必為正或為零，且小於2π，則$0\leqq\theta<2\pi$.

問 題 31.

1. 試作 $\left(4,\frac{\pi}{4}\right)$，$\left(6,\frac{2\pi}{3}\right)$，$\left(-2,\frac{2\pi}{3}\right)$，$\left(4,\frac{\pi}{3}\right)$，$\left(-4,\frac{4\pi}{3}\right)$，$(5,\pi)$.

2. 試作 $\left(6,\pm\frac{\pi}{4}\right)$，$\left(-2,\pm\frac{\pi}{2}\right)$，$(3,\pi)$，$(-4,\pi)$，$(6,0)$，$(-6,0)$

3. 證明兩點(ρ,θ)，$(\rho,-\theta)$，對於極對稱.

4. 證明兩點(ρ,θ)，$(-\rho,\theta)$，對於極軸對稱.

5. 證明兩點$(-\rho,\pi-\theta)$，(ρ,θ)，對於極軸對稱.

61. <u>方程式之軌跡.</u> 已知含ρ，θ之方程式，則其跡軌為曲線，且

1. 凡座標(ρ,θ)能適合此方程式之點，必在此曲線內.
2. 曲線中任何點之座標必能適合此方程式.

有方程以求曲線時，先解方程 ρ，然後給 θ 以各值，即可得 ρ 之各值，以至能決定曲線之形爲止.

作曲線時，用極坐標紙，(Polar coordinates paper)則甚容易，其形爲若干同心圓，其心爲極，θ 之值以過極之線決之，ρ 之值以圓決定．準 21 頁之表，作 ρ 及 θ 之表如下三例之圖.

討論方程式之軌跡，當分五段，如下.

1．先命 $\theta=0,\theta=\pi$ 以求 ρ，即得曲線割極軸之截線，即由極至割點之距離).

但 $\theta=0$ 而 $\rho=0$ 時，則截極軸之點爲極.

2．以 $-\rho$ 代 ρ，若方程式僅變其形式，則曲線對於極對稱.

3．以 $-\theta$ 代 θ，若方程式僅變其形式，則曲線對於極軸對稱.

4．給 θ 之值能使 ρ 等於無限者，即可知曲線由極延伸至無限之方向.

5．求 θ 當略去之值(即 θ 能使 ρ 等於虛數之值)之法，隨方程式而異.

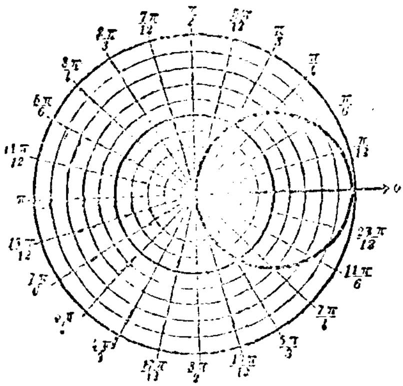
例 1．作方程式 $\rho=10\cos\theta$ 之軌跡，並討論之.

解．凡題中之事件，能令作法簡單者，先論之.

θ	ρ	θ	ρ
0	10	$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{\pi}{12}$	9.7	$\frac{7\pi}{12}$	-2.6
$\frac{\pi}{6}$	8.7	$\frac{2\pi}{3}$	-5
$\frac{\pi}{4}$	7	$\frac{3\pi}{4}$	-7
$\frac{\pi}{3}$	5	$\frac{5\pi}{6}$	-8.7
$\frac{5\pi}{12}$	2.6	$\frac{11\pi}{12}$	-9.7
		π	-10

1．命 $\theta=0$ 則 $\rho=10$，命 $\theta=\pi$ 則 $\rho=-10$．故此曲線割極軸於極之右邊距離 10 之處，則截線等於 10 也.

2．因 $\cos(-\theta)=\cos\theta$(19 頁 4)．故此曲線對於極軸對稱.



3. $\cos\theta$ 既不能等於無限，則此曲線亦不能延伸至無限，故爲閉合曲線.

4. θ 之任何值，均不能使 ρ 爲虛數，故無當略去之值.

給 θ 以 $0, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}$, 等值，即得上表.

此曲線既對於極軸對稱，故求得表中諸點；即可作成，無容再求更多之點，又因此曲線對於極軸對稱，即與 θ 以較大之值，亦不能再得更多之點，是以此曲線爲圓.

例2. 作方程式 $\rho^2=a^2\cos 2\theta$ 之軌跡，并討論之.

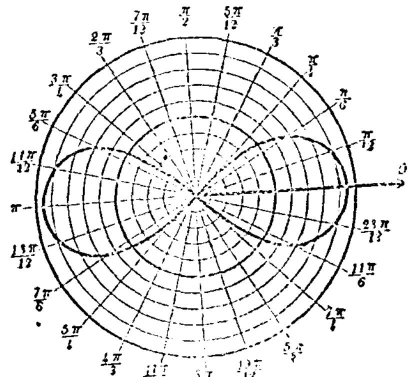
解. 1. 命 θ 等於 0 或 π，俱得 $\rho=\pm a$，故此曲線割極軸於極之左右兩邊距離 a 之處.

2. 此曲線對於極對稱.

3. 因 $\cos 2\theta=\cos(-2\theta)$ (19 頁 4) 故此曲線又對於極軸對稱.

4. ρ 不能等於無限.

5. $\cos 2\theta$ 爲負時，ρ 爲虛數，而 $\cos 2\theta$ 當 2θ 在第二第三兩象限內，即



$$\frac{3\pi}{2}>2\theta>\frac{\pi}{2}\text{或}\frac{7\pi}{2}>2\theta>\frac{5\pi}{2}$$

時爲負，故 θ 之值

$$\frac{3\pi}{4}>\theta>\frac{\pi}{4}\text{及}\frac{7\pi}{4}>\theta>\frac{5\pi}{4}$$

均宜略去.

θ	ρ	θ	ρ
0	$\pm a$	$\frac{\pi}{6}$	$\pm .7a$
$\frac{\pi}{12}$	$\pm .93a$	$\frac{\pi}{4}$	0

數值表係由第2,3,5步算出者.

再求得諸對稱點，則可作全曲線，因其形似 8 字，名曰 8 字形曲線．(Lemniscate)取 a 爲 9.5.

例3． 作方程式 $\rho=\dfrac{2}{1+\cos\theta}$ 之軌跡，並討論之．

解． 1．命 $\theta=0$，則 $\rho=1$，$\theta=\pi$ 則 $\rho=\infty$；故此曲線割極軸於極之右邊距離 1 之處．

2．此曲線對於極不對稱

3．因 $\cos(-\theta)=\cos\theta$ 之故，此曲線對於極軸對稱．

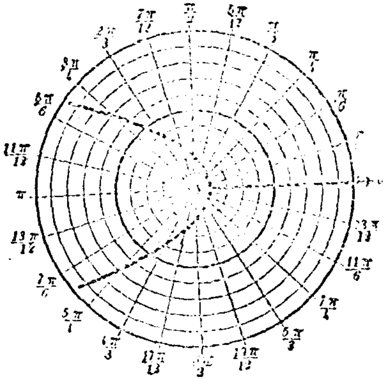
4．當 $1+\cos\theta=0$ 即 $\cos\theta=-1$，即 $\theta=\pi$ 時，$\rho=\infty$；故此曲線之兩端，延伸至無限．

5．$\cos\theta$ 之任何值，均不能使 ρ 爲虛數，故 θ 無當略去之值．

因此曲線對於極軸對稱之故，ρ 之值，求至 $\theta=\pi$，則可停止

θ	ρ	θ	ρ
0	1	$\frac{7\pi}{12}$	2.7
$\frac{\pi}{12}$	1.02	$\frac{2\pi}{3}$	4
$\frac{\pi}{6}$	1.07	$\frac{3\pi}{4}$	6.7
$\frac{\pi}{4}$	1.2	$\frac{5\pi}{6}$	14
$\frac{\pi}{3}$	1.3	$\frac{11\pi}{12}$	50
$\frac{5\pi}{12}$	1.6	π	∞
$\frac{\pi}{2}$	2		

此曲線名曰拋物線(Parabola)．



問　　題　　32．

試作下列諸方程之軌跡，並討論之．

1．$\rho=10$，$\theta=\tan^{-1}1$．

2．$\rho=5$，$\theta=\dfrac{5\pi}{6}$．

3．$\rho=16\cos\theta$．

4．$\rho\cos\theta=6$．

5．$\rho\sin\theta=1$．

6．$\rho=\dfrac{4}{1-\cos\theta}$．

7．$\rho=\dfrac{8}{2-\cos\theta}$．

8. $\rho=\dfrac{8}{1-2\cos\theta}$.

9. $\rho=a\sin\theta$.

10. $\rho=a(1-\cos\theta)$.

11. $\rho^2\sin2\theta=16$.

12. $\rho^2=16\sin2\theta$

13. $\rho^2\cos^2 2\theta=a^2$.

14. $\rho=a\sin2\theta\cdot\rho=a\cos2\theta$.

15. $\rho=\dfrac{8}{1-c\cos\theta}$

設 $c=1,2,\frac{1}{2}$.

16. $\rho\cos\theta=a\sin^2\theta$.

17. $\rho\cos\theta=a\cos2\theta$.

18. $\rho=a(4+b\cos\theta)$

設 $b=3,4,6$.

19. $\rho=\dfrac{10}{1+\tan\theta}$.

20. $\rho=a\sec\theta\pm b$

設 $a>b, a=b, a<b$.

21. $\rho=a\theta$。

22. $\rho=a\sin3\theta, \rho=a\cos3\theta$.

23. 在一方程式內以$\frac{\pi}{2}-\theta$代$\frac{\pi}{2}+\theta$，若方程式僅變其形式而不變其值，則其軌跡必對於直線 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 對稱，試証明之.

24. 用 23 題以試 4,5,10,11,12 諸題之軌跡，是否對稱.

62. 改矩坐標爲極坐標. 命 OX, OY 爲矩坐標之兩軸，O 及 OX 爲極坐標之極與極軸，今命 (x,y) 及 (ρ,θ) 爲任意一點 P 之兩種

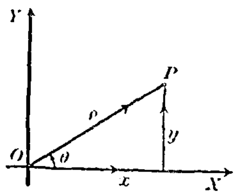


FIG. 1

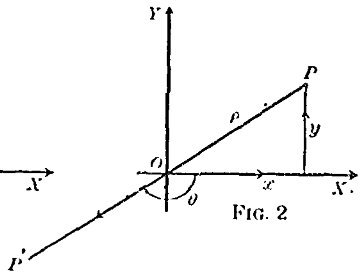


FIG. 2

坐標，分兩層論之，

若 ρ 爲正(圖1)，則準定義得

$$\cos\theta=\frac{x}{\rho},\qquad \sin\theta=\frac{y}{\rho}.$$

故

$$x=\rho\cos\theta,\qquad y=\rho\sin\theta. \tag{1}$$

若ρ為負，(圖2)P'對於O與P對稱，其兩極坐標為$(-x,-y)$及$(-\rho,\theta)$，則P'之帶徑$-\rho$為正，代入(1)，得

$$-x=-\rho\cos\theta,\quad -y=-\rho\sin\theta.$$

則
$$x=\rho\cos\theta,\qquad y=\rho\sin\theta.$$

是以得

定理I. 設原點與極相合，極軸與x軸之正向方相合，則

$$\text{(I)}\qquad \begin{cases} x=\rho\cos\theta, \\ y=\rho\sin\theta. \end{cases}$$

式中(x,y)為任意一點之矩坐標，(ρ,θ)為其極坐標。

(I) 名曰改坐方程式. (Equation of transformation) 已知任意點之矩坐標，引用此式，即可得極坐標，反之亦然.

細察上兩圖，又可知

$$\text{(2)}\qquad \begin{cases} \rho^2=x^2+y^2, & \theta=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}. \\ \sin\theta=\dfrac{y}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}, & \cos\theta=\dfrac{x}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}. \end{cases}$$

諸式皆以矩坐標表極坐標，雖不能如(1)之簡便，然首兩式，則甚有用.

例1. 有圓$x^2+y^2=25$，試求其極坐標方程式.

解. 用(I)以代入之，得

$$\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta=25$$

即
$$\rho^2=25$$

$$\therefore\quad \rho=\pm5$$

例2. 有 8 字形曲線 (Lemniscate) $\rho^2=a^2\cos 2\theta$,求其矩坐標方程式.

解. 準 20 頁(14),得

$$\rho^2=a^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$$

以 ρ^2 乘兩邊,得

$$\rho^4=a^2(\rho^2\cos^2\theta-\rho^2\sin^2\theta)$$

應用(1),(2),則得所求之方程式

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2).$$

63. **應用** (Applications)

定理II. 極坐標之直線普通方程式,爲

(II) $$\rho(A\cos\theta+B\sin\theta)+C=0$$

式中 A,B,C 爲不定常數.

證. 準 86 頁定理 II,矩坐標之直線普通方程式,爲

$$Ax+By+C=0$$

由(I)代入即得

$$\rho(A\cos\theta+B\sin\theta)+C=0$$

若 $A=0$ 則此直線平行極軸. $B=0$ 則垂直極軸, $C=0$ 則通過極點.

定理III. 用極坐標時,圓之普通方程式爲

(III) $$\rho^2+\rho(D\cos\theta+E\sin\theta)+F=0$$

式中 D,E,F 俱爲不定常數.

推論. 若極點在圓周上,極軸通過圓心,則其方程式爲

$$\rho-2r\cos\theta=0$$

式中 r 爲圓半徑.

因圓心在極軸即 x 軸上時, $E=0$ (131 頁推論) 圓通過極點即原點時, $F=0$;此時圓心之横軸,等於圓半徑,故 $-\frac{D}{2}=r$,則 $D=-2r$ (131 頁定理 I)代入(III),則得

$$\rho-2r\cos\theta=0$$

定理IV. 連 $P_1(\rho_1,\theta_1)$, $P_2(\rho_2,\theta_2)$ 兩點之直線,其長 l 爲

(IV) $$l^2=\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2\cos(\theta_1-\theta_2)$$

證．命 P_1, P_2 之矩坐標為 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$．準155頁定理 I，得

$$x_1=\rho_1\cos\theta_1, \qquad x_2=\rho_2\cos\theta_2.$$

$$y_1=\rho_1\sin\theta_1, \qquad y_2=\rho_2\sin\theta_2.$$

但由31頁定理IV，

$$l^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$$

代入，得

$$l^2=(\rho_1\cos\theta_1-\rho_2\cos\theta_2)^2+(\rho_1\sin\theta_1-\rho_2\sin\theta_2)^2$$

展去括號，并引用19頁3及20頁11，則得(IV)．　　Q.E.D.

問　題　33．

1．改下列諸方程為極坐標，并作其軌跡．

(a) $x-3y=0$．　　答．$\theta=\tan^{-1}(\frac{1}{3})$．

(b) $y+5=0$．　　答．$\rho=\dfrac{-5}{\sin\theta}$．

(c) $x^2+y^2=16$．　　答．$\rho=\pm 4$．

(d) $x^2+y^2-ax=0$．　　答．$\rho=a\cos\theta$．

(e) $2xy=7$．　　答．$\rho^2\sin 2\theta=7$．

(f) $x^2-y^2=a^2$．　　答．$\rho^2\cos 2\theta=a^2$．

(g) $x\cos\omega+y\sin\omega-p=0$．　　答．$\rho\cos(\theta-\omega)-p=0$．

(h) $(1-e^2)x^2+y^2-2e^2px-e^2p^2=0$．　答．$\rho=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$．

(i) $2xy+4y^2-8x+9=0$．

答．$\rho^2(\sin 2\theta+4\sin^2\theta)-8\rho\cos\theta+9=0$．

2．試將153頁問題32自1至21諸方程式，改為矩坐標．

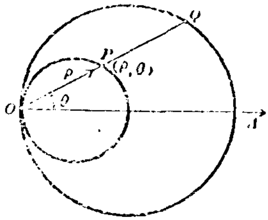
3．求$(3,4)$，$(-4,3)$，$(5,-12)$，$(4,5)$四點之極坐標．

4．求$\left(5,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\left(-2,\dfrac{3\pi}{4}\right)$，$(3,\pi)$三點之矩坐標．

5．改$\rho=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$為矩坐標之方程式．

64．軌跡之方程式．長短不定之直線，繞一定點而廻轉其一端，作成一曲線，此時欲求其方程式，用極坐標更為容易，其法則與53頁同．

例1. 極點在圓 $C:\rho-2r\cos\theta=0$ 上，試求其通過極點諸弦之中點之軌跡.



解. 命 $P(\rho,\theta)$ 爲軌跡上任意一點，則

$$OP=\tfrac{1}{2}OQ$$

但 $$OP=\rho,\ OQ=2r\cos\theta$$

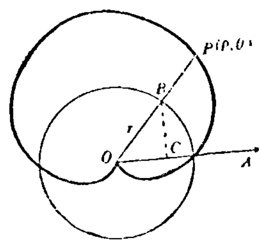
是以 $$\rho=r\cos\theta$$

準156頁推論，此軌跡乃一圓，其徑等於前圓之半徑.

例2. 將圓半徑引長之，其所引長之一段，等於圓半徑一端之縱坐標，試求此直線之一端所作成之軌跡.

解. 命 r 爲圓半徑，圓心爲極點，設 P 爲軌跡上任意一點，則有

$$OP=OB+CB$$



但 $$OP=\rho,$$
$$OB=r,$$
$$CB=r\sin\theta.$$

則得 P 點之軌跡之方程式爲

$$\rho=r+r\sin\theta$$

此曲線名曰心臟形曲線(Cardioid).

問　題　34.

1. 凡通過圓周上一定點之弦，各引長一倍，試求其一端所作成之軌跡.　　答. 軌跡乃爲一圓其半徑等於原圓之直徑.

2. 有圓 $\rho=10\cos\theta$ 其通過極點之弦，各引長 10，試求諸弦之一端所作成之軌跡.　　答. $\rho=10(1+\cos\theta)$.

3. 有圓 $\rho=2a\cos\theta$ 其通過極點之弦，各引長 $2b$，試求諸弦之一端所作成之軌跡.　　答. $\rho=2(b+a\cos\theta)$.

4．由一定點至一已知圓上，作直線，試求諸直線中點之軌跡．

提示．以定點爲極點，再設極軸通過圓心．

答．此軌跡仍爲圓，其半徑等於已知圓半徑之半，其心距極點與已知圓心相等．

5．通過定點 O 之直線，遇另一定直線於 P_1，於 OP_1 直線上取一點 P，令其恆有 $OP_1\cdot OP=a^2$ 之關係，試求 P 點之軌跡．　答．圓．

6．通過定點 O 之直線，遇另一定圓於 P_1 及 P_2；於此直線上取一點 P，令其恆有 $OP=2\dfrac{OP_1\cdot OP_2}{OP_1+OP_2}$ 之關係，則 P 之軌跡如何．

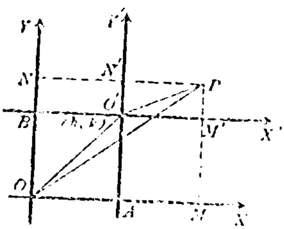
答．直線．

第　七　章

坐　標　之　移　轉

65. 坐標軸可以任意選定時，恆選其適當之位置，能令所得之結果，為最簡單者而用之，若坐標軸已定，則須用法則．改已知之方程為新軸方程，此法名曰坐標之移轉，(Transformation of coordinates)則改移其位置，而求其以新坐標表舊坐標之式也．

66. 移軸．移坐標之位置，而不變其方向，名曰移軸．



命所移之新原點為 $O'(h,k)$，任意一點 P 之舊坐標及新坐標為 (x,y)，(x',y')．投 OP 及 $OO'P$ 之影於 OX 則準 48 頁定理 XI，則得

$$x=x'+h.$$

同理　　$$y=y'+k.$$

是以得

定理1． 設所移之新原點為 (h,k)，任意一點 P 之舊新坐標為 (x,y)，(x',y')，則

$$\text{(I)}\qquad \begin{cases} x=x'+h, \\ y=y'+k. \end{cases}$$

此式名曰移軸方程式，已知曲線之舊軸方程式，欲求其新軸方程式，則由(I)代入即得.

例1. 所移之新原點爲(3,—2).試改

$$x^2+y^2-6x+4y-12=0$$

爲新軸方程式.

解. 既 $h=3, k=-2$,則

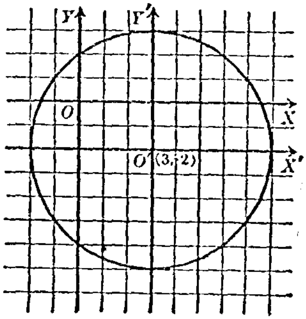
$$x=x'+3, y=y'-2$$

代入已知方程，得

$$(x'+3)^2+(y'-2)^2-6(x'+3)+4(y'-2)-12=0$$

簡之，即得

$$x'^2+y'^2=25$$



因已知方程式之軌跡是一圓,其心爲(3,—2),半徑等於5,今移原點與圓心相合,則此圓之方程式,準58頁推論,必爲 $x'^2+y'^2=25$.

問 題 35.

1. 所移之新原點爲(3,6).試求(3,—5),(—4,2)之新坐標.

2. 所移之新原點如下所示，試改所列各方程爲新軸方程式，並各作新舊軸及曲線以顯明之.

(a) $3x-4y=6$, $(2,0)$. 答. $3x'-4y'=0$.

(b) $x^2+y^2-4x-2y=0$, $(2,1)$. 答. $x'^2+y'^2=5$.

(c) $y^2-6x+9=0$, $(\frac{3}{2},0)$. 答. $y'^2=6x'$.

(d) $x^2+y^2-1=0$, $(-3,-2)$. 答. $x'^2+y'^2-6x'-4y'+12=0$.

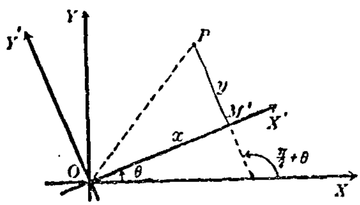
(e) $y^2-2kx+k^2=0$, $\left(\frac{k}{2},0\right)$. 答. $y'^2=2kx'$.

(f) $x^2-4y^2+8x+24y-20=0$, $(-4,3)$. 答. $x'^2-4y'^2=0$.

3. 設 O' 在(a)第二象限內,(b)第三象限內,(c)第四象限內，試求方程式(I).

67. 轉軸. 將 x,y 兩軸,繞原點 O 各廻轉 θ 角,其以新軸坐標表舊軸坐標之方程式,名曰轉軸方程式.

定理II. x,y 兩軸繞原點廻轉θ角時,其轉軸方程式爲



$$\text{(II)}\quad \begin{cases} x=x'\cos\theta-y'\sin\theta \\ y=x'\sin\theta+y'\cos\theta \end{cases}$$

證. 設 P 爲任意一點,其舊新坐標爲 (x,y), (x',y'). 作直線 OP, 再作 PM' 垂直 OX', OP 及 $OM'P$ 投影於OX上,則

OP 之投影 $=x$. (31 頁定理 III).

OM' 之投影 $=x'\cos\theta$. (30 頁定理 II).

$M'P$ 之投影 $=y'\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$. (30 頁定理 II),

$=-y'\sin\theta$. (20 頁 6).

是以由 48 頁定理 XI,得

$$x=x'\cos\theta-y'\sin\theta$$

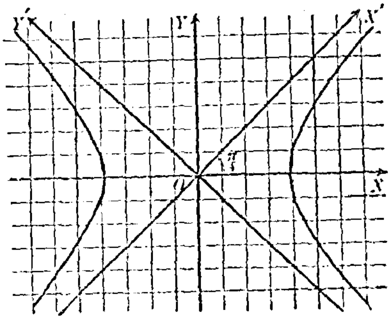
再 OP 及 $OM'P$ 之影投於 OY,則與上同理,得

$$y=x'\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+y'\cos\theta=x'\sin\theta+y'\cos\theta \qquad \text{Q.E.D.}$$

已知曲線之方程式，引用(II)以代之，則可得此曲線對於新軸之方程式.

例1. 使 x, y 兩軸轉 $\frac{\pi}{4}$.試改 $x^2-y^2=16$ 為新軸方程式.

解. 因



$$\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\sqrt{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

及 $$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

則(II)變成

$$x=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}},\ y=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}.$$

代入已知方程式,得

$$\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)^2-\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)^2=16$$

簡之,得 $$x'y'+8=0$$

問 題 36.

1. 使軸轉 $\frac{\pi}{2}$,試求$(3,1)$,$(-2,6)$,$(4,-1)$之新坐標.

2. 兩軸迴轉之角,如下所示,試改下列諸方程為新軸方程式,並作新舊軸及曲線以表明之。

(a) $x-y=0$, $\frac{\pi}{4}$. 答. $y'=0$.

(b) $x^2+2xy+y^2=8$, $\frac{\pi}{4}$. 答. $x'^2=4$.

(c) $y^2=4x$, $-\frac{\pi}{2}$. 答. $x'^2=4y'$.

(d) $x^2+4xy+y^2=16$, $\frac{\pi}{4}$. 答. $3x'^2-y'^2=16$.

(e) $x^2+y^2=r^2$, 0. 答. $x'^2+y'^2=r^2$.

(f) $x^2+2xy+y^2+4x-4y=0$, $-\frac{\pi}{4}$. 答. $\sqrt{2}y'^2+4x'=0$.

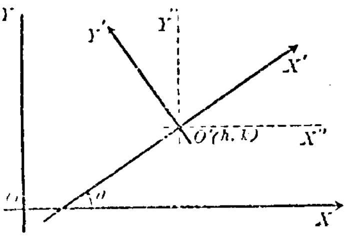
3. 設$\theta>\frac{\pi}{2}$試求(II).

68. <u>坐標之普通移轉</u> 欲移轉坐標軸於任何位置,當先移原點於適當之處,再將兩軸迴轉適當之角即得.

定理III. 設所移之新原點為(h,k),廻轉之角為θ,則坐標軸移轉之方程式為

(III) $$\begin{cases} x=x'\cos\theta-y'\sin\theta+h, \\ y=x'\sin\theta+y'\cos\theta+k. \end{cases}$$

證. 移兩軸於$O'X''$,$O'Y''$,則得



$$x=x''+h$$
$$y=y''+k$$

再廻轉θ,則得

$$x''=x'\cos\theta-y'\sin\theta$$
$$y''=x'\sin\theta+y'\cos\theta$$

由此代入前兩式,即得(III).

69. 軌跡之分類. 代數方程式(17頁)之軌跡,恒依其次數之高低而類別之,因無論坐標軸如何移轉,而方程式之次數,必無改變也.

定理IV. 將坐標軸任意移轉之,而方程之次數不變.

證. (III)既為一次方程,則任意方程式,由(III)以代入之,其次數必不能增高.然亦不能減低;如能減低,則將新軸改回原軸時,其方程之次,必須增高,與上說不合.※

然則既不能增高,又不能減低,則必不變矣.

※由(III)解x'及y'仍為x及y之一次式.

70. 移轉坐標化簡方程式. 移轉坐標之主効用,在於討論曲線方程之各種形式;然移轉坐標軸於適當之位置,則可使曲線方程,變爲最簡單之形式.此乃其特別効用.

化簡方程之法則.

第一步. 由(I)或(II),將x,y之值代入之,並集x',y'同次項之係數.

第二步. 將含h,k之兩項係數(或含θ之一項)等於零.

第三步. 解上步所得之方程,以求h,k,※(或θ).

第四步. 將h,k(或θ)之值,代入第一步所得之方程,即所求之方程.

演習之際,此法則恒有兩次引用者,即先移後轉,或先轉後移是也,此法恒較引用(III)一次轉移爲簡.

例1. 試移軸化簡$y^2-8x+6y+17=0$.

解. 第一步. 命$x=x'+h, y=y'+k$代入之,得

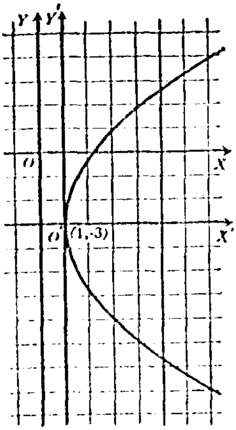
$$(y'+k)^2-8(x'+h)+6(y'+k)+17=0,\text{或}$$

(1)
$$y'^2-8x'+\left.\begin{array}{r}2k\\+6\end{array}\right|y'+\left.\begin{array}{r}k^2\\-8h\\+6k\\+17\end{array}\right|^{\dagger}=0$$

※解此方程式有時不可能(90頁定理IV).

†豎線代替括號.$2k+6$為y'之係數,$k^2-8h+6k+17$為常數項,去括號時能使同時集合各項.

第二步． 命 y' 之係數及常數項各等於零．



則

(2) $$2k+6=0$$

(3) $$k^2-8h+6k+17=0$$

第三步． 解(2)，(3)以求 h,k，得

$$k=-3,\ h=1.$$

第四步． 代入(1)，則得所求之方程．

$$y'^2-8x'=0$$

此方程之軌跡乃一拋物線．

例2． 試移軸化簡

$$x^2+4y^2-2x-16y+1=0$$

解． 第一步． 命 $x=x'+h,\ y=y'+k$ 代入之，則

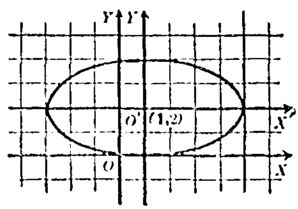
(4) $$x'^2+4y'^2\left.\begin{matrix}+2h\\-2\end{matrix}\right|x'\left.\begin{matrix}+8k\\-16\end{matrix}\right|y'\left.\begin{matrix}+h^2\\+4k^2\\-2h\\-16k\\+1\end{matrix}\right|=0.$$

第二步． 命 x',y' 之係數等於零．

$$2h-2=0,\ 8k-16=0$$

第三步． 解上兩式，得

$$h=1,\ k=2$$



第四步． 代入(4)，得所求之方程爲

$$x'^2+4y'^2=16$$

此方程之軌跡乃一橢圓．

例3． 試轉軸以去方程式 $x^2+4xy+y^2=4$ 之 xy 項．

解． 第一步． 由(11)代入之，得

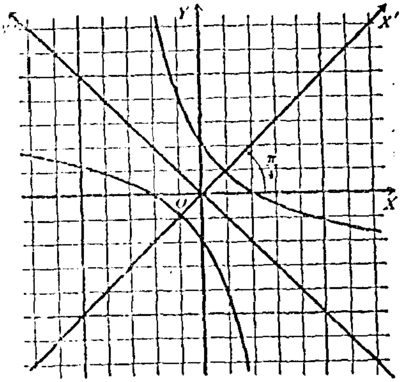
$$\left.\begin{matrix}\cos^2\theta\\4\sin\theta\cos\theta\\+\sin^2\theta\end{matrix}\right|x'^2\left.\begin{matrix}-2\sin\theta\cos\theta\\+4(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\\+2\sin\theta\cos\theta\end{matrix}\right|x'y'\left.\begin{matrix}+\sin^2\theta\\-4\sin\theta\cos\theta\\+\cos^2\theta\end{matrix}\right|y'^2=4$$

準19頁3，20頁14，得

(5) $$(1+2\sin2\theta)x'^2+4\cos2\theta\cdot x'y'+(1-2\sin2\theta)y'^2=4$$

第二步． 命 $x'y'$ 之係數等於零，得

$$\cos 2\theta = 0$$



第三步． $2\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}$$

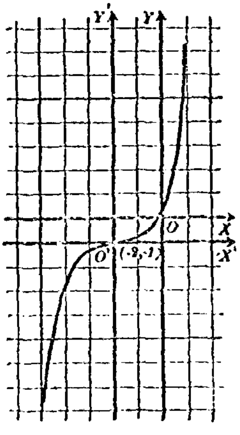
第四步． 旣 $\sin\frac{\pi}{2} = 1$，故代入(5)，得

$$3x'^2 - y'^2 = 4$$

此方程之軌跡是雙曲線．

推廣論之，由 $\cos 2\theta = 0$ 則 $2\theta = \frac{\pi}{2} + n\pi$，($n$ 為正負整數或零) $\theta = \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}$．由 $\frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}$ 中之任意一値與 θ，均能使 xy 項消去，然平常恒用其最少之角．

例4． 試移軸化簡 $x^3 + 6x^2 + 12x - 4y + 4 = 0$



解． 第一步． 命

$$x = x' + h, \quad y = y' + k$$

代入之，得

$$(6)\quad x'^3 + \left.\begin{matrix}3h\\+6\end{matrix}\right| x'^2 + \left.\begin{matrix}3h^2\\+12h\\+12\end{matrix}\right| x' - 4y' + \left.\begin{matrix}h^3\\+6h^2\\+12h\\-4k\\+4\end{matrix}\right| = 0$$

第二步． 命 x'^2 之係數及常數項等於零，得

$$3h + 6 = 0$$

$$h^3 + 6h^2 + 12h - 4k + 4 = 0$$

第三步． 解上兩方程，得

$$h = -2, \quad k = -1$$

第四步． 代入(6)，即得所求之方程

$$x'^3 - 4y' = 0.$$

此方程之軌跡，乃是立方拋物線．(cubical parabola)

問　題　37.

1. 試移軸化簡下列諸方程，並作曲線新舊軸，以表明之.

(a) $x^2+6x+8=0.$　　答. $x'^2=1.$

(b) $x^2-4y+8=0.$　　答. $x'^2=4y'.$

(c) $x^2+y^2+4x-6y-3=0.$　　答. $x'^2+y'^2=16.$

(d) $y^2-6x-10y+19=0.$　　答. $y'^2=6x'.$

(e) $x^2-y^2+8x-14y-33=0.$　　答. $x'^2-y'^2=0.$

(f) $x^2+4y^2-16x+24y+84=0.$　　答. $x'^2+4y'^2=16.$

(g) $y^3+8x-40=0.$　　答. $8x'+y'^3=0.$

(h) $x^2-y^2+14y-49=0.$　　答. $y'^2=x'^2.$

(i) $4x^2-4xy+y^2-40x+20y+99=0$　　答. $(2x'-y')^2-1=0.$

2. 用轉軸法消去下列諸方程之 xy 項，並作新舊兩軸及曲線.

(a) $x^2-2xy+y^2=12.$　　答. $y'^2=6.$

(b) $x^2-2xy+y^2+8x+8y=0.$　　答. $\sqrt{2}y'^2+8x'=0.$

(c) $xy=18.$　　答. $x'^2-y'^2=36.$

(d) $25x^2+14xy+25y^2=288.$　　答. $16x'^2+9y'^2=144.$

(e) $3x^2-10xy+3y^2=0.$　　答. $x'^2-4y'^2=0.$

(f) $6x^2+20\sqrt{3}xy+26y^2=324.$　　答. $9x'^2-y'^2=81.$

71. 對於一次或二次方程式之應用. 本節乃引用上節法則以證明幾個普通定理.

定理V. 應用軸，可改普通一次方程式

$$Ax+By+C=0 \text{ 爲 } x'=0$$

證. 由(III)，命

$$x=x'\cos\theta-y'\sin\theta+h,$$

$$y=x'\sin\theta+y'\cos\theta+k.$$

用 165 頁之法則代入之，得

$$(1)\qquad \left.\begin{matrix}A\cos\theta\\+B\sin\theta\end{matrix}\right|x'\left.\begin{matrix}-A\sin\theta\\+B\cos\theta\end{matrix}\right|y'\left.\begin{matrix}+Ah\\+Bk\\+C\end{matrix}\right|=0$$

命 y' 之係數及常數項等於零，即

(2) $$-A\sin\theta+B\cos\theta=0$$

(3) $$Ah+Bk+C=0$$

由(2)，得

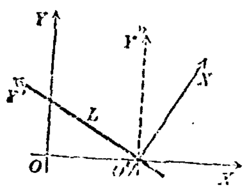
$$\tan\theta=\frac{B}{A}\text{，或 }\theta=\tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right).$$

由(3)可得 h,k 之許多值，其中一對為

$$h=-\frac{C}{A},\quad k=0.$$

代入(1)，並以 x' 之係數除之，即得

$$x'=0 \qquad \text{Q.E.D.}$$



原點先移於已知直線 L 上之一點 (h,k)，因(3)乃一點 (h,k) 在 L 上之要件，此點即直線 L 割 x 軸之處，如圖 O'. 再迴轉之，令 y 軸與 L 相合，則 L 之方程式必為 $x'=0$ 因 $x'=0$ 乃 y 軸之方程式也.

是以引用此定理，可證明任何一次方程式，其軌跡必為直線，因如上所證，任何一次方程式，必可改為 $x'=0$，而 $x'=0$ 為 y 軸之方程，乃人人易曉也.

定理VI. 二次方程

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

之 xy 項，必可以將軸廻轉 θ 角而消去之，但 θ 之值，必為

(VI) $$\tan2\theta=\frac{B}{A-C}.$$

證· 命

$$x=x'\cos\theta-y'\sin\theta$$

$$y=x'\sin\theta+y'\cos\theta$$

代入之,得

$$(4)\qquad \left.\begin{array}{r}A\cos^2\theta\\+B\sin\theta\cos\theta\\+C\sin^2\theta\end{array}\right| x'^2 \left.\begin{array}{r}-2A\sin\theta\cos\theta\\+B(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\\+2C\sin\theta\cos\theta\end{array}\right| x'y' \left.\begin{array}{r}+A\sin^2\theta\\-B\sin\theta\cos\theta\\+C\cos^2\theta\end{array}\right| y'^2$$

$$\left.\begin{array}{r}+D\cos\theta\\+E\sin\theta\end{array}\right| x' \left.\begin{array}{r}-D\sin\theta\\+E\cos\theta\end{array}\right| y'+F=0.$$

命 $x'y'$ 之係數等於零,即

$$(C-A)2\sin\theta\cos\theta+B(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=0$$

即
$$(C-A)\sin2\theta+B\cos2\theta=0$$

是以
$$\tan2\theta=\frac{B}{A-C}$$

若 θ 能合此式,則代入(4)所得之方程式,必無 xy 項.

推論· 於二次方程式轉軸以去 xy 項時,苟非以常數乘除全方程,其常數項必不變.

因(4)之常數項,仍同於已知方程也.

定理VII. 二次方程

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

之諸二次項之判別式 $\triangle=B^2-4AC$ 不等於零,其一次諸項必可以移軸而去之.

證· 命 $x=x'+h$, $y=y'+k$ 代之,得

$$(5)\qquad Ax'^2+Bx'y'+Cy'^2 \left.\begin{array}{r}+2Ah\\+Bk\\+D\end{array}\right| x' \left.\begin{array}{r}+Bh\\+2Ck\\+E\end{array}\right| y' \left.\begin{array}{r}+Ah^2\\+Bhk\\+Ck^2\\+Dh\\+Ek\\+F\end{array}\right| =0$$

再命 x'，y' 之係數等於零，則

(6) $$2Ah+Bk+D=0$$

(7) $$Bh+2Ck+E=0$$

此兩方程若無

$$\frac{2A}{B}=\frac{B}{2C}，\text{即}B^2-4AC=0$$

之關係，(90 頁定理IV)必可解之以求 h,k，再代入(5)，即消去一次諸項也.

推論I. 於二次方程移軸以去一次諸項時，苟非以常數乘除全方程，則其二次諸項之係數必不變.

(5)與已知方程比較之，便知.

推論II. 若△不等於零，則二次方程之軌跡，有一對稱之中心.

因消去一次諸項之後，其軌跡必對於新原點對稱.(73 頁定理V).

當 $\triangle=B^2-4AC=0$ 時，如有 $\frac{2A}{B}=\frac{B}{2C}=\frac{D}{E}$ (90 頁定理IV) 之關係，則(6)，(7)兩式，仍可解之以求 h,k. 此時直線 $2Ax+By+D=0$ 上之任何點，俱爲新原點，則無論何點，俱爲對稱之中心也.

例如，方程式

$$x^2+4xy+4y^2+4x+8y+3=0$$

其與上(6)，(7)相當之方程，爲

$$2h+4k+4=0$$

$$4h+8k+8=0$$

此兩方程之係數，俱相正比，合而解之，可得無限組數之根，其一組 $k=0,h=-2$. 代入已知方程式，得

$$x^2+4xy+4y^2-1=0$$

即 $$(x+2y+1)(x+2y-1)=0$$

此方程之軌跡，乃是平行兩直線，是以對於其間之一直線上任何點俱對稱.

雜問題

1. 化簡下列諸方程，並作其圖.

(a) $y^2-5y+6=0$.
(b) $x^2+2xy+y^2-6x-6y+5=0$.
(c) $y^2+6x-10y+2=0$.
(d) $x^2+4y^2-8x-16y=0$.
(e) $x^2+4xy+y^2=8$.
(f) $x^2-9y^2-2x-36y+4=0$.
(g) $25y^2-16x^2+50y-119=0$.
(h) $x^2+2xy+y^2-8x=0$.

2. 將二次方程式之諸一次項消去求所移後之原點（定理VII）.

3. 由軸之移轉以改 $(1-e^2)x^2+y^2-2px+p^2=0$ 為 $(1-e^2)x^2+y^2-2e^2px-e^2p^2=0$ 時，原點當移至何處，試求其坐標 (h,k).

4. 試將上題之第二方程簡之.

5. 試作圖以求轉軸方程式，其所轉之角為 $+\frac{\pi}{2}$ 及 $-\frac{\pi}{2}$，並代入162頁之(II)以證之.

6. 證明將軸移之，任何一次方程式，必可改為 $y'=0$.

7. 極坐標軸迴轉ϕ角時，其方程式為 $\theta=\theta'+\phi$；試證之.

8. 設極坐標之極點為(h,k)，極軸與 x 軸成ϕ角，則由直角軸坐標改為極坐標時，其方程式為

$$x=h+\rho\cos(\theta+\phi)$$
$$y=k+\rho\sin(\theta+\phi)$$

試證明之.

9. 設 x 軸不動，斜軸角為 ω，試證明由直角軸，改為斜軸之方程式，為

$$x=x'+y'\cos\omega$$
$$y=y'\sin\omega$$

10. 設原點不動，則由一種斜角軸，改為他種斜角軸之方程式，為

$$x=x'\frac{\sin(\omega-\phi)}{\sin\omega}+y'\frac{\sin(\omega-\psi)}{\sin\omega}$$
$$y=x'\frac{\sin\phi}{\sin\omega}+y'\frac{\sin\psi}{\sin\omega}$$

式中 ω 為原點之軸角，即 OX，OY 所作之角，ϕ 乃 OX，OX' 所作之角，ψ 乃 OX 及 OY' 所作之角. 試証明此兩方程式.

第八章

圓錐曲線及二次方程式

72. **極坐標方程式.** 有一點P,若其與定點F及定直線DD兩距離之比恆為常數,則其軌跡,名曰圓錐曲線※(Conic section). F曰焦點(Focus), 直線DD曰準線, (Directrix), 常數比曰離心率, (Eccentricity);通過焦點且垂直準線之直線,名曰主軸(Principal axis).

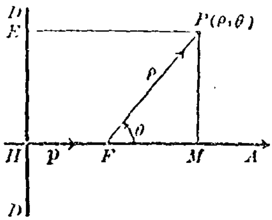
定理I. 以焦點為極,以極軸為主軸之圓錐曲線,其方程式為

(I) $$\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta}$$

式中e為離心率,p為自準線至焦點之距離.

證. 設P為圓錐曲線上任意一點,則由定義有

$$\frac{FP}{EP}=e$$



由圖,得

$$FP=\rho$$

$$EP=HM=p+\rho\cos\theta$$

代入上式,得

$$\frac{\rho}{p+\rho\cos\theta}=e;$$

解之,則得

$$\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta}$$ Q.E.D.

※因平面截圓錐即得此等曲線.

由方程(I)，可知下兩事.

1．因 $\cos(-\theta)=\cos\theta$，故凡圓錐曲線對於主軸必對稱.

2．作圖時，θ 無略去之值.

其他諸性質，依 $e \gtreqless 1$，分三段論之於下.

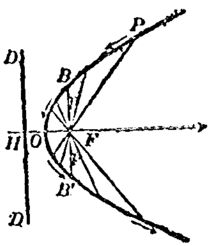
(A) $e=1$．此時(I)變成

$$\rho=\frac{p}{1-\cos\theta}$$

其軌跡爲拋物線，(Parabola).

1．命 $\theta=0$ 則 $\rho=\infty$，$\theta=\pi$ 則 $\rho=\frac{p}{2}$，故此拋物線割主軸於一點 0，名曰頂(Vertex)，在焦點 F 之左之距離爲 $\frac{p}{2}$，即距焦點及準線相等。

2．當 $1-\cos\theta=0$ 時，則 $\rho=\infty$．因 $1-\cos\theta=0$，則 $\cos\theta=1$；$\theta=0$ 故 $\theta<2\pi$ 時，僅有一值，能供 $\rho=\infty$.



3．當 θ 由 0 漸增至 $\frac{\pi}{2}$，則 $\cos\theta$ 由 1 漸減至 0，則 $1-\cos\theta$ 由 0 漸增至 1，亦即 ρ 由無窮漸減至 p；故 $P(\rho,\theta)$ 作成自 ∞ 至 B 之一段拋物線.

當 θ 由 $\frac{\pi}{2}$ 漸增至 π，則 $\cos\theta$ 由 0 漸減至 -1，則 $1-\cos\theta$ 由 1 漸增至 2 則 ρ 由 p 漸減至 $\frac{p}{2}$，故 $P(\rho,\theta)$ 作成由 B 至頂點之一段拋物線.

因其對於主軸對稱，當 θ 由 π 漸增至 $\frac{3\pi}{2}$，$P(\rho,\theta)$ 作成自頂至 B' 之一段，當 θ 由 $\frac{3\pi}{2}$ 漸增至 2π，$P(\rho,\theta)$ 作成自 B' 至無窮之一段．

(B) $e<1$ 其軌跡為橢圓．(ellipse)

(C) $e>1$ 則為雙曲線．(Hyperbola)

此兩種軌跡，性質之異同，一並討論於下．

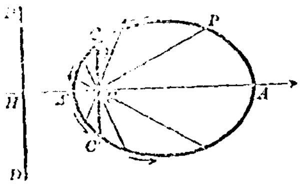
橢圓 $e<1$

1．$\theta=0$ 則 $\rho=\frac{ep}{1-e}=\frac{e}{1-e}p$.

因 $e<1$，故 $1-e$ 為正，則 ρ 為正，是以得橢圓上之一點 A 在 F 之右．

因 $e \gtreqless \frac{1}{2}$ 得 $\frac{e}{1-e} \gtreqless 1$

即 $FA \gtreqless FH$



$\theta=\pi$ 則 $\rho=\frac{ep}{1+e}=\frac{e}{1+e}p$，故 ρ 為正，是以得一點 A' 在 F 之左．

因 $\frac{e}{1+e}<1$，則 $\rho<p$；故 A' 在 H，F 之間．

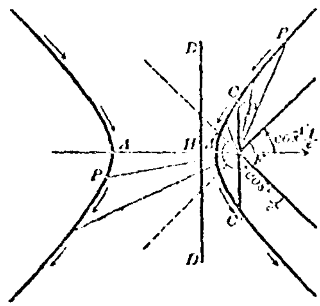
A，A' 名曰橢圓之頂，(Vertices)

雙曲線 $e>1$

1．$\theta=0$ 則 $\rho=\frac{ep}{1-e}=\frac{e}{1-e}p$.

因 $e>1$，故 $1-e$ 為負，則 ρ 為負，是以得雙曲線上之一點 A 在 F 之左．

既 $e>1$ 則 $\frac{e}{1-e}$ 之絕對值大於 1，則 $\rho>p$，是以 A 在 H 之左．



$\theta=\pi$ 則 $\rho=\frac{ep}{1+e}=\frac{e}{1+e}p$，故 ρ 為正，是以得第二點 A' 在 F 之左．

因 $\frac{e}{1+e}<1$，則 $\rho<p$；故 A' 在 H，F 之間．

A，A' 名曰雙曲線之頂(Vertices)

橢圓，$e<1$.

2. 若 $1-e\cos\theta=0$

則 $\cos\theta=\frac{1}{e}$ 則 $\rho=\infty$

但因 $e<1$，則 $\frac{1}{e}>1$，而 $\cos\theta$ 不能大於1，故 θ 之任何值均不能供 ρ 等於無限。

3. 當 θ 由0漸增至 $\frac{\pi}{2}$，則 $\cos\theta$ 由1漸減至0，則 $1-e\cos\theta$ 由 $1-e$ 漸增至1，是以 ρ 由 $\frac{ep}{1-e}$ 漸減至 ep，故 $P(\rho,\theta)$ 作成由 A 至 C 之一段橢圓。

當 θ 由 $\frac{\pi}{2}$ 漸增至 π，則 $\cos\theta$ 由0漸減至 -1，則 $1-e\cos\theta$ 由1漸增至 $1+e$，是以 ρ 由 ep 漸減至 $\frac{ep}{1+e}$；故 $P(\rho,\theta)$ 作成自 C 至 A' 之一段橢圓.

橢圓之其餘一半，即 $A'C'A$，因其對於主軸對稱，可逕作成之.

故橢圓爲閉合曲線，(Closed curve)

雙曲線，$e>1$.

2. 若 $1-e\cos\theta=0$

則 $\cos\theta=\frac{1}{e}$，則 $\rho=\infty$

因 $e>1$，則 $\frac{1}{e}<1$；故 θ 有兩值能供 ρ 等於無限.

3. 當 θ 由0漸增至 $\cos^{-1}\left(\frac{1}{e}\right)$.

則 $\cos\theta$ 由1漸減至於 $\frac{1}{e}$，則 $1-e\cos\theta$ 由 $1-e$ 漸增至0，是以 ρ 由 $\frac{ep}{1-e}$ 漸減至 $-\infty$，故 $P(\rho,\theta)$ 作成左邊自 A 向下至無限之一段雙曲線。

當 θ 由 $\cos^{-1}\left(\frac{1}{e}\right)$ 漸增至 $\frac{\pi}{2}$，則 $\cos\theta$ 由 $\frac{1}{e}$ 漸減至0，則 $1-e\cos\theta$ 由0漸增至1，是以 ρ 由 ∞ 漸減至 ep，故 $P(\rho,\theta)$ 作成右邊自無限向下至於 C 之一段雙曲線.

當 θ 由 $\frac{\pi}{2}$ 漸增至 π，則 $\cos\theta$ 由0漸減至 -1，則 $1-e\cos\theta$ 由1漸增至 $1+e$，是以 ρ 由 ep 漸減至於 $\frac{ep}{1+e}$，故 $P(\rho,\theta)$ 作成自 C 至 A' 之一段雙曲線.

右邊自 $A'C'$ 至無限及左邊自無限至 A，因其對於主軸對稱，可逕作成之.

雙曲線爲無限長之兩枝.

問 題 38.

1. 下列諸圓錐曲線，其 e,p 之值及焦點準線之位置如何，試作全圖以討論之.

(a) $\rho=\dfrac{2}{1-\cos\theta}$.

(b) $\rho=\dfrac{2}{1-\frac{1}{2}\cos\theta}$.

(c) $\rho=\dfrac{8}{1-2\cos\theta}$.

(d) $\rho=\dfrac{5}{2-2\cos\theta}$.

(e) $\rho=\dfrac{3}{3-\cos\theta}$.

(f) $\rho=\dfrac{6}{2-3\cos\theta}$.

(g) $\rho=\dfrac{2}{2-\cos\theta}$.

(h) $\rho=\dfrac{12}{3-4\cos\theta}$.

2. 將問題 1 之諸方程化爲矩坐標，並將所得之方程式，用 165 頁之法則化簡之，求得焦點之坐標及準線之方程式，然後作各方程之軌跡，焦點，及新軸之準線.

答. (a) $y^2=4x$, $(1,0)$, $x=-1$.

(b) $\dfrac{x^2}{\frac{64}{9}}+\dfrac{y^2}{\frac{16}{3}}=1$, $\left(-\dfrac{4}{3},0\right)$, $x=-\dfrac{16}{3}$.

(c) $\dfrac{x^2}{\frac{64}{9}}-\dfrac{y^2}{\frac{94}{3}}=1$, $\left(\dfrac{16}{3},0\right)$, $x=\dfrac{4}{3}$.

(d) $y^2=5x$, $(\frac{5}{4},0)$, $x=-\frac{5}{4}$.

(e) $\dfrac{x^2}{\frac{81}{64}}+\dfrac{y^2}{\frac{9}{8}}=1$, $\left(-\dfrac{3}{8},0\right)$, $x=-\dfrac{27}{8}$.

(f) $\dfrac{x^2}{\frac{144}{25}}-\dfrac{y^2}{\frac{36}{5}}=1$, $\left(\dfrac{18}{5},0\right)$, $x=\dfrac{8}{5}$.

(g) $\dfrac{x^2}{\frac{16}{9}}+\dfrac{y^2}{\frac{4}{3}}=1$, $(-\frac{2}{3},0)$, $x=-\dfrac{8}{3}$.

(h) $\dfrac{x^2}{\frac{1296}{49}}-\dfrac{y^2}{\frac{144}{7}}=1$, $\left(\dfrac{48}{7},0\right)$, $x=\dfrac{27}{7}$.

3. 設(a) $e=1$, (b) $e\gtrless1$, 試改(I)爲矩形坐標，化簡所得之方程，並求焦點之坐標及準線之方程式.

答. (a) $y^2=2px$, $\left(\dfrac{p}{2},0\right)$, $x=-\dfrac{p}{2}$.

(b) $\dfrac{x^2}{\frac{e^2p^2}{(1-e^2)^2}}+\dfrac{y^2}{\frac{e^2p^2}{1-e^2}}=1$, $\left(-\dfrac{e^2p}{1-e^2},0\right)$, $x=-\dfrac{p}{1-e^2}$.

4. 設(a) 焦點在準線之左，(b) 極軸與準線平行，試求圓錐曲線之方程式。 答. (a) $\rho=\frac{ep}{1+e\cos\theta}$, (b) $\rho=\frac{ep}{1-e\sin\theta}$.

5. 作下列諸方程之圖以討論之並求 e,p 及作各準線。

(a) $\rho=\frac{8}{1+\cos\theta}$. (c) $\rho=\frac{7}{3+10\cos\theta}$.

(b) $\rho=\frac{6}{1-\sin\theta}$. (d) $\rho=\frac{5}{3-\sin\theta}$.

73. 化爲矩坐標.

定理II. 設圓錐曲線之焦點爲原點，主軸爲 x 軸，則其方程式爲

(II) $$(1-e^2)x^2+y^2-2e^2px-e^2p^2=0.$$

式中 e 爲離心率(Eccentricity) $x=-p$ 爲準線方程式.

證. 將(I)去分母，得

$$\rho-e\rho\cos\theta=ep$$

由 155頁. $\rho=\pm\sqrt{x^2+y^2}$, $\rho\cos\theta=x$, 得

$$\pm\sqrt{x^2+y^2}-ex=ep$$

則 $$\pm\sqrt{x^2+y^2}=ex+ep$$

平方之，並集 x,y 同次項之係數，則得(II)，因準線 DD 乃在 F 之左距離 p 之處，準線之方程式爲 $x=-p$ 故也.

74. 矩坐標方程式之討論及化簡法.

先論拋物線 $e=1$.

當 $e=1$ 時，(II)變成

$$y^2-2px-p^2=0$$

應用 165 頁法則以

(1) $$x=x'+h,\ y=y'+k$$

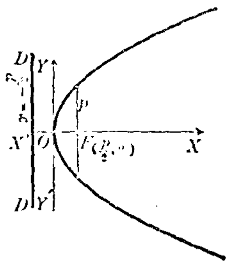
代之，得

(2) $$y'^2-2px'+2ky'+k^2-2ph-p^2=0$$

命 y' 之係數及常數項等於零，並解之以求 h, k, 得

(3) $$h=-\frac{p}{2},\ k=0.$$

代入 (2)，即得拋物線之方程式，$y^2=2px$.



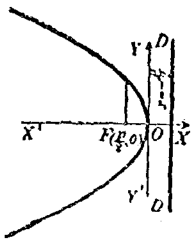
由(3)，可知原點已由 F 移至 O，即拋物線之頂，故焦點之新坐標爲 $\left(\frac{p}{2},0\right)$，準線之新方程式爲 $x=-\frac{p}{2}$，是以得

定理III. 設拋物線之頂爲原點，主軸爲 x 軸，則其方程式爲

(III) $$y^2=2px$$

其焦點爲 $\left(\frac{p}{2},0\right)$，準線之方程式爲 $x=-\frac{p}{2}$.

將(III)討論之，拋物線之性質，除 174 頁所論外，復有下列數條.



1. 除通過原點之外，不再與軸相交.

2. 凡 x 與 p 反號之值，均須略去，（73 頁之法則）是以 p 爲正時，拋物線在 YY' 之右，p 爲負時，在 YY' 之左.

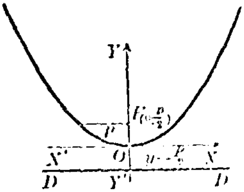
3. y 無當略去之值，故曲線向上向下各延伸至無限.

定理IV. 設拋物線之頂爲原點，主軸爲 y 軸，則其方程式爲

(IV) $$x^2=2py$$

其焦點爲 $\left(0,\frac{p}{2}\right)$，準線方程式爲 $y=-\frac{p}{2}$.

證. 將(III)之軸廻轉$-\frac{\pi}{2}$,而162頁之方程式(II)之$\theta=-\frac{\pi}{2}$,則



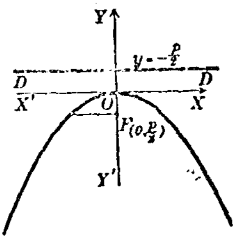
$$x=y'$$
$$y=-x'$$

代入(III),即得

$$x^2=2py \qquad Q.E.D.$$

軸迴轉$-\frac{\pi}{2}$之後,即全圖由正方向廻轉$\frac{\pi}{2}$.

拋物線在x軸之上或下,依p之正或負而定.

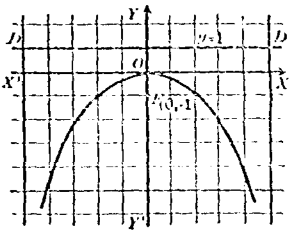


方程式(III)及(IV),名曰拋物線之模範式.

凡方程式之爲

$$Ax^2+Ey=0,$$
$$Cy^2+Dx=0,$$

形式者,若A,E,C,D俱不等於零,必可寫成(III),(IV)之形式.故其軌跡,俱是拋物線.



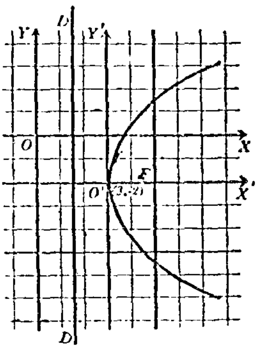
例1. 作$x^2+4y=0$之軌跡,並求其焦點及準線.

解. 寫已知方程式爲$x^2=-4y$,與(IV)比較,知其軌跡爲拋物線,其$p=-2$,焦點爲$(0,-1)$,準線爲$y=1$.

例2. 設$p=3$,頂爲$O'(3,-2)$,準線平行y軸,試求此拋物線之方程式.

解. 先以$O'X'$,$O'Y'$為軸,則此拋物線之方程式(準定理III)為

(4)　　$y'^2=6x'$



當原點由 O 移至 O' 時,其方程式為

$$x=x'+3,\ y=y'-2$$

則

(5)　　$x'=x-3,\ y'=y+2$

代入(4),得所求之方程式

$$(y+2)^2=6(x-3)$$

即　　$y^2-6x+4y+22=0$

以 $O'X'$,$O'Y'$ 為軸,其焦點為$(\frac{3}{2},0)$,準線之方程為 $x'=-\frac{3}{2}$. 由(5),得以OX,OY 為軸時焦點為$(\frac{9}{2},-2)$,準線之方程式為 $x=\frac{3}{2}$.

問　　題　　59.

1. 試作下列諸方程之軌跡及其焦點與準線.

(a) $y^2=4x$.　　(d) $y^2-6x=0$.

(b) $y^2+4x=0$.　　(e) $x^2+10y=0$.

(c) $x^2-8y=0$.　　(f) $y^2+x=0$.

2. 設準線平行 y 軸,試求下列諸拋物線之方程式.

(a) $p=6$,頂點為$(3,4)$.　　答. $(y-4)^2=12(x-3)$.

(b) $p=-4$,頂點為$(2,-3)$.　　答. $(y+3)^2=-8(x-2)$.

(c) $p=8$,頂點為$(-5,7)$.　　答. $(y-7)^2=16(x+5)$.

(d) $p=4$,頂點為(h,k).　　答. $(y-k)^2=8(x-h)$.

3. 經過焦點,垂直主軸之弦曰首徑,試求 $y^2=2px$ 之首徑之長.
答. $2p$.

4. 拋物線之頂為(α,β),其主軸平行 y 軸,則其方程式如何?
答. $(x-\alpha)^2=2p(y-\beta)$.

5. 試改(a) $y^2=2px$,(b) $x^2=2py$ 為極坐標,并討論所得之方程式.

6. 證明拋物線(III)上之兩點,其橫坐標各與其縱坐標之平方成正比例.

75. 矩坐標方程式之討論及化簡法·有心圓錐曲線 $e\gtrless 1$.

當 $e\gtrless 1$ 時,方程式(II)為

$$(1-e^2)x^2+y^2-2e^2px-e^2p^2=0$$

用 165 頁之法則化簡之,命

(1) $$x=x'+h,\ y=y'+k$$

代入之,得

(2) $$(1-e^2)x'^2+y'^2+\left\{\begin{array}{l}2h(1-e^2)\\-2e^2p\end{array}\right\}x'+2ky'+\left\{\begin{array}{l}(1-e^2)h^2\\+k^2\\-2e^2ph\\-e^2p^2\end{array}\right\}=0$$

命 x', y' 之係數等於零,則

$$2h(1-e^2)-2e^2p=0,\ 2k=0$$

則得

(3) $$h=\frac{e^2p}{1-e^2},\quad k=0$$

代入(2),得

$$(1-e^2)x'^2+y'^2-\frac{e^2p^2}{1-e^2}=0$$

則

(4) $$\frac{x'^2}{\dfrac{e^2p^2}{(1-e^2)^2}}+\frac{y'^2}{\dfrac{e^2p^2}{1-e^2}}=1$$

橢圓 $e<1$

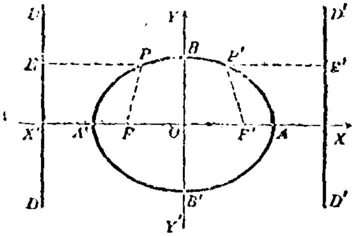
由(3),可知當 $e<1$ 時,h 為正。故新原點 O 在焦點 F 之右.

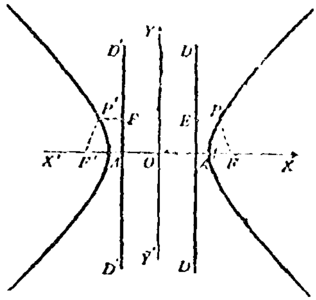
雙曲線 $e>1$

由(3),可知當 $e>1$ 時,h 為負,故新原點 O 在焦點 F 之左.

又 $\dfrac{e^2}{1-e^2}$ 之絕對值大於 1,則 h 之絕對值大於 p,是以新原點在準線 DD 之左。

準 73 頁定理V,(4)之軌跡,對於 YY' 對稱,故 O 在 AA' 之中點.





於上兩圖,作 F',$D'D'$ 對於 YY' 與 F,DD 對稱,則 F' 及 $D'D'$ 即是新原點及新準線.

因設 P,P' 為曲線上之兩點,對於 YY' 對稱,則 $PF=P'F'$,$PE=P'E'$. 但由定義 $\frac{PF}{PE}=e$,故 $\frac{P'F'}{P'E'}=e$,是以由 P',以 F' 為焦點,$D'D'$ 為準線所作成之曲線,猶之 P 以 F 為焦點 DD 為準線所作成之曲線.

(4)之軌跡,既對於原點對稱,故謂之 **有心圓錐曲線**. (Central conic). 對稱之心謂之心,(Center). 是以有心圓錐曲線,必有兩焦點及兩準線.

兩圖內之焦點 F,俱為 $\left(-\frac{e^2p}{1-e^2},0\right)$. 因 F 之舊坐標為(0,0). 代入(1),即得其新坐標 $x'=-h$, $y'=-k$,由(3),得 $\left(-\frac{e^2p}{1-e^2},0\right)$.

故 F' 之坐標為 $\left(\frac{e^2p}{1-e^2},0\right)$.

DD 之新方程式為 $x=-\frac{p}{1-e^2}$.

因由(1)及(3),

$x=x'+\frac{e^2p}{1-e^2}$, $y=y'$. 代入 $x=-p$(定理II)則有 $x=-\frac{p}{1-e^2}$.

故 $D'D'$ 之方程式為 $x=-\frac{p}{1-e^2}$.

總上所論,則得下:

預理. 設有心圓錐曲線之心是原點,主軸是 x 軸,則其方程式為

$$\frac{x^2}{\frac{e^2p^2}{(1-e^2)^2}}+\frac{y^2}{\frac{e^2p^2}{1-e^2}}=1 \tag{4}$$

其兩焦點為 $\left(\pm\frac{e^2p}{1-e^2},0\right)$,兩準線為 $x=\pm\frac{p}{1-e^2}$.

橢圓 $e<1$

為簡便計,命

$$a=\frac{ep}{1-e^2},\ b^2=\frac{e^2p^2}{1-e^2}, \tag{5}$$

$$c=\frac{e^2p}{1-e^2}.$$

a^2, b^2 則方程式(4)之分母,c 為一焦點之橫坐標.因 $e<1$ 則 $1-e^2$ 為正,故 a, b^2, c 俱為正.

則 $$a^2-b^2=\frac{e^2p^2}{(1-e^2)^2}-\frac{e^2p^2}{1-e^2}$$

$$=\frac{e^4p^2}{(1-e^2)^2}=c^2$$

又 $$\frac{a^2}{c}=\frac{e^2p^2}{(1-e^2)^2}\div\frac{e^2p}{1-e^2}$$

$$=\frac{p}{1-e^2}.$$

是以兩準線之方程式為

$$x=\pm\frac{a^2}{c}.$$

由(5)代入(4),則得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

雙曲線 $e>1$

為簡便計,命

$$a=-\frac{ep}{1-e^2},\quad b^2=-\frac{e^2p^2}{1-e^2}, \tag{6}$$

$$c=-\frac{e^2p}{1-e^2}.$$

a^2, $-b^2$ 則(4)之分母,c 為一焦點之橫坐標,因 $e>1$ 則 $1-e^2$ 為負,故 a, b^2, c 俱為正.

則 $$a^2+b^2=\frac{e^2p^2}{(1-e^2)^2}-\frac{e^2p^2}{1-e^2}$$

$$=\frac{e^4p^2}{(1-e^2)^2}=c^2$$

又 $$\frac{a^2}{c}=\frac{e^2p^2}{(1-e^2)^2}\div-\frac{e^2p}{1-e^2}$$

$$=-\frac{p}{1-e^2}.$$

是以兩準線之方程式為

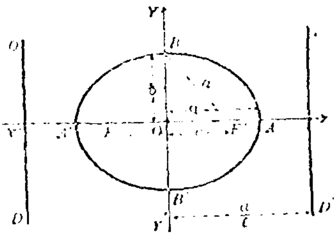
$$x=\pm\frac{a^2}{c}.$$

由(6)代入(4),則得

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

橢圓 $e<1$

其截 x,y 兩軸之截線，爲 $x=\pm a$, $y=\pm b$. $AA'=2a$ 名曰長軸，(Major axis)，$BB'=2b$ 名曰短軸，(Minor axis)，因 $a^2-b^2=c^2$ 爲正，故 $a>b$.



定理V. 以原點爲心之橢圓，其兩焦點俱在 x 軸上，則其方程式爲

(V) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

式中 $2a$ 爲長軸，$2b$ 爲短軸，若 $c^2=a^2-b^2$ 則兩焦點爲 $(\pm c,0)$ 兩準線爲 $x=\pm\frac{a^2}{c}$.

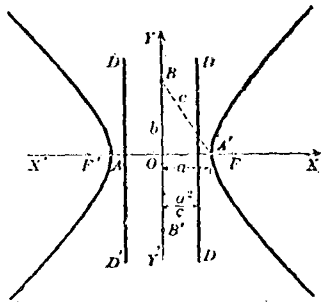
由(5)，可以方程式(V)之常數 a,b,c 表(I)之常數 e,p. 則

(7) $$\frac{c}{a}=\frac{e^2p}{1-e^2}\div\frac{ep}{1-e^2}=e.$$

(9) $$\frac{b^2}{c}=\frac{e^2p^2}{1-e^2}\div\frac{e^2p}{1-e^2}=p.$$

雙曲線 $e>1$

其截 x 軸之截線爲 $x=\pm a$，惟不截 y 軸. $AA'=2a$ 名曰橫軸，(Transverse axis)，$BB'=2b$ 名曰共軛軸，(Conjugate axis).



定理VI. 以原點爲心之雙曲線，其兩焦點俱在 x 軸上，則其方程式爲

(VI) $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

式中 $2a$ 爲橫軸，$2b$ 爲共軛軸，若 $c^2=a^2+b^2$ 則兩焦爲 $(\pm c,0)$，兩準線爲 $x=\pm\frac{a^2}{c}$.

由(6)，可將(I)之常數 e,p 以(VI)之常數 a,b,c 表之. 則

(8) $$\frac{c}{a}=-\frac{e^2p}{1-e^2}\div-\frac{ep}{1-e^2}=e.$$

(10) $$\frac{b^2}{c}=-\frac{e^2p^2}{1-e^2}\div-\frac{e^2p}{1-e^2}=p.$$

橢圓 $e<1$

於上圖，$OB=b$，$OF'=c$；既$c^2=a^2-b^2$，則 $BF'=a$。是以作圖時，以B爲心，以OA爲半徑作弧，割x軸於F'，F''，即得兩焦點。

若 $a=b$，則(V)變成

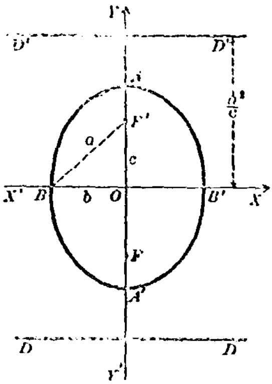
$$x^2+y^2=a^2,$$

即由橢圓變成圓。

將方程式(V)之軸廻轉一$\frac{\pi}{2}$。則有

定理VII. 以原點爲心之橢圓，其焦點俱在 y 軸上，則其方程式爲

(VII) $$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$



式中$2a$爲長軸，$2b$爲短軸，若$c^2=a^2-b^2$，其焦點必爲$(0, \pm c)$，其準線必爲$y=\pm\frac{a^2}{c}$。

雙曲線 $e>1$

於上圖，$OB=b$，$OA'=a$；既$c^2=a^2+b^2$，則$BA'=c$。是以欲求焦點，只以O爲心，以BA'爲半徑，作弧，割x軸於F，F'即得。

若 $a=b$ 則(VI)變成

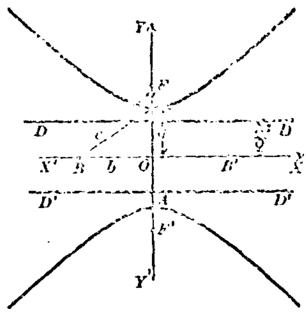
$$x^2-y^2=a^2,$$

其軌跡名曰等邊雙曲線(Equilateral hyperbola)。

將方程式(VI)之軸，廻轉一$\frac{\pi}{2}$。則有

定理VIII. 以原點爲心之雙曲線，其焦點俱在 y軸上，則其方程式爲

(VIII) $$-\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$



式中$2a$爲橫軸，$2b$爲共軛軸，若$c^2=a^2+b^2$，其焦點必爲$(0, \pm c)$，其準線必爲$y=\pm\frac{a^2}{c}$。

橢圓 $e<1$

於(V)，x^2 之分母大於 y^2 之分母，於(VII)，則反之．此兩式名曰橢圓之模範式．

雙曲線 $e>1$

(VI)，(VIII) 兩式之異點，則 x^2，y^2 兩係數之正負不同是也，名此兩式，曰雙曲線之模範式．

凡方程之爲

$$Ax^2+Cy^2+F=0$$

形式者，苟 A,C,F 俱非零，必可寫成

$$\frac{x^2}{\alpha}+\frac{y^2}{\beta}=1 \tag{11}$$

此方程之軌跡如下．

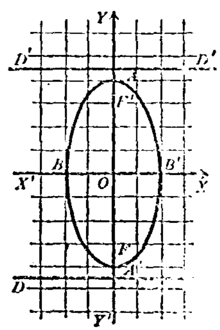
1．若 α，β 俱正，乃一橢圓，a^2 爲其較大之分母，b^2 爲其較小者．

2．若 α，β 不同號，則爲雙曲線，a^2 爲其正分母，b^2 爲其負分母．

3．若 α，β 俱負，則不能有軌跡．

例1． 求橢圓 $4x^2+y^2=16$ 之主軸，焦點，準線，及離心率．

解． 以16除之，得



$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$$

第二分母較大，與(VII)比較之，得

$$b^2=4,\ a^2=16,\ c^2=16-4=12,$$

即 $$b=2,\ a=4,\ c=\sqrt{12}.$$

開方時只取正號，因 a,b,c 皆爲正．

所以長軸 $AA'=8$，短軸 $BB'=4$，兩焦點 F,F' 爲 $(0,\pm\sqrt{12})$，兩準線之方程式爲 $y=\pm\frac{a^2}{c}=\pm\frac{16}{\sqrt{12}}=\pm\frac{4}{3}\sqrt{12}$.

又由(7),(9),得 $e=\frac{\sqrt{12}}{4}, p=\frac{4}{\sqrt{12}}=\frac{1}{3}\sqrt{12}$.

問　題　40.

1. 試作下列諸方程之軌跡,準線,焦點,並求 e,p 之值.

(a) $x^2+9y^2=81$.　　(e) $9y^2-4x^2=36$.
(b) $9x^2-16y^2=144$.　　(f) $x^2-y^2=25$.
(c) $16x^2+y^2=25$.　　(g) $4x^2+7y^2=13$.
(d) $4x^2+9y^2=36$.　　(h) $5x^2-3y^2=14$.

2. 下列諸橢圓之心,俱與原點相合,其焦點俱在 X 軸上,試求其方程式.

(a) $a=5, b=3$.　　答. $9x^2+25y^2=225$.
(b) $a=6, e=\frac{1}{3}$.　　答. $32x^2+36y^2=1152$.
(c) $b=4, c=3$.　　答. $16x^2+25y^2=400$.
(d) $c=8, e=\frac{2}{3}$.　　答. $5x^2+9y^2=720$.

3. 下列諸雙曲線，俱以原點爲心，其焦點均在 X 軸上,試求其方程式.

(a) $a=3, b=5$.　　答. $25x^2-9y^2=255$.
(b) $a=4, c=5$.　　答. $9x^2-16y^2=144$.
(c) $e=\frac{3}{2}, a=5$.　　答. $5x^2-4y^2=125$.
(d) $c=8, e=4$.　　答. $15x^2-y^2=60$.

(4) 證明橢圓及雙曲線之首徑(經過焦點垂直主軸之弦)爲 $\frac{2b^2}{a}$.

5. 等邊雙曲線之離心率爲何?

6. 試改(V),(VI)爲極坐標，並討論所得之方程式.

7. 圓之焦點及準線在何處.

8. 橢圓及雙曲線之心,俱爲(α,β),其主軸均平行 X 軸,則其方程式如何.　答. $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$, $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$.

76. 共軛雙曲線及漸近線. 設此雙曲線之橫軸及共軛軸爲彼雙曲線之共軛軸及橫軸則此兩雙曲線名曰 共軛雙曲線. (conjugate hyperbolas)其中心相合,兩主軸互相正交.

設雙曲線之方程式爲模範式,則互易其 x^2, y^2 係數之號,即得其共軛雙曲線之方程式.

因若一方程式寫爲(VI)則他一方程式便爲式(VIII),其一正分母之數值等於他一負分母之數值,故任一個之橫軸便爲他一個之共軛軸.

例如方程式

(1) $$16x^2-y^2=16, \quad -16x^2+y^2=16$$

之軌跡,爲共軛雙曲線,今改寫爲

$$\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{16}=1, \quad -\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{16}=1.$$

前方程之軌跡與 x 軸相交,後方程之軌跡與 y 軸相交,前方程之橫軸及後方程之共軛軸等於 2,前方程之共軛軸及後方程之橫軸等於 8.

共軛雙曲線之四焦點,距原點等遠,因由定理VI,及VIII,c^2 等於半橫軸之平方及半共軛軸之平方之和,是以共軛雙曲線 c^2 值相等,例如方程 $c^2=1+16$,而後方程亦 $c^2=16+1$ 是也.

設於雙曲線之模範方程式內,命常數項等於零,則雙曲線變成通過原點之兩直線,(閱 66 頁之定理)此兩直線謂之雙曲線之 漸近線. (Asymptotes of the hyperbola)例如雙曲線

(2) $$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$$

之漸近線,爲

(3) $$b^2x^2-a^2y^2=0$$

即

(4) $$bx+ay=0, \quad bx-ay=0$$

此兩直線俱通過原點，其斜度爲

(5)
$$-\frac{b}{a},\ \frac{b}{a}$$

漸近線之最要性質爲

定理IX. 雙曲線之四枝延伸至無限時，則與漸近線相遇.

證. 設$P_1(x_1,y_1)$爲雙曲線(2)內與第一漸近線相近之一點，(191頁之圖)準106頁之法則由直線至P_1之距離，等於

(6)
$$d=\frac{bx_1+ay_1}{+\sqrt{b^2+a^2}}$$

又因P_1在$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$之內，劈因數得

$$bx_1+ay_1=\frac{a^2b^2}{bx_1-ay_1}$$

代入(6)，則得

$$d=\frac{a^2b^2}{+\sqrt{b^2+a^2}(bx_1-ay_1)}$$

依P_1漸移至無限遠，則x,y俱等於無限而d等於零，因直線在第四第二兩象限內，x,y恆反號，而bx_1-ay_1不能爲零故也，是以雙曲線漸與漸近線相近，至無限遠時，遂相遇. *Q.E.D.*

共軛雙曲線之漸近線相同，試命共軛雙曲線兩方程之常數項俱等於零，則兩方程形式雖異，其實則同.如

$$16x^2-y^2=0,\ -16x^2+y^2=0$$

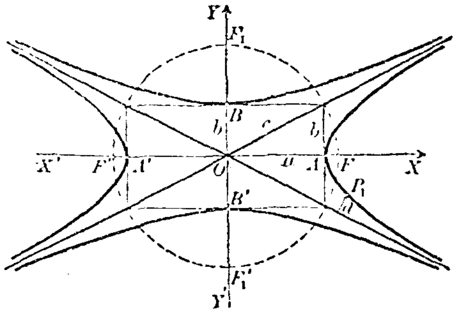
兩方程是也.

雙曲線之作法如下.

作圖. 於雙曲線所割之軸上，取$OA=OA'=a$，再於他軸上，取$OB=OB'=b$通過A,A',B,B'作四直線，各與軸平行，以成一矩形*，作矩形之兩對角線及外切圓，並引長兩對角線，於是作雙曲線切矩形

*用此矩形作一內切橢圓較精確.

之兩邊於A, A'.延伸其四端,令其漸與兩對角線相近,再作其他雙曲線,切矩形之他兩邊於B, B'.並延伸之漸與兩對角線相近,即得所求之雙曲線.



矩形之外切圓,割軸之四點,即其四焦點,兩對角線,即其漸近線.

77. 以漸近線爲軸之等邊雙曲線. 等邊雙曲線之方程式(186頁)爲

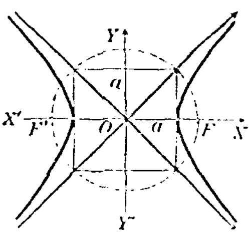
(1) $$x^2-y^2=a^2$$

其漸近線爲

$$x-y=0,\ x+y=0$$

準87頁推論III,此兩直線,互相垂直,故可假定爲坐標軸.

定理X. 等邊雙曲線,假定其漸近線爲軸時,其方程式爲



(X) $$2xy=a^2$$

證. 將軸廻轉$-\frac{\pi}{2}$,即與漸近線相合,是以由162頁定理II,命

$$x=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}},\quad y=\frac{-x'+y'}{\sqrt{2}}.$$

代入(1)得

$$\frac{(x'+y')^2}{2}-\frac{(-x'+y')^2}{2}=a^2$$

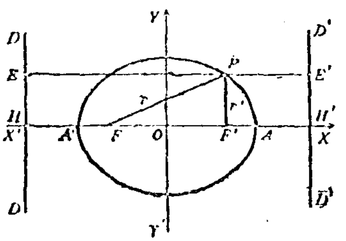
乘化簡,即得

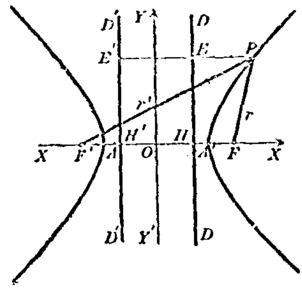
$$2xy=a^2 \qquad \text{Q.E.D.}$$

78．**有心圓錐曲線之焦點性．** 自圓錐曲線上之一點，至焦點之距離，名曰焦點半徑(Focal radius)．故自有心圓錐曲線上任意一點，必可作兩焦點半徑．

定理XI． 由橢圓之任意一點，所作兩焦點半徑之和，等於長軸 $2a$．

定理XII． 由雙曲線上任意一點，所作兩焦點半徑之差，必等於橫軸 $2a$．





證． 設P為橢圓之任意一點，由173頁定義，得

$$r'=e\cdot PE,\ r'=e\cdot PE'.$$

則
$$r+r'=e(PE+PE')$$
$$=e\cdot HH'$$

但由185頁(7)，$e=\frac{c}{a}$．

由準線方程式

$$HH'=2\frac{a^2}{c}$$

是以 $r+r'=\frac{c}{a}\cdot 2\frac{a^2}{c}=2a$．

證． 設P為雙曲線之任意一點，由定義，得

$$r=e\cdot PE,\ r'=e\cdot PE'.$$

則
$$r'-r=e(PE'-PE)$$
$$=e\cdot HH'$$

但由185頁(8)，$e=\frac{c}{a}$．

由準線方程式(定理VI)

$$HH'=2\frac{a^2}{c}$$

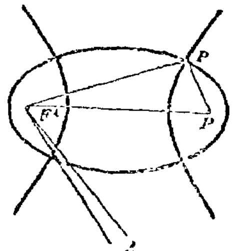
是以 $r'-r=\frac{c}{a}\cdot 2\frac{a^2}{c}=2a$．

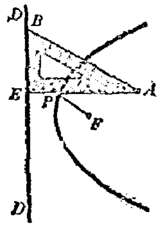
79．**圓錐曲線之機械作法．** 由XI，XII兩定理可得作橢圓及雙曲線之簡法如下：

作橢圓之法，以兩針釘定於兩焦點 F，F'，取堅牢極細之絲線折成環形，令此線環拉直時其長等於橢圓之長軸，固定絲線於FPF'，置鉛筆於環內，恆令線環拉直而移動之，如圖所示，即橢圓，因$PF+PF'$恆等常數不變故也．

作雙曲線之法，裝制與橢圓同，惟鉛筆以絲線縛定於 P，而絲線不於 A 縛定以抽動，將絲線之兩端同時抽動之，即作成雙曲線，因 $PF'-PF$ 不變故也.

作拋物線之法，取一三角板，令其一邊 EB 恆與準線 DD 符合，再取





絲線其長等於 AE，一端縛定於 A，他端縛定於焦點 F，留鉛筆於 P，將此三角板沿準線移動，即可作拋物線.

問　題　41.

1. 求下列諸雙曲線之共軛雙曲線及其漸近線；並作圖.

(a) $4x^2-y^2=36$. (c) $16x^2-y^2+64=0$.

(b) $9x^2-25y^2=100$. (d) $8x^2-16y^2+25=0$.

2. 證明定理 IX 對於漸近線經過第一及第三象限.

3. 設 e, e' 為共軛雙曲線之離心率，則

$$\frac{1}{e^2}+\frac{1}{e'^2}=1.$$

4. 由雙曲線之一漸近線至兩焦點之距離之絕對值必等於 b.

5. 通過雙曲線一焦點之直線，與一漸近線垂直，試證明由此直線至雙曲線之心之距離之絕對值等於 a.

6. 由兩漸近線至雙曲線上任意一點之兩距離，其積必等於常數.

7. 由拋物線 $y^2=2px$ 上之一點 $P_1(x_1, y_1)$ 之焦點半徑，等於 $\frac{p}{2}+x_1$.

8. 橢圓 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 之一點$P_1(x_1,y_1)$之兩焦點半徑爲 $r=a-ex_1$, $r'=a+ex_1$.

9. 雙曲線 $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ 有一點 P_1，當 P_1 在雙曲線之右邊一枝，其焦點半徑爲 $r=ex_1-a, r'=ex_1+a$；P_1 在左邊一枝，其焦點半徑爲 $r=-ex_1-a, r'=-ex_1+a$，試證明之.

10. 等邊雙曲線上任一點至其心之距離爲此點之兩焦點半徑之比例中項.

11. 雙曲線之離心率，等於一漸近線之傾角之正割.

80. 二次方程之軌跡之形狀. 以上所論之圓錐曲線，其方程俱係二次，無論坐標軸如何移轉其次數必不變，今試就各種二次方程式，以討論其軌跡之形狀.

準169頁定理VI，xy 項既可將坐標軸廻轉適當之角度而去之，是以祇論

(1) $$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

今分兩段研究之.

第I種. A, C 俱不等於零.

第II種. A, C有一等於零.

第 I 種

既 A, C 俱不等於零，則$\triangle=B^2-4AC$ 亦不等於零，故可用170頁定理VII，將坐標移之，以去 x, y 兩項，其所得之方程式必爲

(2) $$Ax'^2+Cy'^2+F'=0$$

依A, C之正負，分兩邊並論之於下.

橢圓，A,C 同號．

1．$F'\neq 0$※，則(2)可改寫為
$$\frac{x^2}{\alpha}+\frac{y^2}{\beta}=1,$$
式中 $\alpha=-\frac{F'}{A},\beta=-\frac{F'}{C}$．
若 F' 不與 A,C 同號，則其軌跡為橢圓，但若 F' 與 A,C 同號，則不能有軌跡．

2．$F'=0$ 其軌跡為一點，即以零為軸之橢圓，名曰退縮橢圓．(Degenerate ellipse)．

雙曲線，A,C 異號．

1．$F'\neq 0$※，則(2)可改寫為
$$\frac{x^2}{\alpha}+\frac{y^2}{\beta}=1,$$
式中 $\alpha=-\frac{F'}{A},\beta=-\frac{F'}{C}$．
若 F'，A 同號，則其軌跡為雙曲線，並割 y 軸，若 F'，C 同號，則割 x 軸．

2．$F'=0$ 其軌跡為相交之兩直線，即以零為軸之雙曲線，名曰退縮雙曲線(Degenerate hyperbola)．

第 II 種

A,C 有一等於零，則(1)之軌跡，乃是拋物線．今假定 $A=0,C\neq 0$ 而(1)變成

(3) $$Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

又如 $A\neq 0,C=0$，則(1)變為 $Ax^2+Dx+Ey+F=0$．將軸廻轉 $\frac{\pi}{2}$，(162頁定理II)即命 $x=-y',y=x'$ 代之，得 $Ay'^2+Ex'-Dy'+F=0$ 與(3)式相同．

今將(3)之軸移之，可化為下式之一

(4) $$Cy^2+Dx=0 \text{ 或}$$

(5) $$Cy^2+F'=0.$$

以 $x=x'+h,y=y'+k$ 代入(3)．

則得

(6) $$Cy'^2+Dx'+\left.\begin{matrix}2Ck\\+E\end{matrix}\right|y'+\left.\begin{matrix}Ck^2\\+Dh\\+Ek\\+F\end{matrix}\right|=0.$$

命常數項及 y 之係數等於零，則
$$2Ck+E=0,Ck^2+Dh+Ek+F=0$$
則(6)化為(4)．但如 $D=0$，則 h 不能求，即常數項不能去也．此時(6)化為(5)．

※讀「F' 不等於零」或「F' 非零」．

將(4)與179頁III比較之,得知其軌跡是拋物線,(5)之軌跡當 F',C 異號時,爲一對平行直線 $y=\pm\sqrt{-\frac{F'}{C}}$;若 $F'=0$ 乃是一直線 $y=0$.若 F',C 同號,則不能有軌跡.凡二次方程之軌跡爲平行之兩直線或一直線時,名曰退縮拋物線.

定理XIII. 二次方程之軌跡,或爲圓錐曲線或爲一點或爲兩直線或兩直線相合爲一直線.且移轉其軸二次方程必可改爲

$$Ax^2+Cy^2+F^※=0,\text{或 } Cy^2+Dx=0,\text{或 } Cy^2+F^※=0$$

式中 A,C,D 均不等於零.

推論. 缺 xy 項之二次方程式

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

若 A,C 有一等於零,其軌跡爲拋物線.

A,C 同號,則爲橢圓.

A,C 異號,則爲雙曲線.

問 題 42.

1. 欲將方程式(1)改爲(2),其原點當移至何處?

答. $\left(-\frac{D}{2A},\ -\frac{E}{2C}\right)$.

2. 改方程式(3)爲(4),爲(5),其新原點爲何?

答. $\left(\frac{E^2-4CF}{4CD},\ -\frac{E}{2C}\right)$, $\left(0,-\frac{E}{2C}\right)$.

3. 試移軸以簡 $Ax^2+Dx+Ey+F=0$ (a) $E\neq0$, (b) $E=0$,并求所移之新原點. 答. (a) $Ax^2+Ey=0$, $\left(-\frac{D}{2A},\ \frac{D^2-4AF}{4AE}\right)$.

(b) $Ax^2+F'=0$, $\left(-\frac{D}{2A},0\right)$.

※求得結果即可將上標去掉.

4. 下列諸方程之軌跡，當屬於何形(視系)?

(a) $4x^2+y^2-13x+7y-1=0$.　(e) $x^2+7y^2-8x+1=0$.

(b) $y^2+3x-4y+9=0$.　(f) $x^2+y^2-6x+8y=0$.

(c) $121x^2-44y^2+68x-4=0$.　(g) $3x^2-4y^2-6y+9=0$.

(d) $x^2+4y-3=0$.　(h) $x^2-8x+9y-11=0$.

81. 二次方程軌跡之作法． 於方程式

$$(1)\qquad Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

欲去 xy 項，必將軸迴轉θ角(169頁定理VI)而θ之值等於

$$(2)\qquad \tan 2\theta=\frac{B}{A-C}$$

轉軸方程式，(162頁(II))含有 $\sin\theta$，$\cos\theta$. 今用 19 頁 1及 3，得

$$(3)\qquad \cos 2\theta=\pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 2\theta}}.$$

由(2)可選 2θ 之值，令其在第一或第二象限內，則(2)，(3)必同號，而 θ 為銳角．又由20頁15，得

$$(4)\qquad \sin\theta=+\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}},\quad \cos\theta=+\sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}.$$

是以欲簡與(1)相似之方程式，若 $\triangle=B^2-4AC\neq 0$，則須先移軸以去 x,y 兩項，再轉軸以去 xy 項．如此較為便捷．

作二次方程之軌跡之法則．

第一步． 計算$\triangle=B^2-4AC$.

第二步． 化簡方程式

(a) 若$\triangle\neq 0$，則先移軸後轉軸．

(b) 若$\triangle=0$，則先轉軸後移軸．

第三步. 檢驗方程式以定軌跡之性狀(194頁,§80).

第四步. 作所用之軸及軌跡之全圖.

在第二步內由方程式(2),(3),(4)及162頁(II),求其轉軸方程式,若無 xy 項則無須轉軸. 移軸須用165頁之法則.

例1. 試討論下方程式之軌跡,并作圖.

$$x^2+4xy+4y^2+12x-6y=0$$

解. 第一步. $\triangle=4^2-4\times1\times4=0$.

第二步. 將軸廻轉 θ,而 $\tan2\theta=\frac{4}{1-4}=-\frac{4}{3}$.

由(3),(4),得 $$\cos2\theta=-\frac{3}{5},$$

$$\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}},\quad \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

因此得轉軸方程式

(1) $$x=\frac{x'-2y'}{\sqrt{5}},\quad y=\frac{2x'+y'}{\sqrt{5}}.$$

代入已知方程式※,得

$$x'^2-\frac{6}{\sqrt{5}}y'=0$$

第三步. 寫上方程式爲

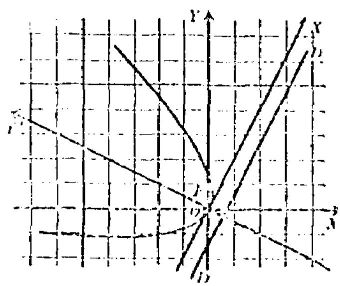
$$x'^2=\frac{6}{\sqrt{5}}y'.$$

則可知其軌跡乃是拋物線, $p=\frac{3}{\sqrt{5}}$,焦點在 y' 軸上.

※$\triangle=0$時,則二次項爲完全平方,若已知方程式寫爲$(x+2y)^2+12x-6y=0$,然後代入較爲簡便. $\triangle=0$ 時,其軌跡恒爲拋物線式,詳後第十二章.

第四步．　作新舊軸※，拋物線，焦點，準線．

以新軸表之焦點，為 $\left(0,\frac{3}{2\sqrt{5}}\right)$．



準線為 $y'=-\frac{3}{2\sqrt{5}}$（179頁定理IV）．

將焦點之新坐標代入(1)，則得舊坐標，解 (1) 以求 y' 於是代入 $y'=-\frac{3}{2\sqrt{5}}$，則得準線之舊軸方程式．

例2．　試作下方程之軌跡．

$$5x^2+6xy+5y^2+22x-6y+21=0.$$

解．　第一步．　$\triangle=6^2-4\times5\times5\neq0$．

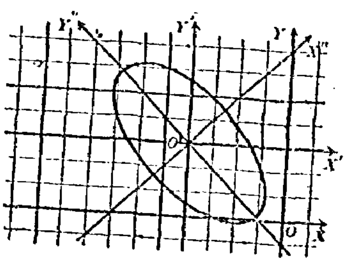
第二步．　先移軸，即以

$$x=x'-4,\quad y=y'+3$$

代入已知方程式，得

$$5x'^2+6x'y'+5y'^2=32.$$

由(2)得知當迴轉之角度等於 $\frac{\pi}{4}$，則移軸方程式為



$$x'=\frac{x''-y''}{\sqrt{2}},\quad y'=\frac{x''+y''}{\sqrt{2}};$$

代之，得

$$4x''^2+y''^2=16.$$

第三步．　改寫上得之方程式為

$$\frac{x''^2}{4}+\frac{y''^2}{16}=1$$

知其軌跡是橢圓，其長軸等於8，短軸等於4，焦點在 y'' 軸上．

第四步．　作新舊三種軸及橢圓．

※OX'之傾角為θ，故其斜度 $\tan\theta$ 可由(4)得之，例如 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{2}{\sqrt{5}}\div\frac{1}{\sqrt{5}}=2$，$x'$軸可用35頁之底註之法作之．

問 題 43.

試移轉軸以簡下列方程式，並作其軌跡，焦點及準線.

(a) $3x^2-4xy+8x-1=0$, 答. $x''^2-4y''^2+1=0$.

(b) $4x^2+4xy+y^2+8x-16y=0$

答. $5x'^2-8\sqrt{5}\,y'=0$.

(c) $41x^2-24xy+34y^2+25=0$. 答. $x'^2+2y'^2+1=0$.

(d) $17x^2-12xy+8y^2-68x+24y-12=0$.

答. $x''^2+4y''^2-16=0$.

(e) $y^2+6x-6y+21=0$. 答. $y'^2+6x'=0$.

(f) $x^2-6xy+9y^2+4x-12y+4=0$.

答. $y''^2=0$.

(g) $12xy-5y^2+48y-36=0$. 答. $4x''^2-9y''^2=36$.

(h) $4x^2-12xy+9y^2+2x-3y-12=0$.

答. $52y''^2-49=0$.

(i) $14x^2-4xy+11y^2-88x+34y+149=0$.

答. $2x''^2+3y''^2=0$.

(j) $12x^2+8xy+18y^2+48x+16y+43=0$.

答. $4x^2+2y^2=1$.

(k) $9x^2+24xy+16y^2-36x-48y+61=0$.

答. $x''^2+1=0$

(l) $7x^2+50xy+7y^2=50$. 答. $16x'^2-9y'^2=25$.

(m) $x^2+3xy-3y^2+6x+9y+9=0$.

答. $3x''^2-7y''^2=0$.

(n) $16x^2-24xy+9y^2-60x-80y+400=0$.

答. $y''^2-4x''=0$.

(o) $95x^2+56xy-10y^2-56x+20y+194=0$.

答. $6x''^2-y''^2+12=0$.

(p) $5x^2-5xy-7y^2-165x+1320=0$.

答. $15x''^2-11y''^2-330=0$.

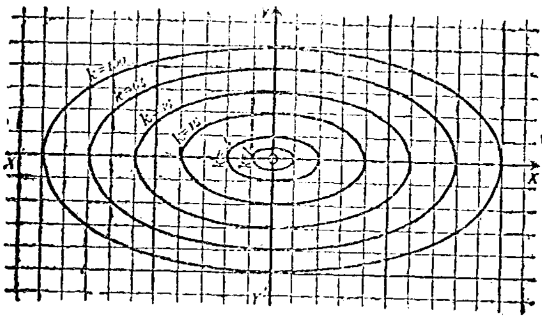
82. 圓錐曲線系. (Systems of conics).本節論旨乃用各種例題,表明圓錐曲線及退縮圓錐曲線之關係，或各種形式之圓錐曲線之關係.

同種之圓錐曲線系,所以表明退縮圓錐曲線，如何發生，異種之圓錐曲線系,所以表明拋物線乃界乎橢圓及雙曲線之間.

例1. 試討論 $x^2+4y^2=k$ 所表之圓錐曲線系.

解. x^2,y^2 之係數既同號,(準196頁推論)此方程之軌跡,當 k 爲正時,乃是橢圓;若 $k=0$ 乃是退縮橢圓,即原點是也;k 爲負,則不能有軌跡.

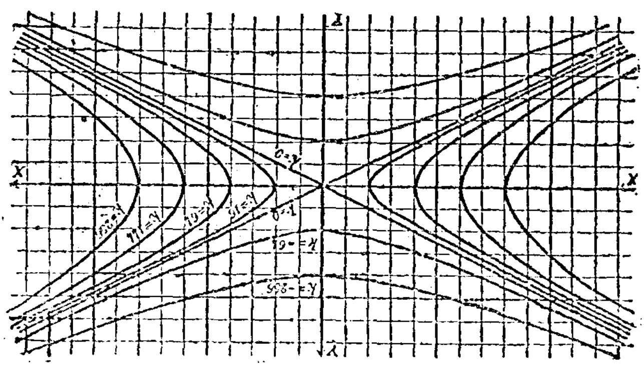
下圖乃命 $k=100,64,36,16,4,1,0$ 而作成之，依 k 之值漸少而至於零，橢圓亦漸小而至於一點，k 為負時，軌跡消滅。



是以一點為軌跡之極限。

例2. 討論 $4x^2-16y^2=k$ 所表之圓錐曲線系。

解. x^2, y^2 之係數既異號，其軌跡乃屬於雙曲線，且其漸近線同



為 $x\pm 2y=0$. 今改寫已知方程式為

$$\frac{x^2}{\frac{k}{4}}-\frac{y^2}{\frac{k}{16}}=1.$$

可知 k 為正，則焦點在 X 軸上，k 為負，則在 Y 軸上，$k=0$ 則此方程之軌跡，變為漸近線。

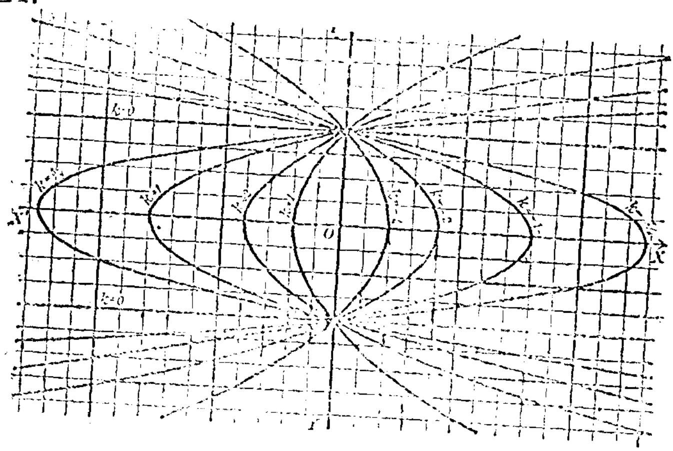
下圖乃命 $k=256,144,64,16,0,-64,-256$ 而作成之，依 k 之絕對值漸小而至於零，雙曲線漸與漸近線相近，而至於相合，是以相交兩直線即漸近線，乃是焦點在 x,y 軸兩種雙曲線之極限.

例3. 試討論 $y^2=2kx+16$ 所表之圓錐曲線系.

解. 準 196 頁推論，此方程之軌跡，屬於拋物線，移原點於 $\left(-\frac{8}{k},0\right)$. 去常數項，得

$$y'^2=2kx'.$$

即易見其軌跡爲拋物線，其頂爲 $\left(-\frac{8}{k},0\right)$，$p=k$. 若 k 爲正，拋物線之兩端向右，k 爲負，則向左. 但 $k=0$ 則爲退縮拋物線，即是直線 $y=\pm4$.



下圖乃命 $k=\pm4,\pm2,\pm1,\pm\frac{1}{2},0$ 而作成之. 依 k 之絕對值漸小而至於零，拋物線之頂，距原點漸遠而至於與直線 $y=\pm4$ 相合，是以拋物線之極限，是平行之兩直線.

例4. 試討論$\frac{x^2}{25-k}+\frac{y^2}{9-k}=1$所表之圓錐曲線系.

解. 當$k<9$時, 此方程之軌跡為橢圓, 其焦點為$(\pm c,0)$, $c^2=(25-k)-(9-k)=16$ (觀185頁定理V).

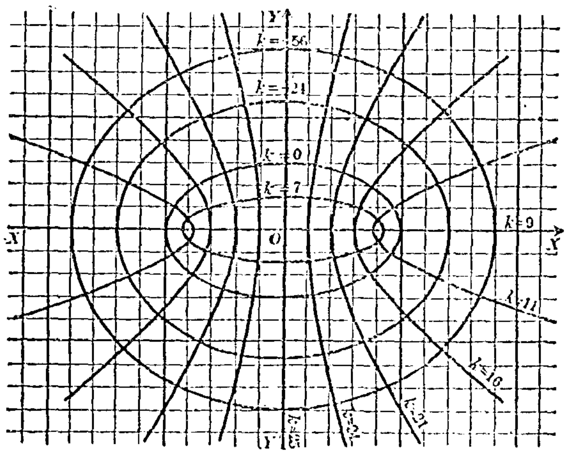
當$9<k<25$時,其軌跡為雙曲線,焦點為$(\pm c,0)$, $c^2=(25-k)-(9-k)=16$ (閱185頁定理VI). $k>25$則無軌跡.故橢圓及雙曲線之焦點,同為$(\pm 4,0)$.

去已知方程之分母,得

$$(9-k)x^2+(25-k)y^2=(9-k)(25-k).$$

可見$k=9$及25時,拋物線變成兩直線.

下圖乃命$k=-56,-24;0,7,9,11,16,21,24,25$所作成,依$k$值



漸增大而至於9,橢圓漸平而至於與x軸相合.又依k值漸減小而至於9,雙曲線漸平而至於與x軸相合.是以直線$y^2=0$乃橢圓及雙曲線間之極限.又依k值漸增大而至於25,雙曲線之兩枝漸與y軸相合.

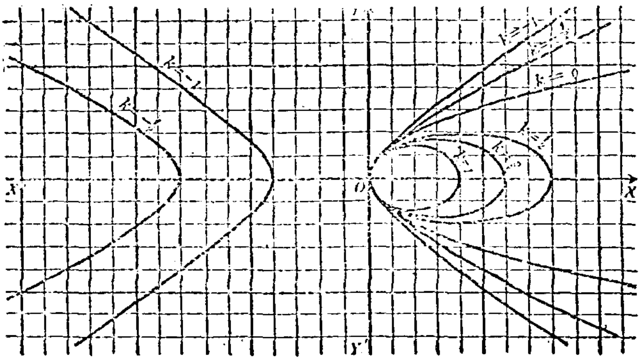
例5. 試討論$kx^2+2y^2-8x=0$之軌跡,並作圖.

解. 若$k=0$,則此方程式之軌跡為拋物線.若$k\neq 0$,則因k為正或負,其軌跡為橢圓或雙曲線.無論k為何值,此軌跡必通過原點.

今移軸以簡此方程式，若新原點爲 $\left(\frac{2}{k},0\right)$，則得

$$\frac{x'^2}{\frac{4}{k^2}}+\frac{y'^2}{\frac{2}{k}}=1$$

命 $k=1,\frac{2}{3},\frac{1}{2},0,-1,-\frac{1}{2}$. 依 k 值由正而至於零，橢圓漸長而至於



與拋物線相合. 又依 k 值由負而至於零，則雙曲線之右邊一枝，漸與拋物線相合，而左邊一枝，距原點漸遠，此即表明拋物線乃橢圓與雙曲線之間之極限.

問　題　44.

1. 分別作例 1,2,3，諸曲線之焦點及準線，當其爲退縮圓錐曲線時，其焦點及準線在何處？並用分析法証明之.

2. 試作下諸圓錐曲線系，并證明其爲同類，作許多之圓錐曲線足以表明其退縮極限爲止.

(a) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=k$.　　(c) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=k$.

(b) $y^2=2kx$.　　(d) $x^2=2ky-6$.

3. 問題1爲問題2之系.

4. 命 k 爲正值，作系 $\frac{x^2}{k}+\frac{y^2}{16}=1$．若 $k=16$ 其軌跡爲何？若 k 漸增或漸減及漸近 16，其焦點及準線如何？圓之焦點及準線在何處？

5. k 爲正負各值，作問題 4 之系，k 爲正負而漸近於 0 時，試表明圓錐曲線之變化．

6. 作下列諸方程之圓錐曲線系，并表明每一系統之曲線，具同焦點，討論退縮情形，表明各系之兩曲線經過平面上各點．

(a) $\frac{x^2}{16-k}+\frac{y^2}{36-k}=1$．　　(c) $\frac{x^2}{64-k}+\frac{y^2}{16-k}=1$

(b) $y^2=2kx+k^2$．　　(d) $x^2=2ky+k^2$．

7. 試討論下列諸圓錐曲線系，並作圖．

(a) $16(x-k)^2+9y^2=144$．　　(c) $(y-k)^2=4x$．

(b) $xy=k$．　　(d) $4(x-k)^2-9(y-k)^2=36$．

8. 當 k 至於零及無限時，討論下列圓錐曲線系之軌跡，並作圖，表明各焦點及各準線．

(a) $\frac{(x-k)^2}{k^2}+\frac{y^2}{36}=1$．　　(b) $\frac{(x-k)^2}{k^2}-\frac{y^2}{36}=1$．

9. 表明下列圓錐曲線系俱通過兩曲線之交點，此兩曲線由命方程之兩括弧各等於零而得．并就 k 所示之諸值，以討論之．

(a) $(y^2-4x)+k(y^2+4x)=0, k=+1,-1$．

(b) $(x^2+y^2-16)+k(x^2-y^2-4)=0, k=+1,-1,-4$．

(c) $(x^2+y^2-16)+k(x^2-y^2-16)=0, k=\pm1$．

(d) $(x^2+16y^2-64)+k(x^2-4y^2-36)=0,\ k=-1,\ 4,\ -\frac{16}{9}$．

(e) $x^2+4y+k(x^2-4y+16)=0, k=+1,-1$．

雜　問　題

1. 作下列方程之軌跡及其焦點準線．

(a) $9x^2+24xy+16y^2-50x+80y-275=0$．

(b) $66x^2-64xy+109y^2-176x+282y-896=0$．

(c) $5x^2-12xy+6x-36y-63=0$．

2. 設拋物線 $y^2=2px$ 通過 $(3,-1)$，試求 p．

3. 設橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 通過兩點 $(3,-6)$，$(4,8)$，則 a,b 之值如何．

4. 由 $(c,0)$，$(-c,0)$ 兩點至 P 兩距離之和，恆等於 $2a$，求點 P 之軌跡之方程式．

5. 由$(c,0)$，$(-c,0)$至P兩距離之差恆等於 $2a$，試求 P 點之軌跡之方程式．

6. 由直線 $x=-\frac{p}{2}$，及 $\left(\frac{p}{2},0\right)$至$P$之距離恆相等，試求$P$點之軌跡之方程式

7. 表明凡能適合五要件之圓錐曲線或退縮圓錐曲線，必可求得其方程式，並將求法分步編成法則．

提示． 與93頁及133頁比較之．

8. 下列圓錐曲線，各能適合所示之五要件，試求其方程式．

(a) 通過$(0,0)$，$(1,2)$，$(1,-2)$，$(4,4)$，$(4,-4)$．

(b) 通過$(0,0)$，$(0,1)$，$(2,4)$，$(0,4)$，$(-1,-2)$．

(c) 通過$(3,7)$，$(4,6)$，$(5,3)$又設$A=B$，$C=0$．

(d) 通過$(1,2)$，$(3,4)$，$(4,2)$，$(2,-1)$，$(4,2)$．

(e) 通過$(0,0)$，$(0,1)$，$(1,0)$，$(6,6)$，$(5,6)$．

(f) 通過$(0,0)$，$(2,0)$，$(-3,2)$，$(5,2)$其軸平行坐標軸．

9. 通過五點之圓錐曲線，其中有三點或四點同在一直線內，則此圓錐曲線之性狀如何？

以有心圓錐曲線之心爲心，以長軸a爲半徑之圓，名曰**輔圓**．(Auxiliary circle)．

10. 在橢圓及輔圓上之兩點，其橫坐標相等，試證明其縱坐標之比爲 $b:a$．

11. 橢圓之面積等於 πab．

提示． 分長軸爲若干等分以爲底，作與橢圓及輔圓相切之矩形[illegible]將矩形之數增至無窮，并引用上題，即可表明．

12. 雙曲線之輔圓，必通過準線與漸近線之交點，試證之．

13. 證明 $xy+Dx+Ey+F=0$ 之軌跡或爲一等邊雙曲[illegible]線平行於坐標軸，或爲互相垂直之一對直線．

14. 討論 $x^2-y^2+Dx+Ey+F=0$ 之軌跡之形狀．

北平科學社最近出版新書

淡譯	葛氏平面三角學	（訂正三版）	實價	洋宣精裝一元四角 洋宣平裝一元一角 報紙平裝八　角
淡譯	范氏大代數學	（訂正三版）	實價	洋宣精裝二元八角 報紙精裝二　元
淡譯	舒塞司立體幾何學	（訂正再版）	實價	洋宣平裝九　角 報紙平裝六　角
淡譯	舒塞司平面幾何學	（訂正四版）	實價	洋宣精裝一元四角 洋宣平裝一元一角 報紙平裝九　角
淡譯	斯蓋尼新解析幾何學		實價	洋宣精裝一元四角 洋宣平裝一元一角 報紙平裝九　角
淡譯	郝叟高等代數學	（附答案）	實價	洋宣精裝二　元 報紙精裝一元六角
淡譯	斯梯邏高等物理學		實價	洋宣精裝三元六角 報紙精裝三　元
淡譯	米蓋培物理綱要		實價	洋宣精裝二元四角 報紙精裝一元八角
淡譯	勃康實用化學		實價	洋宣精裝二元四角 報紙精裝一元九角
淡譯	勃康實用化學實驗		實價	八　角
淡譯	郝氏高級代數學（附無限級數）		實價	報紙平裝九　角 洋宣精裝一元四角

漢譯 斯米司蓋爾解析幾何學

上冊實價 洋宣平裝九角 報紙平裝六角

譯者 趙國昌 黃頌堯 于勤伯

發行者 北平科學社

社址 北平地安門內 油漆作十二號

電話 東局 2993

中華民國二十四年一月初版