教育叢書

教育統計學

中華書局印行

教育統計學

周調陽著

上海中華書局印行

1940

國民政府內政部註冊 二十四年二月七日執照警字第四四三七號

民國十五年七月發行
民國廿九年七月八版

教育統計學（全一冊）

◎上海 實價新法幣二十五元
（郵運匯費另加）

著者 周調陽

發行者 中華書局有限公司
代表人 路錫三

印刷者 上海澳門路 美商永寧有限公司

總發行處 昆明 中華書局發行所

分發行處 各埠 中華書局

（四三七四）（地）

自序

近三年來，予在京師學務局敎員講習會及河南省立第一師範學校擔任敎育統計學一科，先後凡三次。每次講稿，內容卽有所增加，因逐漸成帙，然未敢以之付印。十三年夏，在改進社南京年會敎育統計組，同學薛鴻志君以關於此科之敎本甚形缺乏，勉予編輯此書，以供現時之需要；對於內容及編製體裁，亦略有所討論。予遂決定爲此，因參考西文統計書籍多種，將舊日之講稿，完全修改一遍，內容增加二分之一以上，歷七八月之久，始克脫稿。

本書各章，多係參考拉格（Rugg），麥柯（McCall），克尼（King），尤爾（Yule），桑戴克（Thorndike），費普爾（Whipple），亞力山大（Alexander），塞克里斯特（Secrist）諸家之著作編成；在中文方面，則以薛鴻志君之敎育統計學大綱爲唯一之參考書。凡圖表及事例，悉取與敎育有關係之事實，且盡量由本國之各種敎育統計及學務報告中採取；至其未有者，始用外國材料補充之。各種計算之方法，不厭反覆說明，務求詳盡；公式之來源，除需要高深數理非連篇累牘不能解釋者從略外，均加以淺顯之說明。學者於披閱此書之後，不但明瞭各種方法之當然，能應用之以爲研究敎育之工具，並可了解其所以然之理，作研究統計學理之基礎。

本書所用之名詞，係採取各統計學家所通用者。中文譯語，則以朱斌魁君之統計與測驗名詞漢譯爲藍本，其欠妥之譯名，或參照他書修改，或另自創譯，務求與原文之意義適合，庶幾閱者按名索義，而不致有錯誤觀念之

發生。關於譯名之選定，曾與薛鴻志君書信往還，討論多次，其中有一小部分名詞，係薛君創譯者。

本書脫稿後，薛鴻志君復爲我細心校閱一遍，自着手編輯以至於出版，得薛君之幫助誠不少，特誌於此以表示深切之謝意。

中華民國十四年，六月，　周調陽，序於開封。

本書原稿全係橫行，誤排爲直行，致書中公式，符號，圖表等進行方面，與文字不能一致，閱看時頗感不便。如有再版機會，仍當改排橫行。

編者

教育統計學

目錄

教育統計學

I. 教育事實之來源

1. 教育法令
2. 學校規程
3. 教育文件
4. 公共教育報告
5. 團體或個人之教育研究與調查

II. 搜集教育事實之方法

甲、印發訪問表格法

1. 問題之種類
2. 訪問表格之作法

乙、個人調查法

1. 各種印刷品上之材料
2. 各種實驗之結果

III. 練習問題

IV. 參考書報

教育統計學

(b)由已歸類量數求算術平均數之法則

(c)計算算術平均數之簡法

3.算術平均數之功用

乙、調和平均數

1.何謂調和平均數

2.如何去求調和平均數

3.各種單位之適當平均法

4.調和平均數之功用

丙、幾何平均數

1.何謂幾何平均數

2.如何去求幾何平均數

3.幾何平均數之功用

III.中點數

1.何謂中點數

2.如何去求中點數

1 何謂二十五分差

2. 如何去求二十五分差

(a) 由未歸類量數求Q

(b) 由已歸類量數求Q

3. 二十五分差之功用

III. 平均差

1. 何謂平均差

2. 如何去求平均差

(a) 由未歸類事實求平均差

(b) 由已歸類事實求平均差

(c) 計算平均差之簡法

3. 平均差之功用

IV. 標準差

1. 何謂標準差

2. 如何去求標準差

附本書引用各表目次

附本書引用各圖目次

頁數

國家教育協會叢書

教育統計學

周調陽編

第一章 緒論

I 統計學之起原

統計學(Statistics)起原最早，在西元前 3050 年，埃及國王因修金字塔，對於全國之人口及財產，曾經調查一次，此時已具有統計學之雛形。西元前 1200 年，夏禹王治洪水，區分全國爲九州，各分配其貢賦之數，水陸之程，後又東巡至會稽，計算貢賦，爲中國統計學之鼻祖。後此希臘，羅馬，及歐洲大陸各國，用統計方法考察及表示國家政治情形者，比比皆是，不能一一例舉。不過此時之記載，僅用文言，未知應用數字，統計學尙未成爲眞正之科學。直至十八世紀中葉，始漸有簡明數字之記載。至十九世紀，數字記載之方法，更加進步，應用統計之範圍，亦大加擴充。前此僅用以記載國家政治情形者，至是則物理學，氣象學，生物學，心理學，遺傳學，社會學，人類學等各種科學，或以之發明原理，或以之表明狀況，莫不利用統計方法以爲研究之工具。因之統計學自身，亦遂有長足之進步，而成爲眞正之科學。

II 統計學之意義

統計學最初之意義，爲研究國家政治情形之學。後來此學逐漸發達，應用之範圍日廣，內容亦大有變更。以前

的意義，過於狹隘，遂不能適用。各學者對於統計學之見解與研究之目的，有廣狹之差異，因之所下之定義，甚不一致；有稱統計學為『計算之科學』(Counting of Science) 者，亦有稱統計學為『平均數之科學』(Averages of science) 者，比較更詳細一點之定義，則謂統計學者，為由事實之觀察及計算所得結果，因而判斷自然的或社會的現象之方法。綜計各家所下定義，不下數十，大都簡而無當，或缺而不全，殊不足以表示統計學真正之意義。最近塞克里斯特 (Secrist) 於其統計法緒論 (An Introduction to Statistical Methods) 中，參照各家意見，對於統計學之意義，有精細完善之解釋，特介紹之於下：

統計學一詞，其意義為彙集事實，用有系統之方法搜集，以求達到預定之目的，並就其彼此間之關係，依次排列，按照精確之標準，用數字敘述，計算，或估計，以求其顯著之因果關係。

此定義中我們應行特別注意之要點有三：

1. 有系統之方法與預定之目的。
2. 精確之標準。
3. 彼此間相互之關係。

僅用數字表示事實，若搜集此項事實時，既無科學之方法，又不為一定之目的，則不能當統計學一詞；計算時若不應用測量單位而漫無標準，亦不得稱為統計；若所用之材料，係從各處胡亂聚集，彼此間不相關連，尤不得稱為統計。因此上面所述定義中包含之三要點所以甚為必需。

III 統計學之分類

近代統計學,大概言之,可分爲統計法 (Statistical method) 及應用統計學 (Applied statistics) 兩大類。

1. 統計法　統計法常圖發明種種法式,以處理多種變異不定之事實。此種方法當中有許多可以直接應用於性質不同之各種科學上;但亦有僅適用於某種科學之特殊法式。方法學家之以發明定律,規則,公式爲其職志,與純粹科學家之以發明原理原則爲其目的,完全相同。至於應用方面,則留以待諸他人,非彼等之所過問。

2. 應用統計學　應用統計學,係就方法學家所發明之定律公式,應用之於具體事實,猶之應用科學家之就純粹科學家所發明之原理原則,應用之於實際。自十九世紀以來,各科學家研究各種科學,均視統計學爲最重要之基本學術,於是物理學家,天文學家,生物學家,遺傳學家,人類學家,心理學家,以及關於他種人類知識之研究者,無不借重統計方法以爲考研眞理之工具。而敎育學者以順應近代科學趨勢之故,亦採用統計方法以研究敎育上之種種問題,敎育統計學 (Educational statistics) 因之發生。

IV 敎育統計學之內容

偶言敎育統計學,無不想及敎育部及各省敎育廳所編輯之敎育統計圖表。然此等統計圖表,僅記錄事實,而無考求學理之研究,祇可供敎育統計學者研究之資料,不能包括敎育統計學之全部;不可與敎育統計學相提並論。

敎育統計學之內容,概括言之,包有下列之三大部分,即:

1. 表列法 (Tabular Method)
2. 圖示法 (Graphic Method)
3. 分析法 (Analytic Method)

表列法是將散漫的事實整理排列表示出來，使之簡單明顯。圖示法是將所欲表示的事實，用圖形表示出來，使之便利表顯。分析法是將所搜集之材料，用平均 (averages)，差異 (Variability)，相關 (Correlation)，確度 (Reliability)，種種方法考求其變化及因果關係。此不過就其大旨言之，至於詳細節目，將於以後各章分別敘述。

V 教育統計學之需要

教育之進步，遠不及各種科學之迅速，其故由於未曾採用科學的方法之所致。科學上所研究之事物，全憑客觀的測量，絕不容有絲毫主觀的判斷參雜其間；故其對於一切事物，皆定出一種單位及標準點 (Reference point)，(物質方面計算某物之多寡輕重長短，必先以同類之量定其標準，然後以此標準計其物之分量；此先定之標準，謂之單位。如計重量以兩為單位時，則言某物若干兩；以斤為單位時，則言某物若干斤。標準點或作參照點，即測量起始之一點，作為分別等級之標準。如攝氏寒暑表以結冰之點為標準點，華氏寒暑表則以冰點下32度為標準點之類是。)使易於測量。且事事均以數目代表之，使易於了解。故有度量衡以測量有實體之物，時計，寒暑表，氣壓表等以測量無實體之物，皆有單位，標準點，且皆用數目代表。測量之標準既定，研究乃有進步，物

質方面的科學之所以特別發達者以此。精神方面之事物，如智力，學業，品行等，亦常用智愚，優劣，善惡等字樣表示程度高低，其中必有分量之估計。特所定以為估計分量之標準者，僅憑各人主觀的見解，缺乏客觀的標準；故所得之結果，甚不可靠。因此之故，精神方面的科學，無若何之進步。

現今教育學者，知科學的方法之重要，並知精神方面的科學，亦可如物質方面的科學，用客觀的標準，以測量其分量；於是製造種種測驗，如智力測驗，心理測驗，教育測驗之類，以為測量精神方面性質之方法。此種測量法，刻下尚在幼稚時代，而要皆有採用單位，標準點，及數目代表之趨勢。欲以單位，標準點，及數目代表精神現象，非統計不為功，此教育統計學之所以為必要。

VI 教育統計學之應用

教育上各種問題之研究，俱有應用教育統計學之需要，若簡單言之，有以下之各方面：

1. 關於教育行政方面　如教育行政效率之研究，教育經費之分配，薪金增減之研究等，均須應用教育統計學。

2. 關於教務方面　如課程分量之規定，考查成績方法之研究，學生成績之比較，學生升級留級之標準，評定教員之優劣等，均須應用教育統計學。

3. 關於教育學理方面　如各種學科之價值，學生學習進步之速率，分量，限度等，均須應用教育統計學。

4. 關於教育測驗方面　教育測驗與教育統計，不能分離，不有統計方法，則測驗之標準無以訂；施行測驗而

不用統計，則測驗之結果無由知，故亦須應用教育統計學。

要之教育統計學之任務，不僅在羅列事實，排比數字，專爲往事之記載；而在趨重分析，綜合，比較，以觀察其間變化之狀況與因果之關係。由此可知教育統計學之應用，非止敍述事實作爲報告，如教育部教育廳之教育統計圖表與夫各學校之學務報告而已，並將以之爲研究教育上各種學理之惟一良好工具。

VII 練習問題

1. 何謂統計學？
2. 統計法與應用統計學之區別若何？
3. 教育統計學爲何需要？
4. 教育統計學在教育上之各方面，除敍述事實作爲報告以外，是否尚有其他功用？

VIII 參考書報

1. 曾鯤化：統計學教科書，第一編第六章第七章，第三編第一章第十八章。
2. 薛鴻志：教育統計學大綱（再版）第一章。
3. 隱青：教育的統計學，教育雜誌第十一卷第十一號。
4. King, W. I.: Elements of Statistical methods, Chapters II, III.
5. Rugg, H. O.: Statistical methods Applied to Education, Chapter I.

6. Secrist, H.: An Introduction to Statistical methods, Chapter I.

第二章　教育事實之搜集

統計方法雖為研究各種學科之利器，但無事實以供研究之資料，統計亦無從下手。所以在未講統計方法以前，不得不先討論教育事實之搜集。

I 教育事實之來源

搜集關於教育問題的事實，首先應注意其來源是否為原始的事實 (Original data)。如所搜集者非原始的事實，則可靠之度常因之減少，甚難為教育研究之根據。原始事實之至要來源，約有五種，茲分述於下：

1. 教育法令　國家所頒布關於教育之法律，及教育部，教育廳，教育局所製定關於各種學校之命令，統屬此類。教育部編輯之教育法規彙編，商務印書館編輯之教育新法令，俱係此項原始的事實。

2. 學校規程　各學校除適用共同的教育法令外，尚有特殊的學校規程，如組織大綱，暫行學則，成績考查法之類。學校關於全校之組織，經濟之出納，學生之進退，教授之進行等事項，每各有其特殊之點，因即有特殊的規程。如欲研究某種學校教育，須將此項規程搜集，以為研究之資料。

3. 教育文件　除教育法令與學校規程外，尚有關於教育的文件，亦可為研究資料。故中央或地方教育機關與學校之重要教育文件，亦應在搜集之列。

4. 公共教育報告　公共教育報告最富於研究資料。不但有時關於教育的法令，規程，文件，見於公共教育報

告，而學校之實際狀況尤多。此類最重要者為教育部之教育統計圖表，教育公報，與中華教育改進社之年會報告。其他若各省各縣之教育統計與教育年報，均屬此類。學校年報，學校概況，亦多原始的材料。

5. 團體或個人之教育研究與調查　學校調查，如中華教育改進社之京師教育概況，全國中等以上學校概況，推士中國之科學與教育，德爾滿中國小學教育概況，（英文本）王卓然之中國教育一瞥，黃炎培之考查教育日記之類。至教育研究，如智慧測驗，教育測驗的研究之類。是此類事實，均有搜集之價值。

此外有關於教育之著作與雜誌報紙，苟有實際的資料，亦當搜集以供研究。

總之，教育統計第一步工夫，即在從原始的事實中，搜集研究之資料，然後統計有所根據。以上五項，不過就主要之來源，大略指明而已。

II 搜集教育事實之方法

上面已將教育事實之來源敍述明白，現在可進而研究搜集教育事實之方法。關於此種方法之最重要者有二：一為印發訪問表格 (Use of question-blank)，一為個人調查 (Personal investigation)。請先論印發訪問表格法，次論個人調查法。

甲、印發訪問表格法

我們所要研究之教育問題，其範圍決不能限於一地，如全國小學校教育經費之比較，全國大學校學校行政之情況，我們決不能親自往各地去調查，祇好將自己所需要之材料，發為問題，請人作答。現在學校人員用此法

以研究各種學校問題者，非常之多。不過塡寫訪問表格，非他人職務以內事務，往往隨意塡寫，致於錯誤，印發訪問表格者，實無權足以强廹他人使之塡寫精確。訪問表格法之最大缺點，常常受人指摘者，卽在於此。故我們欲應用訪問表格法於各種不同之情境中，以求得其實況，非發成問題時之計晝與使用訪問表格時之方法非常精密周到不可。

1. 問題之種類　問題之主要種類，可就訪問表格法所能搜集之教育事實分爲下列數種：

(1)屬於個人經驗者，如敎員之年齡，性別，出身，經歷，薪俸，學位等事。由此種問題所搜集之事實，較之他種稍爲確實可靠；而他人塡寫，亦不費大氣力。

(2)在學校記錄上可以查出者，如學生年級年齡之分配，升級留級退學等問題，學校經費之支配，各科敎科書之採用，敎授時間之分配，儀器標本之設備，管理及敎授之情況等事。由此種問題所搜集之事實，其結果雖足以改進學校之實際；而以塡寫過於麻煩，非確知此種考察之目的與其重要者不肯辦。

(3)關於普通人之意見及專家之批評者，如學生之個人生活，團體生活，以及調查心理方面之各種問題等。此項問題，較難作答，故調查者不易收得多量的料材。

2. 訪問表格之作法　用訪問表格法考查學校之特別狀況，有時實爲必要，惟不容易獲得良好結果。苟應用訪問表格者無精密之研究與審慮，其失敗可立待。蓋訪問表格之優劣與其收回之多寡，有莫大之關係。據有經驗者之報告，訪問表格優者通常能收回二分之一或四分之三，過劣者則常求半數而不可得，以致事倍工半，得

不償失。故欲求訪問表格製作之完備，須注意以下各點：

(1)明定所需要的各種材料之種類及多寡。

(2)確定問題之種類及多寡，總求能將自己所要之材料，全體包括無遺。

(3)問題措辭須十分明瞭，使答者不至誤解。遇有專門名詞，須下一簡單註釋。

(4)每問所要之答案，不可過長，最好在十字左右，或只用一二數目字作答。答案所需地位，問卷上須為留出。

(5)訪問表格擬好後，須先用油印印刷二三十份發出，徵求答案，作為預試，看收回後有無需修改之處。

(6)訪問表格修改後，最好用厚紙鉛印，大小適中，且須一致，以便將來整理收藏。

(7)每一訪問表格須附一印有回信地址及粘有郵票之信封。

(8)發出訪問表格之數目，須倍於自己所希望收回之數目；否則，將來或有材料不足之虞。

乙、個人調查法

用印發訪問表格法，雖可收得較多之材料，但不實不盡之處，在所難免，可靠之度甚小。在可能之範圍內，個人調查，實比印發訪問表格所得結果可靠得多，不過時間，精力各方面，亦消耗較多耳。

個人調查之材料，可分為下列兩種：

1. 各種印刷品上之材料　此項材料，又可分為下列五種：

(1)學校法令：由此種材料，可以求出各種教育行政問題之規程。例如關於教員之資格；城鄉教育行政制度；

敎育機關之組織，職權，經費，資產，學校基金之募集與分配等問題之狀況。

(2)學校規則：由此種材料，可以求出敎員雇員之聘請，俸給，及任期，各種敎育委員會及其職員之職權；處理敎務事務方面各種問題之實況。

(3)學校所用之敎本及講義：由此種材料，可以求出各科之內容與較有效率的次序之組織。

(4)中央及地方之公共報告：由此種材料，可以求出關於敎育之各種問題。

(5)學校記錄或報告：由此種材料，可以求出學校之實況而便於改進。例如敎授狀況；訓育狀況；學級之編制，學生升級留級除名之狀況；考查成績之方法；學校經費出納之系統編制等等。

2. 各種實驗之結果　此項材料，又可分為下列三種：

(1)心理測驗所得之結果。

(2)實驗新敎法所得之結果。

(3)施行敎育測驗所得之結果。

搜集敎育事實之方法，雖不必祇有印發訪問表格法及個人調查法兩種；但此兩種實為其中之最重要者，我們不可不略知其梗概。

III 練習問題

1. 敎育統計，何以必須注重敎育事實之來源？

2. 訪問表格法之優點爲何?其缺點又爲何?

3. 個人調查法有何優點及缺點?

4 注意統計之精密,與注意未統計以前各種手續之精密,以何者爲最重要?

IV 參考書報

1. Rugg, H.O.: Statistical methods Applied to Education, Chapters II, III。(參看陳啟天搜集教育事實的方法,中華教育界十一卷九期;表列教育事實的方法,中華教育界十一卷十一期。)

2. King, W.I.: Elements of Statistical method, Chapter VI。

第三章　表列法

表列法不僅爲表顯統計材料重要方法之一,且爲一切表顯法則之初步。不有表列法,散漫之事實無從整理,既不便用精細繁複之統計法,以數字表明事實,作精深之研究;又不便用淺顯易知之圖示法,以圖形表示事實,供公衆之了解。表列法在教育統計學上,誠爲一切表顯法則之根本。

I 表之功用

表列法係將漫無系統之事實,依所定項目,按其性質之異同,分別排列,使成系統,以便研究考察。卽使已經列成系統之事實,如欲詳加研究,亦須重行整理排列,以適應所應研究之目的。是故表之功用,舉其大者言之,約有六端:(一)便於科學的研究;(二)便於考察;(三)便於比較;(四)便於記憶;(五)便於總計;(六)減少重複的說明。

凡此種種，俱爲各表中所應具之特點，亦爲表列事實時所應注意之條件。雖一表之中，不必兼備數長；然製表之先，必須留意及此。故最初應確定製表之目的爲何，及如何方能使此目的顯明；其次按所欲表列事實之情形性質，規定應用何種格式，方爲適合；再次復詳加考慮，思此表製成之後，對於表列法所具之各種功用，是否顧及。若在製表之先，對此種種，能加以縝密之審慮，則所製之表，定能精當適用。

II 表之種類

表之種類，若詳細分析，實在太多，一時殊難枚舉。通常有按照所表列的事實之爲原始的或非原始的，而分之爲詳表（或稱原始的表 Original table）及總表（或稱第二次的表 Secondary table）兩大類者；又有根據表列事實時其排列之標準之爲歷史的，橫斷的，或變量的，而分之爲表示歷史事實的表，表示橫斷情形的表，及表示變量事實的表三大類者。茲分別述之如下：

1. 詳表及總表 (a) 詳表係將固有之事實，詳加記載，保存其實在情形，以備作詳細研究時之資料。此種表格之編製，多不參加作者之意見，例如表 1，爲記載各個

表 1 記載各個學生各學科成績詳表之格式

姓名	公民學	國文	英文	數學	歷史	地理	理科	藝術	樂歌	體育

學生各學科成績分數詳表之格式。

(b)總表係將詳表之事實，合併縮減作簡賅之記載，並利用分析法以作各種比較觀。編製此種表格時，可隨作者研究之目的，而得自由伸縮，不必拘拘於一定之格式。例如表2，爲記載各學科成績的比較總表之格式。

表2　記載各學科成績的比較總表之格式

學　　科	平均數	中點數	標準差	二十五分差
公民科				
國　文				
英　文				
數　學				
歷　史				
地　理				
理　科				
藝　術				
樂　歌				
體　育				

關於計劃布置詳表及總表時，有三條最普通的原則應當注意，即：

(1)詳表及總表表列之事實相同時，若其中所列之項目亦復相同，則項目之次序務必劃一，不可先後倒置，致使閱者多感不便。例如編製全國各種學校概況調查表，若編詳表時所定之項目為(一)教職員數(二)學生數，(三)全年經費數等；不但各個詳表均應按此次序排列，即總表中所列之相同項目，其次序亦必與之相同；不可顛倒錯亂，以昭劃一，而免混淆。

(2)詳表及總表表列之事實相同時，若須同時並列，作一類性質相同之表格，則總表置前，詳表置後，並按總表中各項目之次序，排列各個詳表。例如編製全國各種學校概況調查表，若總表中所列學校種類項目之次序為(一)大學校，(二)專門學校，(三)師範學校，(四)中學校，(五)職業學校，(六)小學校等；則排列詳表時，先列各個大學校詳表，次列各個專門學校詳表，再次列各個師範學校詳表，以至各個中學校，各個職業學校。各個小學校等詳表，依次列完。

(3)著作教育論文或書籍所根據之教育事實製成詳表及總表時，若係簡短之研究，祇列總表，可不列詳表。若所研究之問題，比較繁複，而詳表又有可供閱者參考之價值，則詳表總表，可一併列入，且宜先列詳表，後列總表，以其便於說明也。若詳表過於冗長，參入正文中，易使閱者頭暈目眩，乾燥無味；則此類詳表，最好放在附錄上，惟總表則須放在正文中。

2. 表示歷史事實，橫斷情形，變量事實之各種表，(a)表示歷史事實的表，即表列事實時，以時期為主體，依照事

實的時期之先後，順次排列，以備作繼續的研究。此種表格之排列法，簡而易明，關於記載各地方及各學校逐年學務情形，以明其進退消長之迹，以使用此種表格爲適宜。若所製之表，其側重點不在表示各時期變遷之情況，而抱有其他目的，則此種表格，容有未合，是在製表者視其目的如何善自選擇耳。下面所列之表3，爲表示歷史事實的表之一例。

表3　北京歷年人數及學齡兒童人數表

(由中華教育改進社京師教育概況表(1)改製)

民國年次	人數	學齡兒童人數
元年	695,267	79,199
二年	717,826	84,343
三年	745,710	93,140
四年	756,752	90,349
五年	770,541	93,893
六年	792,074	84,921
七年	779,713	95,132
八年	796,599	107,832
九年	825,341	100,508
十年	834,372	98,698

(b)表示橫斷情形的表，即表列同一時期的事實，以其間之關係爲主體，依照事實內容之情形，橫斷排列，俾得

便於比較。此種表格之排列法，先就有關係之項目，平行並列，然後計算其比例數。關於比較各地方及各學校之學務上各種情形，以使用此種表格爲適宜。惟應注意者，在製表之先，務須審查所欲列之各項是否相關，及其關係之情形何如，以免不相關之事實錯雜其間，致所欲表示之關係，莫由顯著。下面所列之表4，爲表示橫斷情形的表之一例。

表4　北京中等以上學校男女學生人數之百分比較表　民國十年度

(由中華教育改進社京師教育概況表(3)改製)

校別	學生數			百分比		
	男	女	總	男	女	總
大學校	6,299	124	6,423	98•07	1•93	100
專門學校	5,515	380	5,895	93•55	6•45	100
師範學校	340	220	560	60•71	39•29	100
中學校	5,859	1,027	6,886	85•99	14•91	100
職業學校	694	603	1,297	53•51	46•49	100
總計	18,707	2,354	21,061	88•82	11•18	100

(c)表示變量事實的表，即表列一個時期的事實，依其分佈的範圍之廣狹與發見的次數之多寡，適當排列，以便研究其變量情形。自然界中各種事物，其變量情形，常有一定之規律。譬如比較一羣人之體高，任取一百人而測量之，各人之高低，必不一致；其中最高與最低之人必居少數，高度居中之人必居多數；高度愈居中，其數亦愈多，高度向兩側離中央愈遠，其數亦愈少。此種集中趨勢(Central tendency)，不僅此事爲然，舉凡自然界各種事物，俱呈此種規律。表示一班學生智慧之高低，學力之優劣，年齡之大小等等，所用之次數分配表，(Frequency distribution)均屬此類表格，例如表5是。至於次數分配表之製法，以後容當再論。

表5　93名18，19歲男學生體重之次數分配表

磅　數	人　數
90	1
95	2
100	4
105	9
110	14
115	15
120	21
125	10
130	9
135	3
140	3
145	2
總　計	93

III 表格式樣之選擇

使用表格，究以何種式樣爲適宜，則全視表示之事實所爲之目的，與製表之人達此目的之計畫如何而定；絕對沒有一種表格，對於所有一切目的，都能適用之理。茲將採用表格式樣時所應注意之各要點，逐條詳記於下，以便製表之人知所遵循，而不至於忽略。

1. 採用之式樣，要能使人一看即可查出表中所列之事項。
2. 採用之式樣，對於以後各年的事實須添入表中時，要能使此種事實，可以添得上去，以便研究進退消長之各種情形。
3. 採用之式樣，要能節省篇幅，並且要便於保存。
4. 採用之式樣，要能使閱者一眼即可看見事實之全部。
5. 採用之式樣，對於所列事實將來有改編爲次數分配之必要時，要容易縮簡爲次數分配。
6. 採用之式樣，對於事實如有遺漏時，要容易顯露得出。
7. 採用之式樣，在製造表格及應用表格時，要能節省時間。
8. 採用之式樣，當各卡片放在一處時，或未依次整理時，對於各種事實，要容易查得出來。
9. 採用之式樣，要不多費工夫，即可依次編列，整理就緒。
10. 採用之式樣，要能就原來列表之紙上，可以核算統計。

11. 採用之式樣要能就原來列表之紙上，對於分總數 (Subl totals) 大總數 (Grand totals) 以及別的總結 (Summaries)，都可以表列出來。

12. 採用之式樣，對於事實須重行整理時，要不用重抄而仍適於應用。

13. 採用之式樣，對於事實之各部，要能分得開，以便多人同時可以整理事實。

14. 採用之式樣，要能經久耐用。

15 採用之式樣，對於各種相同之事實，如姓名，性別，生年月日，等等，不要重複填寫。

16. 採用之式樣，對於一切做解釋用之數字符號，要可以記錄得上去。

以上所記各條，僅就選擇表格式樣方面言之。此種表格，大都係一種紙片或冊頁，用以記錄徵集所得之事實。選擇教育測驗用之表格式樣時，尤須注重以上所列各點。

IV 表之製造與布置

表格究竟應當如何製造，然後始能適用，已漸漸由吾人之經驗，得到一種結果。不過此種結果，並不是有一種特別的權力，可以一成不變。其不完備之處，仍可隨時修改。關於製表之規則，可分為：(甲)表之名稱，(乙)表之項目，(丙)表之格線，(丁)數字列法，(戊)表之布置及其他五項說明之。

甲、表之名稱

關於表之名稱，有下列各點必須注意：

1. 表之號數（用以註明表之次序者，如表 1，表 2，或表甲，表乙之類）及表之標題（用以表明表之內容者）須寫在表之頂端，如表 6 是。關於此點，表與圖完全相反，因圖之號數及標題，均須寫在圖之下端。其故

表 6 [redacted]綏察三區民國十一年度公私立國民及高小男女學生數比較表

（錄自薛鴻志：教育統計學大綱）

省區及學校	學生數								
	公立			私立			總計		
	男	女	總	男	女	總	男	女	總
[redacted]	9,288	928	10,216	1,326	30	1,356	10,614	958	11,572
國民小學	8,251	829	9,080	1,326	30	1,356	9,577	859	10,436
高等小學	1,037	99	1,136	....	....	....	1,037	99	1,136
綏遠	1,182	42	1,224	3,610	....	3,610	4,792	42	4 834
國民小學	916	42	958	3,610	....	3,610	4,526	42	4,568
高等小學	266	....	226	....	....	....	266	....	266
察哈爾	5,350	279	5,629	5,113	98	5,211	10,463	377	10,840
國民小學	4,606	248	4,854	5,073	98	5,171	9,679	346	10,025
高等小學	744	31	775	40	....	40	784	31	815
總計	15,820	1,249	17,069	10 049	128	10,177	25,869	1,377	27,246

蓋由於表之列法，係自上向下排列，以上部爲起點，故名稱須置諸表上，然後便於閱看；圖之繪法，係從下向上繪去，以下部爲起點，非將名稱置諸圖下，於閱看殊不便利。

2. 表之標題，務須簡賅，明瞭，完善，使閱者不必參看表格，卽可了解表中所表之事實。一般著作家對於所列之表，常有充分之註釋；蓋因此種註釋，有在題目上所不能敍述出來者，與其另加註解，多費手續，不若於標題時將表中重要項目揭明，更爲省事。所以標題必須要將表中最重要之各點舉出，並且要簡單明白。例如表 6 標題之將表中重要性質揭出是。

3. 標題中所舉之各要點，其次序須與表中所列之項目一致。例如表 6 所列之項目，初爲省區，次爲學校種類，再次爲公立私立，再次爲男女性別，而其最重要之目的，則爲比較男女學生之數目，故標題之次序，與表中所列項目之次序全同。

4. 表之內容有空間時間區別時，須將地方時期分別在表之名稱上註明。例如表 6 所表之事實屬於熱綏察三區，其時期爲民國十一年度，均在該表名稱上揭明。

5. 有時長表所佔之篇幅甚長，須分作數頁或數表方能列下。此種長表，除在第一頁或第一表上部將該表之號數及標題完全記下外，以後各頁或各表，僅將該表之號數記於頂上，標題則可以不記，但須記『續前』兩字，用括弧（ ）括之。

6. 有時所調查事實之數目，如測量之人數，級數，及調查之校數，城市數之類，亦有於表之名稱上指出之者。其

目的在使閱者明瞭此表所根據事實分量之多寡，而引起其相當之注意，例於表 5 將測量學生人數舉出之類是。

乙、表之項目

關於表之項目，有下列各點必須注意：

1. 表之項目，如表 6 中之省區，學校，公私立，男女之類，必須列於表之左端與上部。通常以項目之繁多者置諸左端，簡單者列於上部，如表 7 是。若所列之項目，無繁簡之區別時，則無一定之限制，可任製表者之方便。

表 7 北京國立八校民國十一年度全年經費比較表

（見中華教育改進社全國中等以上學校概況）

校別	全年經費數
北京大學	792,444
京北師範大學	471,320
北京農業大學	248,400
北京法政大學	186,200
北京工業專門學校	173,764
北京女子高等師範	152,772
北京醫學專門學校	142,240
北京美術專門學校	116,052

2. 表之項目，須一律自左至右橫行寫去，使閱者可以從一個方向去看，例如表 7 中之校別，全年經費數等項目，均係橫列是。不過有時為節省篇幅起見，亦可以直寫；直寫時以一項目作一行寫完為適宜。若項目之文字較長，須分作兩行以上排寫，則又宜橫行而不宜直寫，例如表 8 中之『教會及外人立』六字排作兩行橫寫是。

3. 項目之次序，或按行政區域，或按等級，或按時間，或按分量多寡，可由製表者斟酌表中情形，臨時決定。若所製之表，其內容可注意之點，不止一端，而又有區域之分別，則項目之次序，宜按行政區域位置之先後排列，例如表 6 中之熱河，綏遠，察哈爾等，即按行政區域次序排列。有時表之項目，有等級之高低，無區域之分別，即按等級排列，例如表 4 中之大學校，專門學校等，即按學校等級排列。若所製之表，以時間為主，其目的在表明各時期變遷之情況，則項目之次序，宜按時間之先後排列。例如表 3 中之民國年次，即按年份次序排列，若表中可注意之情形，止有一種，則排列項目，最好按照其內容數量之多寡以為次序，既可表顯其重要之關係，更可比較其內容之情形，例如表 7 中之北京大學，北京師範大學等，即按全年經費數目多寡之次序排列。

4. 大項目可再分細項目，惟細項目須置於大項目之下，且須用低格空地，或格綫種種方法表示區別，以顯明其類屬性質。例如表 6 中之國民小學，高等小學等，置於熱河之下，並且低一格；熱河所屬之學校學生數與綏遠所屬之學校學生數，用橫空地將其隔離；公立，私立等置於學生數之下，用雙線分開；男，女等置於公立私立之下，用單線分開。凡此種種方法，無非顯明此等細項目有附屬性質，使閱者一見即能明瞭。

5. 有時對於某項目須特別表顯，以資比較，則所欲特別表顯之項目及該項數字，用粗畫字或紅顏色表示之。

例如表7因欲以北京師範大學之全年經費數與其他國立七校比較，故將該項目及其數字特別粗重。

6. 總數宜置於表之極右端或最下層。以前所用之統計，亦有置於各項目之前者；以次序論，此不足以爲法，不宜採用。惟細項目之小總數，可緊接置於其所屬細項目之後，例如表6中之男，女項目後而置總數一項是。有時亦可置於大項目之行中，用粗畫字表明，例如表6中之熱河，綏遠等項目後所列之數字是。不過此種小總數，本宜列於學校下，其所以放在熱河，綏遠等項目行中者，特爲節省篇幅計耳。

表8　民國十年度京師各級學校校數比較表

（見中華教育改進社京師教育概況）

校別	國立	公立	私立	教會及外人立	總計
大學校	4	....	5	3	12
專門學校	16	....	6	2	24
師範學校	....	2	2	....	4
中學校	2	6	12	12	32
實業及職業學校	....	3	13	....	21
高等小學校	....	3	....	4	7
兩等小學校	2	42	17	7	68
國民學校	....	36	118	10	164
幼稚園	1	....	2	1	4
平民學校	....	7	13	....	20
半日學校	....	23	....	....	23
不分類之學校	1	4	29	3	37
總計	26	126	222	42	417

7. 凡橫幅甚長之表，左部所註項目不便通覽時，應於右端照樣添入。又長表須分作數頁或數表排列時，則以後各頁或各表，必須重註項目，以免閱者發生不便之感。

8. 能用雙式分配 (Double distribution) 表時，最好用雙式分配表。所謂雙式分配表者，乃在同一表內，排列兩種互有關係之事實，一種自左至右作橫列，一種從上而下作竪列。例如表 82 竪列為各級學校之數目，橫列為各種學校之數目，而各級學校中國立，公立，私立，教會立之數目，亦能從表中見之。

丙、表之格線

畫表格線時，須留心以下各條：

1. 表中每一竪行須以直線劃分之，例如表 8 中之國立，公立等項目間，均以一直線區分。

2. 細項目之間用一直線，重要項目之間，用雙直線或粗直線，例如表 6 中之男，女，總各項間用一直線；公立，私立間用雙直線是。

3. 表之頂端及底邊，須用雙直線或粗直線間斷，例如表 3，4，5……之頂端及底邊之雙直線是。

4. 表之左右兩端，不可用邊線隔絕，若是用邊線圍住，則足以使此表形似箱篋，殊不美觀，而表之形式，即因此不能鮮明可愛。所以表 3，4，5……之左右兩端，俱不用邊線，蓋以此故。

5. 表中上部列項目處之下及下面列總數或平均數處之上，均須用橫線區分之，例如表 8 中校別下之橫線與總計上之橫線是。

表9 東大附中民國十二年度在校學生年級年齡分配表

年齡	一年級		二年級		三年級		四年級		五年級		總計
	一	二	一	二	一	二	一	二	一	二	
10-10:11	1										1
11-11:11	1	4	1								6
12-12:11	7	3	1	2		1					14
13-13:11	8	11	5	6	3	2					35
14-14:11	8	13	10	10	7	6	1	1	2		58
15-15:11	6	5	10	4	5	10	4	4	3	3	54
16-16:11	4	3	7	9	20	10	10	8	5	2	78
17-17:11	1		4	7	8	5	12	12	6	8	63
18-18:11			1	2		1	10	8	7	11	40
19-19:11						2	1	4	10	6	23
20-20:11					1		1	1	4	2	9
21-21:11									2		2
總計	36	39	39	40	44	37	39	38	39	32	383

(此表係由廖世承編之施行新學制後之東大附中 367 面表十改編而來)

6. 表中排列數字之處，通常不用橫線。蓋因一用橫線，則每一橫列數字，非畫一道橫線不可，於是則反足以使表不淸楚，不美觀，不易觀察。例如表8及其他各表中間列數字之處，均不用橫線。

7. 表中排列之數字，如有特別意義時，則可用粗綫標示出來，使閱者易於察知。例如表9為年級年齡分配表，粗線所標示之數目，為常齡（Normal age）之人數，以上者為低齡（Under age）之人數，以下者為高齡（Over age）之人數。

8. 表中列數字之處，雖不用橫線，然可用相當之點線引導吾人之眼光看表。此種點線，不但可以引導眼光，並且可以使全表更清楚，更好看。例如表5所用之點線，卽係此種用意。

9. 如果表中各豎行之數目甚長，閱時頗覺費力，則可用空地將豎行數目分開，每五個數目作一組。關於此點，卽使不預備付印之表，亦可以如此辦理。

丁、數字列法

排列數字時，須注意以下各條：

1. 表中數字，須一律用阿剌伯字，不僅體裁整齊，且少佔紙面，於製造詳細表時，甚為方便。漢字則甚不適宜，常因寫法之疎密，活版之顚倒，錯誤迭出不窮。故中央統計協會開第二次會議時，已決議採用阿拉伯數字。而國內各教育機關編製之各種學務報告表，沿用漢文數字者，仍比比皆是，非速改革不可。

2. 表中豎行各數之位數，須上下相對，以便加減比較。遇有小數時，小數之位數，尤須列在一根垂直線上，免致

觀察錯誤，計算困難。

3. 數目多至四位以上，須用分段點，每三位分作一段，例如表6各數目中之分段點(，)是。

4. 無數字之格，須用短點線或短橫線補充之，不但便於觀察，並可使表更加美觀，例如表6及表8之無數字格中所用之短點線是。

5. 連續之單位中間有間斷時，常於數目中用空白表示之。例如表10中之第五級，雖未曾測驗過，仍將彼所

表10　紐約城學校用吳狄(Woody)之算術量表測驗所得之中點數分數(1917年,5月).

測驗	年級及學期							
	III		IV		V		VI	
	A	B	A	B	A	B	A	B
加法	12.0	12.6	13.3	14.5	......	......	17.5	18.1
減法	8.0	9.1	10.0	10.7	......	......	13.7	14.2
乘法	7.5	8.2	9.4	11.3	......	......	16.0	17.1
除法	2.1	6.0	7.2	8.0	......	......	11.3	12.4
總計	29.6	35.9	39.9	44.5	......	......	58.5	61.8

估之一格畫出空下。所以然者，因恐有人不經心看來，以爲兒童之算術能力，至此忽然增加，求出謬誤之結論。

6. 表中事實，雖經查閱，而於正確之點尚有疑問者，可於該事實之後，附一疑問號(?)記之。有時表中事實有特別意義，須加解釋，或須使人特別注意，則於該事實之右上角上記一注意標誌(※)。

戊、表之布置及其他

1. 所列之表，應置於解釋此表的正文附近，愈近愈好，惟前後則可以不拘。有時放在正文前面，有時放在後面，有時插在中間。如果正文係說明表中之意義，則宜先列表，後說明，如此則閱者可以預先得到一種具體觀念，看說明時，自然容易了解。若是正文之意義，不是依賴所列之表；或正文必須置於表前，能予所列之表以若干意義時，則表宜放在正文後面或中間。有時原始的事實之詳表，既長且多，則宜放在附錄上，惟總表則須置於本文中。

2. 表宜向正的方向安置，使閱者看表時，不要將紙倒轉來看。不過有時爲節省篇幅起見，亦可以將紙倒轉寫。惟倒轉寫時，有一定之方向，須能使閱者可以從紙的右邊去看，即將表之上端置於左方，下端置於右方。（惟此係就由右至左直行排列時而言。若係由左至右橫行排列，須將表之上端置於左方，下端置於右方。）

3. 表中所印之字，大小要適宜，以無須多費目力爲主。關於此點，尤其是印在書上本文中之總表特別重要。放在附錄上之原始事實的詳表，亦宜精緻印刷。

4. 表的看法，係從上至下，從左至右。此點有一部分與圖相反；因爲圖的看法，係從下至上，從左至右，

V 練習問題

1. 表列法在教育統計上，何以為一切表顯法則之初步？
2. 何者為表之功用？
3. 詳表與總表之區別為何？
4. 表之名稱，應置於表之何部？表之列法，應自何方至何方？
5. 表之標題，是否應將表中重要項目揭示明白？為何？
6. 表中大項目之下若再分細項目時，用何方法以顯示其類屬之性質？
7. 當表中某項目須特別表顯使人注意時，應用何方法以顯示之？
8. 表中排列數字之處，是否應用橫線分隔？為何？
9. 漢文數字，何以不宜用於表格中？
10. 連續單位中間遇有間斷時，列表時是否亦須用空白間斷？為何？

VI 參考書報

1. 薛鴻志：教育統計學大綱（再版）第三章。
2. 周調陽：應用於教育測量上之表格法，教育叢刊第四卷第六集。
3. 曾鯤化：統計學教科書第四編第一章。
4. Secrist, H.: Readings and Problems in Statistical Methods, Chapter X.

5. Secrist, H.: Introduction to Statistical Methods, Chapter V.

第四章　圖示法

I 圖示法之重要

通常用以表顯事實之方法，約有三種，即(一)文字，(二)表格，(三)圖形。此三種方法，各具特長，均有相當之功用。惟比較言之，用文字說明事實，過於繁長，多佔篇幅，既不便於比較，反易使人誤解，不若表格用數字記載事實之簡賅眞確，且便於考察比較；而用表格說明事實，又嫌艱深，非有統計知識者，不能完全了解，且所列全係數字，極乾燥無味，常人決不喜披閱，又不若圖形之表示事實，彰明昭著，普通人亦能一見了然，且喜閱看。然此不過就三者比較言之。吾人表顯事實最重要之方法，莫過於所用之方法，在特種情形之下，而對於所欲表示之事實，用意，情由，等等均能適當表顯出來，同時對於閱者，又須使其能容易明白了解。因此之故，圖示法在此三種方法之中，最爲重要，以其包有上面所述之幾種好處。

在多種情形當中，表示事實之方法，大都以使用圖示法爲最佳。其特別功效，在適當的圖形，解釋時比較容易而且迅速。還有一層，圖形之製造合法者，其中之所表示，不僅圖形，並且連表格的事實，俱表現出來，同時又可利用文字說明其中所含之各要點。三種方法中所有之長處，圖示法均兼而有之，誠爲教育統計學家表顯事實之良好工具。

II 圖形之種類

圖形之種類，爲數頗多；適用者固多，但不合式者亦不少。各種樣式之圖形，吾人不但無如許時間精力去研究，即使盡量學得，亦決無如許機會去應用。因此之故，最好從各種圖形中，選擇最佳者若干種，作爲標準圖形，以供需要時應用。茲依圖形之形狀，分之爲(甲)圓形圖，(乙)方形圖，(丙)直條圖，(丁)曲線圖，(戊)組織圖，(己)分布圖，(庚)形像圖七類，依次分述如下：

甲、圓形圖

圓形圖因用法之不同，而分之爲(1)單圓圖，(2)多圓圖，(3)疊圓圖三種。

1. 單圓圖　以全圓代表某一事物之全體，再按事物各部數値之比例，分此圓爲若干扇形 (Sector)，以代表各部。例如圖 1，係民國十一年度全國省立，縣立，私立師範學校學生數，其總數爲 41741，以全圓代表之；然後再按每種性質設立之師範學校學生比例數，分全圓爲三扇形，視各扇形之大小，即可知其學生數之多寡。

製造此種圖形，手續非常簡單。其計算法係依圓周 360 度去計算，每百分之一等於 3.6 度，則百分之 79 等於 $79\times3.6=284.4$ 度。此 284.4 度，我們可以用目力估定其大致；若要更求精確，無妨用分度規測量之。其餘各扇形之測定，亦復如是。欲求圖形所表示之事實分外顯明，最好用各種不同之顏色區別各扇形。

此種圖形之好處，約有數點，即(1)簡單易畫，(2)衆人易了解，(3)樣式頗美觀。但其缺點亦不少；(1)若所分之扇形較多，而其中有過於狹小之扇形時，則不能將項目之文字及數目註上；(2)所列文字數目之方向，顛倒錯亂，彼此相反，比較殊不方便；(3)比較各扇形之大小時，如其相差之度不甚顯著，則不容易看出；即使相差之度較著，可以

辨別其大小而究竟相差若干，甚難精確斷定。

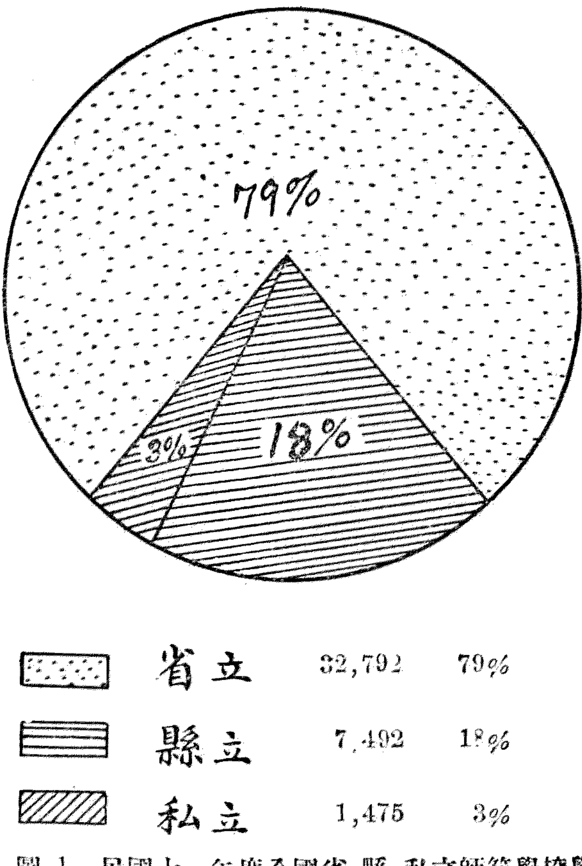


圖 1　民國十一年度全國省，縣，私立師範學校學生人數比較圖

2. 多圓圖，以二個以上不等之圓形代表二個以上不等之事物或部分；大圓形表示大量，小圓形表示小量。例如圖 2，係民國元年，三年，五年全國國民學校學生概數，視各圓形之大小，即可知學生數之多寡。製造此種

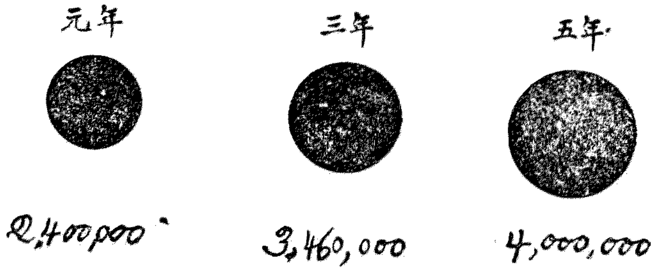


圖 2　民國元年三年五年全國國民學校學生概數

圖形，其大小之比例，或以直徑爲標準，或以面積爲標準，上面所舉之例，卽以面積爲標準而製造之者。其計算法係依幾何上之定理：各圓面積之比，爲其半徑平方之比。今以各圓面積比較各數量，故須先求各圓半徑之比。求得各圓之半徑後，以之各作一圓卽得。

此種圖形之缺點爲：(1)如以直徑爲標準，則常誤引閱者將比例數看大；(2)如以面積爲標準，則常誤引閱者將比例數看小；(3)無論比較各圓之直徑或面積，均不易得精確之觀念。故此種圖形，採用之者甚少。

3. 疊圓圖　由同一圓心作成二個以上之圓周，代表二個以上之事物，並按各事物所含各部分數值之比例，分各圓周爲若干分，以代表各事物所含之各部。例如圖3，爲美國1895，1900，……等年洛克富得(Lock ford)城市中小學校學生人數之比較。每一圓圈，代表一個時期之中小學生總數，再依中小學生之百分數分之爲兩部。每一時期除自行比較外，並可與其他各時期比較。

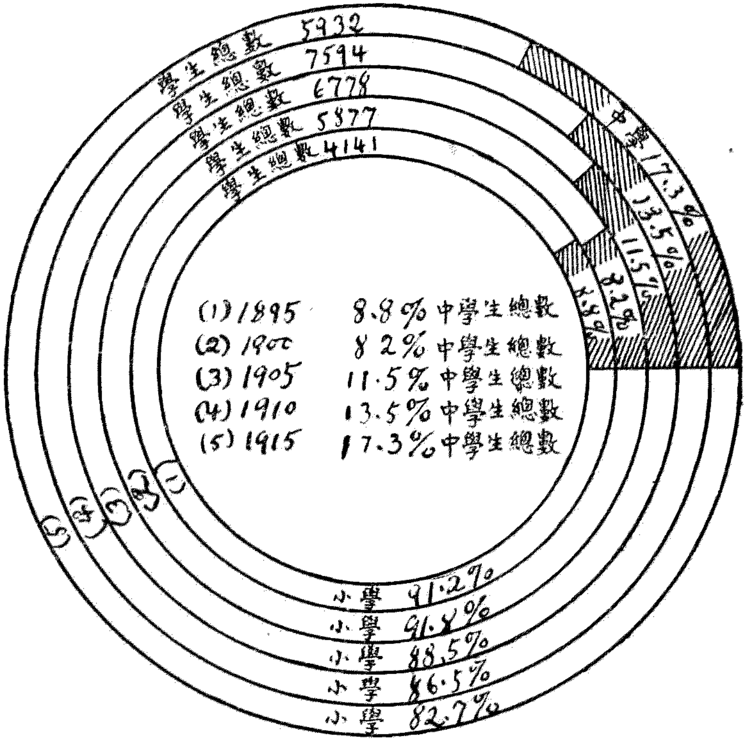


圖 3 美國洛克富得城市中學小學人數之百分比

此種圖形之缺點有三；(1)閱者不易明瞭，(2)不易看出圓形之面積，(3)閱者常爲圓周所混亂，致失著者之初意。

因此之故，採用之者亦少。

方形圖係以一方形代表一項目，由方形面積之大小不同，以表明所代表事物之多寡。至所用之方形，多為平

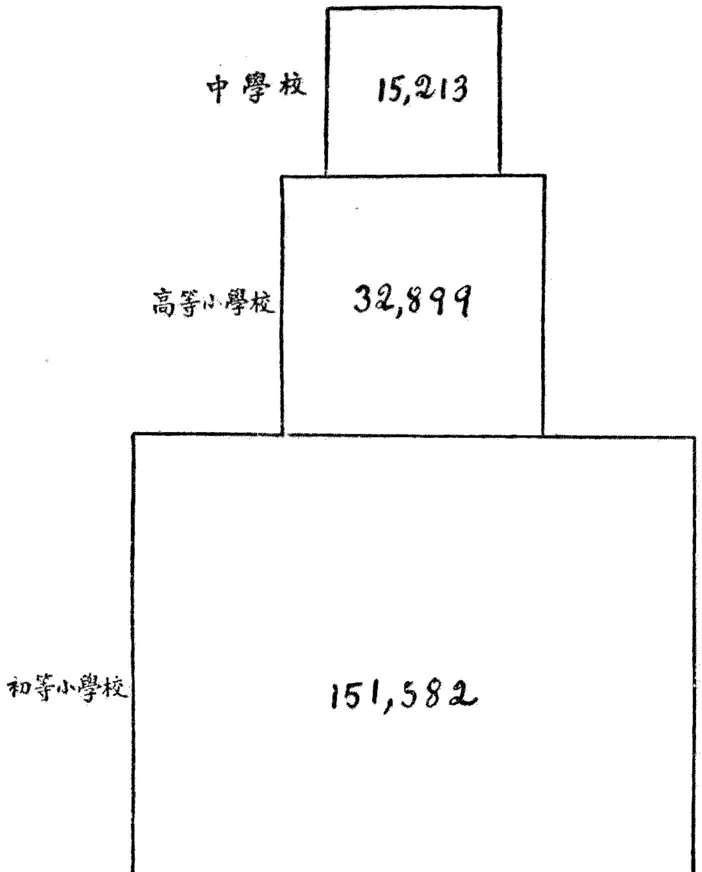


圖 4　教會立初等小學高等小學及中學學生人數比較圖

面正方形或長方形，然亦有用立體者。例如圖 4 係用三個平面正方形表示某年教會中學，高小及初小學生數目之比較。

此種圖形之缺點，為估計各方形所含之面積，極難準確，比較殊不方便。苟不藉重數字說明，幾令人不知其相差究有若干也。

丙、直條圖

直條圖可分為三種，即(1)單式直條圖，(2)複式直條圖，(3)分段直條圖，依次分述如下：

1. 單式直條圖　以一直條代表某事物之一項目，由直條之長短，可以知各項數值之大小。例如圖 5，係以許多單式直條代表中華教育改進社第二屆年會到會人員之職務，用以比較其多寡。製造此種圖形時，手續雖然十分簡單，但有數點不可不加以注意：

(1)直條宜稍粗，俾易觀察。

(2)各直條中間之距離不可太狹。

(3)直條宜用黑色。若注重某一項目，欲使其特別表顯時，則代表某項目之直條，可特別用紅色或綠色；或將此直條用深黑色，而用淺黑色表示其餘各直條亦可。

(4)直條圖若係橫列時，從左端起先列各項目，次在項目之右列各數字，再次在數字之右乃列表示各數值之直條；若係豎列時，從下部起先列各項目，次於項目之上列各數字，再次於數字之上乃列表示各數值

之直條（或於項目之上列表示各數值之直條，再於直條上列各數字亦可。）

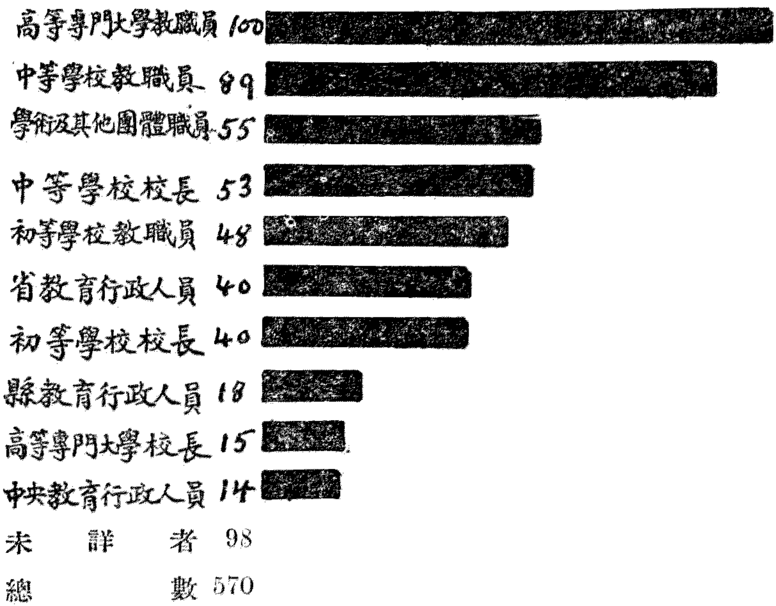


圖 5　中華教育改進社第二屆年會到會人員職務圖

（見新教育第七卷第二三期 475 面）

2. 複式直條圖　以兩道或兩道以上直條並列爲一組代表某事物之一大項目，以每組中之一直條代表大

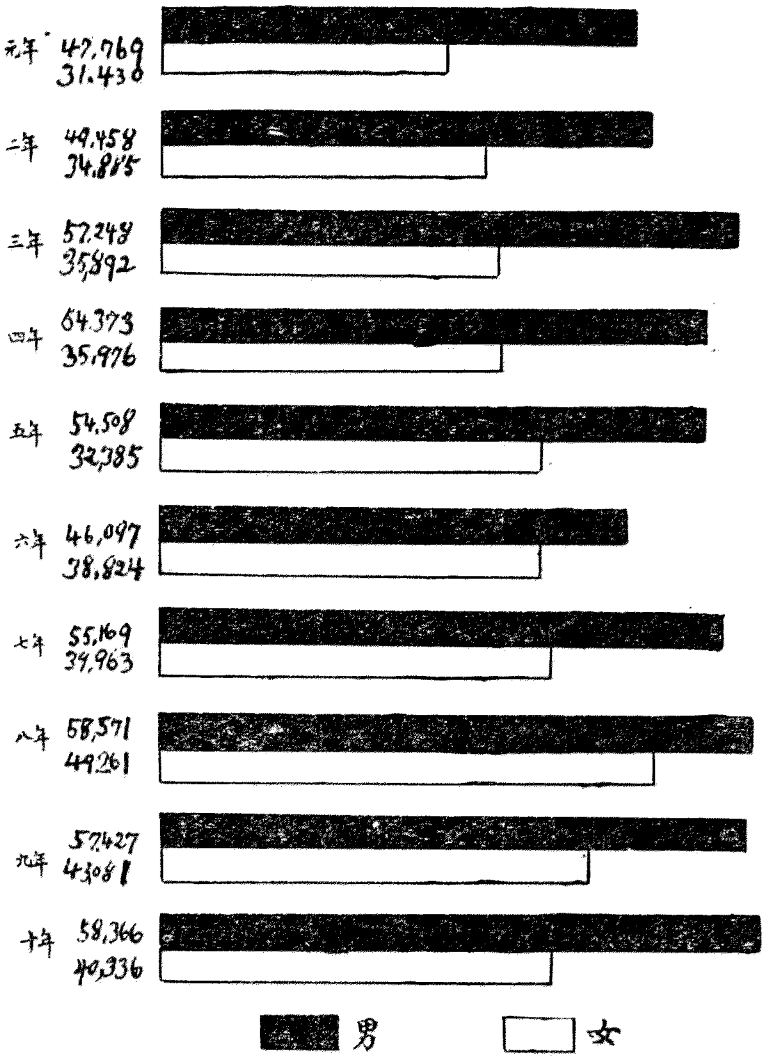


圖 6　北京民國元年至十年男女學齡兒童比較圖

項目中之一細項目，由直條之長短，以比較各細目數值之大小。例如圖6，爲民國元年至十年北京男女學齡兒童之比較，圖中黑色直條表示男兒，白色直條表示女兒，相並之兩直條，表示一個年代之男女學齡兒童。

此種圖形之所表示，較單式直條圖稍爲複雜。蓋單式直條圖僅能表顯事物之大項目，此則並能表顯事物之細項目，使之互相比較。製造此種圖形時，對於並列之各直條，須用顏色或影線表明以示區別；且應在圖下用記號註明各種直條所代表之事物，如上圖之於圖下用男兒女兒記號註明是。其餘所應注意之各點，與前節所舉相同。

3 分段直條圖　以一直條代表某事物，再按某事物各部之數值比例，分此直條爲若干段，每段代表一部。此種圖形，又可分作兩類：(a)不分支部的分段直條圖，(b)分支部的分段直條圖。例如圖7，爲表示紐約城學校三年級至七年級男女學生達到吳狄的常模（Norm 即標準分數）人數之百分數。若祇用該圖之(甲)圖，是謂不分支部的分段直條圖；若該圖之(甲)(乙)(丙)三圖同時均用，是謂分支部的分段直條圖。

用此種圖形之目的，在使毗連之各部，格外顯現清楚，一見了然。譬如上面所舉之圖，吾人就圖而觀，一望即可看出許多條件：如達到常模之人數，隨年級之升進而逐漸增加；女生達到常模之百分數，比男生要大得多；男生以前各年級之百分數，雖不及女生，然至第七年級，則趕及女生之百分數。

製造此種圖形時，直條宜稍寬。對於直條之各段，須用顏色或各種點線表明，使之顯然有別，並須於圖之旁邊或下部用記號註明各段所代表之事物。

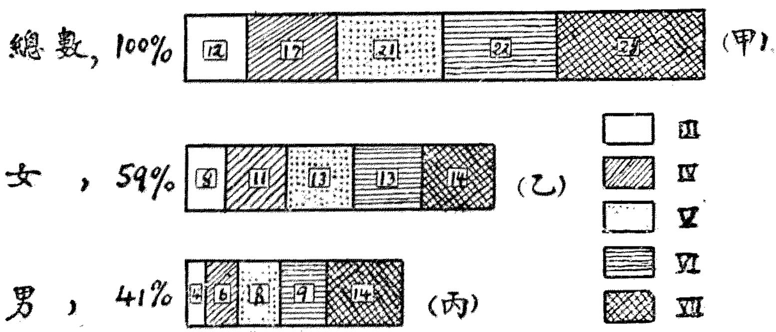


圖 7 從紐約城學校任意取出 300 男生及 300 女生求出達到吳狄的常模之百分數

圖書館	衛生	教育	市政	娛樂	警察	消防	道路	慈善
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5	5
6	**6**	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	**8**	8	8	8	8	8	8
9	9	9	**9**	9	9	9	9	9
10	10	10	10	**10**	**10**	10	10	10
11	11	11	11	11	11	**11**	**11**	**11**

圖8　表示克里弗蘭市之各種行政費在十一城市中所居之等級

此外尙有一種分段直條圖形，係聯合單式直條與分段直條兩種圖形造成。此種圖形，不僅十分特別，並且甚有功效，上面所列之圖 8，卽係此種圖形之例。

上圖係比較美國某處十一城市之各種行政費，黑色方孔之所表示，乃指克里弗蘭 (Cleveland) 市各種行政費所居之等第。

丁、曲線圖

曲線圖形，係以曲線表明各種事物增減變遷之趨勢，較之直條圖形，尤易觀察比較，不但簡單易繪，並且淺顯易明，爲研究各種科學不可少之良好工具。此種圖形，可分之爲(1)橫向曲線，(2)次數曲線，(3)累積曲線三種，玆分述如下：

1. 橫向曲線　此種曲線圖形，多用以表示歷史的材料，以觀察其變遷之情狀；因曲線進行之趨勢，係向橫的方向，故名爲橫向曲線。若其進行之方向，受某種原因之影響時，則生升高或降低之變動。例如圖 9，卽係橫向曲線之例。

關於製造此種圖形所應注意之點，下節將有詳細說明，此處暫行從略。

下面所舉之例，所表事物，祇有一項，故止用一曲線；若所表之事物有多項，亦可用多數曲線表顯。惟有不可不知者，用多數曲線表顯多項事實時，須將全圖分爲若干部分。每一部分以一零度線區別，庶幾各曲線不致彼此重疊，而有混淆不淸之弊。例如表 11 所列之材料，共分職業爲十一項，用曲線表明時，亦須將圖分作十一部分，

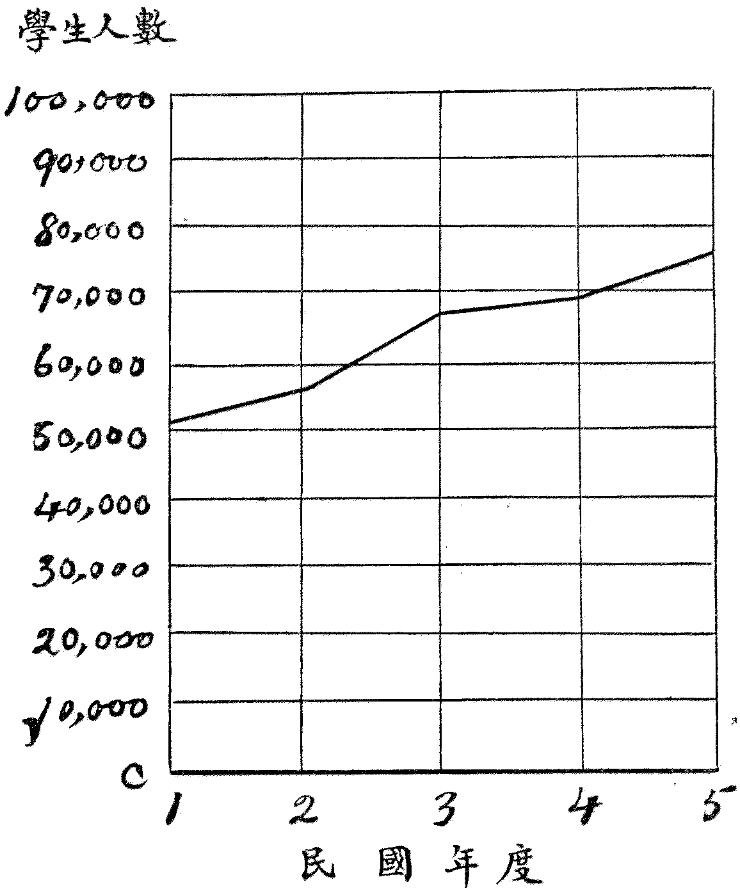


圖 9　全國中學校學生逐年比較圖

(見教育部第五次教育統計圖表)

表11　北京師範大學附屬中學校民國元年至十年度學生家庭職業百分比較表

職業	元年度	二年度	三年度	四年度	五年度	六年度	七年度	八年度	九年度	十年度
政界	53.3	46.7	51.4	50.3	42.6	44.9	45.9	56.0	50.9	50.5
學界	9.3	13.5	8.0	9.7	14.9	10.9	10.1	8.5	10.5	13.5
農界	1.4	5.4	3.9	3.1	4.3	2.3	3.2	5.6	2.6	2.3
商界	5.3	6.2	6.1	5.0	13.9	13.9	13.7	15.2	11.1	10.3
軍界	....	.7	2.8	5.9	3.6	5.8	6.5	1.3	4.1	4.8
警界	1.4	1.3	3.9	5.9	....	.4	2.5	....	2.1	2.3
議員	4.0	7.4	8.4	5.9	.8	.4	....	....	2.3	1.6
新聞界	4.0	2.0	2.4	1.9	.8	1.6	2.2	....	.9	.9
律師	....	.7	1.4	1.9	1.3	1.6	.7	....	.3	.6
醫界	1.4	.7	.9	.8	1.3	1.6	1.1	.9	1.2	1.3
其他	19.9	15.4	10.8	9.6	16.5	16.6	14.1	12.5	13.7	11.9
總計	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0

每部分皆由零度線起，如圖 10 是。

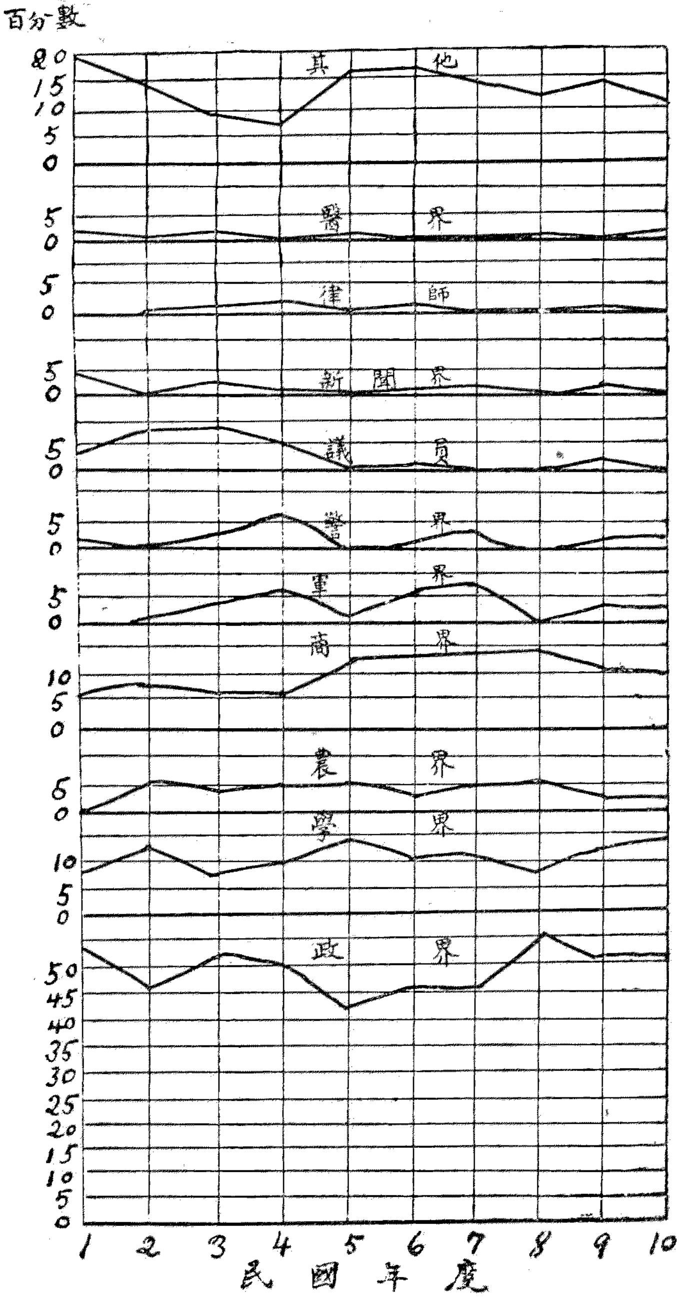


圖 10 北京師範大學附屬中學校民國元年至十年度學生家庭職業百分比較圖

若所欲表顯事物之項目不過多，而各項目之數值相差復頗大，預料製成曲線圖時，各曲線不至彼此重合複疊，則仍宜祇用一零度線為起點，不可將圖分作若干部分，用無數零度線作起點，以其於比較方面有多少不便之處也。

如所欲表顯之事實，係按倍數之比例增加或減少，用曲線表示此種事實時，則須用半對數的 (Semi-logarithmic) 格子紙，方能表示明顯。譬如在 1870 年時，甲投資一元，乙投資六元，每十年各按投資數之比例增加一倍，於是其增進之數為：

1870	$1.00	$6.00
1880	2.00	12.00
1890	4.00	24.00
1900	8.00	48.00
1910	16.00	96.00

此兩種投資增進之速率完全相同；若用平常用之算術的 (Arithmetic) 格子紙，作兩曲線比較其增進之速度，其差異甚大，實足使人發生誤解，例如圖 11 (甲)。是若用對數的格子紙表示，則可顯明兩者增進之速率，完全相同，例如圖 11 (乙)是。半對數格子紙可向書館售得，無須自行去製。

2. 次數曲線　此種曲線圖形，係以次數所由生之量數為主體，用橫量表表明量數之價值，豎量表表明各種

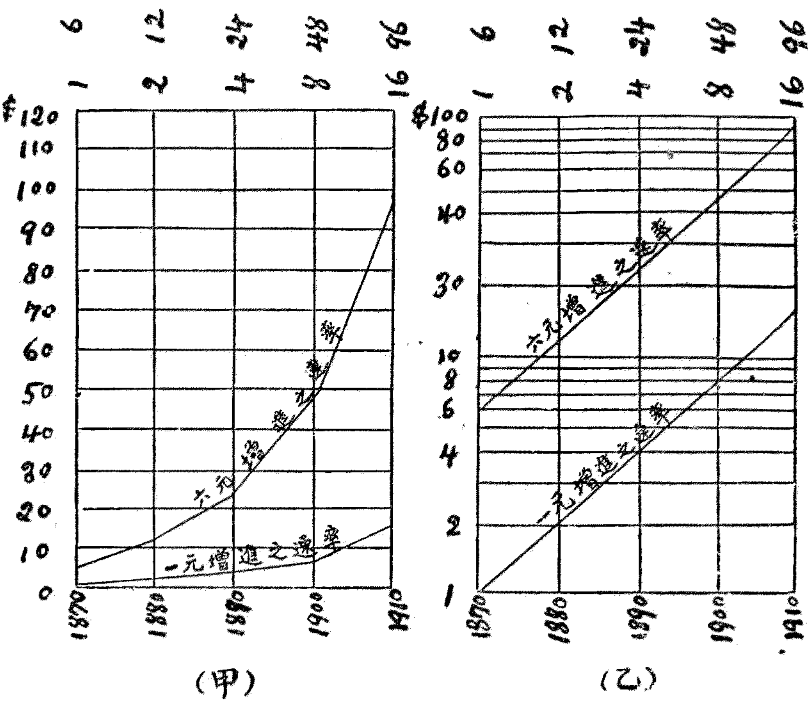


圖 11 表示加倍增進之曲線圖形

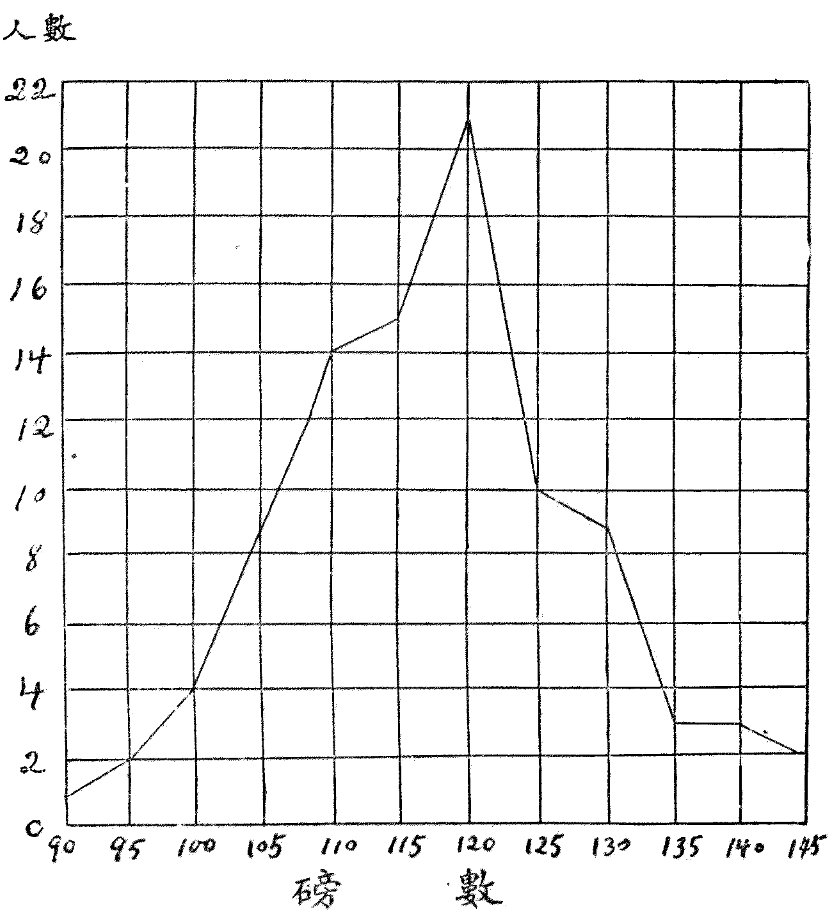


圖 12　93 名 18，19 歲男學生體重之次數分配圖

量數所發現之次數，然後按各量數之價值，以觀察其次數變遷之規律。

上面所舉之圖 12，係就表 5 之事實製成爲一種次數曲線圖形（此種次數曲線圖，亦稱爲次數多邊形 Frequency polygon）。製造此圖時，先畫一底線，沿此底線將各量數（即磅數）註於其下，從小數目起自左至右，依次註明；次在各量數之上向上各引一豎線。再次沿圖左之邊線，將各次數（即人數）註於其旁，從零數起，自下而上，依次註明，並向右各引一橫線。然後在每一豎線上畫定其相當之次數，再將各次數引一線連接，即成爲次數曲線。

有時所欲表顯之事實，量數之距離既長，次數之數目又小，甚至或有間斷不相連續之處，在此種情形之下，與其用次數曲線表顯，不如用次數面積（Frequency surface）表示之爲愈，以其更要顯明精確也。下面所舉之圖 13，即係次數面積之一例（此種次數面積圖，亦稱爲直方圖 Histogram）。

次數面積有三種：（一）常態的，（二）偏態的，（三）多衆數的，以後再行詳論。

3. 累積曲線　此種曲線圖形，係將各量數所有之次數，依次遞加，將各遞加之和，以直線連之，即得此種被加之次數，稱之爲累積次數；而於原來之實在次數，則稱簡單次數。例如表 12 中之第二欄，即原來之實在次數，第三第四兩欄之數目，即由實在次數遞加而得。第三欄係從小量數一端加起，由上而下；即 45 組中之次數 1 與 50 組中之次數 2 相加爲 3；再將 55 組中之次數 11 與 3 相加爲 14。如此依次遞加，以至加完爲止。最後加得之數，即等於次數之總數。第四欄係從大量數一端加起，由下而上，遞加之法全同。由小量數向大量

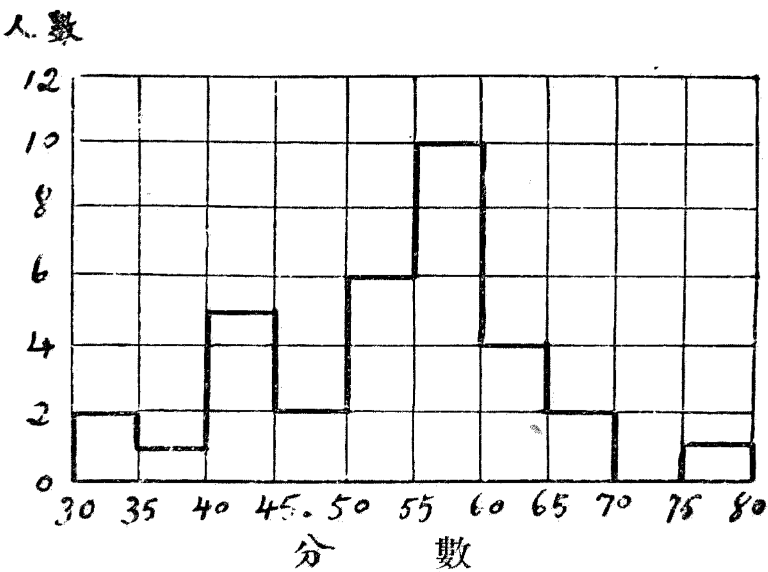


圖 13　33 名學生英文分數之次數面積圖

表 12　某中學第一年級學生教育測驗分數之次數分配

分數	人數		
	簡單次數	累積次數	
		『以下』	『以上』
45	1	1	94
50	2	3	93
55	11	14	91
60	23	37	80
65	20	57	57
70	12	69	37
75	11	80	25
80	12	92	14
85	1	93	2
90	1	94	1
總計	94		

數遞加時，其累進次數，按『以下』(less than) 之法則讀之；如得 45 分以下者 1 人，50 分以下者 3 人，55 分以下者 14 人之類是。由大量數向小量數遞加時，則按『以上』(more than) 之法則讀之；如得 45 分以上者 94 人，50 分以上者 93 人，55 分以上者 91 人之類是。

由表 12 之累積次數中『以上』一欄之數目，即製成圖 14 之累積曲線。就此曲線，可以知道各分數以上之人數。此圖係表顯『以上』之累積次數，其曲線由圖之左上角向右下角進行，可稱之曰下向曲線。若所表顯者係『以下』之累積次數，則其曲線必由圖之左下角向右上角進行，此種圖形，可稱之曰上向曲線。

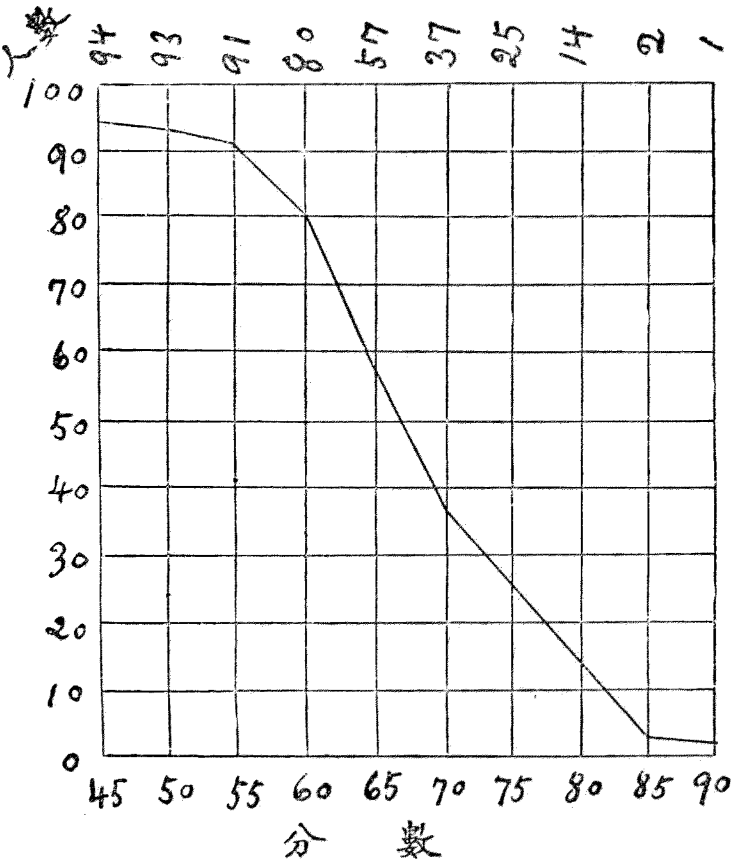


圖 14 某中學第一年級學生教育測驗各分數以上之人數比較圖

戊、組織圖

此種圖形係用以表示各種機關組織之系統，因而顯明其間之類屬性質及種種關係，與家族系統圖之表明

血統關係全相似。教育行政機關及各種學校組織系統。常用此種圖形表示，列如圖 15 及圖 16 是。

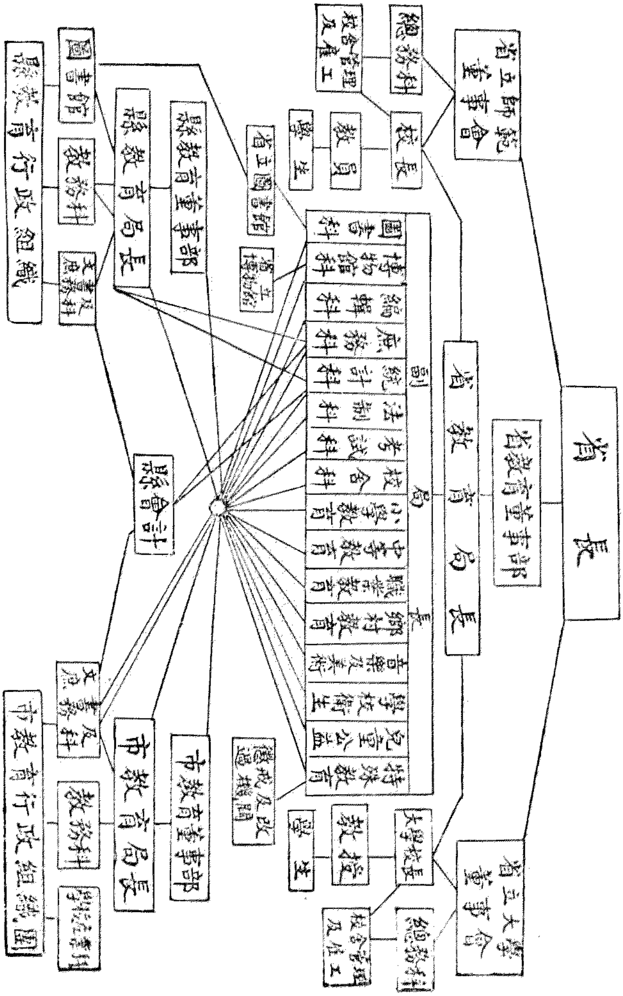


圖 15 美國省教育行政機關組織之計畫

（錄自汪懋祖：美國教育徹覽）

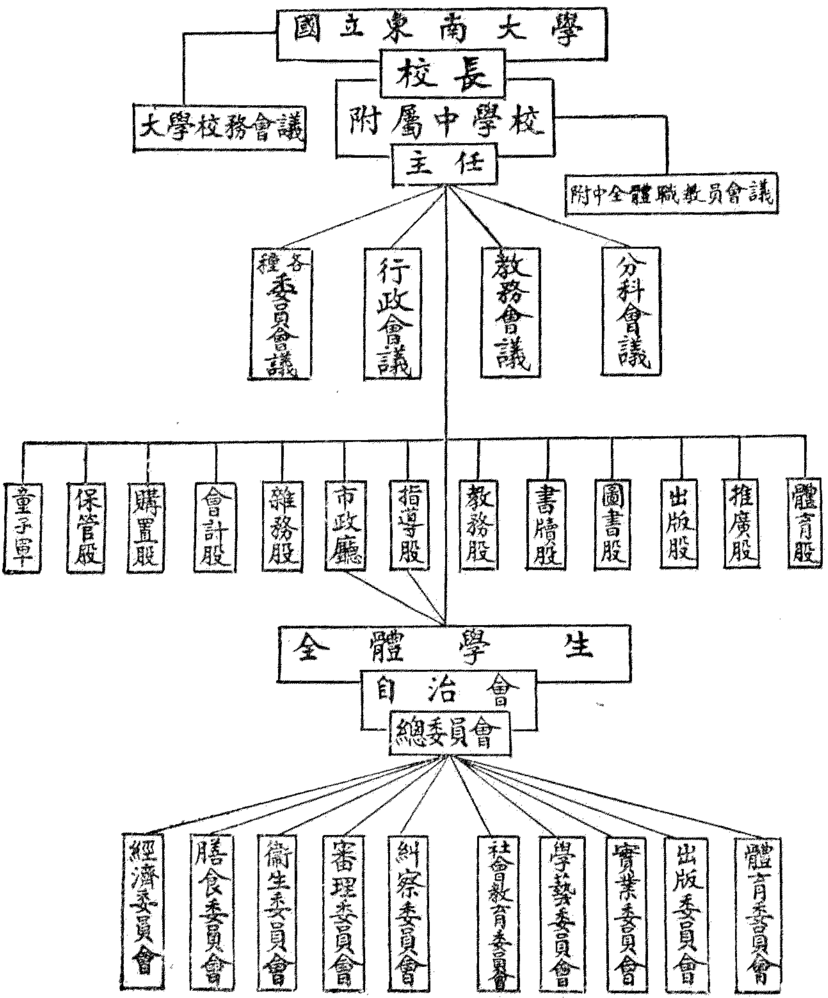


圖 16 國立東南大學附屬中學校組織系統圖

國家教育協會叢書

此係以地圖代表事項，因而顯明事實與地方之關係，俾閱者一見了然，易於比較。分布圖之應用，極其普遍，不僅可示統計上之結果，且能將數字所不及施者表彰之。故西人僉謂分布圖發見，爲統計學上之一大進步，誠非虛語。上面所舉之圖17，即係用地圖表顯事實之一例。不過此圖所用之表示方法，係用數字。若不用數字時，可有種種方法，足以使所欲表示之事實，明白顯露，如顏色之差異，影線之縱橫，圓點之大小，點子之疎密，以及其他各種記號，均可用以表顯事實之數量以資比較，應用時善自選擇可也。

庚、形像圖

形像圖者，即將所欲表示之物件，繪成圖形，由圖形之大小高低長短，或多寡各種不同之情形，因而顯明所欲表示事實之數量，以資比較。例如圖18，係用人形表明美國白黑兩種人不識字人數之比較。圖中黑色人形代表不識字人數。

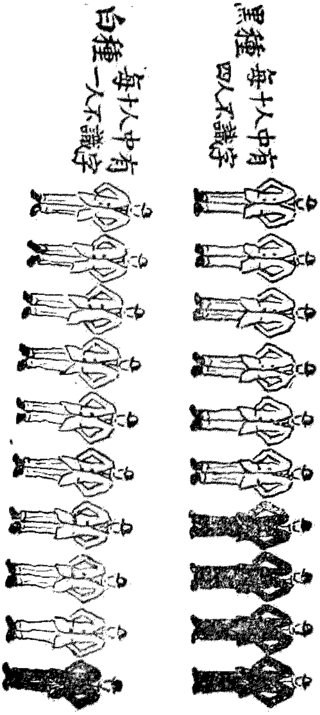


圖 18 美國白黑種人不識字人數之比較

此種表示方法，甚爲顯明，極易了解，且無不精確之弊。如用形像圖時，此種圖形可以採用。

有時用高低不同之人形，表示數目之多寡，以資比較，如圖 19 是。

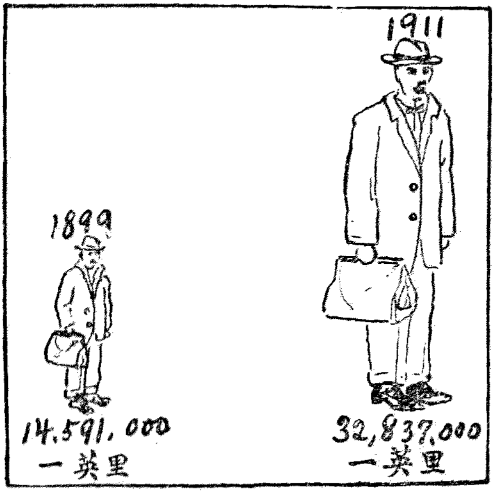


圖 19 美國 1899 年與 1911 年火車上坐客數之比較

此圖用以比較之標準，爲兩人形之高度。其代表數量較多之人形，因其高故，體的面積亦因而增大。若照面積之大小以估計其所代表之數量，則右邊圖形之所代表者至少比左邊圖形多五倍，而其實僅多一倍有奇。此種圖形，雖在圖示法中甚爲普通，而因其容易引起閱者錯誤觀念之故，仍以避免不用爲宜。

為求公衆易於了解起見，形像圖又有採取之必要。上所舉之圖19，因易引人誤解，固不可用；若將其改作兩列人形，由人形之多寡，以代表數目之大小，亦未始不可，如圖20是。

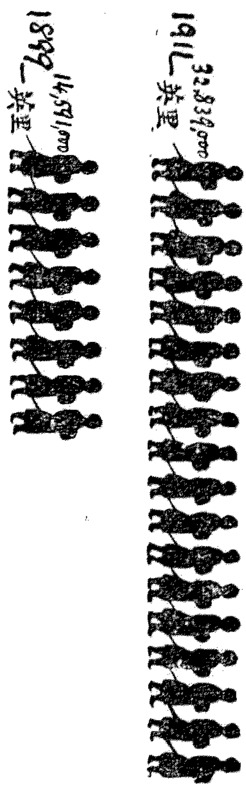


圖20 美國1899年與1911年火車上坐客數之比較

上圖係就圖19之事實改製，其效用與直條圖相等，惟須注意者，製造此種圖形時，人形之數目，務必為整數，因人形不能分作半個也。

凡可以用形像圖表示之事實，均可以用直條圖表示；而用形像圖所表示者，其結果有時亦不如用直條圖所表示者之顯明精確。不過此種圖形之存在，亦有其功用，約而言之，可分兩種：（一）圖形之惟一目的，在能使公衆都能了解。而圖形中含有通俗性質最大者，莫過於形像圖。故為求公衆易於明瞭計，形像圖實有採取之必要。（二）圖形應當有變化，而最忌單調。若報告書中所用之圖形，都是千篇一律，而絕無變化，恐閱者亦將因之興味索然，不耐卒讀。故為增加閱者興味計，形像圖亦有採取之必要。

III 各種圖形之應用

上節已將圖形之種類，詳加敍述，閱者從此當可略知圖形之大概。茲再進一步討論各種圖形之應用。

I. 表示一個事物各部分所應採用之圖形　有時一個圖形內所包含之各部分，有特別表示之必要，藉以顯明各部分與全體之關係。譬如某校學生來自湖南，湖北，江西，江蘇等省區，我們若作學生籍貫比較圖，即應於圖形中表示有百分之幾屬湖南人，百分之幾屬湖北人，百分之幾屬江西人，百分之幾屬江蘇人。有時一個年級內之學生，其年齡各不相同，我們不但要將各學生之成績表示出來，並且要將學生各年齡之百分數一一表顯。如遇此種情形，要將事物之各部分特別表示時，最適當之圖形，莫過於單圓圖（參看圖一）及分段直條圖（參看圖7），而分段直條圖比單圓圖為尤佳。其優點約有數種：(一)各部分比較，容易察知；(二)所列數目之方向劃一，便於閱看；(三)數目字或小數點，可以正對寫下，使在一直線上，計算時當更便利；(四)單圓圖形太呆板，祇能表示一種項目，若再分為細項目，則不能表示；分段直條圖則同時可以表示大項目與細項目。

有時我們要將各學生或百分之幾之學生所得各種分數，或其他各種狀況，完全表示出來，最適宜之圖形，莫過於次數面積。例如圖 21 之所表示，不但將各校號數及其所得之各種分數顯露出來，並且將每校所得某種分數用劃一的方法表出，一見即知得某種分數者有若干學校。其實次數面積之表示一個全體事實之各部分，亦不過是一連垂直排列之分段直條而已。

2. 表示比較所應採用之圖形　對於平常簡單的比較，最適宜之圖形，莫過於單式及複式直條圖（參看圖

5及圖6）。無論項目如何多，祇要所表示者係簡單的比較，單式直條圖均可以應用。

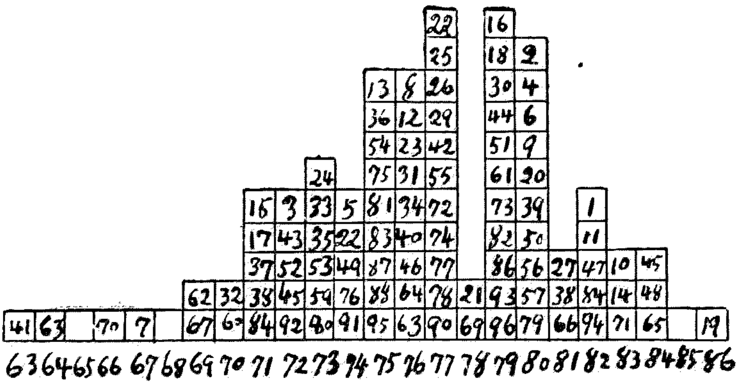


圖 21 美國克里弗蘭市各小學校號數及每號學校在拼字測驗所得之平均分數

若所欲表示者係兩組不同之事實，單式直條圖卽不能適用，最好用兩個單圓圖表示。此兩個單圓圖，其大小務須一致，然後始便於比較。

用分段直條圖表示兩組事實之比較，比用單圓圖去表示更佳。因爲我們祇須一看各分段之長短，卽可以比較其大概情形。

表示連續一系的事實之比較，用單圓圖及分段直條圖，又不若用次數面積好。其法卽將一個次數面積置於他一個次數面積之上，如圖 22。若所欲比較者祇有兩系事實，則兩個次數面積可以放在同一底線上。若所欲比較者不止兩系事實須作兩個以上之次數面積，則此類次數面積，須一串直排下來不可共用一底線，以免混目。

曲線圖形，是所有圖形中最有用之一種圖形。大多數人們，都能慣用，又最便於閱看。所有之各種事實，幾乎都可以用曲線圖形表顯。其應用之廣，概可想見。

表示兩系同樣事實之比較，特別以曲線圖形爲最適宜。譬如我們用曲線表示某學校各年級所作某種測驗分數之中點數，又可於同一圖形中作一曲線或數曲線表示其他各學校各年級所作同樣測驗分數之中點數。若如斯表顯，比較卽十分便利。

曲線圖形，又可用以比較連續一系之事實。複疊次數面積所表示之事實，常常可以用曲線代替。例如圖 22 所示之次數面積，係由連續一系之長方形積合而成。此種圖形稱爲『直方圖』，如圖 13。是尙有一種次數面

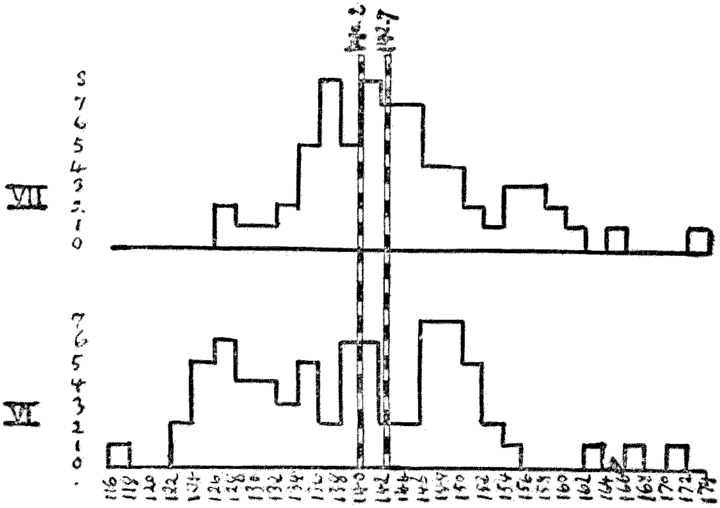


圖 22 某學校六年級及七年級學生教育年齡之複疊情形

積，係由一種連續曲線做成。此種圖形，稱為『次數多邊形』如圖 12 是。由直方圖變成次數多邊形時，將每個

長方形突出之各角抹去即是。

用曲線表示兩系事實之關係，亦甚適宜。譬如年級升進之曲線，表示年級與測驗分數間之關係。年齡升進之曲線，表示年齡與測驗分數間之關係。

此外若比較各地入校肄業人數與夫畢業出校分布各地人數之多寡，則宜用分布圖。如所比較之事實，不大複雜，而表顯之主要目的，又在使一般人都能明瞭，含有通俗之作用，則又宜用形像圖。是在學者善自選擇應用之可也。

IV 製造圖形之標準

近代文化進步，有科學的，專門的，統計的，性質之圖表，日益增多，時常與一般人之目光接觸，而促其注意。用圖示法表示事項，時間最爲經濟，且容易使人明瞭；而其所表示之事實，又富有科學的，專門的，統計的性質，遠非他種方法所能及。以如斯之良好方法，若有一簡單而且便利之標準，使一般人均能明曉，則其運用當更普遍。複雜的事項，可以迅速的精確的解釋傳播，利益人羣，洵非淺鮮。

關於規定圖形之標準，美國已經開始運動。其手續係聯合使用圖形之各種機關會社，各派出代表一人，組織一圖示標準委員會 (Joint Committee on Standards for Graphic Presentation)，共同規定標準。茲將其所擬定之草案，摘譯如下：

1. 圖形之通常排列方法，須由左至右，例如圖 9。

2. 非至不得已時，表示數量，須用直條圖，如圖5是；不宜用平面形或立體形表示，以免誤解。

3. 凡用曲線表示，非至不得已時，圖形上必須含有零度線以爲起點，例如圖9底端之零度線是。

4. 倘若用爲起點之零度線，在曲線圖形上，不能方便表示出來時（如圖形過大，不便全體載入），可以將原圖含有零度線之最低一部分添在下面，用破格式表示其中之一部分，係已省略，例如圖23。

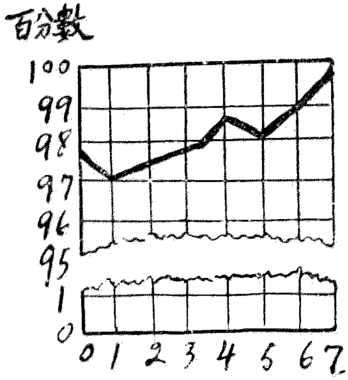


圖 23　指示破格式之圖形

5. 用爲起點之零度線，須比圖形中各格線稍粗，使有顯明之區別，例如圖24之(甲)，(乙)，(丙)。

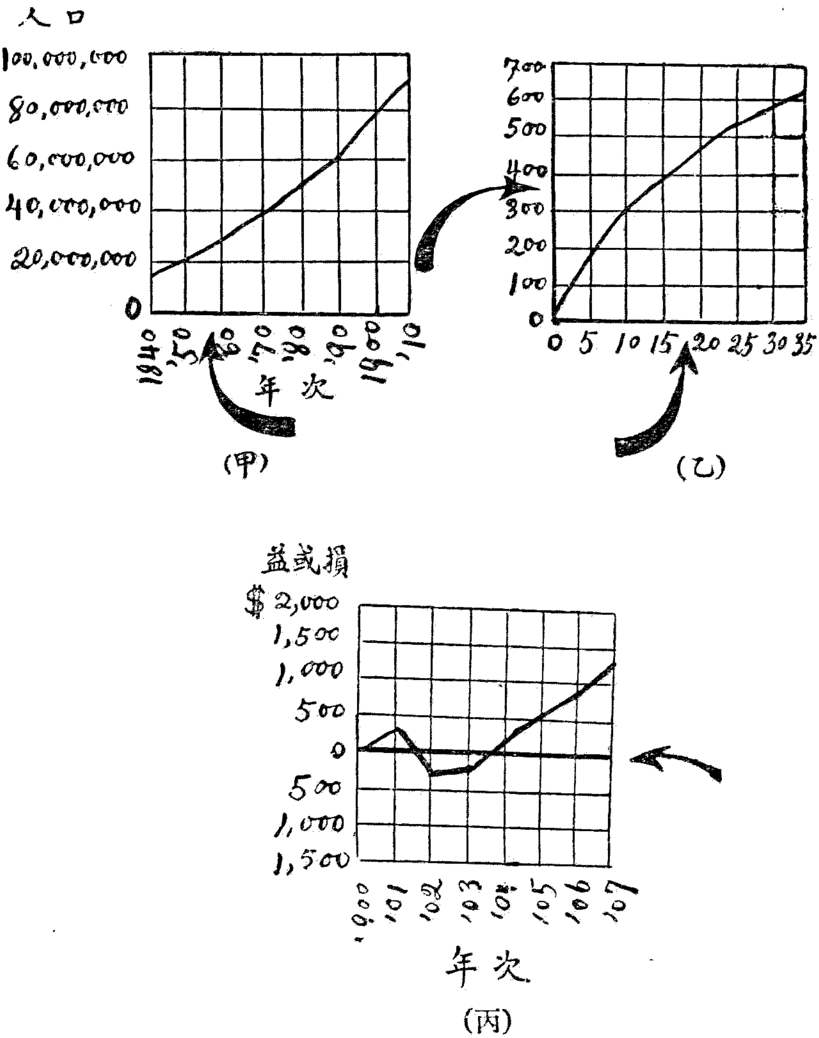


圖 24 指示零度線之圖形

6. 有種曲線係用百分法表示，代表百分的那條線，須比圖形中各格線稍粗，使有顯明之區別，例如圖 25 之(甲)，(乙)，(丙)是，

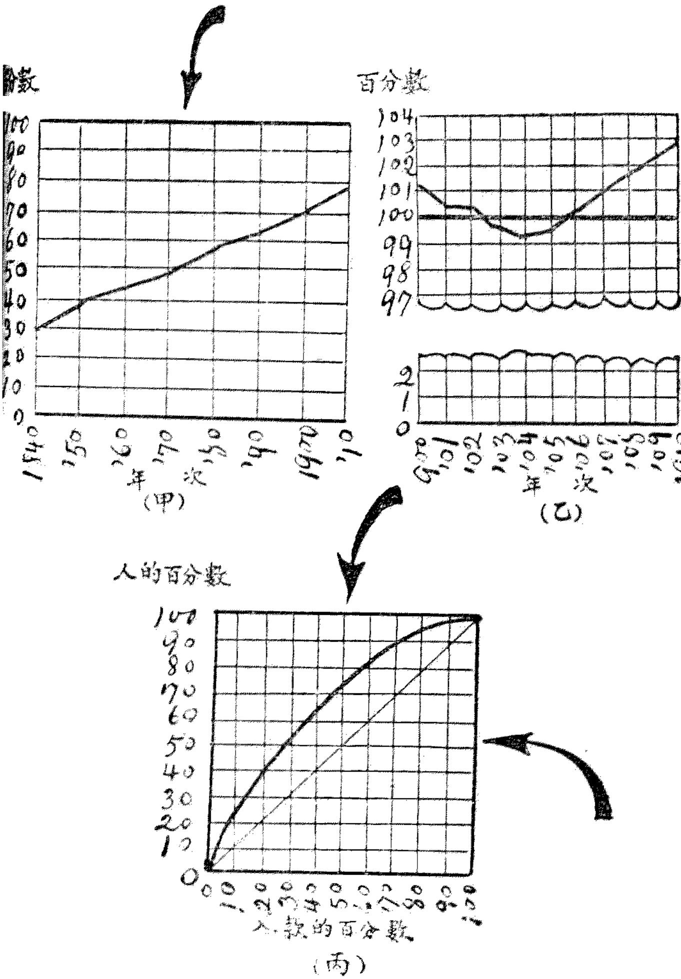


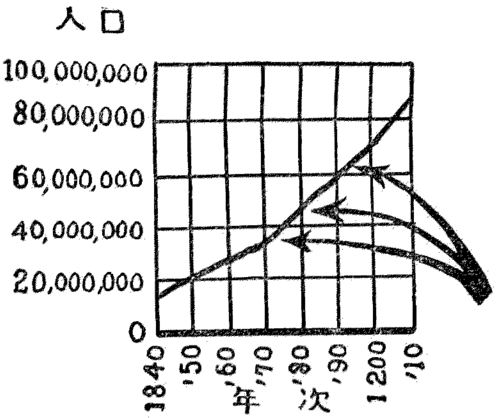
圖 25 指示代表百分線之圖形

7. 凡關於年限之圖形，其所表示之年限，若非一個完全時期時，首線及末線，不必特別區別，因為此種圖形，並非表示一個時期之開始或終結，例如圖 10 最左端表示民國元年之線，與最右端表示民國十年之線，不特別區別是。

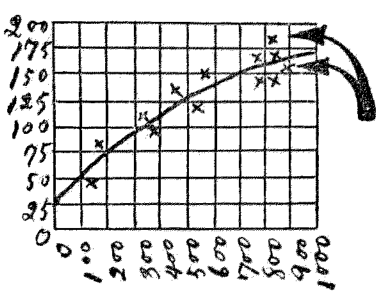
8. 用對數的格紙作曲線圖時，圖形之限制線，須在對數的量表十乘冪上，例如圖 11 (乙)之頂線與底線是。

9. 圖形中之縱橫格線，不宜過多，以能幫助閱者便於認識圖形上之數目及了解其意義已足。

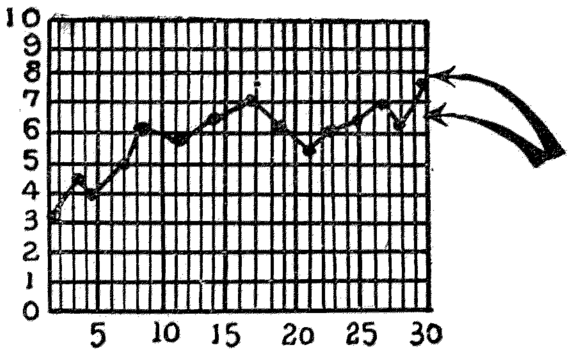
10. 圖形上之曲線，應比圖中之格線稍粗方能特別表顯出來，例如圖 9 之曲線是。



(甲)



(乙)



(丙)

圖 26　指示曲線圖中將連續一系研究結果指明出來之圖形

11. 有時圖形中之曲線，表示連續一系所研究之結果，如爲事實所可許，最好將各次研究結果均指明出來，例如圖 26 之(甲)，(乙)，(丙)。

12. 圖形中所記之量表，橫者須從左至右讀之，豎者須從下至上讀之，例如圖 9。

13. 圖形上之數目字，須寫在圖形之左邊及底下，或沿圖形之中軸線寫下；前者例如圖 26，後者例如圖 27。

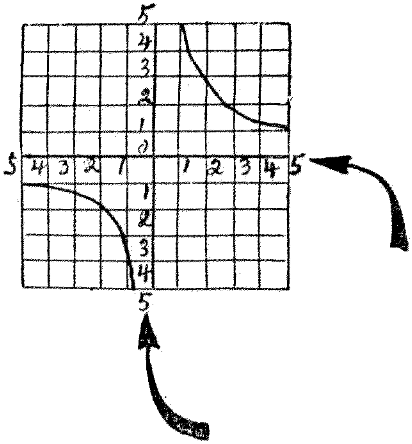
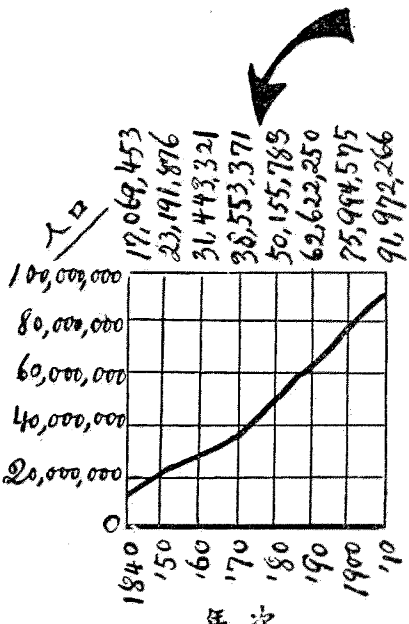


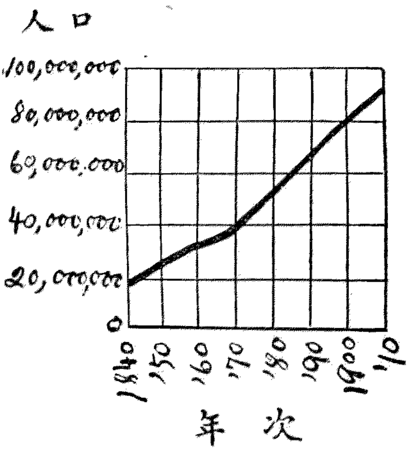
圖 27　指示沿圖之中軸填寫數目字之圖形

14. 有時圖形上所表示之實數或所根據之公式，均可記入圖形中，例如圖 28 之（甲）（乙）。



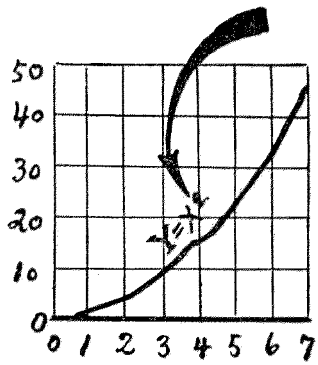
(甲)

15. 若詳細實數，圖形上不便記入，可以另列一表，附在圖形旁邊。



年次	人口
1840	17,069,453
1850	23,191,876
1860	31,443,321
1870	38,558,371
1880	50,155,783
1890	62,622,250
1900	75,994,575
1910	91,972,266

圖 29　指示詳細實數表可附於圖形旁邊

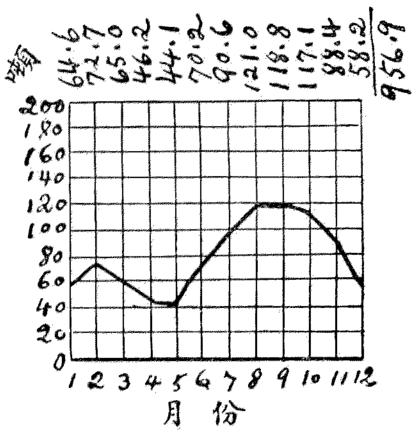


(乙)

圖28　指示實數公式可記入圖中之圖形

16. 圖形上所有之數目及文字，均宜使其能由圖之正面或右側面讀之。例如圖 29 左邊及底下所排數字之方向是。

17. 圖形之名稱，宜極求清楚完備；遇必要時，詳細名稱及說明等，當一併加入，使閱者容易明白。例如圖 30。



1914 年每月出鉛之總數。此總數實係用折損噸數計算，零賣碎鉛，並不在內。

圖30 指示圖之詳細名稱及說明可以加入

以上所舉之十七條標準，係美國圖示標準委員會之所擬定。不過關於圖示法之原則，尚有數條，為該委員會所未曾提出者，特補充之如次。

18. 若有多項事實，在圖形上表顯以作比較時，其中最重要之一種，須用方法將其特別表顯，引人注意。其方法有四種：

(1) 對於重要之事項，用紅字或粗畫字表示之。譬如在圖5中，設若『中等學校校長』一項特別重要，須使人注意，則『中等學校校長』與『53』務必印紅字。倘若欲將所辦學校與其他各學校比較時，表示本學校之直條旁項目，須用紅字或粗畫字。如欲將各學校與擬定之某標準比較，則表示標準之項目，須用紅顏色。

(2) 對於重要之事項，用實地直條表示，次要之事項，用空地直條表示。

(3) 對於重要之事項，用粗的直條或粗的曲線表示，次要之事項，用細的直條或細的曲線表示。

(4) 用有顏色之直條或曲線表示重要之事項。如事項中有合式不合式之別，須用數種顏色表示出來時，則不合式之事項，通常用紅色表示。合式之事項，通常用綠色表示。

19 普通惹人注意之標記或式樣，亦可採用，但不能作為圖形本體之一部分。譬如圖形所欲說明之事物為地方學款之歲入，圖形旁邊，可加一$記號。

20. 用直條圖時，不要容數目或文字淆亂直條本體之長短，亦不要阻礙各直條互相比較之便利。直條若是橫列，所有之數目字，當寫在左邊；若是豎列，所有之數目字，當寫在頂上。

21. 若量表（尤其是時間量表）之各級，不是蟬聯，而有間斷，對於相隔之處，當用比尋常更寬之空格表示。譬如有五道橫列直條，最上一道表示第一年級測驗分數，最下一道表示第六年級測驗分數，其中有第五年級未曾測驗，並無分數。我們繪圖時，在第四年級與第六年級之間，要留一較寬之空地，以表示第五年級未曾測驗而

無分數，使閱者一見即知。

22. 倘若要用兩個以上之直條或曲線比較時，其零點務須相合方可。

23. 若要表示增減量之實數，即不當用百分數之曲線；若要表示增減量之百分數，即不當用實數之曲線。如須於對數的量表上做一曲線表示實數及百分數，最好用兩個圖形，一個表示實數，一個表示百分數。

24. 圖形之種類不同，採用時須與所表示之事實適合。至於何種情形當用何種圖形，前節業已敘述明白。

V 製造圖形之準備

製造圖形所需之材料，有以下各種：即方格紙，圖畫板，丁字尺，十進尺，雲形規，縮形鏡，彩色鉛筆，各種不浸之顏色，粘有漿糊之各種印成的符號。

圖形本體之材料，或布或紙，祇應用之目的而定。如為講演用，則可用布；為保存用，則可用紙。

除以上所提出之條件外，製造圖形時，尚有幾種條件須要遵守，茲述之如下：

1. 圖形須十分清潔，其中所有之符號，務求清楚明白。
2. 符號之式樣大小粗細，必須一律；如不能寫，可用粘有漿糊之印成的符號貼上。
3. 若所製之圖形係準備去付印，最好比要印出之圖形稍為放大。
4. 付印之稿子，要是比出版之式樣加倍放大，則圖形之各部分，均須加倍放大。
5. 顏色要非常之黑，拍照出來方明晰不致糢糊。

6. 黑，紅，綠，藍四種顏色所畫之圖形，用玻璃版拍照出來時，均變成黑色。原來之黑色最黑，紅色次之，綠色藍色又次之。

7. 凡足以引起視覺上錯覺之各種情形，皆宜設法避去，以免閱者發生錯誤觀念。

VI 練習問題

1. 圖示法何以爲教育統計上表顯事實之良好工具？
2. 圖之號數及名稱，應置於圖形之何部？
3. 圓形圖及方形圖之缺點爲何？
4. 直條圖與曲線圖均爲圖示法中良好之圖形，但此兩種圖形，究以何者應用最廣？
5. 在何種情形之下，宜用形像圖？
6. 組織圖與分布圖應用之範圍孰廣？何時宜用何者？
7. 表示一個事物中之各部分時，對於單圓圖與分段直條圖，以採用何者爲佳？爲何？
8. 表示簡單的事實之比較，應採用何種圖形？
9. 表示兩組不同的事實之比較，應採用何種圖形？
10. 表示連續一系的事實之比較應採用何種圖形？

VII 參考書報

1. 薛鴻志，教育統計學大綱（再版），第四章。
2. 曾鯤化：統計學教科書，第四編第二章。
3. 周調陽：應用於教育測量上之圖格法，教育叢刊第四卷第七集。
4. 陳鶴琴：圖表式的統計報告法，新教育第八卷第一期。
5. Brinton, W.C.: Graphic Methods for Presenting Facts.
6. Haskell, A.C.: How to make and use Graphic Charts.
7. Secrist, H.: An Introduction to Statistical Methods, Chapters VI, VII.
8. Secrist, H.: Reading and Problems in Statistical Methods, Chapter VI.

第五章　全體量數 (Measures of mass)

全體量數，即將事實之全部用統計方法表示出來，使人一見即知全體之大概情形。將教育事實轉化為全體量數，為教育統計學上之第一步手續。此步手續，無論以後計算時是否需要，總不宜省略。全體量數計有四種，即

1. 次數分配 (Frequency distribution)
2. 順序分配 (Order distribution)
3. 等級分配 (Rank distribution)
4. 次數面積 (Frequency surface)

用統計法研究時應如何進行，進行後應如何解釋計算之結果，全賴上述之四種方法，而尤以第一第四兩種爲重要。茲依次說明如下。

I 次數分配

我們搜集教育事實之後，若不用分類方法，將各種事實分別彙集起來，則對於此種事實，一定看不清楚。不能解釋。次數分配表，即係一種分類法，在統計學上，此爲初步。

製造次數分配表，有四個步驟：（一）注意全距 (range) 之長短，即檢查最小量數與最大量數中間之距離。（二）決定每組組距 (class interval) 之大小，即分全距爲若干組，每組含有若干單位。（三）決定每組組距之界限，即劃定特殊的組限。（四）排列各量數在各組距中發見之次數。明瞭此四種步驟，即可將散漫之材料，組織成爲系統，使之秩然有序，以作各種計算之基礎。茲將製造次數分配之各步驟，依次詳細說明如下：

1. 全距　此步手續，即從各量數中尋出最小量數與最大量數，再由最大量數中減去最小量數，所得之數，即爲全距。以實例說明之，表 13 所列之事實，爲一百二十三名學生之英文分數。我們依次檢查各行分數，最小者爲 20，最大者爲 95，由 95 減去 20 得 75，是爲中間相差之數，是卽全距。求得全距之後，即當進而決定組距之大小。

2. 組距　組距亦稱級距 (step interval)。組距大小之決定，則視乎全距之情形如何以爲判。全距如甚小，祇有 10 單位，15 單位，或 20 單位，則將單位歸併分之爲少數組別，實無益處；不如使每個單位代表一組，反直

表 13 123 名中學學生之英文分數

80	57	45	74	95	80	73	87	59	80	57	52
75	75	63	75	84	50	77	76	63	90	79	80
58	71	60	85	76	76	72	73	56	75	84	80
87	85	69	85	40	66	78	79	73	86	88	75
80	79	80	60	87	80	78	82	52	75	67	80
77	80	66	74	73	79	60	66	57	74	76	70
55	87	87	72	73	68	87	81	60	75	35	73
75	67	78	86	73	79	40	82	55	65	80	86
79	65	73	56	71	73	80	67	78	62	79	79
81	77	82	78	93	78	70	72	79	45	81	75
20	80	30									

截了當。例如有某測驗分數祇有十二單位，即將其列作十二組別是。然如表 13 所舉之事實，全距所包含之單位有 75，若用其原來之單位；則所得之次數分配，一定是非常稀薄；解釋及後來計算，均感困難。原來之單位過於繁多，既不能適用，勢非採用組距以求簡捷不可。惟有必須注意者，若專從計算便利方面立言，自然組距愈大，計算亦愈簡單；若兼向精確程度方面設想，則組距愈大，精確之度亦愈減少，此不可不知。據拉格 (Rugg) 之主張，組距不可過大，亦不可過小，其標準以能使次數分配之組數在 10 至 20 之間爲宜。蓋組數少於 10，則易

失精確；多於 20，則計算又太繁瑣。例如表 13 之事實，可將全距 75 分之為 15 組，組距每一組距包含 5 單位，是為最好之分法。

關於次數分配之採用分組辦法，有一根本假定：即假定任何組中所有之價值，均集中於其組距之中點，而可以此中點之價值（簡稱中值 mid-value）作代表。例如表 14，係以 5 為組距而分之為 20·0—24·99；25·0—29·99 等 15 組。在 45·0—49·99 組距之間所含之二量數，其平均價值與該組中值 47·5 相差無幾；50·0—54·99 組距之間，所含之三量數，其平均價值，與該組距中值 52·5 相差更微。此種假定若是分配非常集中，則愈與事實相符；若是分配非常四散，即不大可靠；所以我們當分組時，要特別留心。

關於組距之求法，總括言之，有下列四個步驟：

(1)求全距（即於原來事實中尋出最大之數與最小之數而求其差數）。

(2)用一適宜之數去除全距（即求得之差數），除得之商數須在 10 至 20 之間。

(3)將此除數作為組距。

(4)組距之大小，應各組一律，不可或大或小。

3. 組限　組限（Class limits）亦稱級限（Step limits）。所謂組限者，即組距之界限。組限有上限下限之區別，譬如 20·0—24·99 為一組，20·0 為下限，24·99 為上限。組距之界限，務必如此詳細書出。所謂 24·99 之意義，即小數之後有無限個 9（24·9999……），若再於小數下無限個零之後加 1 時，即為 25。蓋如是，則

前組最後之量數與後組最前之量數，截然分開，而無混淆不清之弊。

決定組距之界限，可依下列兩種標準：(一)須使事實之表列更容易且更精確。據多數統計學者之經驗，覺得欲合此種標準，必須使組距之起訖，爲十數的系統 (Tens system)，如表 14 中之組距 50•0—54•99；55•0—59•99； 60•0—64•99 之類是。(二)須使此次數分配便於後來之計算。例如由次數分配求平均數時，其算法須將各組距之中值與各次數相乘，中值如爲小數，則計算比較麻煩，不若使之爲整數之更便利迅速，如表 15 中之中值 55，60，65，70，之類是。

上面已將決定組限所應依據之標準簡單說明，現在且待我將組限表示法寫出。表示組限之普通方法，計有四種，舉例說明如下：

下所舉之例，下限爲 6•0，組距爲 1。

I. 中點法

分數	次數
6•5	1
7•5	3
....	....

II. 下限法

分數	次數
6•	1
7•	3
....	....

III．雙限簡法

分數	次數
6—7	1
7—8	3
....	....

IV．雙限詳法

分數	次數
6.0–6.99	1
7.0–7.99	3
....	....

下所舉之例，下限爲 5.5，組距爲 2。

I．中點法

分數	次數
6.5	1
8.5	3
....	....

II．下限法

分數	次數
5.5	1
7.5	3
....	....

III. 雙限簡法

分數	次數
5•5—7•5	1
7•5—9•5	3
………………	………

IV. 雙限詳法

分數	次數
5•5—7•499	1
7•5—9•499	3
…………………	………

上所舉之四種方法，以用第四法甚少發見錯誤，故最宜於初學。第二法最簡便，但須牢記上限，不然，即容易算錯。第三法甚通用，不過 6—7，並不是眞正到了 7，是從 6 至 6•999999999，若是滿了 7，即應歸入第二組。其所以列作 6—7 者，純爲便利計耳。

若所計算之分數係教育測驗分數，我們首先即須考查其係何種測驗分數，然後方知此分數所含之意義。教育測驗有兩種：一種稱爲『作業測驗』(Performance test)，如算術測驗之類；一種稱爲『作品測驗』(Product Scale)，如習字測驗之類。此兩種測驗分數之意義，各不相同。譬如有些測驗分數 6,7,8,9，等等，若是由『作業測驗』中得來，6 一定是表示 6•0—6•99，或簡作 6—7；7 一定是表示 7•0—7•99，或簡作 7—8。其餘類推。倘若那些分數是從『作品測驗』中得來，則 6 一定是表示 5•5—6•5，不是表示 6•0—6•99 或 6—7；7 一定是表示 6•5—7•5，不是表 7•0—7•99 或 7—8。由此我們可以知道同一分數，因測驗之性

質不同，其組限亦因之而大異。初學教育統計者，務必留意及之。

4. 排列　全距，組距，組限各步手續，既已查出決定，則從事於最後之一步，即排列每組中量數之次數。例如表

表 14　123 名中學學生英文分數之次數分配　組距為 5

組　距	中　值	排　列	次　數
20.0—24.99	22.5	|	1
25.0—29.99	27.5		
30.0—34.99	32.5	|	1
35.0—39.99	37.5	|	1
40.0—44.99	42.5	||	2
45.0—49.99	47.5	||	2
50.0—54.99	52.5	|||	3
55.0—59.99	57.5	卌 ||||	9
60.0—64.99	62.5	卌 ||	7
65.0—69.99	67.5	卌 卌	10
70.0—74.99	72.5	卌 卌 卌 ||||	19
75.0—79.99	77.5	卌 卌 卌 卌 卌 卌 |	31
80.0—84.99	82.5	卌 卌 卌 卌 |	21
85.0—89.99	87.5	卌 卌 |||	13
90.0—94.99	92.5	||	2
95.0—100	97.5	|	1
總　數			123

表 15　123 名中學學生英文分數之次數分配　組距為 5

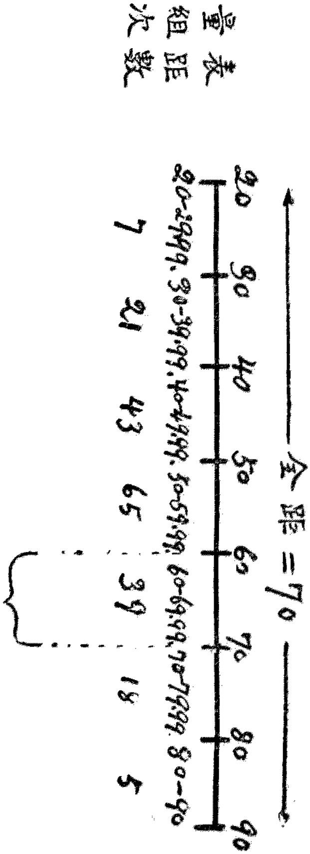
組距	中值	排列	次數
17•5—22•49	20	|	1
22•5—27•49	25		
27•5—32•49	30	|	1
32•5—37•49	35	|	1
37•5—42•49	40	||	2
42•5—47•49	45	||	2
47•5—52•49	50	|||	3
52•5—57•49	55	卌|	6
57•5—62•49	60	卌|||	8
62•5—67•49	65	卌卌	10
67•5—72•49	70	卌||||	9
72•5—77•49	75	卌卌卌卌卌|||	28
77•5—82•49	80	卌卌卌卌卌卌||||	34
82•5—87•49	85	卌卌||||	14
87•5—92•49	90	||	2
92•5—97•49	95	||	2
總數			123

14，係用表 13 之事實，以 5 爲組距，列成之次數分配表，我們可藉此以說明排列時之手續。初於左方列組距一欄，將各組量數列於其下；並將各組之起訖記明，由小而大，自上而下（或自下而上亦可），以至依次列完爲

止。次將各組距之中值（卽中點之價值）列作一欄，置於組距欄之右；各組之中值須正對各該組排列。（此欄之設置，爲將來求平均數或差異數時計算便利起見，不然，儘可省略不要。）再次列排列一欄，循表 13 之分數，依次檢查。每遇一分數，卽在其相當組別之右方排列欄之下畫一短豎線。如一組中已畫有四短豎線之後，若再須畫線時，則在已畫之四短豎線上，畫一短橫線，使每五線爲一組，以便總計。依此法做去，以至將各分數列完爲止。最末列次數一欄於排列欄之右，將所畫之各線核算，以數字表出之，卽成爲次數分配表。

表 14 之中值爲小數，如用以求平均數或差異數等，則不大便利，不若用表 15 之中值之更爲方便，以其係整數也。故決定組距之界限時，苟計算上需用中值，最好先定中值爲整數，然後以中值爲標準，列出各組之下限上限，卽各組之起點及訖點。例如表 15 中之中值爲 20，組距爲 5 時則該組之下限爲 17•5，上限爲22•49，其組距之列法爲 17•5—22•49 是也。

5. 用圖形表示量表，單位，組距等　全距，組距，組限，單位等爲類集事實所常應用之根本概念；我們對於此種根本概念，務必十分了解，然後始能免除錯誤。表 14 及表 15 所用以表明量表單位等，全係數字。數字之意義，最易使人模糊莫辨，不若用圖形表示之更爲明晰。兹爲使閱者對於量表單位等各種根本概念有明確之觀念起見，特用圖形表示，庶幾藉圖形之力，幫助數字思想，因而容易得到統計各步之理由。圖 31 及圖 32 所表示之事實爲 198 名學生之習字分數，全距爲 70，卽由最小分數 20 至最大分數 90 組距爲 10 單位。於是畫一直線代表全距，復將此直線分爲 7 等分，每一等分代表一組距，組距之價值用數字註明之。



組距可以當做一個單位,或十個真的單位.

圖 31 指示量表,單位,組距,及次數分配之用法

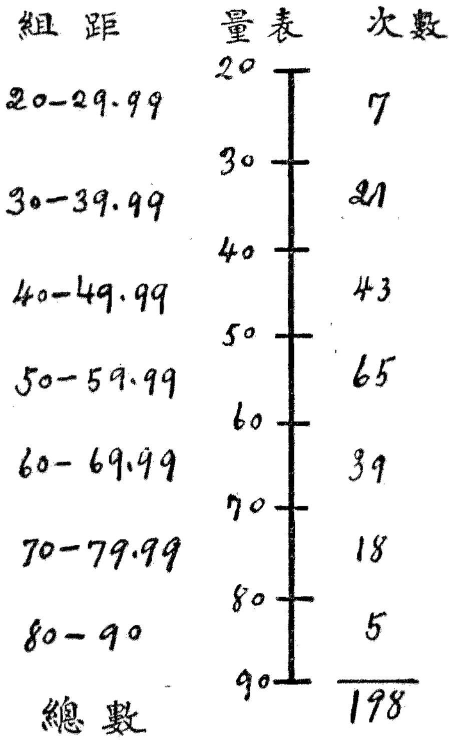


圖 32 指示量表,單位,組距,及次數分配之用法

6. 量數之性質　關於次數分配，除以上所說之種種外，對於量數之性質，亦應特別注意。量數之性質有兩種：一為連續量數 (Continuous series)，一為不連續量數 (discontinuous series)。連續量數佔量表中兩點間之距離，且可細分至無盡數。如測量兒童身長，體重，智力之類，其量數皆為連續的。如言某兒童身長 50 寸，此不過言其最相近之高度而已，實則此 50 寸之高度，不一定恰在 50 寸之一點，或在 49.5 與 50.5 距離之中間；再精密分之，或在 49.49 與 50.49 距離之中間。

不連續量數佔量表中之一點，乃計畫數之單位為自然獨立者，不可再行細分。如統計各班學生數，某班學生35人，某班學生 36 人等等，35 及 36 二量數中間，有自然之罅隙，不能再行細分。若對於不連續之整數，在分類統計時，而強為之分作小數，則不合於事實。

II 順序分配

製造順序分配之手續，甚為簡單，卽依所表列之事實，由最小之量數起（或由最大之量數起亦可），按各個量數數值之大小，一一單列，以至列完為止，卽成順序分配。例如有測驗分數 4,5,7,6,3,7,8,4,7,8 等等，若將其取來化為順序分配時，則變為 3,4,4,5,6,7,7,7,8,8 等等（參看表 16）。此種排列，比未排列前當然要清楚得多，在量數較少之時，用之未嘗不可。若在量數較多之時，如表 13 所列之事實，其量數總數共有 123，如將各個量數按次一一排列，則表式必至冗長，不宜於用。

III 等級分配

欲製造等級分配，須先製成順序分配以為底本，然後按照此底本以定其所處之等級為第一，第二，第三等等。例如有測驗分數 4,5,7,6,3,7,8,4,7,8 等，我們欲將它化作等級分配時，必須先將它化為順序分配，例如表 16。

（續）

表 16 指示等級分配之製法

順序分配	等級分配
8	1.5
8	1.5
7	4
7	4
7	4
6	6
5	7
4	8.5
4	8.5
3	10

表中左邊之順序分配，係由最大之量數起，依次排列而成。查順序分配欄中，最大之分數為 8，但 8 有兩個，我們製造等級分配時，既不能將兩個 8 都列在第一，又不能將兩個 8 都列在第二；又不能任列一個 8 為第一另一個 8 為第二；於是用最公允之辦法，將兩個 8 所應居之等級第一第二相加，以 2 除之，除得之商數，即為其

所居之等級 $(1+2)\div 2=1.5$，故 1.5 即爲兩個 8 所居之等級。同樣三個 7 所應居之等級爲第三，第四，第五，以之相加用 3 除之即 $(3+4+5)\div 3=4$，故 4 即爲三個 7 所居之等級。6 祇有一個，故即居第六，5 亦祇有一個，故即居第七。4 有兩個，應居第八，第九，$(8+9)\div 2=8.5$，故 8.5 即爲其所居之等級。3 祇有一個，故即居第十。

等級分配僅記各量數所居之等級爲第一，第二第三等等，而忽略各量數之數值大小；若僅列一等級分配，閱者實無法可以了解各等級之數值究爲若干。非若順序分配之既將各量數按照大小之次序排列，又將各量數之實際的數值列出。故等級分配若非計算時有所需用，如用等級法求相關之類，則可以不要。

IV 次數面積

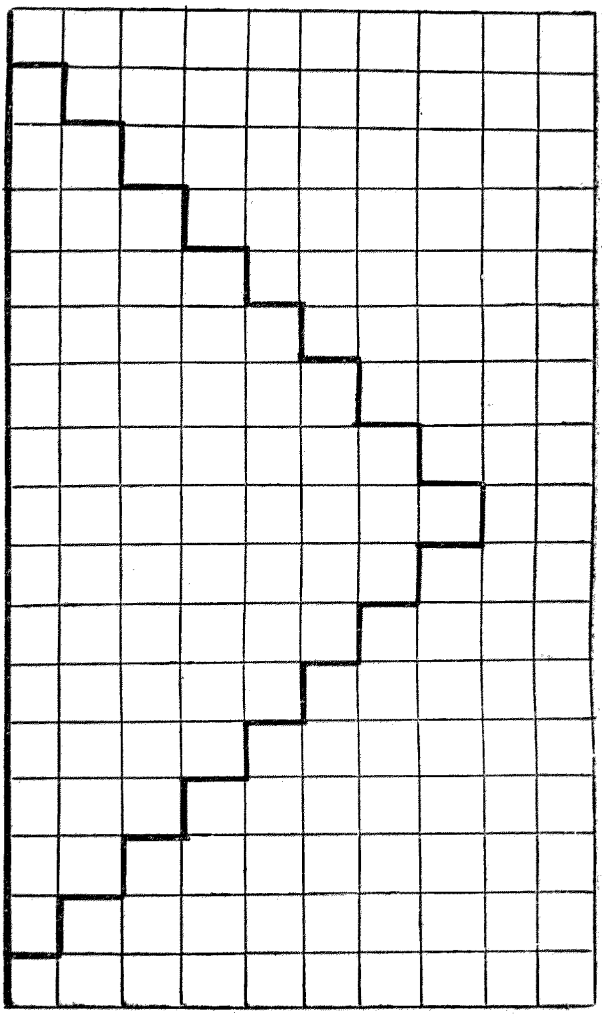
1. 常態次數面積(Normal frequency surface) 假如我們測量學生之後，得着表 17 之許多分數，看時甚不明白，幾乎不能解釋。若將其化作次數面積，如圖 33 之所示，即一目了然，十分清楚。

表17　64名學生默字測驗之分數

（係特別選擇者）

15	17	14	19	14
11	16	11	15	11
11	9	15	10	19
13	17	18	7	12
9	10	16	16	13
12	14	12	11	7
8	18	17	17	14
10	12	12	14	9
13	15	16	16	14
13	18	13	13	13
10	10	11	20	12
15	13	8	8	6
14	15	12	9	

（續）



分數	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
次數	1	2	3	4	5	6	7	8	7	6	5	4	3	2	1

圖 33 近似常態次數面積（係根據表 17 之事實所製）

製造此種圖形，手續非常簡單，閱者一看即能明瞭。次數一項，通常並不列出，惟於圖之左端，沿着最左之直線，

立一量表，以指示各分數之次數而已。此圖將次數置於分數之下，即成一橫列之次數分配表。圖表並用，更能給讀者以若干幫助，使其容易獲得明確之觀念。

(a) 次數面積之製法　在全距甚長，次數過多，且須分組類集之事實，欲製次數面積圖時，以先將事實化為次數分配表，然後再依次數分配表製造次數面積圖，較為便利。若事實之全距不長，次數亦不多，即可就原來之事實，直接製造次數面積圖，無須先行化作次數分配表。例如製造圖 33 時，先畫一底線。次取各分數，從左至右，依次寫在底線之下，寫時須正對圖上之各垂直線。然後檢查原來表中第一個分數為 15，此 15 係表示某學生做測驗所得之眞正分數在 15.0—15.99 之間；因此即在 15 至 16 間上面之一方格中記一點。表中第二個分數為 11，即在 11 至 12 間上面之一方格中記一點。表中第三個分數又為 11，照例係加一點於 11 至 12 間上面之方格中；但此點非加在第一行方格中，須加在第二行方格中，即在適間加點之方格上面之一方格中。每一方格，係表示一人。如是逐一記去，以至記畢為止。最後即將此紙上已經加點之方格，用一線包圍起來，即成為次數面積。

(b) 次數面積之讀法　表 17 之事實紛亂不堪；將其轉化為圖 33，即秩然有序，使人一見即知全體之大概情形，此係次數面積之特點。除此以外，尚有數事可於圖中一目看出，即：

(1) 一看即知最小之分數為 6，最大之分數為 20。

(2) 一看即知有一個 6，兩個 7，三個 8，四個 9 等等。

(3)一看卽知此測驗難易得中，無過難過易之弊。因爲倘若是太難，得低分數之人一定極多，低分數多，次數面積之左端定然是高；倘若太易，得高分數之人一定極多，高分數多，次數面積之右端定然是高。但此次數面積左右兩端均不高，並且甚低，卽可知此測驗是難易得中。

(4)一看卽知從 6 至 20 各分數之變量是連續不斷的。

(5)一看卽知分數之分配是左右對稱的。

(6)一看卽知此次數面積係單衆數的 (Unimodal)，大多數人之分數，有集中於一點之趨勢。

(7)一看卽知此面積之衆數爲 13，其次數爲 8。

(8)一看卽知此次數面積與常態次數面積相似，而可以根據常態分配原理之統計方法計算。惟此並非與常態次數面積完全一致，不過近似而已。至理想的常態次數面積，係修勻之曲線 (Smoothed curve)，其形如鐘，集中趨勢 (Central tendency) 愈大，例如圖 34。

(一)何以次數面積成爲常態　常態次數面積，似係一種自然規律。無論從任何事實中，隨機取樣 (random sampling) 以行統計，均成常態次數面積。兒童之智慧，身長，體重等等，皆是如此。心理測驗及教育測驗之分數，雖難成爲完全之常態次數面積，然亦極能近似。據桑戴克說，此並不是因爲『自然』嫌忌不規則之分配，實是因爲自然界有多少定例。由實際的研究，此種定例已被人發見。大凡所測量之事物，屬於下列各條件結合之結果，常爲常態次數面積。(1)有多數原因，(2)各原因大致相彷彿，(3)各原因不相關係，各自獨立的呈現作用，卽一原

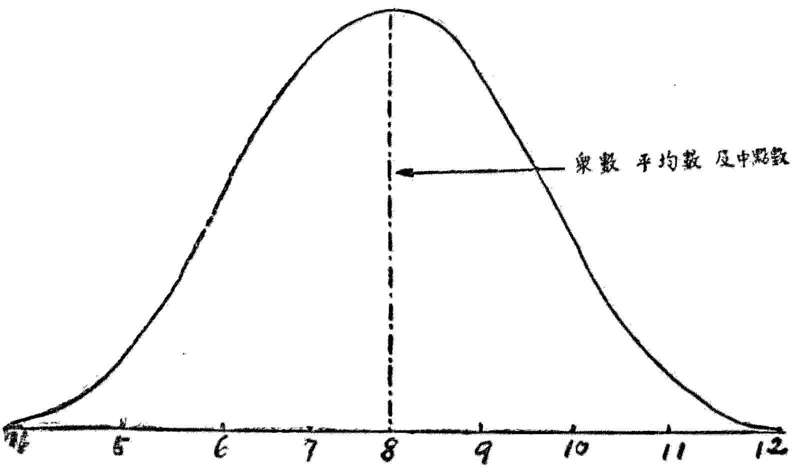
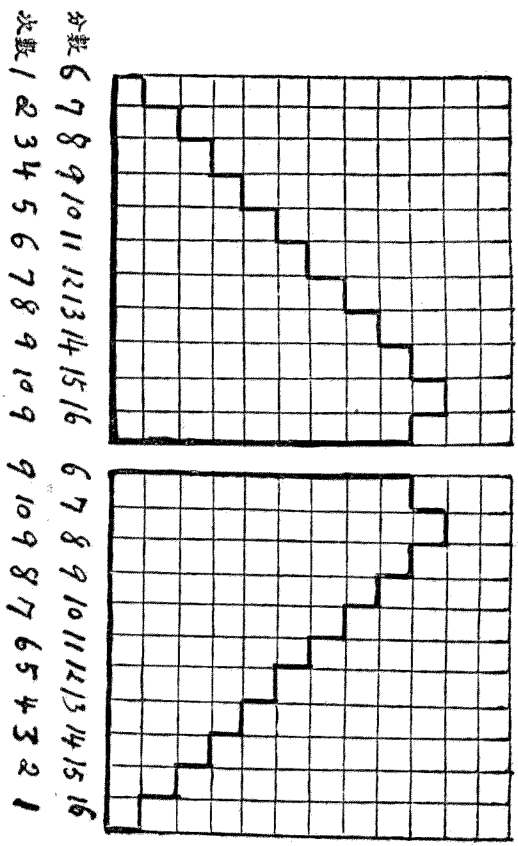


圖 34 常態次數面積（理想的）

因呈作用時，他原因不一定同時起作用。教育常有此種情形，所以大多數之教育測驗，均近似常態分配。

2. 偏態次數面積 (Skewed frequency surface)　有種反乎常態面積之圖形，稱之爲偏態次數面積。偏態次數面積有兩種：一種是負的，一種是正的。負的偏態，如圖 35 之(甲)所示；正的偏態如圖 35 之(乙)所示。



(甲)負的偏態次數面積　(乙)正的偏態次數面積

圖 35　偏態次數面積

何以次數面積成爲偏態　先就負的偏態次數面積而論。譬如給學生以默字測驗，若有下列各原因之一，卽有成爲負的偏態之可能：

(1)或者此測驗祇有十六字，而此類字又選得太容易，所以能力較高之學生，大多數可以得到 15 分或 16 分。此種情形，我們本可以希望衆數在 16 分，而不在 15 分；但能力甚高之學生，往往於無意中默錯一二字。

(2)或者此級之一半優等生已升至上一級後，然後行此測驗，以致測驗結果成爲負的偏態。實際言之，此不過常態面積之低分數一半而已。

(3)或者此係遺傳之關係，學生父母之智慧情形，卽與此種面積相符合。

(4)或者學生之天賦才能，本與常態分配相近，而其所以成爲此種形式者，係由教師見學生達到 16 分標準後，卽不再命其練習。此外倘有許多教學方法，亦足以產生此種結果。

(5)或者此種面積，非由於一原因，乃由於上述之多種原因合併而成。

上述種種，均與常態次數面積所必需之三條件相反。原因雖不過幾個，然其勢力頗大，足以使次數面積成偏態。至於成爲正的偏態次數面積之理由，閱者可以推想而知，此處可不必再述。

3. 多衆數次數面積 (Multimodal frequency Surface) 又有一種反乎常態次數面積之圖形，稱之爲多衆數次數面積。此種面積，有兩個集中趨勢或衆數，例如圖 36。

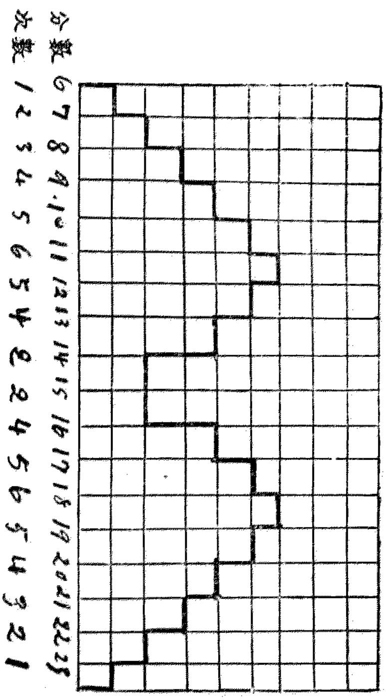


圖 36　多衆數次數面積

何以次數面積成爲多衆數　多衆數次數面積之產生，雖由多種原因；然大多數則係某種特別有勢力原因之結果。其最普通者，即將兩個不調和之團體混合統計，常成爲多衆數面積。譬如用兩個不同年級的學生之成績，歸併繪成圖形，往往發生此種現象。

V　練習問題

1. 決定組距之大小，以何爲標準？若過大或過小時，有何弊病發生？
2. 採用分組辦法之基本假定爲何？
3. 決定組距之界限，應採用何種標準？

4. 何謂連續量數與不連續量數?
5. 等級分配何以不適於應用?
6. 次數面積成爲常態之理由爲何?
7. 次數面積成爲偏態之理由爲何?
8. 次數面積成爲多衆數之理由爲何?

VI 參考書報

1. 俞子夷：測驗統計法概要，第一章。
2. 陳啟天：敎育事實的統計分類法，中華敎育界十一卷十二期。
3. Monroe, W. S.: The Theory of Educational Measurements, Chapter XII.
4. King, W. I.: The Elements of Statistical Method, Chapter XI.

第六章　集中量數 (Measures of central tendency)

前章所述之全體量數，其功用在將所有之各量數悉行表出，使人一見卽知其大概情形，惟手續繁難而結果含糊，是其缺點。若用集中量數（集中量數亦稱代表數 Types 或平均數 averages；惟此所謂平均數，係廣義的而非狹義的，包括衆數 Mode，中點數 Median，平均數 Mean 而言）。以代表全體之數，則非常簡明，足以補全體量數之不足。言其功用，約有四端：

1. 以一簡單之數代表測量之全體情形。譬如有人曾經測量一千中國人之體高，而得各種量數；我們得此種量數後，對於中國人之體高究爲若干，尚無明確之觀念；必須從各量數求出平均數或代表數，然後知一般中國人體高之情形。

2. 用代表各組測量之簡單數，以比較各組測量之差異。譬如比較中美兩國人之體高，我們必不能將每一中國人與每一美國人比較，而須將測量若干中國人所求得之平均體高與測量若干美國人所求得之平均體高比較，然後知中美兩國人體高相差之情形。

3. 由測量一部分事項所得結果求出之數，足以代表全部事項。譬如欲知中國人之體高，我們無須將四萬萬中國人全數測量以求其體高之平均數，祇須測量其中之一部分（一千人或一萬人）去求平均數斯可矣。蓋此種平均數，與由測量全體所求得之平均數，相差甚微，無足介意。

4. 對於各組測量間之關係，予以數學上之概念。譬如比較中美兩國人之體高，其結果美國人比中國人高，由此我們可以求出高度之比例；而求此種比例時，必須以平均數爲之基。

集中量數之功用，已略述如上；請再論種類。通常所用之集中量數爲：

1. 衆數 (Mode)，

2. 平均數 (Mean)，

3. 中點數 (Median)，

此外尚有兩種，可附在此處敘述，即

4. 下二十五分點 (Lower quartile point)，

5. 上二十五分點 (Upper quartile point)。

茲依次分述如下：

I 衆數

1. 何謂衆數　衆數即量表中次數最密集之處之量數，或次數面積上最大縱線 (maximum ordinate) 所在之處之數，爲一種常用之代表數。我們通常所謂某省人民富裕，某省人民困窮，蓋以衆數代表事物之全部。惟欲衆數確有代表全部價值時，須測量之事項數目，不可過少；且此類事項，須從隨機取樣得來，未曾加以選擇者，而後所得衆數，始有代表全部之價值。

2. 如何去求衆數　衆數有兩種：一種比較粗疏，稱之爲視察衆數 (Inspection mode) 亦稱粗略衆數 (Crude mode)；一種甚爲精確，稱之爲理論衆數 (Theoretical mode) 亦稱眞確衆數 (True mode)。求視察衆數，十分容易，一見便知；求理論衆數，須應用高深數理，頗不易求。茲分別述之如下：

(a) 視察衆數　求視察衆數，祇須一觀次數分配表或次數面積圖，即可察知該測量之衆數爲何。例如表 18，爲 137 名學生算對代數題數之次數分配，其中惟算對 8 題者有 35 人，餘皆無如許人數，分配表中次數最密集之處在量數 8 之一組中，故 8 即爲此測量中之衆數。

又如圖 37 爲一次數面積圖，係就表 18 之事實製成。我們無論從次數多邊圖或修勻之次數曲線圖去看，卽知其最高峯在量數 8 之垂直線上，圖中之縱線，以此爲最大，故 8 卽爲此測量中之衆數。

表 18　137 名學生算對代數題數之次數分配

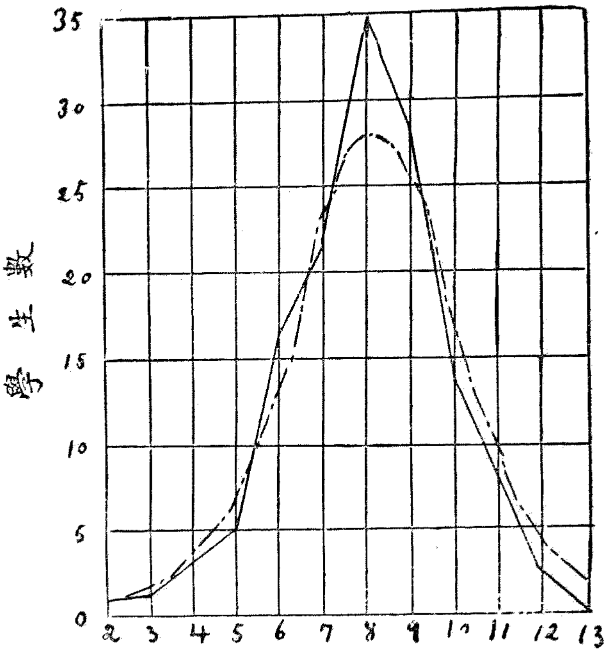
算對題數（量數）	學生數（次數）
2	1
3	1
4	3
5	5
6	16
7	21
8	35
9	29
10	14
11	8
12	3
13	1
總計	137

由此可知視察衆數，按表或圖可以察出，無須另行計算。惟次數面積須爲常態，左右兩端互相對稱，然後視察衆數，方有作代表數之價値。蓋因此種次數面積，衆數，平均數，中點數三者，皆相重於一點（參看圖 34）。若係偏態次數面積，則此種衆數，可靠之度甚微。且此種衆數，常隨組距之大小及量數增加之情形而變更其價値不及理論衆數之精確。

(b) 理論衆數　求理論衆數，遠不如視察衆數之易求。凡實際上之測量，不能測量大多數事件，所用之測量方

法，亦不甚精，而求理論衆數，則需要大多數事件，與精密之測量方法；因此由實際測量所得之結果，難與理論之現象相符。欲求理論衆數，必須整理不規則之次數曲線，以理論之曲線切合之，然後可求一近似之理論衆數。

精確之理論衆數，既不易求得，而粗疏之視察衆數，又多不可靠；於是由統計學家之經驗，得有兩種方法，可以求出近似衆數（Approximate mode）。



——— 實際分數之次數多邊圖

----- 修勻之次數曲線圖

圖 37 實際分數之次數多邊圖與修勻之次數曲線圖之比較（根據表 18 之事實製成）

第一種方法，係由視察衆數以求比較近似之衆數，此不過稍微糾正視察衆數之錯誤而已。通常對於視察衆數所在之位置，若次數分配，係用原來單位爲組別，且未歸類列組距時，卽以衆數所在之組之量數爲其所在之位置，例如表 18 之以 8 爲衆數是；若所用之量數係已歸類爲組距，或組距有數個單位，卽以衆數所在之組之中値爲其所在之位置，例如表 14 之以 77.5 爲衆數是。不過此種決定衆數所在之方法，手續固然十分簡單，甚稱便利，但所得結果並非適宜之位置。如次數分配表所列之事實係連續數察得衆數所在之組後，而求其適宜之位置時，最好將最多次數兩端之次數均衡以求之，所得結果，比較以衆數所在之組距中値爲衆數所在之位置者，當更正確。請以表 14 所列之事實爲例，說明此種求法。在表 14 之次數分配中，最多之次數爲 31，我們卽知衆數所在之組爲 75.0—79.99。隣近此組下一組之次數爲 19，上一組之次數爲 21。將此兩組之次數相加得 40（卽 $19+21=40$），$\frac{19}{40}$之次數有一種勢力影響於衆數之位置使在 75.0—79.99 組之下，$\frac{21}{40}$之次數亦有一種勢力影響於衆數之位置使在 75.0—79.99 組之上，而實際之衆數則在 75.0—79.99 組之中。$\frac{21}{40}$以 5 乘之（此 5 卽每組組距所含之單位）等於 2.62；$\frac{19}{40}$以 5 乘之等於 2.37，故所求之衆數爲 $75.0+2.62=77.62$；或 $79.99-2.37=77.62$。由是得公式如下：

設 l＝含有衆數組組距之下限，或 u＝含有衆數組組距之上限；

i＝組距之單位；

f_1＝隣近衆數下一組之次數；

f_2＝隣近衆數上一組之次數；

Mo＝衆數則；

$$Mo = l + \frac{f_2}{f_1+f_2} \times i \cdots\cdots (1)$$ 或

$$Mo = u - \frac{f_1}{f_1+f_2} \times i \cdots\cdots (2)$$

用表 14 之事實代入公式(1)，得

衆數 $= 75.0 + \frac{21}{19+21} \times 5 \quad = 75.0 + \frac{105}{40} = 77.62$。

或用表 14 之事實代入公式(2)，得衆數 $= 79.99 - \frac{19}{19+21} \times 5 = 79.99 - \frac{95}{40} = 77.62$。

上所舉之(1)，(2)兩公式，可任意採用其中之一，無須兩者同時並用。如次數爲不規則之分配時，可用隣近衆數所在之組每端之兩組或兩組以上之次數而均衡之，甚至將每端所有之次數加上均衡，以求衆數亦可。若用此法以求表 14 所舉事實之衆數，則爲 $75.0 + \frac{37 \times 5}{92} = 77.01$；或 $79.99 - \frac{55 \times 5}{92} = 77.01$。惟所用之事實如係眞正之多衆數分配，則此法不能適用。

第二種方法，爲皐爾生 (Pearson) 計算衆數之經驗的法則。各種敎育事實之分配，大多數近於常態，各次數均有聚集全距中部之趨勢。皐爾生見及此點，於是發明一種經驗的法則，可以求出近似之衆數，且此種衆數，與眞確之衆數，相差甚微，其求法比求理論衆數更爲容易。惟求此種衆數時，須先求出平均數及中點數（平均數

及中點數，將於下節討論）其公式如下：

$$Mo = M. - 3(M. - Md.)$$

式中之 M. 代表平均數，Md. 代表中點數。此公式於次數分配無大偏斜時，可以應用；因此時之中點數，平均數，及衆數三者彼此之間，有一定之關係，中點數常落於平均數與衆數之距離之三分之一之一點上。用此公式，卽可求出近似之衆數，與眞確衆數相差無幾。例如表 14 平均數 $=73•11$，中點數 $=76•05$；則衆數 $=73•11-3(73•11-76•05)=81•93$，卽爲近似衆數。

表 19　近似衆數與眞確衆數之比較（係由某五處逐日觀察風雨計之高度之結果列成五個次數分配求出表中各數）

觀察地點	平均數	中點數	近似衆數	眞確衆數
Southampton	29•981	30•000	30•038	30•039
Londonderry	29•891	29•915	29•963	29•960
Carmarthen	29•952	29•974	30•018	30•013
Glosgow	29•886	29•906	29•946	29•967
Dundee	29•870	29•890	29•930	29•951

由此種經驗的法則求出之近似衆數，與眞確衆數十分相近；試觀表 19 所列之近似衆數與眞確衆數之比較，卽知其言之不誣。

3. 衆數之功用　通常所採用之衆數，多爲視察衆數；故此處討論衆數之功用，係僅就視察衆數而言。衆數之優點有五：

(1) 如用以爲代表之數，必須免除兩極端量數（最大量數及最小量數）之影響時，採用衆數，最爲適宜。譬如測量學生之體重，少數最重之人，可以影響平均數，但不能影響衆數。

(2) 衆數可由測量中事件密集之一組小部分量數求出，無須向全體量數去求。譬如我們求中國人民經濟狀況之衆數，不必有巨富數目及其財產多寡或赤貧數目之記錄。

(3) 用衆數爲代表數，有時比用平均數或中點數更爲適宜。譬如說某小學校教員月薪之衆數爲二十元，比說月薪之平均爲 19.26 元較更適當，因實際上並無得月薪 19.26 元之人也。

(4) 衆數顯而易見，因其規定在次數最密集之組，卽次數最多之組之量數。需要迅速之計算時，用此最爲合式。

(5) 衆數所代表者，爲最普通之情形。譬如某鄉有一人擁資千萬，其餘皆窮匱不支，若用平均法計算該地之經濟狀況，每人皆屬小康，而實則十分困窮；若用衆數代表之，卽可察見一班人民經濟窘迫之情形。

就衆數之缺點言之，有下列之四點：

(1)如用以為代表之數，必須由兩極端量數均衡時，採用衆數，最不適宜。譬如測量某學生之學業成績，而得各科分數，若用衆數，則最多及最少分數，全不能發生影響，若用平均數則反是。

(2)衆數係由一小部分事項求出，非若平均數之由全體總數求得，次數若為偏態，則求得之衆數，即不可靠。譬如某班學生考試國文，有四人得100分，在次數為最多；或某班學生考試英文有五人得零分，在次數為最多；前者之視察衆數為100分，後者為0分，我們即據此謂某班學生之國文程度為100分，某班學生之英文程度為0分，寧非笑話。

(3)衆數之變動最大，其變動之情形，常隨組距之大小與組距之界限而異。例如表14係就表13之事實以5為組距而列成之次數分配，其視察衆數為77•5；若將表13之事實用10為組距列成分配時，則所得結果必與此不同。又表14與表15俱由表13之事實列成，俱以5為組距，所不同者，僅組距之界限耳。而所得之衆數，一為77•5，一為80，致生如許之差異。

(4)理論衆數，雖云眞確，然過於難求，不能使一般人應用。即皐爾生之經驗衆數(Empirical mode)，亦必須先求出平均數及中點數，手續亦甚麻煩，亦少有用之者。

II 平均數

本節所討論之平均數，係狹義的平均數，並非包括衆數，平均數，中點數而言之廣義的平均數。此種平均數有三種，即(甲)算術平均數(Arithmetic mean)，(乙)調和平均數(Harmonic mean 亦有譯之為倒數平均

數者，）（丙）幾何平均數(Geometric mean)。此三種平均數，以第一種應用最廣，第二第三兩種則不常用。茲依次分述如下：

甲、算術平均數

1. 何謂算術平均數　算術平均數，即我們通常所用之平均數。用量數之數目（即次數之總數），去除所有量數之價值之總和，除得之商數，即為平均數，此與算術上之平均數相同。惟亦有相異之點二：(1)譬如求 15，16 等等之平均數，在算術上 15 即為 15，16 即為 16，並無其他意義；而在統計學上則 15 之意義為 15·0—15·99 或 14·5—15·499，16 之意義為 16·0—16·99 或 15·5—16·499。(2)在量數過多之時，統計學上有求平均數之簡法，較之算術上所用以求平均數之法則更簡單更經濟。

2. 如何去求算術平均數　計算算術平均數，有三種方法：(1)由未歸類之量數 (Ungrouped measures) 求算術平均數，(2)由已歸類之量數 (Grouped measures) 求算術平均數，(3)計算算術平均數之簡法 (Short method)。茲將此三種計算方法分述如下：

(a)由未歸類量數求算術平均數之法則　在此種計算方法之中，又可分為兩種，即(1)簡單算術平均數 (Simple arithmetic mean) 之求法，(2)均衡算術平均數 (Weighted arithmetic mean) 之求法。簡單算術平均數，係由簡單量數（未歸類之量數，每一量數，即其實際之價值）與簡單次數（每一量數價值之次數祇有一次）之分配中求出之平均數，例如表 20。均衡算術平均數，係由各量數之次數不止一次且多少不等之分配

中求出之平均數，例如表 21。凡從量數之實際價值（即未歸類之量數）計算出來之算術平均數，稱之爲眞確算術平均數（True arithmetic mean）。均衡算術平均數之計算法，無論未歸類已歸類之量數，均可應用。以下即分述簡單算術平均數與均衡算術平均數之計算法：

（一）簡單算術平均數　計算此種平均數之公式如下：

設 M＝算術平均數；N＝次數之總數；Σm＝各量數價值之總和（Σ 即總和之記號，讀如 Sigma）；則

$$M=\frac{\Sigma m}{N}\cdots\cdots(1)$$

用表 20 說明求未歸類量數之簡單算術平均數之步驟。

(1)將量數排列成表。

(2)求量數價值之總和及次數總數。量數價值之總和（即 Σm）爲 452；次數總數（即 N）爲 10。

(3)求簡單算術平均數代入公式，簡單算術平均數等於 $\frac{452}{10}=45.2$。

（二）均衡算術平均數　計算此種平均數之公式爲：$M=\frac{\Sigma fm}{N}\cdots\cdots(2)$

公式中之 m 代表量數之數值，f 代表各量數之次數，fm 爲次數與量數相乘之積，N 等於次數總數。

用表 21 說明求未歸類量數之均衡算術平均數之步驟。

(1)將事實列成次數分配表。

(2) 求量數與相當次數相乘之積。

(3) 求量數與相當次數相乘之積之總和（即 $\Sigma fm=608$）及次數總數（即 $N=148$）。

(4) 求均衡算術平均數。代入公式，得 $\frac{608}{148}=4.11$

表20　美國某 10 城市每年用於教授每學生本國文之費用。由未歸類量數以求簡單算術平均數

城市	費用	次數
甲	\$46	1
乙	42	1
丙	57	1
丁	71	1
戊	51	1
己	61	1
庚	50	1
辛	22	1
壬	31	1
癸	21	1
	10) 452 (5.2＝簡單算術平均數	$N=10$

(b) 由已歸類量數求算術平均數之法則　由前章之討論，我們知道將量數歸類為組距，有兩個基本的假定，

即(一)各量數均勻分佈於組距之間，(二)組距之中點價值可以代表該組量數數值。茲將表 21 所列之量數化為歸類量數求算術平均數，與由未歸類量數求得之算術平均數比較。

表 21 美國某處 148 城市用於教授每學生本國文講讀之費用

講讀費用『量數』m	城市數『次數』f	量數×次數 f.m.
12	1	12
11	1	11
10	1	10
9	5	45
8	3	24
7	6	42
6	9	54
5	23	115
4	26	104
3	46	138
2	26	52
1	1	1
總數 N＝	148	148)608 4•11 ＝真確均衡算術平均數

表 21 求得之結果為 4•11，表 22 之結果為 4•16，相差之數為 •05，為數甚微。在量數較少之測量，用

表22　將表21之148量數歸類之每兩個單位作一組之組距

講讀費用組距	中值 m	城市數 f	量數×次數 f.m
1—2	1•5	27	40•5
3—4	3•5	72	252•0
5—6	5•5	32	176•0
7—8	7•5	9	67•5
9—10	9•5	6	57•0
11—12	11•5	2	23•0
		148	148)616•0 4•16 =近似均衡算術平均數

未歸類量數以求眞確之算術平均數，亦無不可。若在量數甚多之時，如表23之所示，共有量數365，用完全未歸類之分配去計算平均數，必耗去多量之時間，極不經濟；不如將各量數歸類爲組距去求，當更便利。表23所舉之事實，係365名大學生做視覺想像測驗之成績，將全距100分之爲20組，每組組距包含5單位，列成次數分配表，用詳法(Long method)以求其算術平均數。

表 23　365名大學生做視覺想像測驗之成績（求均衡算術平均數之詳法）

組　距	次數 f	中值 m	f. m
95.0-100.0	8	97.5	780.0
90.0—94.99	2	92.5	185.0
85.0—89.99	9	87.5	787.5
80.0—84.99	8	82.5	660.0
75.0—79.99	24	77.5	1860.0
70.0—74.99	16	72.5	1160.0
65.0—69.99	33	67.5	2227.5
60.0—64.99	11	62.5	687.5
55.0—59.99	35	57.5	2012.5
50.0—54.99	18	52.5	945.0
45.0—49.99	59	47.5	2802.5
40.0—44.99	20	42.5	850.0
35.0—39.99	56	37.5	2100.0
30.0—34.99	20	32.5	650.0
25.0—29.99	18	27.5	495.0
20.0—24.99	6	22.5	135.0
15.0—19.99	12	17.5	210.0
10.0—14.99	4	12.5	50.0
5.0—9.99	4	7.5	30.0
0.0—4.99	2	2.5	5.0
	365		365)18,632.5 51.05 =均衡算術平均數

由已歸類量數求均衡算術平均數，與由未歸類量數求均衡算術平均數之計算法，幾完全相同，所異者僅量數與次數相乘之一點耳。由未歸類量數求量數與次數相乘之積時，可將次數直接與量數數值相乘；但由已歸類量數求量數與次數相乘之積時，不能將次數直接與組距相乘，必須先求出組距中點之價值（即中值）而

後始可與之相乘。如欲相乘之時更加便利，最好使中値爲整數。前章曾言中値應使之爲整數者以此。

(c)計算算術平均數之簡法　我們用以上之方法求算術平均數，算法甚爲明顯，理論亦極淺近。特所計算之數過於繁瑣，而尤以求量數與次數相乘之積時爲甚，時間精力，俱不大經濟；故簡法尙焉。用簡法求算術平均數，無須將量數與次數相乘，可節省許多勞力。用此法計算時，應明瞭以下三點：(1)將量表中每一組距看作一單位，以代替組距中包含之若干單位；(2)假定任一量數或組距之價値爲估計平均數 (Estimated mean)，或爲包含估計平均數之數；(3)計算算術平均數與估計平均數之間之差數，較勝於計算算術平均數。請先用表 20 所舉之簡單量數說明此種計算法。

在簡單量數分配表中，用簡法去求平均數，是否可以節省時間，誠爲疑問。如將表 20 與表 24 之計算法兩相比較，則簡法反更麻煩。在表 20 所示事實之情形中，自然以用求簡單算術平均數之方法爲宜。此處之所以用簡法重行計算之者，不過藉此以說明此種方法，使人易於明瞭，以便應用於其他各次數分配中耳。若在已歸類量數之分配中，採用此法，甚爲省力，而有其實際之價値。由簡法計算算術平均數之公式如下：

$$M = E.M. + C \quad \cdots\cdots(1)$$ 或

$$M = E.M. + \frac{\Sigma fd}{N} \times i \quad \cdots\cdots(2)$$

公式中之 M，代表算術平均數，此時之算術平均數，或稱作實得平均數 (Obtained mean)，簡寫爲(O.M.)，係對估計平均數而言。E. M. 代表估計平均數。C 等於 $\frac{\Sigma fd}{N} \times i$，稱作校正數 (Correction)，爲算術平均

數與估計平均數之間相差之數。d代表任一量數或組距與估計平均數之差數 (deviation)。Σfd 代表次數與差數之積之和。N代表次數總數。i代表組距之單位數。

表 24　用簡法重行計算表 20 所舉事實之平均數

費　用	估計平均數	估計平均數與實際單位之差數		
		+	0	−
51		5		
42				−4
57		11		
71		25		
46	46		0	
61		15		
50		4		
22				−24
31				−15
21				−25
N=10		60		−68
				60

$$\Sigma d = -8$$

$$\frac{\Sigma d}{N} = -.8$$

$$M = \text{估計平均數} + \frac{\Sigma d}{N}$$

$$= 46 + (-.8) = 45.2$$

上面表24之計算法，可用公式(1)說明之。將估計平均數46與各量數相減，得正負各差數（即d）；以之相加，得—8，即差數之和（即Σd）；再以次數總數10除—8，等於—.8，是為校正數（即c）。將估計平均數46與校正數—.8相加得45.2，即求得之算術平均數。

表25　用簡法求表23所舉事實之算術平均數

組　距	次數 f	估計平均數與距度之差數 d	次數×差數 fd
95.0–100.0	8	10	80
90.0—94.99	2	9	18
85.0—89.99	9	8	72
80.0—84.99	8	7	56
75.0—79.99	24	6	144
70.0—74.99	16	5	80
65.0—69.99	33	4	132
60.0—64.99	11	3	33
55.0—59.99	35	2	70
50.0—54.99	18	1	18
			703
45.0—49.99	59	0	
40.0—44.99	20	—1	—20
35.0—39.99	56	—2	—112
30.0—34.99	20	—3	—60
25.0—29.99	18	—4	—72
20.0—24.99	6	—5	—30
15.0—19.99	12	—6	—72
10.0—14.99	4	—7	—28
5.0— 9.99	4	—8	—32
0.0— 4.99	2	—9	—18
			—444
	365		259

259÷365=.71；　.71×5=3.55＝校正數；

估計平均數＝47.50

算術平均數＝47.50＋3.55＝51.05

現在且用表25所示之例，詳細說明簡法之應用。我們首先將全分配365事件歸類在20組距中，每一組

距估全距百分之5，即5單位。此步手續之結果，得次數8，2，9，8，24等等。次將各次數相加，得365。再次一步，若依詳法，必須將各組距之中值與其相當之次數相乘而求其積，此處則無須為此；惟估計一組距，如45.0—49.99，其中值與算術平均數十分相近，即以其中值47.5為估計平均數。定估計平均數之標準，可先計算組距之數目，由次數分配之一端起，約數至組數二分之一，選擇一組，假定其含有平均數之數；以該組之中值為估計平均數，或就次數分配中次數最密集之處擇定一組，以其中值作估計平均數。學者若多加練習，則於平均數之估計，必能與算術平均數十分相近。

估計含有平均數之組既定之後，再求各組距中值與含有估計平均數之組距中值之差數。假定各組距之單位相差為1（無論各組距之單位實際相差若干，皆按其差數為1計算）組距50.0—54.99較組距45.0—49.99大1單位，故其差數『d』為+1；組距55.0—59.99大2單位，故為+2；組距40.0—44.99小1單位，故為—1；35.0—39.99小2單位，故為—2，等等。依次求完，即為估計平均數與距度之差數，書於d欄中。

依求均衡平均數之詳法，我們須將各組次數乘各組距之中值。在簡法中，則為將各組次數乘估計平均數與各組距之差數，如8×10，2×9，9×8，等等。依次求完得次數與差數之積，書於fd欄中。於此有應行注意之點二：(一)用簡法計算時，fd所估之地位，即用詳法計算時fm所估之地位；(二)在估計平均數以上之差數皆為正數，以下之差數皆為負數。若所估計之平均數恰與算術平均數適合，則fd欄正的差數之和與負的

差數之和必相等用代數算法相加，其結果爲零，故校正數亦爲零。但算術平均數，決難落在組距之中值上，與估計平均數完全相同，而無絲毫之差異；既有差數，故必須將校正數加於估計平均數上，方能與算術平均數相符。求此差數時，係將 fd 欄各正的差數相加爲正的差數，各負的差數相加爲負的差數，再將正負差數用代數算法相加，得 fd 之總和。此正的差數與負的差數之差異數，爲估計平均數與分配中所有各組距中值相差之總數。但我們所要者，爲估計平均數與各組距中值相差之平均數；求此種平均差數時，須將次數總數除差數總數。例中次數總數爲 365，差數總數爲 259，$259 \div 365 = .71$。此 .71 之意義，即謂估計平均數在組距全距離中，比算術平均數小 .71。於此有應注意之點，我們求算術平均數，並不能將此數作爲校正數加於估計平均數上，因此數之求得，係根據假定組距爲 1 單位，而實際之組距單位乃 5 而非 1，故眞正之校正數等於 $.71 \times 5 = 3.55$；以此加於估計平均數 47.5 上，得 51.05，是爲算術平均數。

上面已將由簡法計算算術平均數之手續，詳加解說；茲爲學者便利起見，特總括之爲下列各步驟：

(1) 將原來事實列成次數分配表。

(2) 求次數之總數。

(3) 估計含有平均數之組距；即以此組距之中值爲估計平均數。

(4) 將每組距視爲一單位，用估計平均數與各組距中值相減，而將其相差之單位數記下，組距中值較估計平均數大者爲正數，小者爲負數。

(5)將各差數(d)與其相當之次數(f)相乘，乘時須注意正負符號。
(6)用代數算法，求正負差數之總和。
(7)以次數總數除差數總和得校正數c。
(8)以組距之實際單位乘c，得校正數c。
(9)估計平均數加校正數，得算術平均數。

3. 算術平均數之功用　用算術平均數爲代表數之優點有四：

(1)算術平均數，用加法及除法卽可求出；若遇繁多之事件，可用簡捷方法去求，亦不難算出。
(2)有時用以爲代表之數，欲兩極端之量數對之發生影響，最好用算術平均數。
(3)算術平均數爲人人所熟悉，應用時無須解釋。衆數及中點數，則不能語此。
(4)僅知量數總數與次數總數，而各量數之次數爲何，則全不知，亦可以求出算術平均數。譬如我們知道某縣人數與每年食鹽總數，雖不知各個人每年食鹽若干，亦可算出每人每年食鹽之平均數。若在衆數及中點數，遇有此種情形時，則無法計算。

其缺點有四：

(1)兩極端之數如有錯誤，算術平均數卽不能眞確。關於此點，衆數及中點數，實較算術平均數爲優。
(2)算術平均數易受極端量數或不合理量數之影響。就此點言，其功用不及衆數及中點數。

(3)算術平均數容易使人誤會其所代表各量數之價值，皆與算術平均數相似。

(4)算術平均數所落之點，在不連續之量數上，常與事理不合，實際上並無此種事實。譬如計算某校各班平均人數為 28.54，此種人數數目，在實際上可斷其為不可能。

乙、調和平均數

1. 何謂調和平均數　現在教育測量運動，盛行一時，各種學科，幾乎均有測驗，各測驗皆有『常模』以為測量各級學生教育程度之標準。此種常模，即多數學生在指定之某時間內所做測驗之平均作業 (performance)，如在一分鐘內寫若干字或在一分鐘內讀若干書之類是，通常用為平均作業之數，係各個學生作業之算術平均數。其實求含有時間速率 (time rate) 之平均，用算術平均數，蓋有未合，不過一般人未曾留意及此耳。

關於統計學上平均數之應用，有應行注意之數點，而曾為研究教育之人所忽略者，特舉出如下：

(1)求平均時間速率，有兩種不同之方法：

(a)由速率之算術平均數求平均速率；

(b)由速率之調和平均數求平均速率；

(2)就同樣事實，用此兩種方法求出之平均數，其結果不一致；

(3)此兩種方法含有兩種不同之計算單位，即工作單位 (The unit of work) 與時間單位 (The unit of time)；

(4)對於兩種不同之單位，用通常平均法計算時，則遇工作單位，係用速率之調和平均數 (即實在時間

Absolute times 之算術平均數，) 過時間單位，係用速率之算術平均數。

請簡單說明如次：

假如有五個學生，指定其於一定時間內 (兩分鐘)，令其演算代數題，測驗其演算之速度及所演之題數。於此所得結果，我們可以有兩種方法表示：(1)以一分鐘內作對之題數表示其效率；(2)以演算一題所需之秒數去表示其效率 (假定各題之難易均相等。) 第一種方法之所表示，係用時間單位；第二種方法之所表示，係用工作單位。現在我們且就此兩列事實，用算術平均數 (通常所用之法則)，計算此五個學生所做測驗之平均作業。其計算如下：

每分鐘所算之題數

12
10
8
6
4

5)40(8每分鐘平均所算之題數

8)60(7•5每算一題所需之秒數

每算一題所需之秒數

5
6
7•5
10
15

5)43•5(8•7每算一題平均所需之秒數

8•7)60(6•897每分鐘所算之題數

上面所舉之兩列量數，實際上完全相同；而我們由此用算術平均數求出平均速率之結果，相差至如是之巨，果因何而致此？對於此問題之簡單答案，則為由於兩者之基點（Base）不同之所致。茍基點不能歸於同一，無論如何，斷不能得到同一之結果。在計算平均速率時，如上所舉之例，所需基點為每算一題所需時間為一分鐘之幾分之幾，即若干秒。第二列量數，即應用此基點（即每算一題所需之秒數）第一列量數，則非此基點，故必須將各量數回復到此基點，方能免於錯誤。換言之，即必須求出各量數之倒數（Reciprocal），然後再將此倒數求算術平均數。由此種平均數，可求一列量數中速率之調和平均數。我們由此可得一調和平均數之定義如下：

調和平均數，即一列量數中各量數之倒數之算術平均數之倒數。

2. 如何去求調和平均數　求調和平均數之公式為：

$$\frac{1}{H}=\frac{1}{N}\Sigma\left(\frac{1}{m}\right)$$

式中H等於調和平均數，N等於次數總數，m代表各個量數。茲復將上所列之事實，用求調和平均數之法則計算，同時並將其算術平均數列舉如下，以資對閱。

求調和平均數之步驟：

(1) 求各量數之倒數，即 $\frac{1}{m}$。

(2) 求各倒數之總和，即 $\Sigma\frac{1}{m}$。

(3) 求倒數總和之算術平均數，即 $\frac{1}{N}\Sigma\left(\frac{1}{m}\right)$，等於 $\frac{1}{H}$。

4. 求算術平均數之倒數，即 H，即為調和平均數。

每分鐘所算之題數	每分鐘所算題數之倒數	每算一題所需之秒數
12	·08333	5
10	·10000	6
8	·12500	7·5
6	·16667	10
4	·25000	15
5) 40 (8 8)60(7·5依照速率之算術平均數，每算一題所需之秒數	5)·72500(·1450 $\frac{1}{\cdot 1450}=6\cdot 897$ 每分鐘所能算之題數＝速率 6·897)60(8·7依照速率之調和平均數，每算一題所需之秒數	5)43·5(8·7每算一題所需之秒數。 速率＝6·897依照實在時間之算術平均數，每分鐘所算之題數。

以上係說明求調和平均數之步驟。再觀此兩種平均數之結果，速率之調和平均數，比算術平均數為小。在變量甚大之分配中，其結果約小百分之十五。變量之度愈減小，則此兩種平均數愈相近。

由此我們知道製定各種測驗之常模，有兩種不同之方法，其區別即在所根據之單位或為工作單位或為時

間單位。所謂工作單位者，即做一單位工作，共需若干時間。所謂時間單位者，即在一單位時間中，能做若干工作。如欲兩列事實之平均量數可資比較，必須用同一之方法去平均各個量數。

3. 各種單位之適當平均法　求平均速率，有兩種方法（即用兩種單位計算）；用算術平均數之計算法，根據一種單位求出之結果，與根據他種單位求出之結果相比較，全不相同。於是發生問題：求平均速率計算時所用之單位，究竟應採用工作單位？抑應採用時間單位？爲欲使人能明瞭此種問題起見，請用具體事例說明如下：

(1)工作單位：假設甲乙二人，演算數學習題，各人每演一題，必需若干時間。甲演算1題，需時7.5分鐘，其速率爲每點鐘演算8題。乙演算1題，需時5分鐘，其速率爲每點鐘演算12題。合計兩人演算2題，需時12.5分鐘，平均1題需6.25分鐘，其平均速率爲每點鐘演算9.6題。從他方面言之，倘若我們將兩種速率8,12求算術平均數，其平均速率爲每點鐘演算10題。依此結果，是假定此兩人各演算一題所需之時間爲12分鐘，或兩人平均演算一題爲6分鐘。此種結果，實屬錯誤，因兩人各演算一題實際所需之時間爲12.5分鐘，或兩人平均演算一題爲6.25鐘。總括言之，我們用工作單位以爲求平均速率之根據，必須以每12.5分鐘兩人演算2題爲準。因此我們求平均速率，必須用調和平均數（在此即實在時間之算術平均數）。

(2)時間單位：假設甲乙二人各演算數學題一點鐘。甲在一點鐘內實際演算8題，即一點鐘演算之速率爲8題。乙在一點鐘內實際演算12題，即一點鐘演算之速率爲12題。因此甲乙兩人在一點鐘內可算

20 題，其平均速率爲 8 與 12 之算術平均數，即 10 題。此種平均速率，與由調和平均數計算同樣速率 8 與 12 之平均速率爲 9.6 題者不相同。由此種事實求調和平均數，初求量數 8 之倒數等於 .1250，量數 12 之倒數等於 .0833；次求此種倒數之算術平均數爲 .1042；又次求 .1042 之倒數得 9.6，即平均速率。

由以上之說明，我們可以知道求平均速率，無論由何種單位計算，不能用各個速率之算術平均數。

4. 調和平均數之功用　調和平均數之特殊功用，即在求平均速率。我們對於此點，應當銘記心中，遇有同樣性質之問題，即應用此種平均數。惟此種平均數之範圍過狹，而知之者又係少數，通常對於平均速率，大都用算術平均數，以致陷於謬誤而不自覺。

丙、幾何平均數

1. 何謂幾何平均數　幾何平均數，係一列量數中 n 個量數相乘之積之 n 次方根。此種平均數，在教育研究上，除却求增進之平均速率外，絕無他用。

2. 如何去求幾何平均數　求幾何平均數之公式爲：

$$MG=\sqrt[n]{(m_1 m_2 m_3 m_4 \cdots m_n)} \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

請舉一求進步的平均速率之事例，以說明幾何平均數之應用。假如有兒童練習射擊，計練習三個月（即三個練習時間），進步百分之 90，其每月進步之平均速率究爲若干？如用求算術平均數之法則計算，則爲

$\frac{90}{3}=30$，我們其將用百分之 30 爲其每月進步之平均速率乎？是必不可。必須求出 1.90 之 3 次方根，再減去其原來效率乃爲每月之進步平均速率，其式爲：

$\sqrt[3]{1.90}-1.0=1.24-1=.24$（百分數）。在第一個月月底，其所有效率，爲進步數百分之 24，與原來效率百分之 100 相加得百分之 124。在第二個月月底其進步數爲百分之 124 的百分之 24，等於百分之 29.76；將此數與百分之 124 相加，得百分之 153.76，爲此時所有之效率。在第三個月月底，其進步數爲百分之 153.76 的百分之 24，等於百分之 36.24；將此數與百分之 153.76 相加，得百分之 190，爲最末次所有之效率。但原來效率爲百分之 100，故於百分之 190 中，減去百分之 100，尚餘百分之 90，即進步之數。從此可知每月進步之平均速率，爲幾何平均數百分之 24，而非算術平均數百分之 30。

幾何平均數，若應用對數，則計算時當更容易。各量數之幾何平均數之對數，即各量數之對數之算術平均數。其公式爲：

$$\log Mg=\frac{\Sigma \log m}{N} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

於是得求幾何平均數之步驟如下：

(1) 求各量數之對數，即 $\log m$。

(2) 求各對數之總和，即 $\Sigma \log m$。

(3) 求對數總和之算術平均數，即 $\frac{\Sigma \log m}{N}$，等於 $\log MG$。

(4)求對數之算術平均數相當之數；此數即原來各量數之幾何平均數。

3. 幾何平均數之功用　此種平均數之特殊功用，約有兩點：

(1)幾何平均數之主要功用，在計算含有增進的速率與有幾何級數的形式之事實。譬如求人口增加，入學人數增加，教員總數長進等等之平均數，均須應用幾何平均數。

(2)幾何平均數之第二種功用，可於討論指數 (Index numbers) 或比例 (Ratios) 時看出。求此種指數之平均，用幾何平均數，比用算術平均數或中點數為優。

在教育統計學上，幾何平均數，有以下之幾種缺點：

(1)除卻含有增進的速率之問題外，教育的研究，實無應用幾何平均數之必要。

(2)計算幾何平均數，費力太多。

(3)不易使人了解，不能作普徧的應用。

(4)此種平均數之數理太抽象。

III 中點數

1. 何謂中點數　中點數即量表中之一點，在此點之兩端，各有量數之半數。例如表 27 之事實，共有量數 289，其中點數為 84.37；在此數上下之量數，各為 144.5，即量數之半數。如將次數分配中量數化為百分數，中點數所在之位置，恰在五十分點上，有百分之五十的量數在此點以上，百分之五十的量數在此點以下，故

中點亦稱爲五十分點 (50 percentile point)。中點數既爲各量數之中央位置，我們求得中點數後，當可推知測量之大概情形。

2. 如何去求中點數　計算中點數之方法，可分爲：(a)由簡單次數之量數求中點數，(b)由次數分配中之已歸類量數求中點數兩種，茲分述如下：

(a)由簡單次數之量數求中點數　此所謂簡單次數，即謂量表中各量數之次數祇發見一次，例如表 26 甲乙兩組所列之次數是。求中點數之方法，照我們上面所下之定義，中點數所在之位置，應落在第 $\frac{N}{2}$ 個量數中，而爲其中之一點。但在此種各個量數按次排列之分配中，與其依照上述定義去求，不如假定中點數爲最中量數去求，比較更易使人了解，且可免除謬誤。許多統計學家，即主張中點數爲最中量數，其定義爲：各個量數既按其大小次序排列之後，量數之數目若爲奇數，則中點數即爲最中量數；若爲偶數而無最中量數時，則中點數即爲最中二量數之半數。依此定義，中點數即是第 $\frac{N+1}{2}$ 個量數。由表 26 甲組之事實求中點數，爲 $\frac{11+1}{2}=6$，即第六個量數。從表之任意一端數起至第六個量數爲 19，故 19 即爲該分配之中點數。

表 26 甲組量數之數目共計 11，爲奇數，故第六個量數(19)爲其最中量數。假設於此分配下再添一量數，共爲 12 個量數而爲偶數，則無最中量數，即以最中二量數之平均數爲其中點數，其求法爲 $\frac{12+1}{2}=6.5$，即第六個半量數；而第六個半量數，則在第六與第七兩個量數之間。從表之任意一端數起，至第六第七兩個量數爲 18，19，故 $\frac{18+19}{2}$ 等於 18.5，即爲此分配之中點數。

表 26 兩組十一名學生受數學測驗所得之分數

甲組

算對題數（量數）	量表	學生數（次數）
24		1
23		1
22		1
21		1
20		1
19		1
18		1
17		1
16		1
15		1
14		1
總數		11
13		1
總數		12

乙組

算對題數（量數）	量表	學生數（次數）
24		1
23		1
22		1
21		
20		
19		
18		1
17		
16		1
15		
14		
13		
12		
11		
10		1
9		1
8		1
7		1
6		1
5		1
總數		11

表 26 乙組量數之數目亦為 11，但分佈甚稀，中間且有間斷。我們依照中點數為 $\frac{N\times1}{2}$ 之意義去計算，其中

點數應為10。若於此分配中再加21一個量數，使量數總數變為12，按前法去求中點數在量數10與16之間；10與16之平均數為13，故中點數卽為13。但在此分配中，實際上並無13之一量數，此蓋為虛擬之中點數。

(b)由已歸類之量數求中點數　若量數之數目有30或40以至於數百，我們勢不得不將此多數之量數歸類為次數分配。由此種分配計算中點數，係假定各量數均勻分佈於各組組距之間，而可以組距之中值代表該組價值。茲用表27以說明由已歸類量數求中點數之計算法如下：

表27　某中學校289名學生英文分數之分配

組距	次數
95.0—100.00	22
90.0—94.99	68
85.0—89.99	51
80.0—84.99	28
75.0—79.99	47
70.0—74.99	33
65.0—69.99	21
60.0—64.99	9
55.0—59.99	6
50.0—54.99	2
45.0—49.99	1
40.0—44.99	1
總數	289

此分配量數之數目(N)等於289，則量數之半數$\left(\frac{N}{2}\right)$等於$\frac{289}{2}=144.5$。中點數卽量表上之一點，此點之上下兩端各有量數144.5。從上向下數去，將95.0—100.0，90.0—94.99，85.0—89.99三組之

次數相加得 22＋68＋51＝141，卽此三組中含有 141 個量數。此 141 個量數之價值均大於 85.0。中點數所在之地在第 144.5 個量數。距第 141 個量數尚差 3.5 個量數（卽 144.5－141＝3.5），必須從此再數下

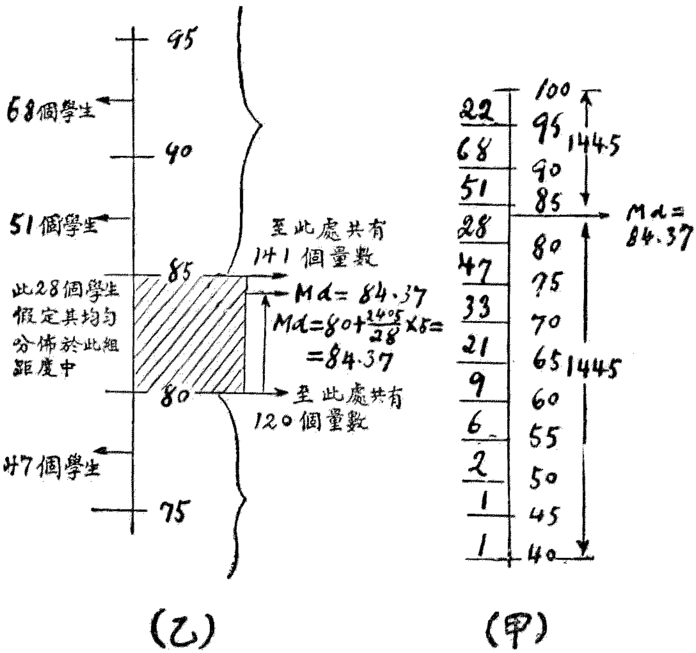


圖 38 說明中點數之計算法

去，故應落在下一組往下數之第 3.5 個量數上。該組之組距為 80.0—84.99，包含 5 個單位，其量數數目為 28。從該組組距上限往下至第 3.5 個量數之距離為 $\frac{3.5}{28}\times 5=0.63$。故從該組組距上限減去由此至第 3.5 個量數之距離，即為該組第 3.5 個量數所落之點，亦即為此分配第 144.5 個量數所落之點。於是得中點數等於 $85.0-\frac{3.5}{28}\times 5=85.0-0.63=84.37$。

以上所用之說明，係由上向下計算量數數目；若由下向上數去，所得結果，亦相符合。我們試從最下之一組起逆數至第八組共得次數 120，即此八組中含有 120 個量數。中點數所在之地在第 144.5 個量數，距第 120 個量數尚差 24.5 個量數（即 $144.5-120=24.5$），必須從此再數上去，故應落在上一組往上數之第 24.5 個量數上。該組組距為 80.0—84.99，量數數目為 28，$\frac{24.5}{28}\times 5=4.37$ 為由該組組距下限往上至第 24.5 個量數之距離。故從該組組距下限加上由此至第 24.5 個量數之距離，即為該組第 24.5 個量數所落之點，亦即為此分配第 144.5 個量數所落之點。於是得中點數等於 $80.0+\frac{24.5}{28}\times 5=80.0+4.37=84.37$，結果與上面所求得者完全相同。由是我們可得一求中點數之公式如下：

設 l＝含有中點數組組距之下限，或 u＝含有中點數組組距中之上限；

N＝量數之數目（即次數總數）；

f＝含有中點數組之次數；

F＝由起端算至含有中點數組之各組次數之和；

i＝組距之單位；

Md＝中點數；

$$\text{則}Md = L + \frac{\frac{N}{2} - F}{f} \times i \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\text{或}Md = U - \frac{\frac{N}{2} - F}{f} \times i \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

上列之兩公式，可任意擇一應用。由小量數向大量數數時，則用公式(1)，由大量數向小量數數時，則用公式(2)。於此有必須注意之點，此種公式，係根據『中點數即量表中之一點，在此點之兩端，各有$\frac{N}{2}$量數』之定義而來；由此種公式求中點數，無論由上至下或由下向上去求，所得結果，恆趨於一致，而無絲毫差異。但若根據中點數等於第$\frac{N+1}{2}$個量數之定義以求中點數，則由上至下計算求得之結果與由下向上計算求得之結果，恆有多少差異，而不能相等。試觀以下所舉之例，當能自明。

組距	次數	
20•0—24•99	17	40
15•0—19•99	23	
10•0—14•99	29	
5•0— 9•99	21	26
0•0— 4•99	5	
總數	95	

從組距 20.0—24.99 向下計算，中點數等於：

$$15.0-\frac{48-40}{29}\times 5=15.0-1.379=13.621$$

從組距 0.0—4.99 向上計算，中點數等於。

$$10.0+\frac{48-26}{29}\times 5=10.0+3.793=13.793$$

由分配之此一端計算中點數，則爲 13.621，由彼一端計算，則爲 13.793；此法之不適於用，已可想見。若以中點數等於量表中之一點而其上下各有 $\frac{N}{2}$ 量數之方法去計算則無論從何端計起，其結果則常相等。茲將上所舉之事實計算之如下：

(1) 從組距 20.0—24.99 向下計算：

$$Md=15-\frac{47.5-40}{29}\times 5=15-1.30=13.70$$

(2) 從組距 0.0—4.99 向上計算：

$$Md=10+\frac{47.5-23}{29}\times 5=10+3.70=13.70$$

由已歸類量數求中點數之法則，上面已解釋明白。茲爲學者便利起見，特總括之爲以下之七個步驟：

(1) 將分配各次數相加，得量數總數 N，以 2 除之，即 $\frac{N}{2}$。

(2) 從次數分配之任一端起，至含有中點數之組止，將各量數之次數相加，得 F。

(3)由含有中點數之組，察知其所含之次數，是爲 f。

(4)從 $\frac{N}{2}$ 減去 F，所餘之量數數目，卽爲由含有中點數組之上一組（或下一組）至中點數之距離。

(5)由含有中點數組之次數（除所餘之量數數目（卽第四步求得之結果），所得之商數卽爲計算中點數之比例率。

(6)將所得之比例率以組距之單位乘之。

(7)計算量數時，如由小至大，卽將此數加於含有中點數組組距之下限；如由大至小，卽從含有中點數組組距之上限減去此數；所得結果，卽所求之中點數。表明組距上下界限之數，須用整數，始便於計算。

3. 中點數之功用　中點數之優點有四：

(1)中點數受兩極端量數之影響甚微，如用以爲代表之數。欲免除此種影響時，可用中點數。

(2)分組之時，組距之大小及界限，影響於中點數甚小，故其位置比較確定，非若衆數之常隨此種情形而變動。

(3)中點數較平均數容易求出，需用迅速的計算時，用此較爲適宜。

(4)求中點數時，對於兩極端量數，祇要知其數目，無須知其價值。

其缺點有四：

(1)中點數非由全體量數之價值求出，其精確之度，不及平均數。

(2) 如用以為代表之數，欲兩極端量數對其發生影響時，則不宜用中點數。

(3) 由量數之數目來中點數，不能得到正確之量數總和。

(4) 中點數所落之點，在不連續之量數上，常與事理不合，實際上並無此種事實，如云某城市之學校人數之中點數為 184.38 之類是。

總之在實際應用上，中點數實為一最有價值之代表數，非衆數與算術平均數之所能及，學者當善應用之。

IV 下二十五分點及上二十五分點

1. 何謂下二十五分點及上二十五分點　前面曾經說過，在中點數之上下，各有全體量數之百分之五十，故中點數亦稱五十分點。下二十五分點，或作二十五分點，以 Q_1 代之；其在量表上所居之位置，有百分之二十五的量數在彼以下，百分之七十五的量數在彼以上。上二十五分點，或作七十五分點，以 Q_3 代之；其在量表上所居之位置，有百分之七十五的量數在彼以下，百分之二十五的量數在彼以上。

2. 如何去求下二十五分點及上二十五分點　求下二十五分點及上二十五分點之方法，與求中點數相似。

其公式為：

$$Q_1 = L + \frac{\frac{N}{4} - F}{f} \times i,$$

$$Q_3 = L + \frac{\frac{3}{4}N - F}{f} \times i.$$

式中L代表含有下二十五分點（或上二十五分點）之組組距之下限；N代表量數數目（卽次數總數）；f代表含有下二十五分點（或上二十五分點）之組之次數；F代表由起端算至含有下二十五分點（或上二十五分點）組之各組次數之和；i爲組距之單位。茲用表27之事實求下二十五分點，以說明算計之步驟。

(1) 將各量數列成次數分配表。

(2) 將各次數相加，求N；$N=289$。

(3) 以4除N，求$\frac{N}{4}$；$\frac{N}{4}=\frac{289}{4}=72.25$。

(4) 求F。從組距40.0—44.99起至組距65.0—69.99止，得次數40；故$F=40$。

(5) 含有下二十五分點組之次數爲33；故$f=33$。

(6) 從$\frac{N}{4}$減去F；卽$72.25-40=32.25$。

(7) 用f除$\frac{N}{4}-F$；卽$\frac{32.25}{33}=.977$。

(8) 以i乘第七步求得之數；$i=5$，卽$.977\times5=4.885$。

(9) 將4.885加於含有下二十五點組組距之下限L上；$L=70$，卽$70+4.885=74.885$，卽求得之下二十五分點。

用以上之事實代入公式，則爲

$$Q_1=70+\frac{\frac{289}{4}-40}{33}\times 5=70+\frac{32.25}{33}\times 5=70+4.885=74.885$$

用表 27 之事實求上二十五分點，則為

$$Q_3=90+\frac{\frac{3}{4}\times 289-199}{8}\times 5=90+\frac{17.75}{68}\times 5=90+1.30=91.30$$

求上二十五分點之步驟，與求下二十五分點時完全相同，茲不復述。

上面所舉求 Q_1 及 Q_3 之公式與說明，係由分配中小量數起向大量數數去計算；惟亦可從大量數起向小量數數去計算，不過將公式依照求中點數之公式(2)稍為更改即可。為節省篇幅起見，茲不復述。

3. 下二十五分點及上二十五分點之功用　下二十五分點與上二十五分點之用法，與中點數大略相仿。求得中點數，即可知百分之五十之量數所佔之地位；求得下二十五分點及上二十五分點，即可知百分之二十五及百分之七十五之量數所佔之地位。在常態之次數分配中，求出中點數，即用以為該分配全體量數之代表數，亦無不可。但在偏態之次數分配中，若僅用中點數以為該分配全體量數之代表，往往引人發生誤解；不如將下二十五分點及上二十五分點一併求得列舉出來，使人對於各量數之分配情形，能曉然明瞭，而無發生誤解之虞。試觀表 28 所舉之例，當能自明。

下所列之兩個分配中一年級與四年級之中點數俱為 5，而其下二十五分點一則為 1，一則為 4，上

表 28　指示中點數相同而 Q_1，Q_3 不相同之兩個分配（事實係假設的）

算對題數	學生數		中點數 Q_1Q_3 所在之位置	
	一年級	四年級	一年級	四年級
9	2	30		$Q_3=9$
8	3	10		
7	10	3		
6	30	2	$Q_3=6$	
5	10	10	$Md=5$	$Md=5$
4	2	30		$Q_1=4$
3	3	10		
2	10	3		
1	30	2	$Q_1=1$	
總數	100	100		

二十五分點一則為 6，一則為 9，相差之度甚遠。我們若僅將中點數列出，閱者必以為此兩級之算學程度

完全相等；若將下二十五分點及上二十五分點一併列出，則此種誤解，一定不能發生。

V 練習問題

1. 何時當用衆數?

2. 何時當用平均數?

3. 何時當用中點數?

4 何時當用上二十五分點及下二十五分點?

5. 在普通應用上，以用何種集中量數爲適宜?爲何?

6. 有甲乙丙三學生同受算術測驗，時間規定爲一點鐘；甲做對 30 題，乙做對 20 題，丙做對 10；試用調和平均數求其平均速率。

7. 有某學生練習打字，共練習十日，進步百分之五十，試用幾何平均數求其每日進步之速率。

8. 試用下列四表：

(1) 求各表之衆數。

(2) 求各表之算術平均數：表 a 及表 b 用求均衡平均數之方法計算，表 c 及表 d 用簡法計算。

(3) 求各表之中點數。

(4) 求各表之下二十五分點及上二十五分點。

(a)

年齡	人數
13	8
14	16
15	23
16	32
17	54
18	91
19	59
20	28
21	28
22	19
23	8
24	7
25	7
N=	

(b)

分數	人數
2—3	1
3—4	1
4—5	2
5—6	4
6—7	4
7—8	5
8—9	3
9—10	2
10—11	1
11—12	
12—13	1
N=	

(c)

月薪	人數
$120•0—124•99	3
115•0—119•99	
110•0—114•99	1
105•0—109•99	1
100•0—104•99	2
95•0— 99•99	
90•0— 94•99	3
85•0— 89•99	10
80•0— 84•99	30
75•0— 79•99	36
70•0— 74•99	31
65•0— 69•99	20
60•0— 64•99	8
55•0— 59•99	1
50•0— 54•99	1
N=	

(d)

組　　距	次　數
90•0-100•0	3
80•0—89•99	0
70•0—79•99	1
60•0—69•99	2
50•0—59•99	5
40•0—49•99	5
30•0—39•99	4
20•0—29•99	3
10•0—19•99	2
0•0—9•99	1
N＝	

VI 參考書報

1. 薛鴻志：教育統計學大綱（再版）第五章。
2. 張秉潔，胡國鈺：教育測量第九章。
3. 周調陽：應用於教育測量上之統計法第二章，教育叢刊第四卷第二集。
4. 薛鴻志：計算中點數之法則，教育雜誌第十五卷第三號。
5. Rugg, H.O.: Statistical Methods Applied to Education, Chapter V.
6. King, W.J.: Elements of Statistical Methods, Chapter XII.
7. Secrist, H.: An Introduction to Statistical Methods, Chapter VIII.

8. Whipple, G.M.: Manual of Mental and Physical Test, Part I, Chapter III.
9. Yule, G.U.: An Introduction to the Theory of Statistics, Chapter VII.
10. Monroe, W.S.: The Theory of Educational Measurements, Chapter XII.

第七章　差異量數(Measures of variability)

集中量數在教育統計上，固甚重要，但不能使我們明白全體量數分配之狀況，是其缺點。苟欲瞭解全體量數分配狀況，非用差異量數不為功。蓋集中量數之所表示，為量數在量表上所居之位置；差異量數之所表示，為量數在量表上之相差之距離。用集中量數，雖可比較兩種測量中各量數所集合之地位，然其集合之地位苟相等，我們猶不能斷定此兩測量為完全相等。故必須證之以差異量數，比較其各量數分配之情形如何。若分配之情形亦相等，則此兩測量必全相等，不然則否。舉例以說明之，下面所繪之圖 39，為兩個常態面積重疊放置。此兩常態面積之衆數，平均數，或中點數均同落於量表中之一點『S』上，二者完全相等，然其分配情形，各不相同，顯然有別；若不進求差異量數，而遽依集中量數之相等，以斷定此兩分配之全相同，則必陷於謬誤。由此可知差異量數，不僅可用以比較二測量分配之情形，且可以之考證集中量數之價值。

差異量數計分六種，即

(1)全距 (Range)

(2)二十五分差 (Quartile deviation 簡寫作 Q)

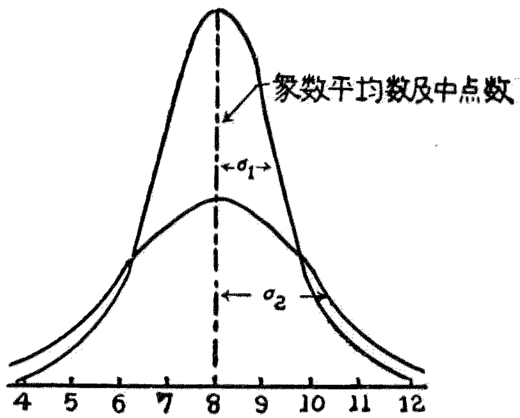


圖 39　集中量數相同差異量數不同之兩常態面積

(3) 平均差 (Mean deviation 簡寫作 M. D.)

(4) 標準差 (Standard deviation 簡寫作 S. D. 又作 σ，讀如 Sigma)

(5) 中點差 (Median deviation 簡寫作 Md. D.)

(6) 概誤差 (Probable error 簡寫作 P. E.)

中點差亦稱五十分差，即各差數之中點數，在近似常態次數分配中，其價值與二十五分差大致相同。此種差異量數之求法，頗爲簡單，知道求平均差，即可知道求中點差。蓋平均差爲各差數之算術平均數，而中點差則爲

各差數之中點數，因此我們對於中點差之求法，下面即不詳論，概誤差若在近似常態次數分配中，亦與二十五分差相近。此種差異量數，多用於考證確誤之度，待後章再行討論。以下卽分述全距，二十五分差，平均差，標準差四種差異量數。

1 全距

1. 何謂全距　全距為測量中兩極端量數之差異數，即量表上之全距離，其所包括之量數，佔全體量數百分之一百。

2. 如何去求全距　計算全距之方法，極其簡單，將測量中最大量數減去最小量數即得。

3. 全距之功用　用全距以表明差異，幾無功用之可言；雖因其計算簡單，間有用之以為檢查之目的與其他各種差異量數之補充，然若用此作代表差異之量數，則極不適宜。蓋此種差異之所表示，最不精確。所謂最大量數與最小量數，並無眞正之界限，特其量數發現之次數較少而已。大量數與小量數發現之次數，常有多寡之變動，故全距之範圍，亦隨之生大小之變動。例如表 13，全距之數為 95－20＝75，若於小量數之一端除去一量數，則其全距即變為 95－30＝65；而減此一量數，即將全距約減少百分之 13，發生絕大之變動矣。且全距相同之兩種測量，其各量數分配，亦不能盡同；其一測量之各量數或有集中之趨勢，而他一測量之各量數或散漫於全距之間，集中之程度甚小。由此可知用全距以表明差異，既常變動不定，又不能表出測量中量數分配之形式，此種表明差異最不精確之方法，自然以不用為宜。

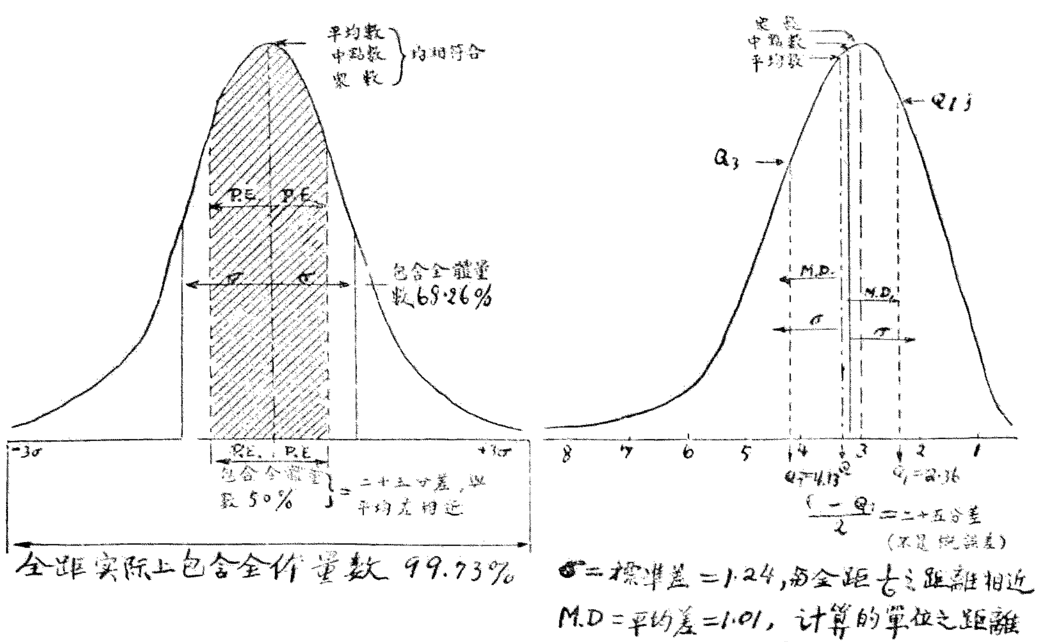


圖 40 指明『標準差』，『平均差』，『二十五分差』在常態次數曲線與偏態次數曲線上之應用

II 二十五分差

1. 何謂二十五分差 二十五分差，即分配中下二十五分點與上二十五分點之間之距離。在下二十五分點

以下及上二十五分點以上之極端量數，則可置之不問。此種差異量數，係用分配中中間一半量數距離之半數，以代表差異之程度。其公式為：$Q=\frac{Q_3-Q_1}{2}$ 式中之Q代表二十五分差，Q_1為下二十五分點，Q_3為上二十五分點。Q_1之下有全體量數百分之二十五，Q_3之上有全體量數百分之二十五，Q_3-Q_1包含全體量數百分之五十。Q為全體量數中間之百分之五十所佔距離之半數。若將此距離置於次數面積上平均數之左右兩邊，從底線向上引兩縱線，則此兩縱線間之面積，約含全體量數百分之五十。在常態次數分配中，下二十五分點加Q之距離或上二十五分點減Q之距離，均與中點數相合；若在偏態次數分配中，則不能與中點數符合。

2. 如何去求二十五分差　由上節所舉之公式，當能知道計算二十五分差。茲更分為(a)由未歸類量數求Q(b)由已歸類量數求Q兩種，說明計算時所循之步驟。

(a)由未歸類量數求Q　其計算之步驟如下：

(1)以4除量數之數目。

(2)由分配之小量數一端起，計算至第$\frac{1}{4}$及第$\frac{3}{4}$之量數，得Q_1及Q_3。

(3)從Q_3減去Q_1，以2除之，得Q，即所求之差異量數。

(b)由已歸類量數求Q　用表29說明其計算之步驟如下：

(1)求$\frac{N}{4}$。$\frac{300}{4}=75$量數。

(2)求Q_1。$Q_3=67{\cdot}308$（求法見前章）

(3) 求 Q_1。$Q_1=37.727$（求法見前章）

(4) 求 Q。因 $Q=\frac{Q_3-Q_1}{2}$，故 $\frac{67.308-37.727}{2}=\frac{29.581}{2}=14.791$，即所求之二十五分差。

表 29 指示由已歸類量數計算二十五分差

組距		
95.0—100	8	
90.0— 94.99	3	
85.0— 89.99	9	
80.0— 84.99	4	=61
75.0— 79.99	24	
70.0— 74.99	13	
65.0— 69.99	26	$Q_3=67.308$
60.0— 64.99	12	
55.0— 59.99	27	
50.0— 54.99	13	Q=此距離之$\frac{1}{2}$
45.0— 49.99	45	
40.0— 44.99	21	
35.0— 39.99	44	$Q_1=37.727$
30.0— 34.99	15	
25.0— 29.99	17	
20.0— 24.99	2	
15.0— 19.99	9	=51
10.0— 14.99	3	
5.0— 9.99	3	
0.0— 4.99	2	
	N=300 N/4=75	

3. 二十五分差之功用　二十五分差之優點，約有下列四點：(1)在各種差異量數中，以二十五分差最易計算。(2)此種差異量數之用途，十分普遍。(3) Q_1 與 Q_3 同時表示出來，可供參考之用。(4)用此種差異量數表示事實分配之情形，於初學最為適宜。其缺點則為此種差異量數，僅包含全體量數中央之一半，而對於兩極端之一半量數，則棄而不顧，故其所得之結果，精確之度較小。

III 平均差

1. 何謂平均差　平均差即分配中各量數與其平均數（衆數，中點數或算術平均數）之差數之算術平均數。各差數相加之時，可不按正負符號。若按正負符號總計各差數，則由衆數，中點數或算術平均數所求出之各差數，其正負之和，或為數甚小，或逕等於零，不能得正確之差數平均數。因此之故，各差數相加之時，必須不按正負之符號。計算平均差，用衆數，算術平均數或中點數去求均可，但通常則用中點數。其原由則因(1)中點數較衆數更為精確，(2)中點數較算術平均數容易計算，(3)由中點數求出之平均差，其量最少；所以用中點數去求。

平均差係一種距離，若在次數面積上之中點數左右兩端各置一平均差，其所佔之面積，約含全體量數百分之 57.5。

2. 如何去求平均差　計算平均差，有三種方法，即(a)由未歸類事實求平均差，(b)由已歸類事實求平均差，(c)計算平均差之簡法。茲將此三種計算方法之步驟分述如下：

(a)由未歸類事實求平均差　由未歸類事實求平均差之公式為：$M.D.=\frac{\Sigma d}{N}$ ……………(1)

表 30　指示由未歸類事實計算平均差及標準差

(1) 量　數	(2) 由中點數求差數 d'	(3) 由算術平均數求差數 d	(4) f d²
96	15•5	16•03	256•9
95	14•5	15•03	225•9
94	13•5	14•03	196•3
93	12•5	13•03	169•8
92	11•5	12•03	144•7
90	9•5	10•03	100•6
89	8•5	9•03	81•5
88	7•5	8•03	64•5
87	6•5	7•03	49•4
86	5•5	6•03	36•4
84	3•5	4•03	16•2
82	1•5	2•03	4•1
81	0•5	1•03	1•1
80　中點數	—0•5	0•03	
78　＝80•5	—2•5	—1•97	3•9
77	—3•5	—2•97	8•8
76	—4•5	—3•97	15•8
75	—5•5	—4•97	24•7
73	—7•5	—6•97	40•6
72	—8•5	—7•97	63•5
70	—10•5	—9•97	99•4
67	—13•5	—12•97	168•2
65	—15•5	—14•97	224•1
64	—16•5	—15•97	255•0
63	—17•5	—16•97	288•0
62	—18•5	—17•97	322•9
26)2079(79•97 ＝算術平均數	235•0 M.D.＝9•04	235•06 M.D＝9•04	26)2871•8 σ²＝110•45 σ＝10•51

式中之 d 爲每一量數與中點數之差數，N 爲量數之數目。茲用表 30 中之(1)(2)欄說明其計算之步驟。

(1)將量數列成順序分配。

(2)求量數數目得 26。

(3)求中點數得 80.5。

(4)求中點數與每個量數之差數；得 15.5, 14.5, 13.5 等等。符號之正負，在此種計算中本無關係，不過寫出來，為計算他種量數之方便。

(5)求差數之總數；不管其正負符號如何，悉將其相加，得 235.0。

(6)以量數數目 26，除差數總數 235，所得之差數算術平均數 9.04，即所求之平均差。第 (3) 欄之各數，係由算術平均數 79.97 求出之各差數，差數之總數為 235.06，以量數數目 26 除之得 9.04，即平均差。

(b)由已歸類事實求平均差　由已歸類事實求平均差之公式為：

$$M.D.=\frac{\Sigma fd}{N} \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

式中之 fd 為次數與差數相乘之積，餘與上節同。茲用表 31 說明其計算之步驟。

(1)將量數列成次數分配。

(2)求量數數目得 289。

(3)求中點數得 84.38。

(4)求中點數與每組中值之差數；得 13.12, 8.12, 3.12 等等。

表 31 指示由已歸類事實計算平均差

組距	中值 m	次數 f	差數 d	次數×差數 fd
95.0—100	97.5	22	13.12	288.64
90.0— 94.99	92.5	68	8.12	552.16
85.0— 89.99	87.5	51	3.12	159.12
80.0— 84.99	82.5	28	− 1.88	52.64
75.0— 79.99	77.5	47	− 6.88	323.36
70.0— 74.99	72.5	33	−11.88	392.04
65.0— 69.99	67.5	21	−16.88	354.48
60.0— 64.99	62.5	9	−21.88	196.92
55.0— 59.99	57.5	6	−26.88	161.28
50.0— 54.99	52.5	2	−31.88	63.76
45.0— 49.99	47.5	1	−36.88	36.88
40.0— 44.99	42.5	1	−41.88	41.88
		$N=289$ $\frac{N}{2}=144.5$ 中點數$=84.38$		2623.16 $M.D.=\frac{2623.16}{289}$ $=9.08$

(5)將每個差數與其相對之次數相乘，得 fd 欄各數。

(6)求差數之總數，得 2623•16。

(7)以量數數目除差數總數；得 $\frac{2623\bullet16}{289}=908$，即所求之平均差。

(c)計算平均差之簡法　用上面所述之詳法去求平均差，計算過於繁難，時間極不經濟，頗不適用，遠不如用簡法之更為節省精力及時間。計算平均差之簡法所依據之原理，與計算算術平均數之簡法所用之原理，大略相同，茲不復述。應用此種方法所含之重要步驟有二：(1)求假定中點數 (Assumed median) 與各量數之差數總和。假定中點數，即以真確中點數 (True median) 所在之組之中值充之。(2)用校正數去校正由假定中點數求出之差數總和。此校正數，即由假定中點數求出之差數總和與由真確中點數求出之差數總和之間相差之數。

由下所舉之例，即知由假定中點數求出之差數總和，常小於由真確中點數求出之差數總和。因此之故，無論假定中點數與真確中點數所居地位之關係如何，則必加此差數之校正數。

下面所舉之表 32 及表 33，均以每一組距作一單位計算，較之表 31 用詳法計算時，可節省許多算術上之勞力。表 32 係用真確中點數求差數，由此求出之差數總和，可不另加校正數。表 33 係用假定中點數求差數，由此求出之差數總和，必須另加校正數。表 32 求出之差數為 •62, 1•62, 2•62 等等，以之與次數相乘，所得之積，多至四五位數；表 33 求出之差數為 1,2,3, 等等，以之與次數相乘所得之積，至多亦不過三位數。用

眞確中點數求平均差，雖可省略加校正數一步手續，然因其次數乘差數一步，算術上之手續過於繁瑣，耗力太多，仍不及用假定中點數求平均差較爲省力，學者不可不知。

表 32 指示計算平均差之簡法（由眞確中點數求差數）

組距	f	以每一組距作一單位，由其中値求得之差數 d'	fd
95.0—100	22	2.62	57.64
90.0—94.99	68	1.62	110.16
85.0—89.99	51	.62	31.62
80.0—84.99	28	—.38	10.64
75.0—79.99	47	—1.38	64.86
70.0—74.99	33	—2.38	78.54
65.0—69.99	21	—3.38	70.98
60.0—64.99	9	—4.38	39.42
55.0—59.99	6	—5.38	32.28
50.0—54.99	2	—6.38	12.76
45.0—49.99	1	—7.38	7.38
40.0—44.99	1	—8.38	8.38
	N=289		Σfd'=524.66

眞確中點數=84.38 $\frac{\Sigma fd'}{N}=\frac{524.66}{289}=1.816$=以每一組距作一單位之平均差

$1.816\times5=9.08$=實際單位之平均差

表 33　指示計算平均差之簡法(由假定中點數求差數)

組　距	f	d	fd
95.0—100	22	3	66
90.0—94.99	68	2	136
85.0—89.99	51	1	51
80.0—84.99	28	0	
75.0—79.99	47	1	47
70.0—74.99	33	2	66
65.0—69.99	21	3	63
60.0—64.99	9	4	36
55.0—59.99	6	5	30
50.0—54.99	2	6	12
45.0—49.99	1	7	7
40.0—44.99	1	8	8
	N=289		Σfd=522

眞確中點數=84.38

假定中點數=82.50

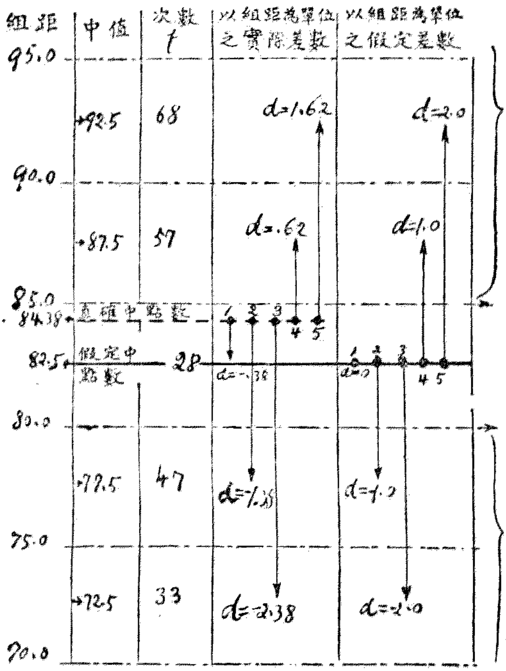
$c=\frac{1.88}{5}=.38$

總校正數 =c 乘實得中點數以上及以下量數之差數 $=.38\times(148-141)=.38\times7=2.66$。

以組距為單位之總差數 $=522+2.66=524.66$。$\frac{\Sigma fd}{N}=\frac{524.66}{289}=1.816=$ 以一組距作一單位之平均差。

$1.816\times5=9.08=$ 實際單位之平均差。

上面用文字解釋，恐尚有隱晦不明之弊，茲為使讀者完全瞭解起見，再用圖 1 說明眞確中點數與假定中點數所居之地位，與夫由眞確中點數求得之差數及由假定中點數求得之差數之大小。由圖 41 之所指示，知



數至此處共 141 量數以組距爲單位假定中點數在眞確中點數 .38 之下。此 28 量數假定其集中於中點故加在以下之 120 量數上

數至此處共 148 量數在眞確中點數以下之量數 $=120+28=148$ $\therefore 148-141=7$ 卽眞確中點數以下之量數比以上之量數較多之數。

圖 41　指明用簡法計算平均差

用假定中點數求出各量數之差數，無論在何組距中，常有一種錯誤，其錯誤之度，卽眞確中點數與假定中點數相差之距離。例如在組距 80.0—84.99 中，有 28 量數，用假定中點數求出各個量數之差數則等於 0，而用眞確中數求出各個量數之實際差數則爲 —.38，在組距 85.0—89.99 中，有 51 量數，用假定中點數求出各個量數之差數則等於 1，而用眞確中點數求出各個量數之實際差數則爲 0.62；其餘類推。換言之，卽凡在眞確中點數以上各個量數，其假定差數之距離，較實際差數之距離長 .38；凡在眞確中點數以下各個量數，其假定差數之距離，較實際差數之距離短 .38。如是知有 141 量數之假定差數長於實際差數，有 148 量數之假定差數短於實際差數，其長短之度，各爲組距之.38。換言之，卽知眞確中點數之上下，各有 141 量數，其假定差數長短之度恰相抵消，而與實際差數適相等。惟眞確中點數以下之量數爲 148，由 148 減去 141，尙餘 7 量數，此 7 之差數，各較實際差數短組距之 .38。以 7 乘 .38 得 2.66，以之爲總校正數，加於由假定中點數求差數總和 522 之上，得 524.66，與由眞確中點數求出之差數總和完全相同。

上面所舉之眞確中點數在假定中點數之上。若眞確中點數在假定中點數之下，其求法亦正相同。茲用表 34 說明如

下表之眞確數落在假定中點數之下，故凡眞確中點數以上之各量數，其假定差數必較實際差數爲短，眞確中點數以各量數，其假定差數必較實際差數爲長。表中眞確中點數以上之量數共有 68，故知有 68 量數之假定差於實際差數；眞確中點數以下之量數共有 55，故知有 55 量數之假定差數長於實際差

表 34 指示計算平均差之簡法，眞確中點數在假定中點數之下

組距	f	d	fd	
95.0—100	1	4	4	
90.0— 94.99	2	3	6	=68
85.0— 89.99	13	2	26	
80.0— 84.99	21	1	21	
75.0— 79.99	31	0		A.M.=77.5 T.M.=76.05
70.0— 74.99	19	−1	−19	C.=−1.45/5=−.29
65.0— 69.99	10	−2	−20	
60.0— 64.99	7	−3	−21	
55.0— 59.99	9	−4	−36	
50.0— 54.99	3	−5	−15	
45.0— 49.99	2	−6	−12	=55
40.0— 44.99	2	−7	−14	
35.0— 39.99	1	−8	−8	
30.0— 34.99	1	−9	−9	
25.0— 29.99	0	−10		
20.0— 24.99	1	−11	−11	
	N=123		Σfd=222	

數；其長短之度，各爲組距之 •29。由假定中點數求出之差數總和爲 222；總校正數爲 $-.29\times(55-68)$ $=3.77$。故平均差 $=\frac{222+3.77}{123}\times5=1.836\times5=9.180$。由是我們得一求平均差之公式如下：

設 T.Md.＝眞確中點數；

A.Md.＝假定中點數，

Na ＝眞確中點數以上之量數；

Nb ＝眞確中點數以下之量數；

i ＝組距之單位數；

c ＝校正數＝$\frac{\text{T.Md.}-\text{A.Md.}}{i}$；

M.D. ＝平均差，

則 $\text{M.D.}=\frac{\Sigma fd+c(Nb-Na)}{N}\times i$……………(3)

用表 34 之事實代入公式，

T.Md.＝76•05　　　Na＝68

A.Md.＝77•5　　　Nb＝55

$C=\frac{76.05-77.5}{5}=-.29$　　　$\Sigma d=222$

$\therefore\ \text{M.D.}=\frac{222+[-.29(55-68)]}{123}\times5=\frac{222+(-.29\times-13)}{123}\times5=\frac{225.77}{123}\times5$

$=1.836\times5=9.180$

下面再用表33之事實，將計算平均差之簡法所需之步驟，總括之為九步如下：

(1)將各量數分組列成次數分配，並求次數之總數，得 $N=289$。

(2)按前章求中點數之方法，求真確中點數，得 $T.Md.=84.38$

(3)用含有真確中點數組距 $(80.0-84.99)$ 之中值，為假定中點數，得 $A.Md.=82.5$。

(4)假設各組量數相差為1，求假定中點數與各量數之差數，得 d 欄各數；再以次數乘之，得 fd 欄各數；然後求差數之總數，得 $\Sigma fd=522$。

(5)求校正數『c』，即真確中點數與假定中點數相差之數。例中真確中點數為 84.38，假定中點數為 82.5，其相差之數為 $84.38-82.5=1.88$。此差數係按組距等於5計算，但表中計算之單位，則假設組距等於1，故每一量數之校正數為 $\frac{1.88}{5}=.38$。

(6)求真確中點數以上各組之次數總數，與真確中點數以下各組之次數總數。若真確中點數大於假定中點數，則將含有中點數組之次數與其下各組之次數相加；若真確中點數小於假定中點數，則將含有中點數組之次數與其上各組之次數相加。此例之真確中點數大於假定中點數，故得真確中點數以上各組之次數總數 Na 為 141，以下各組之次數總數 Nb 為 $120+28=148$，$Nb-Na=148-141=7$。將第五步求出之校正數與此差數相乘，為 $.38\times7=2.66=$ 總校正數。

(7)將總校正數加於差數總數之上，得 $522+2.66=524.66$。

(8)將次數總數除 524.66，得 $\frac{524.66}{289}=1.816$，卽平均差，但此平均差係假設組距之單位爲 1 求出之者，而組距之實際單位，非 1 而爲 5，故不能謂此爲實際單位之平均差。

(9)用組距之單位乘第八步求出之平均差，爲 $1.816\times5=9.08$，卽實際單位之平均差。

3. 平均差之功用　平均差之優點，有下列各點：

(1)平均差係根據於量數之全體求出，各量數均能發生影響。

(2)平均差容易計算，且易使人瞭解。

(3)平均差精確之度，較優於二十五分差；但其計算不及二十五分差容易。

平均差雖有上列三優點，然通常應用之者甚少，而多用標準差。蓋有標準差，平均差則可以不用，卽爲後來計算他種量數計，應用平均差，亦較應用標準差爲少。

IV 標準差

1. 何謂標準差　標準差卽分配中各量數與其平均數（衆數，中點數，或算術平均數）之差數之平方之算術平均數之方根；故標準差或作均方差（mean square deviation）。標準差與平均差之區別，一則爲各差數平方之算術平均數之方根，一則爲各差數之算術平均數。計算平均差時，各差數之正負符號，雖可不顧，而符號仍然存在；計算標準差時，將各差數平方，其負數符號，遂無形消滅；此又標準差與平均差形式上不同之點。我們

求標準差，雖可用衆數，中點數，或算術平均數去求，然按數學上之理論，求精密之差異量數，須使差數之平方和爲最小；而求最小之差數平方和，須由算術平均數求各量數之差數。故通常計算標準差時，皆用算術平均數去求差數，此與計算平均差時之用中點數去求差數者又異。

標準差亦係一種距離，若在次數面積上之平均數左右兩端各置一標準差，則其所估之面積，約含全體量數百分之 68.26。

2. 如何去求標準差 計算標準差，有三種方法，即 (a) 由未歸類事實求標準差，(d) 由已歸類事實求標準差，(e) 計算標準差之簡法。茲將此三種計算方法之步驟分述如下：

(a) 由未歸類事實求標準差 由未歸類事實求標準差之公式爲：

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma d^2}{N}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

式中之 σ = 標準差，或以 S.D. 代表之；d = 各量數與算術平均數之差數，d^2 = 差數之平方；N = 分配中量數之數目。茲用表 30 中之 (1)，(3)，(4) 各欄說明其計算之步驟。

(1) 將量數列成順序分配。

(2) 求量數之數目得 26。

(3) 求算術平均數得 79.97，

(4) 求每個量數與算術平均數之差數，得(3)欄中 16.03；15.03 等差數。

(5)求各差數之平方，（可用乘方表見附錄表 II）；得 256.9；225.9 等數。

(6)求差數之平方和得 2871.8。

(7)求差數平方和之算術平均數得 110.45，此即 σ^2。

(8)求此算術平均數之方根，即將其開方得 10.51，即所求之標準差。

(*b*)由已歸類事實求標準差　由已歸類事實求標準差之公式爲：

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N}} \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

式中之 f 代表各組量數之次數；fd² 爲次數與差數之平方相乘之積。其計算之步驟爲：

(1)將量數列成次數分配。

(2)求次數總數 N。

(3)求算術平均數。

(4)求每組之中值與算術平均數之差數 d。

(5)將各差數自乘，求 d^2。

(6)將各平方差數與相當之次數相乘，求 fd^2。

以下各步，與由未歸類事實求標準差之各步全同，茲不復述。

在已歸類之次數分配表中，用詳法求標準差，手續過於麻煩，費力太多，實際上用之者甚少。故通常計算，悉用

簡法。

(c)計算標準差之簡法　在次數分配中，由眞確平均數（True mean）與各組量數求出之差數，其後各步乘得之結果，常有四五位數字。統計學者爲免除此種計數上無謂之繁瑣起見，則用假定平均數（Assumed mean）與各組量數求差數。此假定平均數，以分配中任何組距之中值爲之均可；而求差數時，又將每一組距視作一單位。如是則可省略許多算術上之工作。由求算術平均數之簡法與求平均差之簡法之同樣原理，我們可得一求標準差之公式如下：

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N}-c^2}\times i \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

茲用表35之事實，將用簡法計算標準差之步驟總括之如下：

(1)將各量數列成次數分配表。

(2)估計一組距含有平均數（要以愈近於眞確平均數者爲佳），即以該組之中值爲假定平均數。例中之假定平均數爲組距40.0—44.99之中值42.5。

(3)假設組距爲一單位，求假定平均數與各組中值之差數d；得1，2，3，等等。－1，－2，－3，等等各差數。

(4)將各次數與其相當之差數相乘，求fd；得10，9，16，14，等等。

(5)用代數法相加，求次數與差數相乘之積之總和；得Σfd＝327－336＝－9。

表 35　用簡法計算 303 名大學生視覺想像力之標準差

組　距	次數 f	差數 d	fd	fd²
90.0—94.99	1	10	10	100
85.0—89.99	1	9	9	81
80.0—84.99	2	8	16	128
75.0—79.99	2	7	14	98
70.0—74.99	3	6	18	108
65.0—69.99	5	5	25	125
60.0—64.99	7	4	28	112
55.0—59.99	26	3	78	234
50.0—54.99	41	2	82	164
45.0—49.99	47	1	47	47
40.0—44.99	50	0	327	
35.0—39.99	32	−1	−32	32
30.0—34.99	31	−2	−62	124
25.0—29.99	18	−3	−54	162
20.0—24.99	16	−4	−64	256
15.0—19.99	11	−5	−55	275
10.0—14.99	3	−6	−18	108
5.0— 9.99	5	−7	−35	245
0.0— 4.99	2	−8	−16	128
	N=303		−336 327 303)−9(−.03	303)2527(8.34 $=s^2$

$c=-.03$　　$8.34-.001=8.33=\sigma^2$

$c^2=.001$　　$\sigma=2.88$ 以組距爲單位

$\sigma=2.88\times5=14.4$ 實際單位

(6)用次數總數 N 除 Σfd，求校正數 c；例中 N=303；Σfd=−9；故 $c=\frac{-9}{303}=-.03$。

(7)每一 fd 各以其相當之 d 乘之求 fd^2；得 100，81，128，等等。

(8)求 fd^2 之總和；$\Sigma fd^2=2527$。

(9)用次數總數 N 除 Σfd^2，求 S^2；$S^2=\frac{2527}{303}=8.34$，$S^2$ 為由假定平均數求出之標準差之平方。

由假定平均數求出之差數之平均數，不能無誤其錯誤之數即爲正負兩類差數相差之數之平均數；故必以此數校正之。（若假定平均數適等於眞確平均數則正負兩類差數相差之數必爲 0，即無庸校正。）同此理由可知差數平方之平均數錯誤之數，必爲正負兩類差數相差之數之平均數之平方，故亦必以此數校正之，是卽 C^2。

(10)將校正數自乘，求 C^2；得 .001。

(11)由 S^2 減去 C^2，求 σ^2；$\sigma^2=S^2-C^2=8.34-.001=8.339$。

(12)將 σ 開方，求 σ；$\sigma=\sqrt{8.339}=2.88$。但此數係假定組距之單位爲 1 計算，故必用組距之實際單位與之相乘，使之還原。

(13)用原來之組距單位，乘所求得之標準差，得實際之標準差。$2.88\times5=14.4$。

3. 標準差之功用　各種差異量數，以標準差爲最佳，在教育統計上，用之甚多。無論何種情形，均可用標準差爲測量差異之量數；猶之算術平均數在集中量數中，常可以之爲代表數。標準差之優點分析言之，約有四端

(1)標準差根據於全體量數求出。

(2)標準差精確之程度，比平均差較大；故欲將不確之度減低時，以應用標準差為適宜。

(3)標準差受所取事樣變動 (Sampling of fluctuations) 之影響甚小。

(4)標準差之計算方法，對於求皁爾生之相關係數 (Pearson coefficient of correlation)，大有幫助。且計算確度量數時，亦須應用標準差。

以上所說，為標準差所具之優點。惟計算稍難，其意義又不易為常人所瞭解，且最難就實例解釋明白，稍為欠缺耳。

V 各種差異量數之關係

由經驗所得之結果，在對稱或稍偏之次數分配中，六倍標準差之距離，約含全體量數百分之99。平均差與二十五分差均比標準差為小，前者約當標準差之五分之四，後者約當標準差之三分之二。由此關係推算，七倍半平均差之距離，或九倍二十五分差之距離，亦約含全體量數百分之99。

前面曾說過，在常態次數分配時，概誤錯，中點差，二十五分差皆相等。由以上之理論，得各種差異量數之關係如下：

$$\sigma = 1.2533\ M.D.$$

$$\sigma = 1.4826\ P.E.，或\ Md.D.，或\ Q$$

$$M.D. = .7979\sigma$$

$$M.D. = 1.1843\ P.E.,\ 或\ M.D.,\ 或\ Q$$

$$P.E.,\ 或\ Md.D.,\ 或\ Q = .6745\sigma$$

$$P.E.,\ 或\ Md.D.,\ 或\ Q = .8453\ M.D.$$

以上係各種差異量數之關係。此種關係，須在常態次數分配中，方能符合。平常應用，有一種差異量數已足；若有時因特別原故，須用多種差異量數時，可依上列之關係以轉化之，無須一一去求。

VI 相對差異量數

前面所述之全距，二十五分差，平均差，標準差等，稱之為絕對差異量數 (measures of absolute variability)。對於兩種測量，欲比較其差異之大小時，若僅就各測量之絕對差異量數直接比較，則所得結果，必不可靠。蓋因各測量所用之單位，與所得之集中量數，其數之大小不能盡等；因之由集中量數所得之絕對差異量數，亦參差不齊。故欲比較兩測量差異之程度，苟非其集中量數與量表之單位相同，則不可用絕對差異量數，而必須用相對差異量數 (measures of relative variability)。請進論相對差異量數。

此種差異量數，可分兩類：(1)測量單位相同之兩分配比較，例如兩城市之教員薪金，兩班學生之測驗成績，或地方費之支配之比較。(2)測量單位不同之兩分配比較，例如用桑戴克量表 (Thorndike scale; 單位為 1，距離為由 4 至 18) 測量某班學生習字成績與用愛里斯量表 (Ayres scale; 單位為 10，距離為由 20 至

90）測量他班學生之習字成績比較，或教員之薪金與其任職年限比較。茲將此兩類差異分論如下。

1. 相同之測量單位　兩分配之測量單位相同，不能用絕對差異量數以比較其差異之程度。例如比較表36中用於學校費用與用於衞生科費用之差異，我們如用平均差（絕對差異量數）以比較此兩項事實差異之大小，則用於學校費用之差異，約比用於衞生科費用之差異大九倍。惟查此種絕對差異之求得，蓋由於兩種不同之集中量數，一為32.30，一為1.40；集中量數大者，則求出之絕對差異當然要大。如是而用之以比較差異之程度，必不正確。若用相對差異，則知用於學校費用之差異，實比用於衞生費用之差異為小。

2. 不同之測量單位　同前理由，兩分配之測量單位不同，亦不能用絕對差異量數以比較其差異之程度。例如有兩個分配：一為教員薪金，其全距為由$250至$1175，平均數為$640，平均差為$150；一為其任職年限，其全距為由1至37，平均數為9，平均差為5。我們若比較此種分配差異之大小，必須用相對差異量數方可。

由此可知比較兩分配之差異，無論其測量之單位相同或不同，均須用相對差異量數。此種相對差異量數，通常稱之為差異係數（Coefficient of variation）卑爾生求差異係數之公式為：

$$V=\frac{100\sigma}{M}$$

式中之V代表差異係數。實際言之，以M除σ所得之結果（即$\frac{\sigma}{M}$），即為差異係數，其所以用100乘之者，蓋使之化為百分比率數耳。（在他種統計學書中所謂差異係數，本未用100去乘，此處係根據拉格之應

用於教育上之統計法。下面所舉桑戴克之差異係數之公式同此。）其他各種絕對差異量數，如平均差，二十五分差等等，皆可用同樣法則求其差異係數。惟有必須注意者，若求絕對差異時，係用某種集中量數，則求差異係數時亦必以該種集中量數除之，例如求平均差時用中點數，則求此種差異係數時亦必以中點去除數。

表36中之(3)欄，係用皋爾生公式求出各項市政所用費用之差異係數。（惟未用100去乘，故非百分比率

表36　美國2,500人至50,000人城市地方經費支配差異之比較(1902—1903年)

市政種類	(1) 中點數	(2) 平地差	(3) 皋爾生之差異係數	(4) 桑戴克之差異係數
普通行政……	8.08	1.54	.19	.54
警察科……	8.16	1.74	.21	.609
消防科……	9.98	2.58	.26	.817
衞生科……	1.40	.747	.53	.633
慈善事業……	3.02	2.98	.99	1.71
道路……	8.19	2.52	.31	.908
街燈……	6.43	1.84	.29	.725
公共衞生……	3.67	1.78	.49	.927
學校……	32.30	6.67	.21	1.175
圖書館……	1.14	.56	.49	.524
公共遊戲……	.61	.642	1.05	.814
債務息金……	12.50	5.75	.46	1.62

數）我們用此種差異係數，即可比較各項市政所用費用差異之大小，該欄中差異最大者爲用於公共遊戲與慈善事業之費用，而差異最小者則爲用於警察與學校之費用。

桑戴克另主張一種相對差異量數。當求差異係數時，彼不主張直接用集中量數去除差異數，而主張用集中量數之方根去除差異數，以爲由此求得之結果，更與理論及事實兩者適合。其公式爲：

$$V=\frac{100\,\mathrm{M.D.}}{\sqrt{\mathrm{Md.}}}$$

式中用 100 乘 $\frac{\mathrm{M.D.}}{\sqrt{\mathrm{Md.}}}$，其用意亦在使之化爲百分比率數。表 36 中之(4)欄，即用此種公式求出之差異係數（但尙未用 100 去乘化爲百分比率數）。其中以用於圖書館與普通行政之費用之差異爲最小，以用於慈善事業與債務息金之費用之差異爲最大。

卑爾生之差異係數與桑戴克之差異係數，其結果不一致。據拉格之經驗，比較兩分配差異之大致時，以採用卑爾生之差異係數爲適定。

VII 偏斜量數 (Measures of skewness)

上面所討論之各種差異，在用以測量次數分配分散之程度，而其所注重，大都在對稱或近於對稱之分配。本節所討論之偏斜量數，則在測量次數分配偏斜之度。請先將偏斜之意義解釋明白，然後再論求偏斜之方法。

所謂偏斜者，即不對稱之謂。在對稱之次數分配中，衆數，平均數，及中點數三者合而爲一（參看圖 39）；若

分配為偏斜，則此三者即有若干之差異，三者之差異愈大，則其偏斜之度亦愈大。通常所用之偏斜量數，為平均數與衆數之差數。如平均數大於衆數，則所得之差數即為正，稱之為正的偏斜；此種偏斜之次數面積，小量數之端（左端）即高於大量數之端（右端）。如平均數小於衆數，則所得之差數即為負，稱之為負的偏斜，此種偏斜之次數面積，大量數之端（右端）即高於小量數之端（左端）。至於為何用平均數與衆數之差數以為偏斜量數，則因衆數對於極端事件之大小，不發生影響，而平均數則不僅對於此種事件之大小發生影響，且對於其距中心之遠近亦有關係，故此種事件之差異，即可以之為偏斜量數。由此原理擴充，平均數與衆數兩者對於中點數亦有一定關係。據經驗之法則，在次數分配無大偏斜之時，中點數常落於平均數與衆數之距離之三分之一之一點上；因之 $Mo.=M.-3(M.-Md.)$。就此關係，則由平均數與中點數之差數之三倍，亦可用之為偏斜量數。

我們如欲比較兩分配偏斜之度，須將其偏斜量數化為偏斜係數，(Co-efficients of skewness) 始可比較，其理由與比較兩分配差異之程度時，須將其差異量數化為差異係數，完全相同。惟求偏斜係數時，非用集中量數去除，乃用差異量數去除，用偏斜係數以比較各分配偏斜之度，無論其原來單位之大小與種類之異同，均可測量比較。

求偏斜係數之公式有二。茲述之如下：公式(1)

公式(1) $j=\dfrac{M-Mo}{\sigma}$

式中之 j，代表偏斜係數。惟眞確衆數，甚不易求出。但因衆數＝平均－3（平均數－中點數）以之代入上式，得

$$j=\frac{3(M-Md)}{\sigma}$$

公式(2) $$j=\frac{(Q_3-Md)-(Md-Q_1)}{Q}=\frac{Q_1+Q_3-2Md}{Q}$$

(1)式比(2)式較精密，故引用最多。在(1)，(2)兩式中，如 $M.-Md.$ 或 $(Q_3-Md.)-(Md.-Q_1)$ 爲零時，則次數之分配爲對稱，稱爲常態次數分配。若 Md 之數小於 M.，或 $(Md.-Q_1)$ 之數小於 $(Q_3-Md.)$，則所得之比率數爲正，此種分配，稱爲正的偏態次數分配。若 Md. 之數大於 M.，或 $(Md.-Q_1)$ 之數大於 $(Q_3-Md.)$，則所得之比率數爲負，此種分配，稱爲負的偏態次數分配。

至於 j 之數值，在(1)，(2)式中，最小之數值爲 0，即當次數分配爲對稱之時；其最大之數值，在實際之測量上，少有過於 ± 1 者。

VIII 練習問題

1. 各種差異量數，何者應用最多？何者最不適用？其故爲何？
2. 平均差與標準差不同之點爲何。
3. 何以集中量數不同之兩分配，不能用絕對差異量數比較差異之程度？

4. 單位不同之兩分配，可否用差異係數比較其差異爲何？

5. 差異係數與偏斜係數之功用各爲何？

6. 用第六章練習問題8所列之(a)，(b)，(c)，(d)四表，求下列各數：

(1)求各表之二十五分差。

(2)求各表之平均差；(c)，(d)兩表用簡法計算。

(3)求各表之標準差；(c)，(d)兩表用簡法計算。

(4)求各表之差異係數。

四種分配

	分配A 每秒鐘所讀之字數	分配B 按百分計算之圖畫分數	分配C 每分鐘算出之算術題數	分配D 學生所得之數學分數
算術平均數＝	3.9	77.8	12.4	76.9
標準差＝	1.4	19.3	2.9	11.3

(5) 求各表之偏斜係數。

(7) 用皋爾生之公式及桑戴克之公式，求下列四種分配之差異係數。

8. 上列之四種分配，依皋爾生之差異係數，其差異以何者爲最大？何者爲最小？

9. 上列之四種分配中，那兩種分配，可用其絕對差異量數直接比較？爲何？

10. 求圖 40 偏態次數曲線之偏斜係數。斷定此次數面積爲正的偏態抑負的偏態？

IX 參考書報

1. 薛鴻志：教育統計學大綱（再版）第六章。
2 張秉潔，胡國鈺：教育測量，第九章。
3. 周調陽：應用於教育測量上之統計法第三章，教育叢刊第四卷第三集。
4. Rugg, H.O.: Statistical Methods Applied to Education, Chapter VI.
5. Secrist, H.: An Introduction to Statistical Methods, Chapter XI.
6. Thorndike, E.L.: Theory of Mental and Social Measurements, Chapters III and IV.
7. King, W.I.: Elements of Statistical Methods, Chapters XIII and XIV.
8. Whipple, G.M.: Manual of Mental and Physical Test, Part I, Chapter III.
9. Yule, G.U.: An Introduction to the Theory of Statistics, Chapter VIII.

10. Monroe, W.S.: The Theory of Educational Measurements, Chapter XII.

第八章　相關量數 (Measures of relationship)

I 何謂相關量數

1. 相關之意義　所謂相關 (Correlation) 者，即謂兩組事實之中，有某種原因的關係之存在；當一組事實有重大之變動時，他組事實亦隨之發生重大之變動。更具體言之，假如學生之國文成績與算學成績有相互之關係時，則國文成績優者，算學成績亦優；國文成績劣者，算學成績亦劣；或國文成績優者，算學成績反劣，國文成績劣者，算學成績反優。相關量數，即用以表明兩係量數相關的程度之一種方法；其相關程度之高低，則用相關係數 (Coefficient of correlation) 去表示，通常以 r 代之。

2. 相關之種類　相關之種類有三：

(1) 正的相關，(2) 負的相關，(3) 無相關。

在兩種測量之中，當其一量增加時，他一量亦隨而增加；其一量減少時，他一量亦隨而減少；此種關係，稱之曰正的相關。

在兩種測量之中，當其一量增加時，他一量反因而減少；其一量減少時，他一量反因而增加；此種關係，稱之曰負的相關。

在兩種測量之中，當此量顯增減之變動時，他量不發生影響；他量顯增減之變動時，此量不發生響影；此種情

形，稱之曰無相關卽謂兩種測量間無相互之關係。

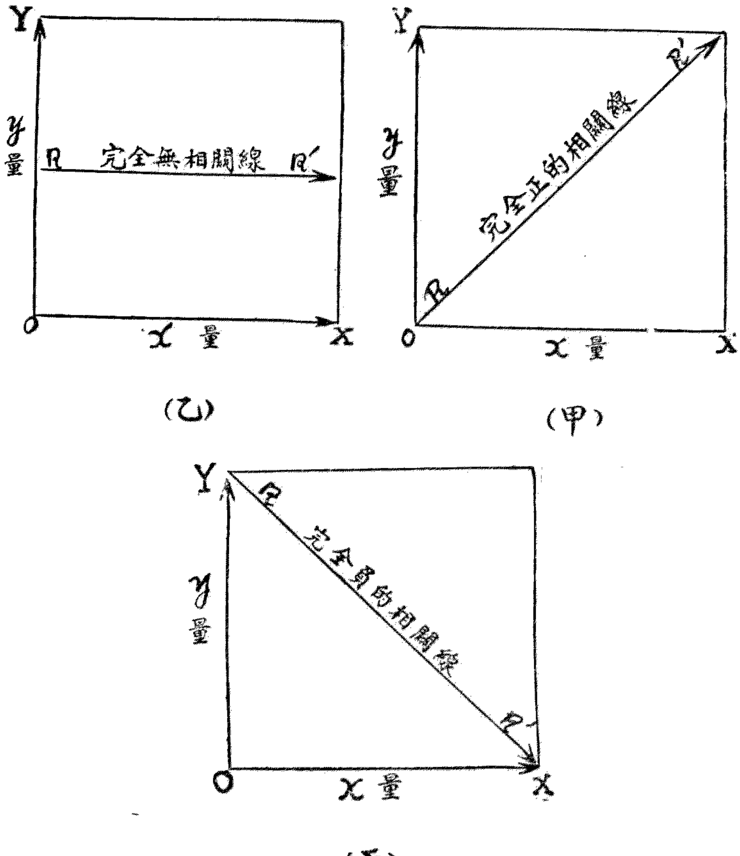


圖 42 說明各種相關線

以上各種相關，均可用直線表明。例如圖 42，設 oy 爲竪線，代表 y 量；ox 爲橫線，代表 x 量；RR' 爲相關

線，代表相關之程度。如二量顯完全正的相關時，則 RR' 線正向右上進行，如圖 42 (甲)是；斯時 x 之大量量數與 y 之大量量數相連，x 之小量量數與 y 之小量量數相連。譬如說學生之國文成績與算學成績顯此種關係，即謂學生之國文成績第一者，算學成績亦第一；國文成績第二者，算學成績亦第二；國文成績最劣者，算學成績亦最劣。若二量完全無相關時，則 RR' 線向右進行，與 OX 線平行，如圖 42 之(乙)是；斯時 x 量之增減，不影響於 y 量。譬如說學生之國文成績與算學成績完全沒有相關，即謂國文優者，其算學可優可劣；算學劣者，其國文亦可優可劣。若二量顯完全負的相關時，則 RR' 線正向右下進行，如圖 42 之(丙)是；斯時 x 之大量量數與 y 之小量量數相連，x 之小量量數與 y 之大量量數相連。譬如說學生之國文成績與算學成績顯此種關係，即謂學生之國文成績最優者，算學成績最劣；國文成績第二優者，算學成績第二劣。

用相關係數 r 表示相關之所有各數，爲由 $+1$ 經過 0 以至於 -1。r 之數值若爲 $+1$，則所表示爲完全正的相關。若 r 由 $+1$ 逐漸減小，則正的相關密切之程度亦漸減少；迨 r 減至 0 時，則正的相關之程度完全消失。r 之數值若爲 -1，則所表示爲完全負的相關。若 r 由 -1 逐漸增加，則此相反之關係次第減少；迨 r 增至 0 時，則此相反關係之程度完全消失。由 $+1$ 至 0 中間各數之所表示爲正的相關，由 0 至 -1 中間各數之所表示爲負的相關，而 0 之所表示則爲完全無關係。

3. 相關之高低　假如求出某兩種測量之相關係數 r 爲 $.38$，究竟我們對於此相關係數 $.38$，應作如何解釋？其將以此係表示某兩測量之相關程度高耶？抑以此係表示其相關程度低耶？此種高低之解釋，原無一

定之界限各統計學者之意見，亦常不一致。在教育研究中有以係數 ·25 爲表示相關之程度高，以 ·40 之所表示爲甚高者；亦有以 ·25 之所表示爲甚低，以 ·50 之所表示爲稍高者。麥柯 (Mc Call) 謂現在一般統計學者之所公認，則係數

自 0 至 ±·40，係表示相關之程度低；

自 ±·40 至 ±·70，係表示相關之程度頗顯著；

自 ±·70 至 ±1·00，係表示相關之程度高。

而拉格則由其考查許多相關表之經驗，對於相關係數各數值之所表示，得有一種相當解釋：爲係數

在 ·15 或 ·20 以下，則其相關之程度無足輕重；

自 ·15 或 ·20 至 ·35 或 ·40，則其相關之程度低小；

自 ·35 或 ·40 至 ·50 或 ·60，則相關之程度顯著；

自 ·60 或 ·70 以上，則相關之程度高。

拉格並謂現在之各種教育測驗，其相關係數，鮮有達到 ·70 以上者；如能達到 ·70 以上，即可視其相關之程度甚高。

II 求相關量數之各種方法

關於相關量數之計算方法甚多。爲便於敘述起見，先將比較常用之各種方法，分類列出，作爲總綱；然後再分

作若干節，依次說明。

教育統計學所處理之事實，約可分作兩大類：第一類事實，屬於分量的，係由精密之測量得來，能表示所測量事物某種特質之多少；如用精密測量方法測得兒童智慧年齡之大小，數學分數之多少之類。是處理此種事實所用之統計方法，稱之爲『變量之統計』(Statistics of variables)。第二類事實，屬於性質的，非由精密之測量得來，僅能表示某種特質之有無；如計算某班學生及格與不及格數，中才與下愚數之類。是處理此種事實所用之統計方法，稱之爲『品質之統計』(Statistics of attributes)。由是我們敘述求相關量數之方法，亦可分作變量與品質兩大類：

甲. 由變量的事實求相關之方法　此類方法，又可分爲：

1. 由組中各量數之價値及位置計算相關之方法：

A. 直線相關 (Rectilinear correlation)，卽表示相關表 (correlation table) 中各行各點平均之線爲直線。求此種相關之適宜方法爲『乘積率法』(Product-moment method)。

B. 非直線相關 (Nonrectilinear correlstion)，卽表示相關表中各行各點平均之線非直線。求此種相關之適宜方法爲『相關比率』(『Correlation rati』)。

2. 由組中各量數之位置計算相關之方法：

A. 各種等級法 (methods of ranks)：

a. 斯柏滿之等級差異法 (Spearman's method of rank difference)。

b. 斯柏滿之相關『尺度』(Spearman's "footrule" for correlation)。

B. 各種四層表法 (methods of fourfold tables):

a. 皐爾生之 $\cos\pi$ 法

b. 謝巴得之異號法 (Sheppard's method of unlike signs)。

乙. 由品質的事實求相關之方法　此類方法，不如甲類方法之重要，其比較稍可用之方法，有皐爾生之均方相關法 (method of mean square contingency)。以下將依次分述各種相關之計算法。

III 乘積率法

乘積率法，在求相關量數之各種方法中，最爲通行，亦最爲精密。應用此種方法計算相關，有詳簡不同之兩種計算法。用詳法計算時，須列相關表，於求相關係數之外，並求消長係數 (Regression coefficients)；若用簡法計算，則不列相關表，祇能求相關係數，不能求消長係數。當量數較少之時，以用簡法較爲簡捷，但其功用甚不完備耳。茲先述列相關表之詳密計算法，次及不列相關表之簡法。

甲、就相關表計算相關之方法

關於此種計算方法，可分(1)製造相關表，(2)計算相關係數，(3)計算消長係數三大步驟：

1. 相關表之製法　製造相關表，可分四步說明如下：

(1) 決定各分配組距之大小及界限。在第五章第Ⅰ節所說製造次數分配表之各種原理，此處仍能應用；所不同者，爲製造該種分配表時，係排列一種測量，此則須將兩種測量各量數配合成對而排列之耳。

(2) 指定一測量之量爲x量，又一測量之量爲y量。將所定y量組距之界限，沿表之左端之豎線書下，量數自小而大，由下而上；x量組距之界限，沿表之底端之橫線書下（但通常置於頂端），量數自小而大，由

表 37　說明製造相關表之第一步

圖畫能力 (y)	商店實習能力 (x) 71—75	76—80	81—85	8 —90	91—95
100—96			|	||	|
95—91		||	卌 |||	卌卌 卌卌 |||	卌
90—86		|||	卌卌 卌卌 |	卌卌 卌卌 卌卌|	卌 |||
85—81	||	卌 ||||	卌卌 卌卌 卌卌	卌卌 卌 |	|
80—76	||	卌	卌卌 卌	卌 ||||	
75—71	|	卌 |	||||		
70—66		|	|	|	
65—61	|				

左而右。例如表 37 左端所列之圖畫能力為 y 量，其組距為 61—65，66—70，71—75，等等，係由下而上；頂端所列之商店實習能力為 x 量，其組距為 71—75，76—80，81—85，等等，係由左而右。

表 38　說明製造相關表之第二步

圖畫能力 (y)	商店實習能力 (x) 71—75	76—80	81—85	86—90	91—95
100—96			1	2	1
95—91		2	8	22	5
90—86		3	21	31	8
85—81	2	9	30	16	1
80—76	2	5	15	8	
75—71	1	6	4		
70—66		1	1	1	
65—61	1				

(3) 將兩測量之各對量數，記入表中之相當方格中。例如第一名學生得商店實習分數 93 分，得圖畫分數 98分，我們即循商店實習能力之組距中，查得組距 91—95，循圖畫能力之組距中，查得組距96—100；

然後沿組距 96—100 之欄向右橫行，沿組距 91—95 之欄向下直行，至其相交之方格中，用鉛筆畫一短線。又如最末一名學生得商店實習分數 71 分，得圖畫分數 61 分，我們即在商店實習能力之組距 71—75 與圖畫能力之組距 61—65 相交之方格中，用鉛筆畫一短線。表 37 各方格中之各記號，即依此法作成者。製造第一步之相關表，比製造次數分配表容易錯誤，務須特別留心。

(4) 將用鉛筆所畫之各短線，用數字書出，列入相當之方格中，即成上列之表 38。我們就表 37 或表 38 各對量數分佈之情形，即可察知兩種測量相關之大概。

2. 相關係數之求法　相關表製成之後，第二步手續，即爲求相關係數 r。依皮爾生之公式，

$$r=\frac{\Sigma xy}{N\sigma_x\sigma_y}。$$

式中之 N 爲兩測量之量數對數，即各測量之量數總數；σ_x 爲其一測量（稱 x 量）之標準差；σ_y 爲他一測量（稱 y 量）之標準差；x 爲 x 量各量數與其平均數之差數；y 爲 y 量各量數與其平均數之差數；Σxy 爲 x 量與 y 量各相當差數乘積之和。我們如將各部分之數值一一求出，以之代入公式，即可求出 r 之數值。茲就圖 43 說明計算相關係數之步驟如下：

(1) 求各分配之量數總數。將各橫行之次數相加列入 f_y 欄，各豎行之次數相加列入 f_x 欄；再將 f_y，f_x 欄各次數相加（f_y 之數目與 f_x 之數目相等）列於 f_y 與 f_x 相交之方格中；如圖，N＝207。

(2) 估計各分配含有平均數之組距，如圖，估計 y 量含有平均數之組距爲 86—90，其估計平均數爲

88•5；估計x量含有平均數之組距爲 81—85，其估計平均數爲 83•5，即在此兩組距之上下各畫組線二條，以示區別。

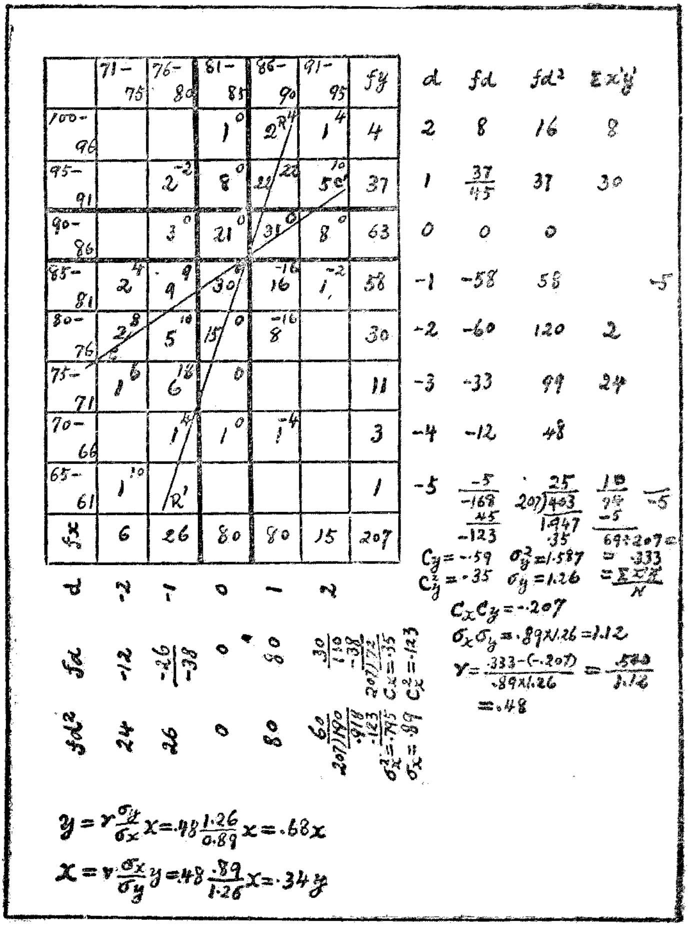


圖 43　說明相關係數及消長係數之計算法

(3)將每一組距視作一單位，以各量組距之中值與各量之估計平均數求差數，得 1, 2, −1, −2, 等等，分別列於各量之 d 欄。

(4)將各量之次數與其相當之差數相乘；如圖，y 量之次數與差數相乘，得 $4\times2=8$, $37\times1=37$, 等等，x 量之次數與差數相乘，得 $6\times-2=-12$, $26\times-1=-26$, 等等，分別列於各量之 fd 欄。

(5)將 fd 用代數法相加，求其總和；即 $\Sigma fd_y=-168+45=-123$; $\Sigma fd_x=110-38=72$。

(6)用量數總數 N 除 Σfd，求校正數；即 $C_y=\frac{-123}{207}=-.59$; $C_x=\frac{72}{207}=.35$。

(7)將校正數自乘；即 $C^2{}_y=.37$; $C^2x=.123$。

(8)將 fd 用 d 乘之，求 fd^2; 即 $fd^2y=16, 37, 0, 58, 120$, 等等；$fd^2x=24, 26, 0, 80, 60$。

(9)將 fd^2 欄各數相加，求 Σfd^2; 即 $\Sigma fd^2y=403$; $\Sigma fd^2x=190$。

(10)用 N 除 Σfd^2，求 S^2; 即 $S^2y=1.947$; $S^2x=.918$。

(11)由 S^2 減去校正數平方，求 σ^2; 即 $\sigma_y{}^2=1.947-.35=1.597$; $\sigma_x^2=.918-.123=.795$。

(12)將 σ^2 開方求 σ; 即 $\sigma_y=\sqrt{1.597}=1.26$; $\sigma_x=\sqrt{.795}=.89$。

於此有應注意之點，上面所求之 y 量及 x 量之標準差，皆以組距為 1 記算，然無須用原來組距之單位去乘，使之還原；因求 $\Sigma x'y'$ 時，尚須用 1 作組距單位故也。若將標準差還原為原來單位，則以後求出 x 量與 y 量各相當差數之乘積和 Σxy，亦必使之還原為原來單位方可。為節省勞力起見，此步手續，可以省略；蓋同乘同

除，於數值不能發生變化。又上面所列之十二步，均為求標準差之步驟，與第七章所述者完全相同。

求得標準差後，其次所需要計算者，為二量各相當差數之乘積和，求此乘積和時，先用估計平均數求出 $\Sigma x'y'$，然後用校正數去校正，使之為 Σxy。下面所列之圖 44，即說明計算 $\Sigma x'y'$ 之方法。設 x 量中各量數

商店實習能力 (x)

圖畫習力 (y)

	71–75	76–80	81–85	86–90	91–95	f	d
100–96			1	2	1 ($\Sigma x'y'=4$, $x'=2$, $y'=2$, $x'y'=4$)	4	2
95–91		2 ($\Sigma x'y'=-2$, $x'=-1$, $y'=1$, $x'y'=-1$)	8	22	5	37	1
90–86		3	21	31	8 假定平均數	63	0
85–81	2	9	30	16	1	58	-1
80–76	2	5	15	8		30	-2
75–71	1	6 ($\Sigma x'y'=18$, $x'=-1$, $y'=-3$, $x'y'=+3$)	4			11	-3
70–66		1	1	1 ($\Sigma x'y'=-4$, $x'=+1$, $y'=-4$, $x'y'=-4$)		3	-4
65–61	1					1	-5
f	6	26	假定平均數 80	80	15	207	
d	-2	-1	0	1	2		

圖 44　乘積率圖

與其估計平均數之差數爲 x'（每組距作 1 單位計算）y 量中各量數與其估計平均數之差數爲 y'，則在 y 量組距 96—100 與 x 量組距 86—90 方格中之量數，其 $x'=+1$, $y'=+2$, $x'y'=1\times2$，因此格中之量數有 2，故此格中之 $\Sigma x'y'=2[1\times2]=4$；在 y 量組距 96—100 與 x 量組距 91—95 方格中之量數，其 $x'=+2$, $y'=+2$, $\Sigma x'y'=1[2\times2]=4$；在 y 量組距 66—70 與 x 量組距 86—90 方格中之量數，其 $x'=+1$, $y'=-4$, $\Sigma x'y'=1[1\times-4]=-4$；又在 y 量組距 71—75 與 x 量組距 76—80 方格中之量數，其 $x'=-1$, $y'=-3$, $\Sigma x'y'=6[-1\times-3]=18$。惟於此有須注意者，即對於各差數之正負符號，萬不可稍有錯誤，因此種符號，於計算結果極有關係故耳。惟定各 $\Sigma x'y'$ 之正負符號，亦甚容易。如圖 44，在 x 量及 y 量之估計平均數所在之點，各畫一粗線，將全相關表分之爲四部分。如所列之組距俱從小量數起，在左端者由下而上，在頂端者自左至右，則表之右上部及左下部各 $\Sigma x'y'$ 皆爲正數，左上部及右下部各 $\Sigma x'y'$ 皆爲負數，在兩估計平均數之組中各 $\Sigma x'y'$ 皆爲零，故不計算。其各部之 x', y', 及 $x'y'$ 之符號如下圖：

x＝－ y＝＋ xy＝－	x＝＋ y＝＋ xy＝＋
x＝－ y＝－ xy＝＋	x＝＋ y＝－ xy＝－

我們有上圖之指示，計算 x'，y' 及 $x'y'$ 時，其符號之正負自不至於錯誤。我們求全表之 $\Sigma x'y'$ 時，若如上面所示之方法，逐格去求各格之 $\Sigma x'y'$，然後再以之相加爲全表之 $\Sigma x'y'$，則費力太多不大經濟。最簡便之方法，莫如先將橫行中各 x' 求出，使之相加爲 $\Sigma x'$，然後以相當之 y' 乘之，卽得該行之 $\Sigma x'y'$；如此做去，最爲省力。表 39 及表 40，卽係說明此種計算方法。惟此本可用心算計算，無須列表；且用心算時，更爲迅速，圖

表 39 與 96—100 相當之橫行之 $\Sigma x'y'$ 之求法

	81—85	86—90	91—95	總 $\Sigma x'$
$x'=$	0	+1	+2	
$n=$	1	2	1	
$\Sigma x'=$	0	+2	+2	+4
$y'=$				+2
$\Sigma x'y'=$				+8

表 40 與 76—80 相當之橫行之 $\Sigma x'y'$ 之求法

	71—75	76—80	81—85	86—90	總 $\Sigma x'$
$x'=$	−2	−1	0	+1	
$n=$	2	5	15	8	
$\Sigma x'=$	−4	−5	0	+8	−1
$y'=$					−2
$\Sigma x'y'=$					+2

43 之所示，即係用心算求得者。不過對於初學，則以用表計算爲宜，以免發生錯誤。以上所說種種，可以作計算 r 第 13 步之詳細說明，茲再總括之如次：

(13) 求 $\Sigma x'y'$。先求每一橫行各量數與 x 量之估計平均數之差數和，得 $\Sigma x'$。再求與各該橫行相當之直行組距與 y 量之估計平均數之差數 y'，以此去乘 $\Sigma x'$，得各該橫行之 $\Sigma x'y'$。（圖 43 之計算法，係先求每方格中之 $\Sigma x'y'$，將此數書於該格右上方。次將每一橫行各方格之 $\Sigma x'y'$ 相加，得各該橫行之 $\Sigma x'y'$。）次將求得各橫行之 $\Sigma x'y'$ 正負各數，分作兩行，列於相關表之右方 $\Sigma x'y'$ 欄下。最後將 $\Sigma x'y'$ 欄正負各數用代數法相加，所得之數，即全表之 $\Sigma x'y'$。在此例中，$\Sigma x'y'=69$。

此差數之乘積和，係由二估計平均數求出，非由二眞確平均數求出，因之亦必須有校正數，方能得眞確之差數乘積和 $\Sigma x'y'$。每一差數 x'，必須有 C_x 校正，每一差數 y'，必須有 C_y 校正；故每一 $x'y'$，亦必須有 C_xC_y 校正。由此種簡法求得之差數乘積和，以之去計算 r 時，最好將求 r 之公式改變爲：

$$r=\frac{\frac{\Sigma x'y'}{N}-C_xC_y}{\sigma_x\sigma_y}$$

當更便利。至於此公式之來源，可解釋如下：

設 E_x 與 E_y 爲二估計平均數，C_x 與 C_y 爲二校正數，M_x 與 M_y 爲二眞確平均數；則 $M_x=E_x+C_x$，$M_y=E_y+C_y$。

設 x 與 y 爲由二眞確平均數 M_x 與 M_y 所得之差數，x' 與 y' 爲由二估計平均數 E_x 與 E_y 所得之差數；則 $x'=x+C_x$，$y'=y+C_y$。

因此，$\Sigma x'y'=\Sigma(x+C_x)(y+C_y)=\Sigma xy+C_y\Sigma x+C_x\Sigma y+\Sigma C_xC_y$。

因 Σx 與 Σy（由二眞確平均數求出差數 x 之總和與差數 y 之總和）均等於 0，故

$\Sigma x'y'=\Sigma xy+\Sigma C_xC_y$，或 $\Sigma xy=\Sigma x'y'-\Sigma C_xC_y$，以之代入公式

$$r=\frac{\Sigma xy}{N\sigma_x\sigma_y},$$

即得
$$r=\frac{\Sigma x'y'-NC_xC_y}{N\sigma_x\sigma_y}=\frac{\frac{\Sigma x'y'}{N}-C_xC_y}{\sigma_x\sigma_y}。$$

(14) 以 N 除 $\Sigma x'y'$。在圖 43 所舉之例中，$\frac{\Sigma x'y'}{N}=\frac{69}{207}=.333$。

(15) 以 C_y 乘 C_x，求 C_xC_y；即 $C_xC_y=.35\times-.59=-.207$。

(16) 從 $\frac{\Sigma x'y'}{N}$ 減去 C_xC_y；即 $\frac{\Sigma x'y'}{N}-C_xC_y=.333-(-.207)=.540$。

(17) 以 σ_x 與 σ_y 之積除 $\frac{\Sigma x'y'}{N}-C_xC_y$，求 r；即 $r=\frac{\frac{\Sigma x'y'}{N}-C_xC_y}{\sigma_x\sigma_y}=\frac{\frac{69}{207}-(.35\times-.59)}{.89\times1.26}$

$=\frac{.333+.207}{1.1214}=.48$，即所求之相關係數。

3. 消長係數之求法　由上面所述之十七步手續，我們可以求得相關係數 r。惟此相關係數 r，雖能表明二量相關之有無及相關之大小，但不能表明二量彼此互相關係之程度。蓋 x，y 二量中其一量有單位之變化時，卽能影響於他一量使之發生若干變化；而 x 量依 y 量所發生之變化，與 y 量依 x 量所發生之變化，苟非二量之標準差（卽 σx 與 σy）完全相同，其大小常不一致。欲知二量彼此互相關係之程度，非求消長係數不可。故求得相關係數後之次一步手續，卽為求消長係數。消長係數有二：一為 y 依 x 為消長之係數，以 b_1 代表之；一為 x 依 y 為消長之係數，以 b_2 代表之。其公式為

$$b_1 = r\frac{\sigma y}{\sigma x}$$

$$b_2 = r\frac{\sigma x}{\sigma y}$$

就圖 48 所示事實求出之結果 $r=.48$；$\sigma y=1.26$；$\sigma x=.89$；以之代入公式，得

$b_1 = r\frac{\sigma y}{\sigma x} = .48\frac{1.26}{.89} = .68$，卽 y 依 x 之消長係數；

$b_2 = r\frac{\sigma x}{\sigma y} = .48\frac{.89}{1.26} = .34$，卽 x 依 y 之消長係數。由此我們可以知道按平均計算，x 量有一單位之變化時，y 量卽有 .68 之變化；y 量有一單位之變化時，x 量卽有 .34 之變化。

我們求得二消長係數後，卽可依此求二相關線之斜度。按相關表中之二相關直線，就理論言，其一為各橫行量數平均點相連之線，其一為各豎行量數平均點相連之線；然在實際上若就各橫行或各豎行量數平均點連

之以線，則其線必上下變動彎曲不直。其所以用直線表示之者，原係一種假定；假使所測之事實愈多，測量之方法愈精，則此線愈可與直線相近。至於此二直線之求法，有就與各行平均點最相近之處，憑觀察判斷之力，以畫出之者；然由此種方法畫出之直線，頗不易正確。若當分配四散而平均點參差過甚之時，更難相合。故必須有一定之公式，作求此種直線之標準。設 RR' 為 x 依 y 消長之直線，CC' 為 y 依 x 消長之直線，求 CC' 直線之公式為

$$y = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}x,$$

求 RR' 直線之公式為

$$x = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}y。$$

式中之 x 代表 x 量之任一量數與其平均數之差數，y 代表 y 量之任一量數與其平均數之差數。二式中之 $r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$，$r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$，皆為消長係數。就圖 43 求出 r，σ_x，σ_y，之數值代入公式，得

$$y = .68x;\quad x = .34y。$$

設 y_1 為 y 量中任一量數，x_1 為 x 量中任一量數；因此例 y 量之平均數 $= 88.5 + (-.59) \times 5 = 85.55$，$x$ 量之平均數 $= 83.5 + .35 \times 5 = 85.25$，故 $y = y_1 - 85.55$；$x = x_1 - 85.25$。以之代入上二式，得

(1) $y_1 - 85.55 = .68(x_1 - 85.25)$，

(2) $x_1 - 85.25 = .34(y_1 - 85.55)$。

由公式(1)，我們在 x 量中任指定一價值，即可求出 y 量相當之價值。譬如 x_1 為 90 時，則 y_1 即為

88.78，其求法爲

$y_1 - 85.55 = .68(90 - 85.2)$，即 $y_1 = 61.20 + 27.58 = 88.78$。

在表41中所列之各數，即爲 y 依 x 之指定各價值求出之各價值。x 量之價值每減少5單位（如90，85，80，75等等，）則其相當之 y 量價值減少 $.68 \times 5 = 3.40$。

表41　y 依 x 消長

x	y
95	92.18
90	88.78
85	85.38
80	81.98
75	7[illegible].58
70	75.18
60	68.38

表42　x 依 y 消長

y	x
95	88.46
90	86.76
85	85.06
80	83.36
75	81.66
70	79.96
60	76.56

由公式(2)，我們在 y 量中任指定一價值，即可求出 x 量相當之價值。譬如 y_1 爲90時，則 x_1 即爲

86•76，其求法爲

$$x_1-85{\bullet}25={\bullet}34(90-85{\bullet}55)，即\ x_1=30{\bullet}60+56{\bullet}16=86{\bullet}76。$$

在表 42 中所列之各數，即爲 x 依 y 之指定各價值求出之各價值。y 量每減少 5 單位，則其相當之 x 量價值減少 •34×5=1•70 單位。

由表 41 所示之各相對價值，於其中任取兩點，連接一直線，即爲 CC' 直線（如圖 43，C 點在 x=70，y=75•18；C' 點在 x=95，y=92•18），而表中之其餘各點，均落在此直線上。同樣，於表 42 中任取兩點，即可作 RR' 直線（如圖 43，R 點在 y=60，x=76•56；R' 點在 y=100，x=90•16）。此兩直線 RR'，CC' 相交於相關表之中央點 M；即，Mx=85•25，My=85•55。RR' 與各橫行平均點之實在線接近；CC' 與各豎行平均點之實在線接近。就此二線之位置，亦可觀 x,y 二量相關之情形。

乙、不列相關表計算相關之方法

當量數較少，並需迅速之計算時，以用不列相關表之方法計算 r 爲簡便。在教育測量上通常所用求相關係數之方法，大都係此種方法。其求相關係數之公式如下：

$$r=\frac{\Sigma xy}{\sqrt{\Sigma x^2\,\Sigma y^2}}$$ 此公式係由前所舉之公式

$$r=\frac{\Sigma xy}{N\sigma_x\sigma_y}$$ 轉變而來，因

$$N\sigma x\sigma y=N\sqrt{\frac{\Sigma x^2}{N}\bullet\frac{\Sigma y^2}{N}}=N\sqrt{\frac{\Sigma x^2\,\Sigma y^2}{N}}=\sqrt{\Sigma x^2\bullet\Sigma y^2}$$ 故也。

表 43 說明不列相關表計算 r 之方法

學生號數	分數 I	分數 II	x 平均數與分數 I 之差數	y 平均數與分數 II 之差數	x^2	y^2	xy
1	15	10	−4	−3	16	9	+12
2	15•5	10	−3•5	−3	12•25	9	+10•5
3	16	6	−3	−7	9	49	+21
4	17•5	10	−1•5	−3	2•25	9	+ 4•5
5	17•5	11	−1•5	−2	2•25	4	+ 3•0
6	17•5	18•5	−1•5	+5•5	2•25	30•25	− 8•25
7	18•5	11	− •5	−2	•25	4	+ 1
8	19•5	13	+ •5	0	•25	0	0
9	20•5	10	+1•5	−3	2•25	9	− 4•5
10	20•5	13	+1•5	0	2•25	0	0
11	20•5	20	+1•5	+7	2•25	49	+10•5
12	22	17•5	+3	+4•5	9	20•25	+13•5
13	23•5	16	+4•5	+3	20•25	9	+13•5
14	24	18	+5	+5	25	25	+25
平均	19	13			105•5	226•5	101•75

$$r=\frac{\Sigma x\bullet y}{\sqrt{\Sigma x^2\bullet\Sigma y^2}}=\frac{101\bullet75}{\sqrt{105\bullet5\times226\bullet5}}=\frac{101\bullet75}{154\bullet6}=\bullet66$$

茲用表43說明計算之次第如下：

(1)將各人所做測驗I及測驗II所得之分數，分別列在I，II欄內。

(2)求每一測驗之平均數測驗I=19；測驗II=13。

(3)將測驗I之各分數與其平均數相減所得之差數，記在x欄內；測驗II之各分數與其平均數相減；所得之差數，記在y欄內。

(4)將每一差數自乘，求x^2及y^2；如-4之乘方為16，-3之乘方為9等等。

(5)將每一差數與其相當之差數相乘，求xy；如$(-4)\times(-3)=+12$等等。

(6)將x^2欄各數相加；求Σx^2；y^2欄各數相加，求Σy^2；如表$\Sigma x^2=105\cdot5$；$\Sigma y^2=226\cdot5$。

(7)將xy欄各數用代數法相加，求Σxy；即$\Sigma xy=101\cdot75$。

(8)將求得之各數代入公式，得$r=\cdot66$

IV 相關比率

1. 相關比率之功用　凡由乘積率法求出二量相關之數，稱之為直線相關，以其相關表中各行量數平均點連接所成之線近於直線故也。而由乘積率法求得之相關係數，概以r表之，故知凡r之所表示，即係直線相關。然當相關表中各平均點連成之線為非直線時，而仍用乘積率法以求r及消長係數，則不能表示二量相關之情形，而陷於方法之謬誤。例如圖45所示之事實，其各行平均點不是直線，如用乘積率法求相關，得$r=-\cdot47$，

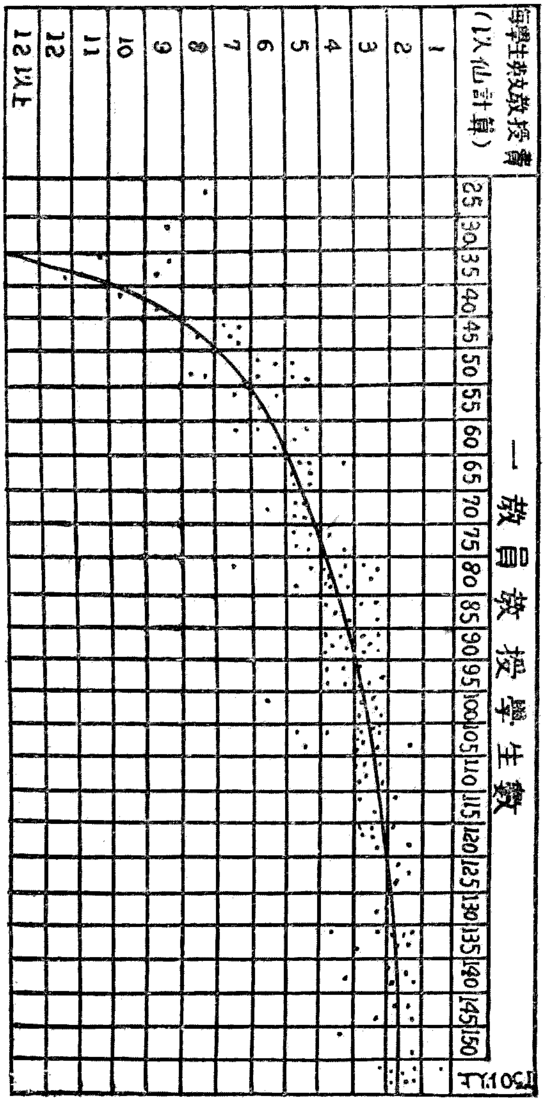


圖 45　美國康沙斯（Kansas）148 中學每學生英文教授費與一教員教授學生數之相關比率

而用適宜之方法去求則得實際相關之度 $\eta=\cdot 83$；由此即知前者爲不確。然則求此種相關之適宜方法果爲何？即所謂『相關比率』（Relation ratio）是，通常以 η 表示之（η 讀如 eta）求相關比率之公式如下：

$$\eta=\frac{\Sigma}{\sigma_y}=\frac{\sqrt{\frac{S\left[n_x\left(\bar{y}_x-\bar{y}\right)^2\right]}{N}}}{\sigma_y}$$

式中之

S ＝ 總和之記號，

N_x ＝ 每一豎行之量數總數；

$\bar{y}_x$ ＝ 每一豎行之平均數；

$\bar{y}$ ＝ 表中 y 量之平均數；

N ＝ 量數總數；

σ_y ＝ y 量之標準差。而

$\Sigma = \sqrt{\dfrac{S[n_x(\bar{y}_y - \bar{y})^2]}{N}}$ ＝ 表中豎行各平均數之標準差。蓋因每一 $(\bar{y}_x - \bar{y})$ 等於每豎行平均數 $(\bar{y}_x)$ 與表中 y 量之平均數 $(\bar{y})$ 之差數，而 n_x 即其相當次數，按之求標準差之公式，無一不與之相合。求標準差之公式為

$\sigma = \sqrt{\dfrac{\Sigma f d^2}{N}}$，此處之 $(\bar{y}_x - \bar{y})$ 與 d 相等，與 n_x 與 f 相等，S 與 Σ 相等，故完全相同。

2. 計算相關比率之步驟　茲就表 44 說明求相關比率 η 之方法，總括為 11 步如下：

(1) 排列相關表；其排列法與計算 r 時全同。

(2) 將表中各豎行量數或各橫行量數相加，求 n_x 或 n_y。（此與計算 r 時之 f 相同。

表 44　每學生英文教授費與每教員教授學生數之相關。說明相關比率之計算法

		一	教	員	教	授	學	生	數								
		25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	$N_y=f$	d	fd	d^2
每學生英文教授費（仙）	3												3	3	−2	−6	12
	4									1		2	7	10	−1	−10	10
	5						3		2	6	4	4	2	21	0	0	0
	6						3	2	2		1			8	1	8	8
	7					4		1	1					6	2	12	24
	8	1				1	1							3	3	9	27
	9		1	2	2									5	4	20	80
	10				1									1	5	5	25
	11			1										1	6	6	36
	12			1										1	7	7	49
	13			1										1	8	8	64
$N_x=f$		1	1	5	3	5	7	3	5	7	5	6	12	60		59	335
平均數$\bar{y}_x$		8	9	10.8	9.33	7.2	5.86	6.33	5.8	4.86	5.2	4.67	3.92				
$\bar{y}_x-\bar{y}$		2.02	3.02	4.82	3.35	1.22	−0.12	.35	−.18	−1.12	−0.78	−1.1	−2.06				
$(\bar{y}_x-\bar{y})^2$		4.08	9.12	23.23	11.22	1.49	.014	.1	.032	1.254	.608	1.716	4.244				
$N_x(\bar{y}_x-\bar{y})^2$		4.08	9.12	116.15	33.	67.45	.01	.46	.16	8.78	3.04	0.3	50.93				

$c\bar{y}=\frac{59}{60}=.9833$　　$\sigma_y=\sqrt{4.61}=2.15$　　相關比率，$\eta=\frac{2.17}{2.15}=.94$

$c\bar{y}^2=.967$　　$\bar{y}=$假定平均數$+c\bar{y}=5+.983=5.983$

$\frac{\Sigma fd^2}{N}=\frac{335}{60}=5.833$　　$S[N_x(\bar{y}_x-\bar{y})^2]=244.13$

$\sigma_y^2=5.58-.97=4.61$　　$\Sigma=\sqrt{\frac{[N_x(\bar{y}x-\bar{y})^2]}{N}}=\sqrt{\frac{244.13}{60}}=\sqrt{4.07}=2.017$

(3)求表中 y 量各量數之平均數；稱之爲 $\bar{y}$。（其計算法與求任何次數分配之算術平均數全同。）在此種情形中，係用 n_y 欄之各次數去求，並可應用計算算術平均數之簡法。

(4)求表中每一豎行 y 量量數之平均數；稱之爲 $\bar{y}_x$。

(5)求全表 y 量之標準差之平方；稱之爲 σ^2_y。（用 n_y 欄之次數分配去求。）再開方，得 σ_y。

(6)由每一豎行之平均數減去全表 y 量之平均數，求差數 $(\bar{y}_x-\bar{y})$。（此與平常計算標準差時求 d 相同。）

(7)將每一差數 $(\bar{y}_x-\bar{y})$ 自乘，求 $(\bar{y}_x-\bar{y})^2$。

(8)以每一豎行量數 n_x 乘其相當差數平方 $(\bar{y}_x-\bar{y})^2$，求 $n_x(\bar{y}_x-\bar{y})^2$。（此與平常計算標準差時求 fd^2 相同。）

(9)將求得之 $n_x(\bar{y}_x-\bar{y})^2$ 相加，求 $S[n_x(\bar{y}_x-\bar{y})^2]$（此即 Σfd^2）。

(10)將 $S[n_x(\bar{y}_x-\bar{y})^2]$ 以 N 除之，再開方，得

$$\Sigma=\sqrt{\frac{S[n_x(\bar{y}_x-\bar{y})^2]}{N}},$$

此即各豎行平均數之標準差。（此與標準差 $\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N}}$ 相同。）

(11)用 y 量之標準差 σ_y 除 Σ，得相關比率 η。

以上已將計算相關比率之步驟敘述明白。至於 η 之數值，因其爲兩標準差之比率，故常爲正數，即從 0 至 1 之間之各數。我們計算相關時於排列相關表後，憑觀察判斷之力，視其呈直線或曲線相關，然後再定用乘積率法或用相關比率。但在其爲直線或曲線不大顯著時，最好兩法並用，求出 r 及 η 後，由下列公式，考證其是否爲直線相關。如所得結果小於 2.5，則兩測量爲直線相關；大於 2.5，則非直線相關。其公式爲

$$\frac{\sqrt{N}}{.6745}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\eta^2-r^2}。$$

我們試將圖 45 之問題以此式考證之，則得

$$\frac{\sqrt{148}}{.6745}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{(.83)^2-(-.47)^2}=6.169>2.5。$$

由此即知圖 45 之事實用乘積率法去求爲不正確。

V 各種等級法

上面所述之乘積率法及相關比率兩法，其計算相關，係從兩測量各量數之絕對價值與位置去求；所得結果，固屬精密，但手續繁難，計算時頗爲費力。若在測量量數較少（約在 10 至 30）之時計算相關，與其用上述之兩法去求，不如用等級法去求更爲省力。所謂等級法者，即計算相關時，僅憑兩測量中各量數所在之位置，其絕對數值之大小，皆置之不問。由等級求相關之方法有二：一爲斯柏滿之等級差異法，一爲斯柏滿之相關『尺度』。茲分述如下：

1. 斯柏滿之等級差異法　斯柏滿由其經驗之結果發明一求相關之方法名曰等級差異法其公式為:

表 45　用等級法由 ρ 求 r 之例

個人號數	心理測驗分數(A)	各科考試分數(B)	A之等級	B之等級	A,B等級之差數D +	0	−	ΣD^2
甲	90	84	1	1		0		
乙	88	73	2	3			−1	1
丙	82	73	3	3		0		
丁	73	73	4	3	1			1
戊	70	65	5·5	7·5			−2	4
己	70	68	5·5	6			−·5	·25
庚	65	70	7	5	2			4
辛	60	65	8	7·5	·5			·25
N=8					3·5		3·5	10·5

$$\rho=1-\frac{6\Sigma D^2}{N(N^2-1)}=1-\frac{6\times 10\cdot 5}{8(8^2-1)}=\cdot 87$$。由附錄表III,得r=·8799

$$R=1-\frac{6\Sigma G}{N^2-1}=1-\frac{6\times 3\cdot 5}{8^2-1}=\cdot 66$$ 由附錄表IV,得r=·875

$$\rho = 1 - \frac{6\Sigma D^2}{N(N^2-1)}$$

式中之ρ（ρ讀如rho）爲由等級差異法求出之相關係數；Σd^2爲A，B二量各相關量數等級之數字差數之平方和；N爲每量之量數總數。由此種方法求出之ρ與由乘積率法求出之r，結果並不一致。皐爾生發明一種公式，可以將ρ轉化爲r；其公式爲

$$r = 2\mathrm{Sin}\left(\frac{\pi}{6}\rho\right)$$

式中之

$\rho = 1 - \dfrac{6\Sigma D^2}{N(N^2-1)}$，即斯伯滿之等級差異法求出之相關係數。我們求得$\rho$後，即可按出$\rho$價值求r表（附錄表III）查出其相當之r價值，無須實行去求。茲用表45說明求ρ之各步驟如次：

(1)將各人所做測驗A（如云心理測驗）及測驗B（如云各科考試）之分數分別列於(A)，(B)兩欄。

(2)求(A)欄各分數所居之等級，列在A之等級欄內；(B)欄各分數所居之等級，列在B之等級欄內。（其求等級之方法可參看第五章第III節等級分配。）

(3)從A等級減去相對之B等級，所得正負零各差數，分別填入差數(+)，(0)，(−)各欄內。

(4)將正差數與正差數相加，負差數與負差數相加；所得結果正差數總數與負差數總數必相等。

(5)各差數不論正負，均自乘，求D之平方，填入D^2欄內。

(6)將各差數平方相加，求ΣD^2。將各量數相加，求N。

(7)以 6 乘 ΣD^2，用 $N(N^2-1)$ 除之，復從 1 減去此商數，所餘之數即所求之 ρ。

(8)從附錄表 III，可將 ρ 轉化為 r。此例之 $\rho=\cdot 87$，在附錄表 III ρ 為 $\cdot 87$ 時，其對過之 r 為$\cdot 8799$。

2. 斯柏滿之相關『尺度』(foot-rule) 斯柏滿尚有一種求相關之方法，名曰相關『尺度』，其公式為

$$R=1-\frac{6\Sigma G}{N^2-1}$$

式中之 R 為由相關『尺度』求出之相關係數；ΣG 為 A，B 二量各相關量數等級之數字之正差數和。N 為量數總數。此法與前法相似，而更簡易。前法用等級差數之平方和，此則僅用正差數之和。由此種方法求出之 R 與由乘積率法求出之 r，結果亦不一致。皋爾生又有一種公式，可以將 R 轉爲化 r；其公式為

$$r=2\operatorname{Cos}\frac{\pi}{3}(1-R)-1$$

式中之

$$R=1-\frac{6\Sigma G}{N^2-1}，$$

即斯柏滿之相關『尺度』求出之相關係數。我們求得 R 後，即可按由 R 價值求 r 表（附錄表 IV）查出其相當之 r 價值，無須實行去求。茲就表 45 之事實說明求 R 之步驟如下：

(1)，(2)兩步與求 ρ 全同。

(3)從 A 等級減去 B 等級，所得之負差數不記，祇記正差數，名之為 G，填入 G 欄內。（此即表 45 正差數欄之各數。）

(4)將各正差數 G 相加，求 ΣG，將各量數相加，求 N。

(5) 用 6 乘 ΣG，以 N^2-1 除之，復從 1 減去此商數，所餘之數，即所求之 R。(此例 $G=3{\cdot}5$；$N=8$；以之代入公式得 $1-\frac{6\times3{\cdot}5}{64-1}=1-{\cdot}333={\cdot}667$)。

(6) 從附錄表 IV，可將 R 轉化爲 r。在附錄表 IVR 爲 ·66 時，其對過之 r 爲 ·875。

上方所述之兩種等級法，僅以量數數目較小時用之爲宜（在 30 以內）因此時之平均數及標準差無多價值故也。此種相關係數，僅可用以表明相關之有無，不能以之斷定其精密之程度。我們解釋等級相關之結果時，務須特別留心。

VI 各種四層表法

四層表法，爲計算相關最粗疏之方法，其性質頗與等級法相近。蓋求此種相關時，其所用方法，係先將兩測量量數列成等級，次求兩測量之集中量數（通常用中點數）再次按此中點，將各量數所居等級分類，在中點以上者以正號表之，以下者以負號表之，最後乃按此符號之數目計算二量相關之程度。由四層表求相關之方法有二：一爲卑爾生之 Cos π 法，一爲謝巴得之異號法。茲分述如下：

1. 卑爾生之 Cos π 法　卑爾生由 Cos π 法計算相關之公式爲

$$r=\mathrm{Cos}\frac{\sqrt{bc}}{\sqrt{ad}+\sqrt{bc}}\pi$$

式中之 $a=A,B$ 二量在中點以上之量數數目，$d=A,B$ 二量在中點以下之量數數目，$b=A$，量在中點以上

B量在中點以下之量數數目；C=A量在中點以下B量在中點以上之量數數目；θ為180°.

茲就實例說明其求法:

表 46 兩測量各量數之等級

號數	A量之等級	B量之等級
A	1	6
B	2	2
C	3	1
D	4	3
E	5	7
F	6	17
G	7	5
H	8	4
I	9	8
J	10	12
K	11	9
L	12	13
M	13	15
N	14	10
O	15	16
P	16	14
Q	17	11

表 47 兩測量各量數按其中點所在之位置

A,B二量在中點以下	A,B二量在中點以上	A量在中點以上,B量在中點以下	A量在中點以下,B量在中點以上
(a)	(d)	(b)	(c)
A			
B			
C			
D			
E			
G		F	
H			
I			
	J		
	L		
	M		K
	N		
	O		
	P		
	Q		
8	7	1	1

表 46 係兩測量各量數之等級分配，表 47 即就此等級分配製成，是爲四層表。在量數之數目爲偶數時，中點以上及以下之數目各有一半；如爲奇數，則中央量數置於中點以上或以下均可。此例之量數數目爲奇數，I 爲中央量數，而以之置於中點以上。表 47 中之 (a),(d),(b),(c) 各數，可用下圖表明之。

＋＋ a = 8	＋－ c = 1
－＋ b = 1	－－ d = 7

以各數值代入公式得

$$r = \text{Cos}\frac{\sqrt{1\times1}}{\sqrt{8\times7}+\sqrt{1\times1}}\pi = \text{Cos}\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{50}+\sqrt{1}}\pi$$

$$= \text{Cos}\frac{1}{8{\cdot}48}\pi = \text{Cos}{\cdot}118\pi = \text{Cos}21{\cdot}24^\circ = {\cdot}932。^*$$

* 此數之求得，可查附錄表 I，無須實行計算。

2. 謝巴得之異號法　謝巴得由異號法計算相關之公式爲

$$r = \text{Cos}\frac{U}{L+U}\pi$$

式中之 L 代表 A,B 二量中同號之差數數目，如『＋＋』與『－－』是，即皐爾生公式中 (a),(d) 所代表之數；U 代表 A,B 二量中異號之差數數目，如『－＋』與『＋－』是，即皐爾生公式中 (b),(c) 所代表之數；L+U＝量數總數 N。異號差數 U 與量數總數 L+U 有相當之百分比例數。故我們由 $\frac{U}{L+U}$ 之數（即 U）可按附錄表 V 查得相當 r 之數值。

U之價值由 ·50 至 ·00，其相當 r 之價值為由 0 至 +1，故此時之 U 係表示正的相關；U之價值由 ·50 至 1·00，其相當 r 之價值為由 0 至 −1，故此時之 U 係表示負的相關。由此推算，我們無論求得從 ·00 至 1·00 之間 U 之任何數值，均可從附錄表 V 查出其相當 r 之數值。

上面所述之兩種四層表法，最為粗疏，甚不精確，凡屬精密之研究，無有採用之者。惟量數在 30 至 50 時，蓋亦有用此法去計算相關，以作初步之試探者；四層表法之功用，如是而已。

VII 均方相關法

由變量的事實計算相關之方法，有乘積率法，相關比率，各種等級法，各種四層表法等等，已如前所述；現在所述之均方相關法 (method of mean square contingency)，為由品質的事實計算相關之一種方法。此種方法，係皐爾生所創，其公式為

$$C=\sqrt{\frac{S-N}{S}}。$$

式中之 C = 均方相關之係數，N = 量數總數；而

$$S=\Sigma\left(\frac{(n_{ro})^2}{\frac{n_r n_o}{N}}\right)。$$

n_r 代表相關表中每橫行量數總數；n_o 代表每豎行量數總數；$n_r n_o$ 代表每橫行量數總數與每豎行量數總數相乘之積；n_{ro} 代表每橫行與豎行相交格中之量數數目。下面所列之表 48，即說明此種相關係數之

求法。

計算此種係數之步驟，簡略言之，可分為四大步：(1)求 S；(2)從 S 減 N；(3)用 S 除 $S-N$；(4)將 $\frac{S-N}{S}$ 開方。茲更詳細說明如下：

1. 求 S：

$$S=\Sigma\left(\frac{(n_{rc})^2}{\frac{n_r n_c}{N}}\right)$$

關於 S 之求法，計含有四步：

(a)將表中每格之量數數目自乘，求 $(n_{rc})^2$〔如表 48 橫行第一行(即最下一行)各格之量數自乘得 4, 49, 9, 1, 1 是〕。

(b)將表中每方格相當之橫行量數總數與其相當之豎行量數總數相乘，求 $n_r n_c$；再用全表量數總數除之，求 $\frac{n_r n_c}{N}$。

用表 48 最下一行各格為例，說明此步之求法：

$$\frac{2\times14}{82}=.34\quad \frac{13\times14}{82}=2.22\quad \frac{16\times14}{82}=2.73\quad \frac{21\times14}{82}=3.59\quad \frac{16\times14}{82}=2.73$$

為節省時間及減少錯誤起見，計算此步時，最好將所得結果分列成表（如下面所列之表 49）。

(c)將(a)步求得之結果，以(b)步所得之結果除之。例如：

$\frac{4}{.34}=11.735$　$\frac{49}{2.22}=22.07$　$\frac{9}{2.73}=3.295$　$\frac{1}{3.59}=.279$　$\frac{1}{2.73}=.367$

(d)將(c)步求得之結果相加，所得之數，卽爲 S。

2. 從 S 減去全表量數總數 N，求 $S-N$。

3. 以 S 除 $S-N$。

4. 將 $\frac{S-N}{S}$ 開方，所得之數，是爲 C，卽所求之均方相關係數。

表 48　心理年齡與教育年齡之關係

(用均方相關法計算)

教育年齡	心理年齡 9	10	11	12	13	14	15	總計
遲進2年				2		7	2	11
遲進1年		1		4	9	3	1	18
通常			3	8	4	1		16
速進1年		5	10	6	2			23
速進2年	2	7	3	1	1			14
	2	13	16	21	16	11	3	82

下列之表49，係將此表各格之 $\frac{n_r n_o}{N}$ 之結果計算出來。

表49 從表48之各格計算 $\frac{n_r n_o}{N}$ 之結果

		心理年齡						
		9	10	11	12	13	14	15
教育年齡	遲進2年				2.82		1.48	.40
	遲進1年		2.85		4.61	3.51	2.42	.66
	通常			3.12	4.10	3.12	2.15	
	速進1年		3.65	4.49	5.89	4.49		
	速進2年	.34	2.22	2.73	3.59	2.73		

上表各格中數值之求法如下：

$\frac{21\times 11}{82}=2.82$，$21=n_o$，$11=n_r$，$82=N$

由上表各格之數值，可以計算各格之 $\frac{(n_{ro})^2}{\frac{n_r n_o}{N}}$

$\frac{4}{2.82}=1.42$　$\frac{49}{1.48}=33.14$　$\frac{4}{.40}=10$

$\frac{1}{2.85}=0.351$　$\frac{16}{4.61}=3.471$　$\frac{81}{3.51}=23.08$　$\frac{9}{2.42}=3.727$　$\frac{1}{.66}=1.515$

$\frac{9}{3.12}=2.88$　$\frac{64}{4.10}=15.61$　$\frac{16}{3.12}=5.13$　$\frac{1}{2.15}=0.465$

$\frac{25}{3.65}=6.85$　$\frac{100}{4.49}=22.27$　$\frac{36}{5.89}=6.11$　$\frac{4}{4.49}=.891$

$\frac{4}{.34}=11.735$　$\frac{49}{2.22}=22.07$　$\frac{9}{2.73}=3.295$　$\frac{1}{3.59}=.279$　$\frac{1}{2.73}=.367$

總數 $=S=174.656$　$N=82$　$S-N=92.656$　$C=\sqrt{\frac{92.656}{174.656}}=\sqrt{.5305}=.728$

均方相關法，爲計算品質的事實相關之方法。按品質的事實，在教育統計上不大重要；而用此種方法計算時，算術上之手續復極繁難，所以用之者絕少。此處之所以介紹之者，不過使人知有此種方法而已。

VIII 練習問題

1. 乘積率法有兩種計算法，一爲就相關表求相關，一爲不列相關表求相關。我們在應用時，何時當用前者？何時當用後者？爲何？

2 何謂『相關比率』？在何種情形之下，宜用此種方法去求相關？

3. 在何種情形之下，可以採用等級法求相關

4. 試就下列事實，用乘積率法（列相關表）求相關係數及消長係數。

測驗 I……	27	27	27	16	27	18	27	9	15	15	21	20
測驗 II……	20	18	14	3	13	3	16	3	3	7	8	8
測驗 I……	26	10	22	24	16	13	23	15	22	20	17	21
測驗 II……	17	2	9	20	2	6	9	2	11	6	8	19
測驗 I……	20	20	15	22	23	27	16	25	22	14	17	25
測驗 II……	7	9	5	8	16	18	6	12	11	3	7	17
測驗 I……	22	5	25	18	27	20	18	27	24	24	21	20
測驗 II……	4	2	15	4	23	12	5	22	10	9	12	10
測驗 I……	21	20	20	20	24							
測驗 II……	10	13	13	14	13							

5. 試就下列事實，用乘積率法（不列相關表）求相關係數 r。

6. 就下列之事實，用『相關比率』法求相比率 η。並就由乘積率法求得之 r 與此次求得之 η，考證此種事實之是否為直線相關？

7. 就下列之事實，用斯柏滿之等級差異法及相關『尺度』法求相關係數 r。

8. 就上列之事實，用皐爾生之 $\cos\pi$ 法及謝巴得之異號法求相關係數 r。

實際年齡	智力分數	實際年齡	智力分數	實際年齡	智力分數	實際年齡	智力分數
9	28	9	24	10	32	10	12
10	33	10	36	9	55	10	22
9	31	9	27	10	25	10	35
9	45	9	34	9	44	9	44
9	38	15	27	11	43	9	52
9	47	10	31	10	37	9	31
9	47	9	28	10	49	9	40
10	73	8	43	9	56	9	38

IX 參考書報

1. 薛鴻志教育統計學大綱（再版）第七章。
2. 俞子夷測驗統計法概要第四章。
3. Rugg, H.O.: Statistical Methods Applied to Education, chapter IX.
4. Hines, H.C.: A Guide to Educational Measurements, Chapter V.
5. Monroe, W.T.: The Theory of Educatisnal Measurements, Chapter XIII.
6. Whipple, G.M.: Manual of Mental and Physical Tests, Chapter III.
7. Secrist, H.: An Introduction to Statistical Methods, chapter XII.
8. King, W.I.: Elements of Statistical Methods, Chapters XVII, XVIII.

第九章　常態曲線之應用

I 常態曲線之理論

常態分配之形式，與代數二項式展開 (The binomial expansion) 之法則相合。凡事物若得失之機會相等，則最大概率 (probability) 之項居中，各項之分配為對稱的。若事物之個數增加至充分程度時，雖得失之機會不等，而最大概率之項亦居中央，各項分配亦成對稱之形式。然此不過就代數之法則，簡單說明常態分配之形式耳。至於詳細說明，因涉及數學理論，祇好從略。

教育及心理各種測量結果之所以多成為常態分配者，其理由亦正與此相同。蓋每一測量之結果，常由種種

之原因集合而成各個原因彼此獨立，不生相互之影響，而其造成此結果之機會，亦彼此相等。其影響之勢力，或顯或隱，純出機會公例而無偏彼偏此之情形。所以測量結果，亦得循諸常軌，成爲對稱的分配。

推而論之，若造成複合量之原因數目愈增，雖其機會不等，而此諸原因分配之形式，亦可近於對稱；因之由此諸原因所合成之分配形式，亦必近於對稱。反之，若原因之數目有限，而其中有一原因或數原因，特顯其影響之勢力時，則諸原因之分配，必構成偏斜之形；因之此諸原因所合成之複合分配，其形式必成爲偏態。

上面所說之假定學者多認爲合乎自然，據之以解釋常態及偏態分配之理。關於此點，在第五章第 IV 節內已有充分之說明，茲不復述。

II 常態曲線之公式

實際測量之分配，與二項式展開各項之分配，本相近似。惟二項式展開各項之分配，其性質爲不連續的；若以圖表示之，其各次數相連之線，必成爲多邊形，而非相連之曲線。因此之故，我們求常態曲線時，須另用簡法，使次數分配所成之多邊形，能與連續曲線之形相切合。而此曲線所含之各個縱線，其和可與測量所得之各個縱線之和相近似；且任二縱線（譬如 y_1, y_2）間所含之面積，可與相當之二 x 量（譬如 x_1, x_2）中間所含之量數數目相等。求連續曲線（卽常態曲線，或概率曲線）之公式如下：

$$y = y_0 e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}$$

式中之 e 爲常數 2.71828，即納氏對數之底 (The base of the Naperianlog arithm system)。y 與 x 爲變數，x 爲在曲線之底線上由平均數至某一點之距離，y 爲由 x 點向上引出縱線之高度。y_0 與 σ 爲式中之重要部分。σ 爲分配之標準差，其在此處係用以測量 x 之差度。y_0 爲曲線下最高之縱線，即 x 之值發現最多之概然次數。設 y_0 爲整數，則 y 爲 y_0 之分數部分。若 x=0，$e^0=1$，則 $y=y_0$。曲線在 x=0 點之左右爲對稱的，平均數中點數衆數皆重合於此點（0點）之上。y_0 可由下列之公式求得：

$$y_0=\frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

式中之 N 爲量數數目，σ 爲標準差，π 爲常數 3.1416。故求常態曲線之完全公式爲：

$$y=\frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}$$

由此公式求出之常態曲線，爲用甚廣；以下各節，即係分別敍述此種曲線之用途。

III 常態曲線之繪法

凡繪一種曲線，必須有求該種曲線之公式。譬如我們欲繪 $y=4x+8$ 之線時，則其步驟有下列之三點：

(1) 求 x 各值所指定之 y；即

設 x = 1	則 y = 12
2	16
3	20
4	24
...	....

(2) 沿OX線及OY線，尋出x及y之相當各値相交之處，記以各點。

(3) 將所記之各點，用線連接，卽爲所欲繪之線。如圖46，卽指示 $y=4x+8$ 之線之繪法。

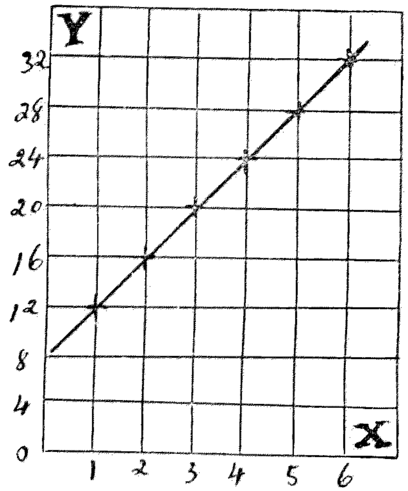


圖46 指示 $y=4x+8$ 之線之繪法

上面所舉之例，不過藉以說明由公式求得之線之繪法。其實由常態曲線之公式

$$y=y_0e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}$$

以求常態曲線，其計算較之上面所舉之簡單問題，其難易自有霄壤之別。且式中之σ及y_0，必須有指定之價値。曲線下之各縱線（卽在底線上由平均數至標準差分數部分之距離向上引出之各豎線）常爲y_0之分數，而有一定之比例。我們如將x之指定各値，與曲線下相當縱線(y)各値，一一求出，列爲一表，則以後計算，自當更爲便利。附錄上之表VI，卽係此種用意。我們從該表中可以查出由平均數至$.1\sigma$向上引出之縱線，等於由平均數所在之點向上引出之縱線y_0高度之.995；至1.0σ引出之縱線，等於y_0高度之.606；至2.0σ引出之縱線，等於y_0高度之.135等等。惟有必須注意者，該表中各數之計算，x係以σ爲單位，y以y_0爲單位；而σ及y_0，均假定其等於1，x及y之各値，均爲σ及y_0之分數部分。

繪畫曲線之步驟　爲使讀者明瞭起見，特將繪畫曲線分爲以下各步：

(1)沿x線置相等之σ分數部分之距離，如云$\cdot 1\sigma$, $\cdot 2\sigma$, $\cdot 3\sigma$等等，以至$3\cdot 0\sigma$。此種單位距離之選擇，悉聽各人自便，惟曲線之形狀，則全依賴所選擇之單位。

(2)選擇y之量表單位，由此可以得曲線之適當斜坡；並於x線之中點（卽$x=o$）立一等於y_o之縱線（卽等於1）。y_o之實際長度（卽y之量表單位）可任意定之。

(3)在x線上所選定之各點$\cdot 1\sigma$, $\cdot 2\sigma$, $\cdot 3\sigma$等等，按照y_o之分數部分之比例，向上各引一縱線。例如附錄表VI之所指示，

$x=\cdot 1\sigma$　$y=\cdot 995y_o$

$x=\cdot 2\sigma$　$y=\cdot 980y_o$

$x=\cdot 3\sigma$　$y=\cdot 956y_o$，等等。

(4)將所引各縱線之頂端，用線連接，卽成一常態次數多邊形。若所引縱線之間隔愈密（卽所採σ分數部分愈小），則此概然之多邊形愈近於修勻之曲線。

IV 實際次數分配與常態次數曲線之比較

欲比較實際次數分配與常態次數曲線，以考究二者切合之程度，可用下列各步之次序以比較之：

(1)用第五章所述之法則，繪實際次數分配圖。

(2)將常態曲線置於實際分配上；以常態曲線之平均點置於實際分配之算術平均數上，使之相合。平均數所在之點 $x=0$。

(3)用 σ 計算單位距離；此單位距離 σ 之分數部分，如 $.1\sigma$，$.2\sigma$，或 $.01\sigma$，$.02\sigma$，之類，以實際分配 σ 之價值乘之，將來即以之置於沿 x 線上。

(4)將此種 σ 之分數部分，置於所欲用為繪實際分配之量表 x 線上。

(5)用下列之公式計算實際分配 y_0 之高度：

$$y=\frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

式中之 N 為分配中之量數總數；π 為 3.1416；σ 為該分配之標準差。

(6)在實際分配之算術平均數上，引一縱線，其高度等於求得之 y_0。

(7)由 x 之各值 $.1\sigma$，$.2\sigma$ 等等，求相當各縱線之高度；先從附錄表 VI 查出 y 之各值，再以實際求得之 y_0 數值乘之即得。

(8)沿 x 線連續之各點向上引無數縱線。

(9)連接各縱線之頂端，即成常態曲線。由此即可比較兩曲線切合之程度。

V 常態曲線下之面積

連續曲線下之縱線 y，係代表 x 之次數；各 y 線高度相加之和，與所測之量數總數相近似。故合 x 兩縱線

y_1，y_2 中間之面積，亦可以代表其量數之數目，且較爲精確。

我們若在各種縱線中間實際計算常態曲線下面積之各部分，甚爲費力。不如以 σ 爲測量面積之單位，將各部分都計算出來，編成一表，則應用時自然省力得多。附錄上之表 VII，即用積分法，則將曲線下面積之全部，按 σ 之距離，分爲若干部分。設全面積爲整數（=10,000），分爲各部分時，用：(1)曲線，(2)底線，(3)平均數($x=0$)上之縱線，(4)距平均數某點上之縱線等爲界限。(1)，(2)，(3)爲各部分面積通用之界限。(4)之求法，以 σ 爲單位，求平均數與某點 x 之距離。以下將舉數例說明表 VII 之看法與用途。

在平均數與一距離 $.01\sigma$ 之間，含有曲線下全面積 10,000 分之 40，或百分之 .4。在平均數與 $.49\sigma$ 之間，其所含之量數，佔全數百分之 18.79。又在平均數與 1σ 之間之量數爲百分之 34.13；在平均數與 2.5σ 之間之量數爲百分之 49.38；在平均數與 3σ 之間之量數爲百分之 49.865，在平均數與 5σ 之間之量數爲百分之 49.99997133。因曲線爲常態的，左右兩端互相對稱，故平均數上下等距離所含之面積應相等。所以在平均與 $\pm 1\sigma$ 之間所含之量數，佔全數百分之 68.26；$\pm 2.5\sigma$ 所含之量數，佔全數百分之 98.76；$\pm 3\sigma$ 所含之量數佔全數百分之 99.73；$\pm 5\sigma$ 所含量數佔全數百分之 99.99994。由是可知在 $\pm 2.5\sigma$ 界限以外之量數祇有百分之 1.24；在 $\pm 3\sigma$ 界限以外之量數祇有百分之 .27；而在 $\pm 5\sigma$ 界限以外之量數則僅有百分之 .00006 而已。所以有時常態曲線之實際應用，祇取平均數上下之 2.5σ，在此界限以外之量數（=1.24%），雖捨棄之，亦不足惜。若取平均數上下之 3σ，則所捨棄者更微（=.27%），對於全

體量數，幾不能發生影響；在第七章中謂標準差數之六倍大概包含全體量數百分之 99 之定律，即本諸此，麥柯氏為測驗用所製造之 T 量表，係採用平均數上下之 5σ，是所捨棄者更微乎其微。

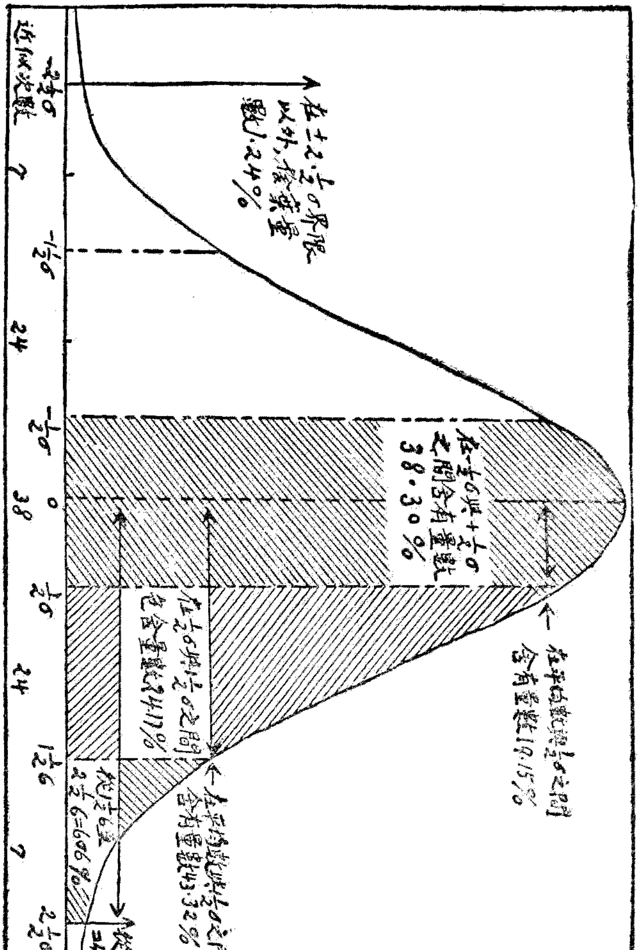


圖 47　常態曲線下之分配，分為五組，每組單位距離等於 1.0σ；底線等於 5σ

上面所討論者，係平均點之縱線與量表上他一點之縱線之間之量數比例，我們由此亦可計算量表上任意兩點向上引出之兩縱線所含量數之百分數例如我們欲求 0•6σ 與 1•8σ 之間之量數百分數，我們可以先

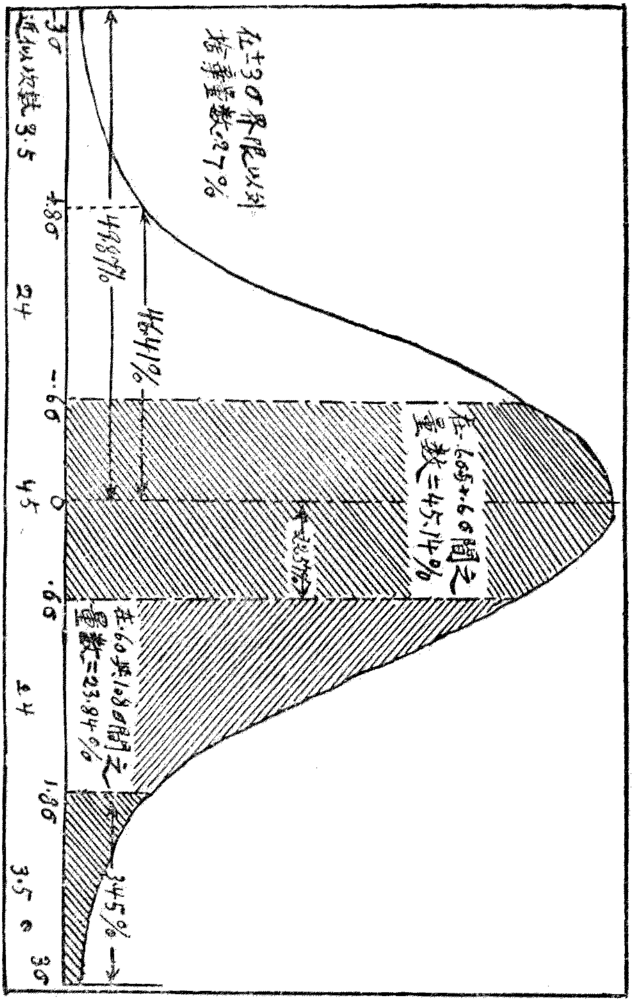


圖48　常態曲線下之分配，分為五組，每組單位距離等於1.2σ；底線等於6σ。

求出平均數與 1.8σ 之間所含量數為若干，次求平均數與 0.6σ 之間所含量數為若干，於是由前者求得之量數，減去後者求得之量數，即為 0.6σ 與 1.8σ 之間之量數。其結果如下：

在平均數與 1.8σ 間之量數 $=46.41\%$

在平均數與 0.6σ 間之量數 $=22.57\%$

$\therefore$ 在 0.6σ 與 1.8σ 間之量數 $=23.84\%$

附錄表 VII 中記面積部分之數，由 $.01\sigma$ 起按每 $.01\sigma$ 遞加記至 3.20σ 止；從此再按每 $.1\sigma$ 記 3.3σ，3.4σ，3.5σ 等等，至 4.0σ 止；其次僅記 4.5σ 及 5.0σ。

VI 分別問題難易之等級

每一問題之內容，各有其難易之程度，學校之考試題目亦然。欲知各問題難易之等級，可就下列之法則釐定之：

(1)將一試驗中各問題，按先易後難之次第，排列其難易等級，由作者之意見或評判人多數之意見決定之。

(2)令各學校各年級之學生，答此試驗中各問題。學生之數目愈多，愈可得常態的次數分配。

(3)計算答對每一問題之學生總數，並以受試驗之學生全數除之，求答對每一問題之學生百分數。

(4)由學生之百分數，求各問題標準差之價值。此層即應用附錄表 VII，以該表中全面積之各部分，代作答對每一問題之學生百分數。以各 σ（即 x 線之距離）之值代各問題難易之等級。於是就已知之面積（或

學生之百分數）可求相當之 σ（或問題難易之地位）。惟附錄表 VII 之標準點，係在 x 線上之中央（即 x=0），依百分記分法此點可作為 50 分。若以此點為標準，推算答對每一問題之學生百分數及其相當之距離，必須另行加減，頗不便於應用。故有教育統計學者，將前表改造如附錄表 VIII，表 IX，表 X，均係由附錄表 VII 改造而成。茲分別說明如次：

(a) 表 VIII 底線之全距離定為 ±2.5σ 共計 5σ；以平均數下 2.5σ 為起點，此點即定為 0，平均數所在之點為百分之 50 分點，平均數以上之 2.5σ 為百分之 100 分點。由答錯每一問題之學生百分數，即可按表查得該問題之難易。例如有一問題，答錯之人數百分比為 22.04，在底線上所居之點為 1.75σ（自左端起），此題所佔百分比之地位即為 35。又有一題，答錯人數之百分比為 98.35，在底線上所居之點為 4.56σ，其所佔百分比之地位為 90。

(b) 表 IX 之製造與用法，與表 VIII 全同；惟底線之全距離，定為 ±3σ，共計 6σ，與表 VIII 之定為 ±2.5σ，共計 5σ 者相異耳。

(c) 表 X 之製造與用法，與上面所述之兩表大致相似。但係根據麥柯之主張，定底線之全距離為 ±5σ，共計 10σ。每 1σ 又分為二十等分。總計分全距離為 200 部分。然後將各部分之相當面積（或量數）求出，並將每 1σ 用 10 乘之，使與通用之百分記分法適合。能求出答對每一問題之學生百分數，即可按表查得該在問難易之地位，亦即可定該問題之分數。例如答對某一問題之學生數佔百分之 50，則該問題難易之地位，在距

離中所佔之部分爲50其分數亦定爲50。若答某一問題之學生數目爲百分之99.38則該問題之地位及分數爲25。若某一問題僅有百分之.00029人不能答對，則其題最易，即定其價值爲0。若僅有百分之.00029人能答對之問題，則其題爲最難，即定其價值爲100。

上所述之三表，旣距離互有差異，價值亦各不相同。例如以5σ爲全距離，分爲一百等分時，則25分當1.25σ之距離；6σ爲全距離，分爲一百等分時，則25分當1.5σ之距離；以10σ爲全距離，分爲一百等分時，則25分當2σ之距離是也。

(5)旣求得各問題確實難易之等級，即按其等級依次排列，再依法試驗之，以定其最終之等級。蓋各問題之次第先後更換之時，其難易之程度，往往亦受影響。恒有某一問題之意義能引答後一問題之思想者。故當各問題次序變更之時，欲使其難易之程度精密，必須作最終之訂正也。(本節多從薛鴻志氏教育統計學大綱180, 182, 184等頁引來。)

VII 應用常態曲線斷定統計結果之確度

常態曲線最重要之用途，即在斷定各種統計結果之確度，如集中量數，差異量數，相關量數之類是。

學者當知無論測量任何事實，必不能得其事實之全體量數；所可得者，不過其全體量數中之一部分而已。而由此一部分量數所求出之平均數，苟非出於偶然，斷不能爲眞確之平均數。眞確平均數，必須由某一事實之全體量數求出；而由一部分有限之量數求得之平均數，稱之爲實得平均數。此實得平均數，除非偶然可與眞確平

均數相等，僅能爲近似之值，而有多少之差異。其他之各集中量數，差異量數，相關量數等，亦有實得與眞確之分。實得之量數，與眞確之量數，非出於偶然，不能有相等之數值。

實得量數既與眞確量數有差，則必須求其相差之度，以證明實得量數變動之大小，然後可知眞確量數發現之界限。此證明之法則，卽應用常態曲線之原理。

假定在某一城中有二萬學生，欲知其默字能力之平均數，將此二萬學生共分爲一百組，每組之人數爲二百名。此全體學生之次數分配與常態曲線相合。而所分之各組學生，乃盡量用機會之方法選擇者；其次數分配亦皆與常態曲線相合。再假定將此一百組之學生，一一試驗，並求得各組之平均數，及各組平均數之平均數。此各組平均數之平均數，卽此二萬學生之眞確平均數。惟各組之一百個平均數，不能皆彼此相等，而有多少之差異。有等於眞確平均數者，有大於或小於眞確平均數者。若將各組之平均數與眞確平均數相較，以求其差數，然後將各個差數排列一次數分配表，則此一百個差數分配之形式，亦與常態之曲線相合，而誤差之零點，正當眞確之平均數。設所求出各組之平均數及各組平均數與眞確平均數之差數，如表 50 所列。

就表 50 所列，可以推知實得平均數與眞確平均數相差之限度。此一百個量數中，有 67 個量數列於 72.9 及 73.5 之價值以內，33 個量數列於此界限以外；有 94 個量數列於 72.5 及 73.9 之價值以內，6 個量數列於此界限以外（卽謂有百分之 67 量數在從眞確平均數求得之誤差 ±.2 以內，百分之 94 量數在 ±.6 以內。）換言之，卽眞確平均數與實得平均數相差不出 72.9 及 73.5 之界限時，一百個量數中，約有 67

表50　20,000學生默字能力各平均數之分配

（係假定的）

各組平均數之分類	中值	誤差	次數（即組數之百分數）
74•1—74•3	74•2	+1•0	1
73•9—4•1	74•0	+•8	2
73•7—73•9	73•8	+•6	3
73•5—73•7	73•6	+•4	11
73•3—73•5	73•4	+•2	21
73•1—73•3	73•2=真確平均數	0	25
72•9—73•1	73•0	−•2	21
72•7—72•9	72•8	−•4	10
72•5—72•7	72•6	−•6	3
72•3—72•5	72•4	−•8	2
72•1—72•3	72•2	−1•0	1

個量數，其機會大概為2與1(67:33)之比；相差不出72•5及73•9之界限時，一百個量數中，約有94個量數，其機會大概為16與1(94:6)之比。再換言之，即真確平均數列於72•9及73•5中間之機會，約為2與1之比；列於72•5及73•9中間之機會，約為16與1之比。若在72•1及74•3界限以外，即無發現之

機會。

由是，若眞確量數與實得量數之差數，其次數分配爲常態的，則將此差數之差異量數求出，卽可證明包含眞確量數之限度。若代表全體之實例愈多，則眞確量數愈可與實得量數相近，卽二者之差度愈小。若各個實例彼此相差之度愈微，則眞確量數與實得量數之差異量數亦愈小。故實得量數確實程度之增高，卽在所測之量數數目增多，或各量數之差異程度減少。（本節係從薛鴻志氏教育統計學大綱 185—188 頁摘來。）

VIII 各種確度量數

求實得量數與眞確量數差度之差異量數有二，一曰標準差，一曰概誤差。茲分述如下。

甲 用標準差考證確誤之程度

1. 求算術平均數之確度　其公式爲

$$\sigma_M = \frac{\sigma_{dis}}{\sqrt{N}}$$

式中之 N 代表所測之量數數目；$\sigma_{dis.}$ 代表所測之量數之標準差，卽實得標準差（dis. 爲分配 distribution 之省寫）；σ_M 代表實得平均數與眞確平均數之差度之標準差。下面之圖 49，卽用以說明此種意義者也。

爲解釋便利起見，特設一例如下。

設　$N=900$，$\sigma_{dis}=6$，$M=73.2$；

由公式　$\sigma_M=\frac{6}{\sqrt{900}}=.2$。

我們求得 σ_M 等於 .2 以後，對於此例之平均數 73.2，其可靠之程度究竟何如，尚須加以解釋。在統計上

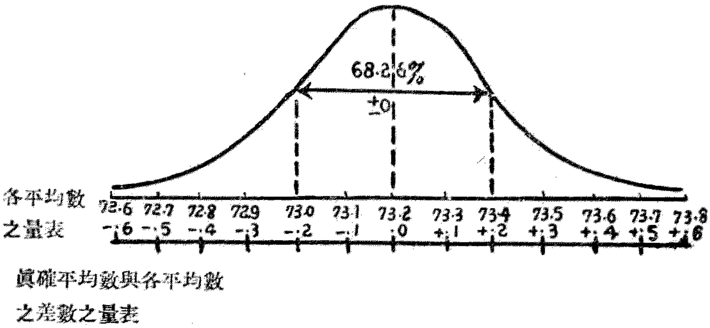


圖 49　真確平均數與各組平均數之差數之常態次數分配

之習慣用法，常以 $\pm 3\sigma$ 為確實限度，即從 -3σ 至 $+3\sigma$，其中含有全體量數百分之 99.73；所以平均數之確實限度為 $\pm 3\sigma_M$（中點數之確實限度為 $\pm 3\sigma_{md}$；標準差之確實限度為 $\pm 3\sigma$；相關係數之確實限度為 $\pm 3\sigma_r$ 等等。）我們既知 σ_M 為 .2，即可確定真確平均數，必在 $73.2\pm 3(.2)$ 或 $73.2\pm .6$ 之間，即 72.6 及 73.8 之間。惟此所說之真確平均數，並非指所測 900 事例之平均數，因其平均數已經求出為 73.2；此所指者，乃此900事例所附屬之較大團體之真確平均數。假使此900量數之選法，最合於機會之公例，則其平均數 73.2，有與其較大團體之真確平均數適合之可能；惟在實際上，極難得到此種結果。於是就此已得之平均數，定此較大團體之真確平均數，在 72.6 及 73.8 中間之一點。雖

在 72·6 之下及 73·8 之上，尚有眞確平均數發現之機會，然爲數極少，一萬次中僅三次而已。而眞確量數在 73·2±1(·2) 中間之機會爲 2·15 比 1（卽 68·26:31·74），在 73·2±2(·2) 中間之機會爲 21 比 1（卽 95·44:4·56），在 73·2±3(·2) 中間之機會爲 369 比 1（卽 99·73:·27）。

上述之解釋，亦可以適用於任何確度量數。

2. 求中點數之確度 其公式爲：

$$\sigma_{Md}=\frac{1\cdot 2533\sigma_{dis.}}{\sqrt{N}},\quad \text{或}=\frac{1\frac{1}{4}\sigma_{dis.}}{\sqrt{N}}。$$

由此式可以確定眞確中點數，乃在實得中點數 $\pm 3\sigma_{Md}$ 之間。

3. 求二十五分差之確 其公式爲：

$$\sigma_Q=\frac{1\cdot 11\sigma_{dis.}}{\sqrt{2N}}$$

由此式可以確定眞確二十五分差，乃在實得二十五差 $\pm 3\sigma_Q$ 之間。

4. 求標準差之確度 其公式爲：

$$\sigma_\sigma=\frac{\sigma_{dis.}}{\sqrt{2N}}$$

由此式可以確定眞確標準差，乃在實得標準差 $\pm 3\sigma_\sigma$ 之間。

5. 求相關係數之確度 因相關係數之求法有種種之不同，故求相關係數之確度之公式亦有種種，茲列舉

於下。

(a)相關係數如由 $\frac{\Sigma xy}{N\sigma_x\sigma_y}$ 求得，則其求確度之公式爲：

$$\sigma=\frac{1-r^2}{\sqrt{N}}$$

(求相關比率 η 之確度 σ 之公式與此同，惟將式中之 r 改爲 η 卽是。)

(b)相關係數如由 $2\text{Sin}\left(\frac{\pi}{6}\rho\right)$ 求得，則其求確度之公式爲：

$$\sigma_r=\frac{1.05(1-r^2)}{\sqrt{N}}$$

()相關係數如由 $2\text{Cos}\frac{\pi}{3}(1-R)-1$ 求得，則其求確度之公式爲：

$$\sigma_r=\frac{.628}{\sqrt{N}}$$

(d)相關係數如由 $\text{Cos}\,\pi\,U$ 求得，則其求確度之公式爲：

$$\sigma_r=\frac{1.63}{\sqrt{N}}$$

由上各式可以確定眞確相關係數，乃在實得相關係數 $\pm 3\sigma_r$ 之間。

6. 求差數之確度　其公式爲：

$$\sigma_d=\sqrt{(\sigma\text{量數I})^2+(\sigma\text{量數II})^2}$$

此公式非加解釋不易明瞭。式中之 σ_d 爲差數之標準差；σ 量數 I 及 σ 量數 II 爲某二系量數之確度數。蓋任何二量數，皆可求其差數之確度，故此公式 σ_d 可以適用於平均數，二十五分差，標準差，相關係數等等各數之差數（其中以平均數之差數爲最常計算）。求平均數之 σ_d 時，先用求平均數確度之公式求出 σ_{MI} 及 σ_{MII}；然後將此數代入求 σ_d 之公式中。求二十五分差相關係數等數之 σ_d 亦然，須先用求 Q 及 r 等確度之公式，求出 σ_{QI} 及 σ_{QII}，或 σ_{rI} 及 σ_{rII}；然後以之代入求差數確度之公式。

茲以平均數爲例，說明 σ_d 之求法如下：

現在學校往往用實驗方法，決定何種教法更爲良好；實驗時常用同程度同能力之學生，分爲兩組，用不同之教法教授。經過若干時日後，再測驗各組成績，視何組較佳，即斷定該種教法爲良。譬如有一組（甲組）學生 25 人，用新法教授，又有一組（乙組）學生 36 人用舊法教授。結果甲組之進步平均數爲 18，進步之標準差爲 4，乙組之進步平均數爲 16，進步之標準差爲 3；二者進步平均數之差數爲 $18-16=2$。此差數是否確實？假使此兩組學生各用前法再繼續教授，甲組所得優勝之差數，是否不致爲零，或反爲乙組優勝之差數？在求差數之確度以前，我們須求與此差數有關各數之確度。其算法爲：

$$\sigma_{MI}=\frac{4}{\sqrt{25}}=.8$$

$$\sigma_{MII}=\frac{3}{\sqrt{36}}=.5$$

$$\sigma_d = \sqrt{(.8)^2+(.5)^2} = .94+$$

由此可以確定此二進步數之眞確差數，乃在實得差數 2±3(.94) 之間，即在 $-.82$ 與 $+4.82$ 之間。可見眞確差數亦有爲零或在零下之機會。若眞確差數在零之下，則將使此種試驗之效果，有利於乙組教法之可能，惟不及在零上而利於甲組教法機會之大耳。

麥柯氏因差數之確度，在實驗方面爲用最廣；又因本機會之法則，甚難思索其意義；於是創一實驗係數。此種實驗係數求出甚易，且可自然的表示任何差數謬誤之程度。將以上所求出之差數及其確度數，代入下面之公式即得。

$$\text{實驗係數} = \frac{\text{差數}}{2.78\sigma_d}$$

因差數 $=2$，$\sigma_d = .94$，故

$$\text{實驗係數} = \frac{2}{2.78\times.94} = .76$$

此實驗係數 .76，係由實驗差數 2 求得。我們得着此種實驗係數，尚不能完全斷定新教授法優勝舊教授法。若將實驗差數 2 改爲 2.61，使由此求得之實驗係數爲 1.0，若是即可完全斷定新法優勝。其式如下：

$$\text{實驗係數} = \frac{2.61}{2.78\times.94} = 1.0$$

實驗係數爲 1.0 時，乃表明適合之確定程度；確定程度爲 .5 時，表明 $\frac{1}{2}$ 之確定程度；確定程度爲 2.0 時，表明二倍確定程度

等等。

表 51　用機會法則說明實驗係數表

實驗係數	相近之機會
.1	1.6比1
.2	2.5比1
.3	3.9比1
.4	6.5比1
.5	11　比1
.6	20　比1
.7	38　比1
.8	75　比1
.9	160　比1
1.0	369　比1
1.1	930　比1
1.2	2350　比1
1.3	6700　比1
1.4	20000　比1
1.5	67000　比1

若欲知道所得之差數有若干機會要爲零或爲負數（即謂眞確差數要爲零或爲負數），於求出實驗係數後，可按表 51 直接查得之。表 51 之數，不僅可以適用於二平均數之差數；並且可以適用於任何量數之差數。

乙、用概誤差考證確誤之度程

在第七章曾經述及當次數爲常態分配時，P.E., Md.D., Q 皆相等，而 P.E. 等於 .67449σ，或 .6745σ。習慣上多用 P.E. 表明確度，用 σ 表明之者較少。既知 P.E. = .6745σ，故上列各公式，可改爲：

$$\mathrm{P.E.}_M = \frac{.6745\sigma_{dis.}}{\sqrt{N}}$$

$$\mathrm{P.E.}_M = \frac{.84535\sigma_{dis.}}{\sqrt{N}}$$

$$P.E._{\sigma} = \frac{.6745\sigma_{dis.}}{\sqrt{2N}}$$

$$P.E._{r} = \frac{.6745(1-r^2)}{\sqrt{N}}$$

（求相關比率 η 確度 P.E. 之公式與此相同，惟將式中之 r 改為 η）。

由下列之說明，可以解釋 P.E. 所表示之確度：

眞確價值（平均數，標準差，相關係數，等等）在實得價值與 ±1P.E. 間之機會，為 1 與 1 之比（百分之50量數在±1P.E. 界限以內。）

眞確價值在實得價值與 ±2P.E. 間之機會，為 4.5 與 1 之比（百分之 82.26 量數在 ±2P.E. 界限以內。）

眞確價值在實得價值與 ±3P.E. 間之機會為 21 與 1 之比。

眞確價值在實得價值與 ±4P.E. 間之機會，為 142 與 1 之比。（眞確價值在實得價值與 ±4.4P.E. 間之機會，為 369 與 1 之比；而眞確價值在實得價值與 ±3σ 間之機會，亦為 369 與 1 之比；可知 ±4.4P.E. 實與 ±3σ 相等。）

眞確價值在實得價值與 ±5P.E. 間之機會，為 1310 與 1 之比。

眞確假值在實得價值與 ±6P.E. 間之機會，為 19,200 與 1 之比。

IX 練習問題

1. 設有統計結果：平均數 = 7.0；中點數 = 7.0；二十五分差 = 1.4；標準差 = 2.22；相關係數 = .303（用

乘積率法求出）試就此種結果，求下列各種確度量數：

(1) σ_{M} 及 P.E.$_{M}$;

(2) σ_{Md} 及 P.E.$_{Md}$;

(3) σ_{Q} 及 P.E.;

(4) σ_{σ} 及 P.E.$_{\sigma}$;

(5) σ_{r} 及 P.E.$_{r}$。

2. 設有兩分配，其次數為 14，相關係數 r 為 .66。此 r 如由 ρ 轉化而得，其 σ_{r} 為何？如由 R 轉化而得，其 σ_{r} 為何？如由 U 轉化而得，其 σ_{r} 又為何？

3. 設有兩分配，其一分配之次數為 81，中點數為 72，標準差為 3.2；他一分配之次數為 144，中點數為 80，標準差為 2.5。試求此兩分配差數之標準差。

4. 就第三題所得之結果，試求其實驗係數。

X 參考書報

1. 薛鴻志：教育統計學大綱（再版）第八章至第十章。

2. Rugg, H.O.: Statistical Methods Applied to Education, Chapters VII, VIII,

3. McCall, W.A.: How to M asure in Education, Chapter XVII（參看俞子夷：測驗統計法概要第五章。）

4. Yule, G.V.: Statistics, Chapter XV.

表 1　正弦及餘弦 (Natural Sines and Cosines)

	0°		1°		2°		3°		4°		
	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	
0	0000	1.000	0175	9998	0349	9994	0523	9986	0698	9976	60
5	0015	1.000	0189	9998	0364	9993	0538	9986	0712	9975	55
10	0029	1.000	0204	9998	0378	9993	0552	9985	0727	9974	50
15	0044	1.000	0218	9998	0393	9992	0567	9984	0741	9973	45
20	0058	1.000	0233	9997	0407	9992	0581	9983	0756	9971	40
25	0073	1.000	0247	9997	0422	9991	0596	9982	0770	9970	35
30	0087	1.000	0262	9997	0436	9990	0610	9981	0785	9969	30
35	0102	9999	0276	9996	0451	9990	0625	9980	0799	9968	25
40	0116	9999	0291	9996	0465	9989	0640	9980	0814	9967	20
45	0131	9999	0305	9995	0480	9988	0654	9979	0828	9966	15
50	0145	9999	0320	9995	0494	9988	0669	9978	0843	9964	10
55	0160	9999	0334	9994	0509	9987	0683	9977	0857	9963	5
60	0175	9999	0349	9994	0523	9986	0698	9976	0872	9962	0
	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	
	89°		88°		87°		86°		85°		

	5°		6°		7°		8°		9°		
	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	
0	0872	9962	1045	9945	1219	9925	1392	9903	1564	9877	60
5	0886	9961	1060	9944	1233	9924	1406	9901	1579	9874	55
10	0901	9959	1074	9942	1248	9922	1421	9899	1593	9872	50
15	0915	9958	1089	9941	1262	9920	1435	9897	1607	9870	45
20	0929	9957	1103	9939	1276	9918	1449	9894	1622	9868	40
25	0944	9955	1118	9937	1291	9916	1464	9892	1636	9865	35
30	0958	9954	1132	9936	1305	9914	1478	9890	1650	9863	30
35	0973	9953	1146	9934	1320	9913	1492	9888	1665	9860	25
40	0987	9951	1161	9932	1334	9911	1507	9886	1679	9858	20
45	1002	9950	1175	9931	1349	9909	1521	9884	1693	9856	15
50	1016	9948	1190	9929	1363	9907	1536	9881	1708	9853	10
55	1031	9947	1204	9927	1377	9905	1550	9879	1772	9851	5
60	1045	9945	1219	9925	1392	9903	1564	9877	1736	9848	0
	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	
	84°		83°		82°		81°		80°		

表 I (續)

	10°		11°		12°		13°		14°		
	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	
0	1736	9848	1908	9816	2079	9781	2250	9744	3419	9703	60
5	1751	9846	1922	9813	2093	9778	2264	9740	2433	9699	55
10	1765	9843	1937	9811	2108	9775	2278	9737	2447	9696	50
15	1779	9840	1951	9808	2122	9772	2292	9734	2462	9692	45
20	1794	9838	1965	9805	2136	9769	2306	9730	2476	9689	40
25	1808	9835	1979	9802	2150	9766	2320	9727	2490	9685	35
30	1822	9833	1994	9799	2164	9763	2334	9724	2504	9681	30
35	1837	9830	2008	9796	2179	9760	2349	9720	2518	9678	25
40	1851	9827	2022	9793	2193	9757	2363	9717	2532	9674	20
45	1865	9825	2036	9790	2207	9753	2377	9713	2546	9670	15
50	1880	9822	2051	9787	2221	9750	2391	9710	2560	9667	10
55	1894	9819	2065	9784	2235	9747	2405	9706	2574	9663	5
60	1908	9816	2079	9781	2250	9744	2419	9703	2588	9659	0
	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	
	79°		78°		77°		76°		75°		

	15°		16°		17°		18°		19°		
	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	
0	2588	9659	2756	9613	2924	9563	3090	9511	3256	9455	60
5	2602	9655	2770	9609	2938	9559	3104	9506	3269	9450	55
10	2616	9652	2784	9605	2952	9555	3118	9502	3283	9446	50
15	2630	9648	2798	9600	2965	9550	3132	9497	3297	9441	45
20	2644	9644	2812	9596	2979	9546	3145	9492	3311	9436	40
25	2659	9640	2826	9592	2993	9542	3159	9488	3324	9431	35
30	2672	9636	2840	9588	3007	9537	3173	9483	3338	9426	30
35	2686	9632	2854	9584	3021	9533	3187	9479	3352	9422	25
40	2700	9628	2868	9580	3035	9528	3201	9474	3365	9417	20
45	2714	9625	2882	9576	3048	9524	3214	9769	3379	9412	15
50	2728	9621	2896	9572	3062	9520	3228	9456	3393	9407	10
55	2742	9617	2910	9567	3076	9515	3242	9460	3407	9402	5
60	2756	9613	2924	9563	3090	9511	3256	9455	3420	9397	0
	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	
	74°		73°		72°		71°		70°		

表 I（續）

	20°		21°		22°		23°		24°		
	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	
0	3420	9397	3584	9336	2746	9272	3907	9205	4067	9135	60
5	3434	9392	3597	9331	3760	9266	3921	9199	4081	9130	55
10	3448	9787	3611	9325	3773	9261	3934	9194	4094	9124	50
15	3461	9382	3624	9320	3786	9255	3947	9188	4107	9118	45
20	3475	9377	3638	9315	3800	9250	3961	9182	4120	9112	40
25	3488	9372	3651	9309	3813	9244	3974	9176	4134	9106	35
30	3502	9367	3665	9304	3827	9239	3987	9171	4147	9100	30
35	3516	9362	3679	9299	3840	9233	4001	9165	4160	9094	25
40	3529	9356	3692	9293	3854	9228	4014	9159	4173	9088	20
45	3543	9351	3706	9288	3867	9222	4027	9153	4187	9081	15
50	3557	9346	3719	9283	3881	9216	4041	9147	4200	9075	10
55	3570	9341	3733	9277	3894	9211	4054	9141	4313	9069	5
60	3584	9336	3746	9272	3907	9205	4067	9135	4226	9063	0
	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	
	69°		68°		67°		66°		65°		

	25°		26°		27°		28°		29°		
	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	
0	4226	9063	4384	8988	4540	8910	4695	8829	4848	8746	60
5	4239	9057	4397	8982	4553	8903	4708	8823	4861	8739	55
10	4253	9051	4410	8975	4566	8897	4720	8816	4874	8732	50
15	4266	9045	4423	8969	4579	8890	4733	8809	4886	8725	45
20	4279	9038	4436	8962	4592	8884	4746	8802	4899	8718	40
25	4292	9032	4449	8956	4605	8877	4759	8796	4912	8711	35
30	4305	9026	4462	8949	4617	8870	4772	8788	4924	8704	30
35	4318	9020	4475	8943	4630	8863	4784	8781	4937	8696	25
40	4331	9013	4488	8936	4643	8857	4797	8774	4950	8689	20
45	4344	9007	4501	8930	4656	8850	4810	8767	4962	8682	15
50	4358	9901	4514	8623	4669	8843	4823	8760	4975	8675	10
55	4371	8994	4527	8917	4682	8836	4835	8753	4987	8668	5
60	4384	8988	4540	8910	4695	8829	4848	8746	5000	8660	0
	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	
	64°		63°		62°		61°		60°		

表 I （續）

	30°		31°		32°		33°		34°		
	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	
0	5000	8660	5150	8572	5299	8480	5446	8387	5592	8290	60
5	5013	8653	5163	8564	5312	8473	5459	8379	5604	8282	55
10	5025	8646	5175	8557	5324	8486	5471	8371	5616	8274	50
15	5038	8638	5188	8549	5336	8457	5483	8363	5628	8266	45
20	5050	8631	5200	8542	5348	8450	5495	8355	5640	8258	40
25	5063	8624	5213	8534	5361	8442	5507	8347	5652	8249	35
30	5075	8616	5225	8526	5373	8434	5519	8339	5664	8241	30
35	5088	8609	5237	8519	5385	8426	5531	8331	5676	8233	25
40	5100	8601	5250	8511	5398	8418	5544	8323	5688	8225	20
45	5113	8594	5262	8504	5410	8410	5556	8315	5700	8216	15
50	5125	8587	5275	8496	5422	8403	5568	8307	5712	8208	10
55	5138	8579	5287	8488	5434	8395	5580	8299	5724	8200	5
60	5150	8572	5299	8480	5446	8387	5592	8290	5736	8192	0
	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	
	59°		58°		57°		56°		55°		

	35°		36°		37°		38°		39°		
	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	
0	5736	8192	5878	8090	6018	7986	6157	7880	6293	7771	60
5	5748	8183	5898	8082	6030	7978	6168	7871	6305	7762	55
10	5760	8175	5901	8073	6041	7969	6180	7862	6316	7753	50
15	5771	8166	5913	8064	6053	7960	6191	7853	6327	7754	45
20	5783	8158	5925	8056	6065	7951	6202	7844	6338	7735	40
25	5795	8150	5987	8047	6076	7942	6214	7835	6350	7725	35
30	5807	8141	5948	8039	6088	7934	6225	7826	6361	7716	30
35	5819	8133	5960	8030	6099	7925	6237	7817	6372	7707	25
40	5831	8124	5972	8021	6111	7916	6248	7808	6383	7698	20
45	5842	8116	5983	8013	6122	7907	6259	7799	6394	7688	15
50	5854	8107	5995	8004	6134	7898	6271	7790	6406	7679	10
55	5866	8099	6007	7995	6145	7889	6282	7781	6417	7670	5
60	5878	8090	6018	7986	6157	7880	6293	7771	6428	7660	0
	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	
	54°		53°		52°		51°		50°		

附錄一　計算上需用之各種表

表 I （續）

	40°		41°		42°		43°		44°		
	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	
0	6428	7660	6561	7547	6691	7431	6820	7314	6947	7193	60
5	6439	7651	6572	7538	6702	7422	6831	7304	6957	7183	55
10	6450	7642	6583	7528	6713	7412	6841	7294	6967	7173	50
15	6461	7632	6593	7518	6724	7402	6852	7284	6978	7163	45
20	6472	7623	6604	7503	6734	7392	6862	7274	6988	7153	40
25	6483	7613	6615	7499	6745	7383	6873	7264	6999	7143	35
30	6494	7604	6626	7490	6756	7373	6884	7254	7009	7133	30
35	6506	7595	6637	7480	6767	7363	6894	7244	7019	7122	25
40	6517	7585	6648	7470	6777	7353	6905	7234	7030	7112	20
45	6528	7576	6659	7461	6788	7343	6915	7224	7040	7102	15
50	6539	7566	6670	7451	6799	7333	6926	7214	7050	7092	10
55	6550	7557	6680	7441	6809	7323	6936	7203	7061	7081	5
60	6561	7547	6691	7431	6820	7314	6947	7193	7071	7071	0
	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	
	49°		48°		47°		46°		45°		

表 II　乘方表

此表雖從三位整數起計算，但兩位整數或三位小數，亦均能適用。求兩位整數之乘方，可用“0”欄各數，而將最後兩位之 00 不用。求小數之乘方，於查得數值後，須注意定小數點位置。

No.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	10000	10201	10404	10609	10816	11025	11236	11449	11664	11881
11	12100	12321	12544	12769	12996	13225	13456	13689	13924	14161
12	14400	14641	14884	15129	15376	15625	15876	16126	16384	16641
13	16900	17161	17424	17689	17956	18225	18496	18769	19044	19321
14	19600	19881	20164	20449	20736	21025	21316	21609	21904	22201
15	22500	22801	23104	23409	23716	24025	24336	24649	24964	25281
16	25600	25921	26244	26569	26896	27225	27556	27889	28224	28561
17	28900	29241	29584	29929	30276	30625	30976	31329	31684	32041
18	32400	32761	33124	33489	33856	34225	34596	34969	35344	35721
19	36100	36481	36864	37249	37636	38025	38416	38809	39204	39601
20	40000	40401	40804	41209	41616	42025	42436	42849	43264	43681
21	44100	44521	44944	45369	45796	46225	46656	47089	47524	47961
22	48400	48841	49284	49729	50176	50625	51076	51529	51984	52441
23	52900	53361	53824	54289	54756	55225	55696	56169	96644	57121
24	57600	58081	58564	59049	59526	60025	60516	61009	61504	62001
25	62500	63001	63504	64009	64516	65025	65536	66049	66564	67081
26	67600	68121	68644	69169	69696	70225	70756	71289	71824	72361
27	72900	73441	73984	74529	75076	75625	76176	76729	77284	77841
28	78400	78961	79524	80089	80656	81225	81796	82369	82944	83521
29	84100	84681	85264	85849	86436	87025	87616	88209	88804	89401

30	90000	90601	91204	91809	92416	93025	93636	94249	94864	95481
31	96100	96721	97344	97969	98596	99225	99856	100489	101124	101761
32	102400	103041	103684	104329	104976	105625	106276	106929	107584	108241
33	108900	109561	110224	110889	111556	112225	112896	113569	114244	114921
34	115600	116281	116964	117649	118336	119025	119716	120409	121104	121801
35	122500	123201	123904	124609	125316	126025	126736	127449	128164	128881
36	129600	130321	131044	131769	132496	133225	133956	134689	135424	136161
37	136900	137641	138384	139129	139876	140625	141376	142129	142884	143641
38	144400	145161	145924	146689	147456	148225	148996	149769	150544	151321
39	152100	152881	153664	154449	155236	156025	156816	157609	158404	159201
40	160000	160801	161604	162409	163216	164025	164836	165649	166464	167281
41	168100	168921	169744	170569	171396	172225	173056	173889	174724	175561
42	176400	177241	178084	178929	179776	180625	181476	182329	183184	184041
43	184900	185761	186624	187489	188356	189225	190096	190969	191844	192721
44	193600	194481	195364	196249	197136	198025	198916	199809	200704	201601
45	202500	203401	204304	205209	206116	207025	207936	208849	209764	210681
46	211600	212521	213444	214369	215296	216225	217156	218089	219024	219961
47	220900	221841	222784	223729	224676	225625	226576	227529	228484	229441
48	230400	231361	232324	233289	234256	235225	236196	237169	238144	239121
49	240100	241081	242064	243049	244036	245025	246016	247009	248004	249001
50	250000	251001	252004	253009	254016	255025	256036	257049	258064	259081
51	260100	261121	262144	263169	264196	265225	266256	267289	268324	269361
52	270400	271441	272484	273529	274576	275625	276676	277729	278784	279846
53	280900	281961	283024	284089	285156	286225	287296	288369	289444	299521
54	291600	292681	293764	294849	295936	297025	298116	299209	300304	301401

表 II 乘方表（續）

No.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	302500	303601	304704	305809	306916	308025	309136	310249	311364	312481
56	313600	314721	315844	316969	318096	319225	320356	321489	322624	323761
57	324900	326041	327184	328329	329476	330625	331776	332929	334084	335241
58	336400	337561	338724	339889	341056	342225	343396	344569	345744	346921
59	348100	349281	350464	351649	352836	354025	355216	356409	357604	358801
60	360000	361201	362404	363609	364816	366025	367236	368449	369664	370881
61	372100	373321	374544	375769	376996	378225	379456	380689	381924	383161
62	384400	385641	386884	388129	389376	390625	391876	393129	394384	395641
63	396900	398161	399424	400689	401956	403225	404496	405769	407044	408321
64	409600	410881	412164	413449	414736	416025	417316	418609	419904	421201
65	422500	423801	425104	426409	427716	429025	430336	431649	432964	434281
66	435600	436921	438244	439569	440896	442225	443556	444889	446224	447561
67	448900	450241	451584	452929	454276	455625	456976	458329	459684	461041
68	462400	463761	465124	466489	467854	469225	470596	471969	473344	474721
69	476100	477481	478864	480249	481636	483025	484416	485809	487204	488601
70	490000	491401	492804	494209	495616	497025	498436	499849	501264	502681
71	504100	505521	506949	508369	509796	511225	512656	514089	515524	516961
72	518400	519841	521284	522729	524176	525625	527076	528529	529984	531441
73	532900	534361	535824	537289	538756	540225	541696	543169	544644	546121
74	547600	549081	550564	552049	553536	555025	556516	558009	559504	561001

75	562500	564001	565504	567009	568516	570025	571536	573049	574564	576081
76	577600	579121	580644	582169	583696	585225	586756	588289	589824	591361
77	592600	594441	595984	597529	599076	600625	602176	603729	605284	606841
78	608400	609961	611524	613089	614656	616225	617796	619369	620944	622521
79	624100	625681	627264	628849	630436	632025	633616	635209	636804	638401
80	640000	641601	643204	644809	646416	648025	649636	651249	652864	654461
81	656100	657721	659344	660969	662596	664225	665856	667489	669124	670761
82	672400	674041	675684	677329	678976	680625	682276	683929	685584	687241
83	688900	690561	692224	693889	695556	697225	698896	700569	702244	703921
84	705600	707281	708964	710649	712336	714025	715716	717409	719104	720801
85	722500	724201	725904	727609	729316	731025	732736	734449	736164	737881
86	739600	741321	743044	744769	746496	748225	749956	751689	753424	755161
87	756900	758641	760384	762129	763876	765625	767376	769129	770884	772641
88	774400	776161	777924	779689	781456	783225	784996	786769	788544	790321
89	792100	793881	795664	797449	799236	801025	802816	804609	806404	808201
90	810000	811801	813604	815409	817216	819025	820836	822649	824464	826281
91	828100	829921	831744	833569	835396	837225	839056	840889	842724	844561
92	846400	848241	850084	851929	853776	855625	857476	859329	861184	863041
93	864900	866761	868624	874889	872356	874225	876096	877969	879844	881721
94	883600	885481	887364	889249	891136	893025	894916	896809	898704	900601
95	902500	904401	906304	908209	910116	912025	913936	915849	917764	919681
96	921600	923521	925444	927369	92 296	931225	933156	935089	937024	938961
97	940900	942841	944784	946729	948676	950625	952576	954529	956484	958441
98	960400	962361	964324	966289	968256	970225	972196	974169	976144	978121
99	980100	982081	984064	986049	988036	990025	992016	994009	996004	998001

表 III　由 ρ 之價值求 γ

ρ 係由公式 $\rho=1-\dfrac{\sigma\Sigma D^2}{N(N^2-1)}$ 求出，γ 可由公式 $\gamma=2\text{Sin}\left(\dfrac{\pi}{\sigma}\rho\right)$ 求出。此表所列 ρ 之價值，係從 .01 起至 1.00 止，而與 γ 之各相當價值並列。

ρ	γ	ρ	γ	ρ	γ	ρ	γ
.01	.0105	.26	.2714	.51	.5277	.76	.7750
.02	.0209	.27	.2818	.52	.5378	.77	.7847
.03	.0314	.28	.2922	.53	.5479	.78	.7943
.04	.0419	.29	.3025	.54	.5580	.79	.8039
.05	.0524	.30	.3129	.55	.5680	.80	.8135
.06	.0628	.31	.3232	.56	.5781	.81	.8230
.07	.0733	.32	.3335	.57	.5881	.82	.8325
.08	.0838	.33	.3439	.58	.5981	.83	.8421
.09	.0942	.34	.3542	.59	.6081	.84	.8516
.10	.1047	.35	.3645	.60	.6180	.85	.8610
.11	.1151	.36	.3748	.61	.6280	.86	.8705
.12	.1256	.37	.3850	.62	.6379	.87	.8799
.13	.1360	.38	.3955	.63	.6478	.88	.8893
.14	.1465	.39	.4056	.64	.6577	.89	.8986
.15	.1569	.40	.4158	.65	.6676	.90	.9080
.16	.1674	.41	.4261	.66	.6775	.91	.9173
.17	.1778	.42	.4363	.67	.6873	.92	.9269
.18	.1882	.43	.4465	.68	.6971	.93	.9359
.19	.1986	.44	.4567	.69	.7069	.94	.9451
.20	.2091	.45	.4669	.70	.7167	.95	.9543
.21	.2195	.46	.4771	.71	.7265	.96	.9635
.22	.2299	.47	.4872	.72	.7363	.97	.9727
.23	.2403	.48	.4973	.73	.7460	.98	.9818
.24	.2507	.49	.5075	.74	.7557	.99	.9909
.25	.2611	.50	.5176	.75	.7654	1.00	1.0000

表 IV 由 R 之價值求 γ

R 係由公式 $R=1-\frac{6\Sigma D^2}{N(N^2-1)}$ 求出，γ 可由公式 $\gamma=2\cos\frac{\pi}{3}(1-R)-1$ 求出。此表所列 R 之價值，係從 •01 起至 1•00 止，而與 γ 之各相當價值並列。

R	γ	R	γ	R	γ	R	γ
.00	.000	.26	.429	.51	.742	.76	.937
.01	.018	.27	.444	.52	.753	.77	.942
.02	.036	.28	.458	.53	.763	.78	.947
.03	.054	.29	.472	.54	.772	.79	.952
.04	.071	.30	.486	.55	.782	.80	.956
.05	.089	.31	.500	.56	.791	.81	.961
.06	.107	.32	.514	.57	.801	.82	.965
.07	.124	.33	.528	.58	.810	.83	.968
.08	.141	.34	.541	.59	.818	.84	.972
.09	.158	.35	.554	.60	.827	.85	.975
.10	.176	.36	.567	.61	.836	.86	.979
.11	.192	.37	.580	.62	.844	.87	.981
.12	.209	.38	.593	.63	.852	.88	.984
.13	.226	.39	.606	.64	.860	.89	.987
.14	.242	.40	.618	.65	.867	.90	.989
.15	.259	.41	.630	.66	.875	.91	.991
.16	.275	.42	.642	.67	.882	.92	.993
.17	.291	.43	.654	.68	.889	.93	.995
.18	.307	.44	.666	.69	.896	.94	.996
.19	.323	.45	.677	.70	.902	.95	.997
.20	.338	.46	.689	.71	.908	.96	.998
.21	.354	.47	.700	.72	.915	.97	.999
.22	.369	.48	.711	.73	.921	.98	.9996
.23	.384	.49	.721	.74	.926	.99	.9999
.24	.399	.50	.732	.75	.932	1.00	1.0000
.25	.414						

表 V　由 U 之百分比例數求 γ

U 爲異號各對差數總數之百分比例數。此表所列 U 之價值，係從 •00 起至 •50 止，而與 γ 之正數各相當價值並列。若 U 過 •50 至 1•00 時，則 γ 爲負數，可由相反之關係而求 γ 之價值。

U	γ	U	γ	U	γ	U	γ
.00	1.0000	.13	.9174	.26	.6848	.38	.3682
.01	.9996	.14	.9044	.27	.6615	.39	.3387
.02	.9982	.15	.8905	.28	.6375	.40	.3089
.03	.9958	.16	.8757	.29	.6129	.41	.2788
.04	.9924	.17	.8602	.30	.5877	.42	.2485
.05	.9880	.18	.8439	.31	.5620	.43	.2180
.06	.9826	.19	.8268	.32	.5358	.44	.1873
.07	.9762	.20	.8089	.33	.5091	.45	.1564
.08	.9688	.21	.7902	.34	.4819	.46	.1253
.09	.9604	.22	.7707	.35	.4542	.47	.0941
.10	.95[illegible]0	.23	.7504	.36	.4260	.48	.0628
.11	.9407	.24	.7293	.37	.3973	.49	.0314
.12	.9295	.25	.7074			.50	.0000

表 VI　常態曲線下各 $\frac{x}{\sigma}$ 之各縱線高度表

假定由平均數所在之點引出之縱線高爲100,000。x＝與平均數相差之數，σ＝標準差。

x/σ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	100000	99995	99980	99955	99920	99875	99820	99755	99685	99596
0.1	99501	99396	99283	99158	99025	98881	98728	98565	98393	98211
0.2	98020	97819	97609	97390	97161	96923	96676	96420	96156	95882
0.3	95600	95309	95010	94702	94387	94055	93723	93382	93024	92677
0.4	92312	91399	91558	91169	90774	90371	89961	89543	89119	88688
0.5	88250	87805	87353	86896	86432	85962	85488	85006	84519	84060
0.6	83527	83023	82514	82010	81481	80957	80429	79896	79359	78817
0.7	78270	77721	77167	76610	76048	75484	74916	74342	73769	73193
0.8	72615	72033	71448	70861	70272	69681	69087	68493	67896	67298
0.9	66689	66097	65494	64891	64287	63683	63077	62472	61865	61259
1.0	60653	60047	59440	58834	58228	57623	57017	56414	55810	55209
1.1	54607	54007	53409	52812	52214	51620	51027	50437	49848	49260
1.2	48675	48092	47511	46933	46357	45783	45212	44644	44078	43516
1.3	42956	42399	41845	41294	40747	40202	39661	39123	38569	38058
1.4	37531	37007	36487	35971	35459	34950	34445	33944	33447	32954
1.5	32465	31980	31500	31023	30550	30082	29618	29158	28702	28251
1.6	27804	27361	26923	26489	26059	25634	25213	24797	24385	23978
1.7	23575	23176	22782	22392	22008	21627	21251	20879	20511	20148
1.8	19790	19436	19086	18741	18400	18064	17732	17404	17081	16762
1.9	16448	16137	15831	15530	15232	14939	14650	14364	14083	13806
2.0	13534	13265	13000	12740	12483	12230	11981	11737	11496	11259
2.1	11025	10795	10570	10347	10129	09914	09702	09495	09290	09090
2.2	08892	08698	08507	08320	08136	07956	07778	07604	07433	07265
2.3	07100	06939	06780	06624	06471	06321	06174	06029	05888	05750
2.4	05614	05481	05350	05222	05096	04973	04852	04734	04618	04505
2.5	04394	04285	04179	04074	03972	03873	03775	03680	03586	03494
2.6	03405	03317	03232	03148	03066	02986	02908	02831	02757	02684
2.7	02612	02542	02474	02408	02343	02280	02218	02157	02098	02040
2.8	01984	01929	01876	01823	01772	01723	01674	01627	01581	01536
2.9	01492	01449	01408	01367	01328	01288	01252	01215	01179	01145
3.0	01111	00819	00598	00432	00309	00219	00153	00106	60073	00050
4.0	00034	00022	00015	00010	00006	00004	00003	00002	00001	00001
5.0	00000									

表 VII 常態曲線下各$\frac{x}{\sigma}$之各部分面積之價值表假定全面積爲10,000，100＝百分之一。

x＝與平均數相差之數，σ＝標準差數。

x/σ	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0000	0040	0080	0120	0160	0199	0239	0279	0319	0359
0.1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0753
0.2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0.3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0.4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0.5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0.6	2257	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2517	2549
0.7	2580	2612	2642	2673	2704	2734	2764	2794	2823	2852
0.8	2881	2910	2939	2967	2995	3023	3051	3078	3106	3133
0.9	3159	3186	3212	3238	3264	3290	3315	3340	3365	3389
1.0	3413	3438	3461	3485	3508	3531	3554	3577	3599	3621
1.1	3643	3665	3686	3718	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1.2	3849	3869	3888	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1.3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1.4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1.5	4332	4345	4357	4370	4383	4394	4406	4418	4429	4441
1.6	4452	4463	4474	4484	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1.7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1.8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4699	4706
1.9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4761	4767
2.0	4772	4778	4783	4788	4793	4798	4803	4808	4812	4817
2.1	4821	4826	4830	4834	4838	4842	4846	4850	4854	4857
2.2	4861	4864	4868	4871	4875	4878	4881	4884	4887	4890
2.3	4893	4896	4898	4901	4904	4906	4909	4911	4913	4916
2.4	4918	4920	4922	4925	4927	4929	4931	4932	4934	4936
2.5	4938	4940	4941	4943	4945	4946	4948	4949	4951	4952
2.6	4953	4955	4956	4957	4959	4960	4961	4962	4963	4964
2.7	4965	4966	4967	4968	4969	4970	4971	4972	4973	4974
2.8	4974	4975	4976	4977	4977	4978	4979	4979	4980	4981
2.9	4981	4982	4982	4983	4984	4984	4985	4985	4986	4986
3.0	4986.5	4986.9	4987.4	4987.8	4988.2	4988.6	4988.9	4989.3	4989.7	4990.0
3.1	4990.3	4990.6	4991.0	4991.3	4991.6	4991.8	4992.1	4992.4	4992.6	4992.9
3.2	4993.129									
3.3	4995.166									
3.4	4996.631									
3.5	4997.674									
3.6	4998.409									
3.7	4998.922									
3.8	4999.277									
3.9	4999.519									
4.0	4999.683									
4.5	4999.966									
5.0	4999.997133									

表 VIII　根據常態曲線下面積，採取底線之 5σ 業定問題難易表

此表底線距離定爲 $\pm 2.5\sigma$。以 -2.5σ 所在之點爲 0，平均數所在之點爲50，$+2.5\sigma$ 所在之點爲100。認定學業能力之分配與常態曲線一致，以學生解决問題之多寡分配與曲線面積相對照。表中數碼之種類如下：

(1)　甲欄指學生作題作錯者之百分數。

(2)　乙欄指標準差分數部分之距離。

(3)　丙欄指該題百分比之地位。

例：若干學生同作一題，百分之22作錯，該題應佔之次序卽爲35；作錯者若爲百分之98.35，該題應佔之次序卽爲90；其餘類推。

甲	乙	丙	甲	乙	丙	甲	乙	丙	甲	乙	丙
.02	.01		.73	.29		2.12	.58		4.43	.86	
.04	.02		.77	.30	6	2.19	.59		4.53	.87	
.06	.03		.81	.31		2.25	.60	12	4.64	.88	
.07	.04		.84	.32		2.32	.61		4.75	.89	
.09	.05	1	.88	.33		2.39	.62		4.86	.90	18
.11	.06		.92	.34		2.45	.63		4.97	.91	
.13	.07		.96	.35	7	2.52	.64		5.08	.92	
.16	.08		1.00	.36		2.60	.65	13	5.20	.93	
.18	.09		1.04	.37		2.67	.66		5.32	.94	
.20	.10	2	1.08	.38		2.74	.67		5.44	.95	19
.22	.11		1.12	.39		2.82	.68		5.55	.96	
.25	.12		1.17	.40	8	2.89	.69		5.68	.97	
.27	.13		1.21	.41		2.97	.70	14	5.81	.98	
.29	.14		1.26	.42		3.05	.71		5.93	.99	
.32	.15	3	1.30	.43		3.13	.72		6.06	1.00	20
.34	.16		1.35	.44		3.22	.73		6.19	1.01	
.37	.17		1.40	.45	9	3.30	.74		6.32	1.02	
.40	.18		1.45	.46		3.39	.75	15	6.46	1.03	
.42	.19		1.50	.47		3.47	.76		6.59	1.04	
.45	.20	4	1.60	.49		3.57	.77		6.73	1.05	21
.48	.21		1.65	.50	10	3.65	.78		6.87	1.06	
.51	.22		1.71	.51		3.74	.79		7.02	1.07	
.54	.23		1.76	.52		3.84	.80	16	7.16	1.08	
.57	.24		1.80	.53		3.93	.81		7.31	1.09	
.60	.25	5	1.88	.54		4.03	.82		7.46	1.10	22
.63	.26		1.94	.55	11	4.13	.83		7.61	1.11	
.67	.27		2.00	.56		4.23	.84		7.76	1.12	
.70	.28		2.06	.57		4.33	.85	17	7.91	1.13	

表 VIII (續)

甲	乙	丙	甲	乙	丙	甲	乙	丙
8.07	1.14		17.00	1.57		30.23	2.00	40
8.23	1.15	23	17.26	1.58		30.59	2.01	
8.39	1.16		17.52	1.59		30.94	2.02	
8.55	1.17		17.79	1.60	32	31.30	2.03	
8.72	1.18		18.05	1.61		31.66	2.04	
8.89	1.19		18.32	1.62		32.02	2.05	41
9.06	1.20	24	18.60	1.63		32.38	2.06	
9.23	1.21		18.87	1.64		32.74	2.07	
9.46	1.22		19.15	1.65	33	33.10	2.08	
9.58	1.23		19.43	1.66		33.47	2.09	
9.76	1.24		19.71	1.67		33.84	2.10	42
9.94	1.25	25	19.99	1.68		34.21	2.11	
10.13	1.26		20.28	1.69		34.58	2.12	
10.31	1.27		20.57	1.70	34	34.95	2.13	
10.50	1.28		20.86	1.71		35.32	2.14	
10.69	1.29		21.15	1.72		35.70	2.15	43
10.89	1.30	26	21.44	1.73		36.07	2.16	
11.08	1.31		21.74	1.74		36.45	2.17	
11.28	1.32		22.04	1.75	35	36.83	2.18	
11.48	1.33		22.34	1.76		37.21	2.19	
11.68	1.34		22.65	1.77		37.59	2.20	44
11.89	1.35	27	22.96	1.78		37.97	2.21	
12.09	1.36		23.26	1.79		38.35	2.22	
12.30	1.37		23.58	1.80	36	38.74	2.23	
12.52	1.38		23.89	1.81		39.12	2.24	
12.73	1.39		24.20	1.82		39.51	2.25	45
12.95	1.40	28	24.52	1.83		39.90	2.26	
13.17	1.41		24.84	1.84		40.28	2.27	
13.39	1.42		25.16	1.85	37	40.67	2.28	
13.61	1.43		25.49	1.86		41.06	2.29	
13.84	1.44		25.81	1.87		41.45	2.30	46
14.07	1.45	28	26.14	1.88		41.85	2.31	
14.30	1.46		26.47	1.89		42.24	2.32	
14.53	1.47		26.81	1.90	38	42.63	2.33	
14.77	1.48		27.14	1.91		43.02	2.34	
15.00	1.49		27.48	1.92		43.42	2.35	47
15.25	1.50	30	27.81	1.93		43.81	2.36	
15.49	1.51		28.15	1.94		44.21	2.37	
15.73	1.52		28.50	1.95	39	44.60	2.38	
15.98	1.53		28.84	1.96		45.00	2.39	
16.23	1.54		29.19	1.97		45.40	2.40	48
16.49	1.55	31	29.53	1.98		45.70	2.41	
16.74	1.56		29.88	1.99		46.19	2.42	

表 VIII　(續)

甲	乙	丙	甲	乙	丙	甲	乙	丙
46.59	2.43		64.68	2.86		79.14	3.29	
46.99	2.44		65.05	2.87		79.43	3.30	66
47.39	2.45	49	65.42	2.88		79.72	3.31	
47.79	2.46		65.79	2.89		80.01	3.32	
48.18	2.47		66.16	2.90	58	80.29	3.33	
48.58	2.48		66.53	2.91		80.57	3.34	
48.98	2.49		66.90	2.92		80.85	3.35	67
50.00	2.50	50	67.26	2.93		81.13	3.36	
51.02	2.51		67.62	2.94		81.40	3.37	
51.42	2.52		67.88	2.95	59	81.68	3.38	
51.82	2.53		68.34	2.96		81.95	3.39	
52.21	2.54		68.70	2.97		82.21	3.40	68
52.61	2.55	51	69.06	2.98		82.48	3.41	
53.01	2.56		69.41	2.99		82.74	3.42	
53.41	2.57		69.77	3.00	60	83.00	3.43	
53.81	2.58		70.12	3.01		83.26	3.44	
54.21	2.59		70.47	3.02		83.51	3.45	69
54.60	2.60	52	70.81	3.03		83.77	3.46	
55.00	2.61		71.16	3.04		84.02	3.47	
55.40	2.62		76.50	3.05	61	84.27	3.48	
55.79	2.63		71.85	3.06		84.51	3.49	
56.19	2.64		72.19	3.07		84.75	3.50	70
56.58	2.65	53	72.52	3.08		85.00	3.51	
56.98	2.66		72.86	3.09		85.23	3.52	
57.37	2.67		73.19	3.10	62	85.47	3.53	
57.76	2.68		73.53	3.11		85.70	3.54	
58.15	2.69		73.86	3.12		85.93	3.55	71
58.55	2.70	54	74.19	3.13		86.16	3.56	
58.94	2.71		74.51	3.14		86.39	3.57	
59.33	2.72		74.84	3.15	63	86.61	3.58	
59.72	2.73		75.16	3.16		86.83	3.59	
60.10	2.74		75.48	3.17		87.05	3.60	72
60.49	2.75	55	75.80	3.18		87.27	3.61	
60.88	2.76		76.11	3.19		87.48	3.62	
61.26	2.77		76.42	3.20	64	87.70	3.63	
61.65	2.78		76.74	3.21		87.91	3.64	
62.03	2.79		77.04	3.22		88.11	3.65	73
62.41	2.80	56	77.35	3.23		88.32	3.66	
62.79	2.81		77.66	3.24		88.52	3.67	
63.07	2.82		77.96	3.25	65	88.72	3.68	
63.55	2.83		78.26	3.26		88.92	3.69	
63.93	2.84		78.56	3.27		89.11	3.70	74
64.30	2.85	57	78.85	3.28		89.31	3.71	

(續)

表 VIII (續)

甲	乙	丙	甲	乙	丙	甲	乙	丙
89.50	3.72		95.67	4.15	83	98.74	4.58	
89.69	3.73		95.77	4.16		98.79	4.59	
89.87	3.74		95.87	4.17		98.83	4.60	92
90.06	3.75	75	95.97	4.18		98.88	4.61	
90.24	3.76		96.07	4.19		98.92	4.62	
90.42	3.77		96.16	4.20	84	98.96	4.63	
90.59	3.78		96.26	4.21		99.00	4.64	
90.77	3.79		96.35	4.22		99.04	4.65	93
90.94	3.80	76	96.44	4.23		99.08	4.66	
91.11	3.81		96.53	4.24		99.12	4.67	
91.28	3.82		96.61	4.25	85	99.16	4.68	
91.45	3.83		96.70	4.26		99.23	4.69	
91.61	3.84		96.78	4.27		99.27	4.70	94
91.77	3.85	77	96.87	4.28			4.71	
91.93	3.86		96.95	4.29		99.30	4.72	
92.09	3.87		97.03	4.30	86	99.33	4.73	
92.24	3.88		97.11	4.31		99.37	4.74	
92.39	3.89		97.18	4.32		99.40	4.75	95
92.54	3.90	78	97.26	4.33		99.43	4.76	
92.69	3.91		97.33	4.34		99.46	4.77	
92.84	3.92		97.40	4.35	87	99.49	4.78	
92.98	3.93		97.48	4.36		99.52	4.79	
93.13	3.94		97.55	4.37		99.55	4.80	96
93.27	3.95	79	97.61	4.38		99.58	4.81	
93.41	3.96		97.68	4.39		99.60	4.82	
93.54	3.97		97.75	4.40	88	99.63	4.83	
93.68	3.98		97.81	4.41		99.66	4.84	
93.81	3.99		97.88	4.42		99.68	4.85	97
93.94	4.00	80	97.94	4.43		99.71	4.86	
94.07	4.01		98.00	4.44		99.73	4.87	
94.19	4.02		98.06	4.45	89	99.75	4.88	
94.32	4.03		98.12	4.46		99.78	4.89	
94.44	4.04		98.20	4.47		99.80	4.90	98
94.56	4.05	81	98.24	4.48		99.82	4.91	
94.68	4.06		98.29	4.49		99.84	4.92	
94.80	4.07		98.35	4.50	90	99.87	4.93	
94.92	4.08		98.40	4.51		99.88	4.94	
95.03	4.09		98.45	4.52		99.91	4.95	99
95.14	4.10	82	98.50	4.53		99.93	4.96	
95.25	4.11		98.55	4.54		99.94	4.97	
95.36	4.12		98.60	4.55	91	99.96	4.98	
95.47	4.13		98.65	4.56		99.98	4.99	
95.57	4.14		98.70	4.57		100.00	5.00	100

表 IX 根據常態曲線下面積，採取底線之 6σ 測定問題難易表

此表底線定爲±3σ。以－3σ所在之點爲0，平均數所在之點爲 50，＋3σ所在之點爲100。其他情形與第四表同。

例:設有若干學生同作一題，百分之18.27作錯，該題應占之次序爲35；百分之 80.09 作錯，該題應占之次序爲64；其餘類推，

甲	乙	丙	甲	乙	丙	甲	乙	丙	甲	乙	丙
.00	.01		.19	.28		.57	.55		1.32	.82	
.00	.02		.20	.29		.59	.56		1.36	.83	
.01	.03		.21	.30	5	.61	.57		1.40	.84	14
.01	.04		.22	.31		.64	.58		1.44	.85	
.02	.05		.23	.32		.66	.59		1.48	.86	
.02	.06	1	.24	.33		.68	.60	10	1.52	.87	
.03	.07		.25	.34		.70	.61		1.56	.88	
.04	.08		.26	.35		.73	.62		1.60	.89	
.04	.09		.27	.36	6	.75	.63		1.65	.90	15
.05	.10		.29	.37		.77	.64		1.69	.91	
.05	.11		.30	.38		.80	.65		1.74	.92	
.06	.12	2	.31	.39		.82	.66	11	1.78	.93	
.07	.13		.33	.40		.85	.67		1.83	.94	
.07	.14		.34	.41		.88	.68		1.88	.95	
.08	.15		.35	.42	7	.90	.69		1.93	.96	16
.09	.16		.37	.43		.93	.70		1.98	.97	
.09	.17		.38	.44		.96	.71		2.03	.98	
.10	.18	3	.40	.45		.99	.72	12	2.08	.99	
.11	.19		.41	.46		1.02	.73		2.14	1.00	
.12	.20		.43	.47		1.05	.74		2.19	1.01	
.12	.21		.45	.48	8	1.08	.75		2.25	1.02	17
.13	.22		.46	.49		1.11	.76		2.30	1.03	
.14	.23		.48	.50		1.15	.77		2.36	1.04	
.15	.24	4	.50	.51		1.18	.78	13	2.42	1.05	
.16	.25		.52	.52		1.22	.79		2.48	1.06	
.17	.26		.54	.53		1.25	.80		2.54	1.07	
.18	.27		.55	.54	9	1.29	.81		2.60	1.08	18

(續)

表 IX (續)

甲	乙	丙	甲	乙	丙	甲	乙	丙
2.67	1.09		6.67	1.51		14.09	1.93	
2.73	1.10		6.80	1.52		14.32	1.94	
2.80	1.11		6.94	1.53		14.55	1.95	
2.87	1.12		7.07	1.54		14.78	1.96	
2.93	1.13		7.21	1.55		15.01	1.97	
3.00	1.14	19	7.35	1.56	26	15.25	1.98	33
3.08	1.15		7.50	1.57		15.48	1.99	
3.15	1.16		7.64	1.58		15.73	2.00	
3.22	1.17		7.79	1.59		15.97	2.01	
3.30	1.18		7.94	1.60		16.21	2.02	
3.37	1.19		8.09	1.61		16.46	2.03	
3.45	1.20	20	8.24	1.62	27	16.71	2.04	34
3.53	1.21		8.39	1.63		16.96	2.05	
3.61	1.22		8.55	1.64		17.22	2.06	
3.70	1.23		8.71	1.65		17.48	2.07	
3.78	1.24		8.87	1.66		17.74	2.08	
3.87	1.25		9.04	1.67		18.00	2.09	
3.95	1.26	21	9.20	1.68	28	18.27	2.10	35
4.04	1.27		9.37	1.69		18.53	2.11	
4.13	1.28		9.54	1.70		18.80	2.12	
4.22	1.29		9.71	1.71		19.08	2.13	
4.32	1.30		9.89	1.72		19.35	2.14	
4.41	1.31		10.06	1.73		19.63	2.15	
4.51	1.32	22	10.24	1.74	29	19.91	2.16	36
4.61	1.33		10.42	1.75		20.19	2.17	
4.71	1.34		10.61	1.76		20.47	2.18	
4.81	1.35		10.79	1.77		20.76	2.19	
4.91	1.36		10.98	1.78		21.05	2.20	
5.02	1.37		11.17	1.79		21.34	2.21	
5.12	1.38	23	11.37	1.80	30	21.63	2.22	37
5.23	1.39		11.56	1.81		21.92	2.23	
5.34	1.40		11.76	1.82		22.22	2.24	
5.45	1.41		11.96	1.83		22.52	2.25	
5.57	1.42		12.16	1.84		22.82	2.26	
5.68	1.43		12.37	1.85		23.13	2.27	
5.80	1.44	24	12.57	1.86	31	23.44	2.28	38
5.92	1.45		12.78	1.87		23.75	2.29	
6.03	1.46		13.00	1.88		24.06	2.30	
6.16	1.47		13.21	1.89		24.32	2.31	
6.29	1.48		13.43	1.90		24.69	2.32	
6.41	1.49		13.65	1.91		25.00	2.33	
6.54	1.50	25	13.87	1.92	32	25.32	2.34	39

(統)

表 IX (續)

甲	乙	丙	甲	乙	丙	甲	乙	丙
25.64	2.35		40.76	2.77		57.67	3.19	
25.97	2.36		41.15	2.78		58.07	3.20	
26.29	2.37		41.54	2.79		58.46	3.21	
26.62	2.38		41.93	2.80		58.85	3.22	
26.95	2.39		42.33	2.81		59.24	3.23	
27.29	2.40	40	42.72	2.82	47	59.62	3.24	54
27.62	2.41		43.11	2.83		60.01	3.25	
27.96	2.42		43.50	2.84		60.40	3.26	
28.29	2.43		43.90	2.85		60.78	3.27	
28.63	2.44		44.29	2.86		61.17	3.28	
28.98	2.45		44.69	2.87		61.55	3.29	
29.32	2.46	41	45.08	2.88	48	61.93	3.30	55
29.67	2.47		45.46	2.89		62.31	3.31	
30.01	2.48		45.88	2.90		62.69	3.32	
30.36	2.49		46.27	2.91		63.07	3.33	
30.71	2.50		46.67	2.92		63.45	3.34	
31.07	2.51		47.07	2.93		63.82	3.35	
31.42	2.52	42	47.47	2.94	49	64.20	3.36	56
31.78	2.53		47.87	2.95		64.57	3.37	
32.14	2.54		48.26	2.96		64.94	3.38	
32.50	2.55		48.66	2.97		65.31	3.39	
32.86	2.56		49.06	2.98		65.68	3.40	
33.22	2.57		49.46	2.99		66.05	3.41	
33.58	2.58	43	50.00	3.00	50	66.42	3.42	57
33.95	2.59		50.54	3.01		66.78	3.43	
34.32	2.60		50.94	3.02		67.14	3.44	
34.69	2.61		51.34	3.03		67.50	3.45	
35.06	2.62		51.74	3.04		67.86	3.46	
35.43	2.63		52.13	3.05		68.22	3.47	
35.80	2.64	44	52.53	3.06	51	68.58	3.48	58
36.18	2.65		52.93	3.07		68.93	3.49	
36.55	2.66		53.33	3.08		69.29	3.50	
36.93	2.67		53.73	3.09		69.64	6.51	
37.31	2.68		54.12	3.10		69.99	3.52	
37.99	2.69		54.52	3.11		70.33	3.53	
38.07	2.70	45	54.92	3.12	52	70.63	3.54	59
38.45	2.71		55.31	3.13		71.02	3.55	
38.83	2.72		55.71	3.14		71.37	3.56	
39.22	2.73		56.10	3.15		71.71	3.57	
39.60	2.74		56.50	3.16		72.04	3.58	
39.99	2.75		56.89	3.17		72.38	3.59	
40.38	2.76	46	57.28	3.18	53	72.71	3.60	60

表 IX (續)

甲	乙	丙	甲	乙	丙	甲	乙	丙
73.05	3.61		84.99	4.03		92.79	4.45	
73.38	3.62		85.22	4.04		92.93	4.46	
73.71	3.63		85.45	4.05		93.06	4.47	
74.03	3.64		85.68	4.06		93.20	4.48	
74.36	3.65		85.91	4.07		93.33	4.49	
74.68	3.66	61	86.13	4.08	68	93.46	4.50	75
75.00	3.67		86.35	4.09		93.59	4.51	
75.31	3.68		86.57	4.10		93.71	4.52	
75.63	3.69		86.79	4.11		93.84	4.53	
75.94	3.70		87.00	4.12		93.97	4.54	
76.25	3.71		87.22	4.13		94.08	4.55	
76.56	3.72	62	87.43	4.14	69	94.20	4.56	76
76.87	3.73		87.63	4.15		94.32	4.57	
77.18	3.74		87.84	4.16		94.43	4.58	
77.48	3.75		88.04	4.17		94.55	4.59	
77.78	3.76		88.24	4.18		94.66	4.60	
78.08	3.77		88.44	4.19		94.77	4.61	
78.37	3.78	63	88.63	4.20	70	94.88	4 62	77
78.66	3.79		88.83	4.21		94.98	4.63	
78.95	3.80		89.02	4.22		95.09	4.64	
79.24	3.81		89.21	4.23		95.19	4.65	
79.53	3.82		89.39	4.24		95.29	4.66	
79.81	3.83		89.58	4.25		95.39	4.67	
80.09	3.84	64	89.76	4.26	71	95.49	4.68	78
80.37	3.85		89.94	4.27		95.59	4.69	
80.65	3.86		90.11	4.28		95.68	4.70	
80.92	3.87		90.29	4.29		95.78	4.71	
81.20	3.88		90.46	4.30		95.87	4.72	
81.47	3.89		90.63	4.31		95.96	4.73	
81.73	3.90	65	90.80	4.32	72	96.05	4.74	79
82.00	3.91		90.96	4.33		96.13	4.75	
82.26	3.92		91.13	4.34		96.22	4.76	
82.52	3.93		91.29	4.35		96.30	4.77	
82.78	3.94		91.45	4.36		96.39	4.78	
83.04	3.95		91.61	4.37		96.47	4.79	
83.29	3.96	66	91.76	4.38	73	96.55	4.80	80
83.54	3.97		91.91	4.39		96.63	4.81	
83.79	3.98		92.06	4.40		96.70	4.82	
84.03	3.99		92.21	4.41		96.78	4.83	
84.27	4.00		92.36	4.42		96.85	4.84	
84.52	4.01		92.50	4.43		96.92	4.85	
84.75	4.02	67	92.65	4.44	74	97.00	4.86	81

表 IX　(續)

甲	乙	丙	甲	乙	丙	甲	乙	丙
97.00	4.87		98.92	5.25		99.71	5.63	
97.13	4.88		98.95	5.26		99.73	5.64	94
97.20	4.89		98.98	5.27		99.74	5.65	
97.27	4.90		99.01	5.28	88	99.75	5.66	
97.33	4.91		99.04	5.29		99.76	5.67	
97.40	4.92	82	99.07	5.30		99.77	5.68	
97.46	4.93		99.10	5.31		99.78	5.69	
97.52	4.94		99.12	5.22		99.79	5.70	95
97.58	4.95		99.15	5.33		99.80	5.71	
97.64	4.96		99.18	5.34	89	99.81	5.72	
97.70	4.97		99.20	5.35		99.82	5.73	
97.75	4.98	83	99.23	5.36		99.83	5.74	
97.81	4.99		99.25	5.37		99.84	5.75	
97.86	5.00		99.27	5.38		99.85	5.76	96
97.92	5.01		99.30	5.39		99.86	5.77	
97.97	5.02		99.32	5.40	90	99.87	5.78	
98.02	5.03		99.34	5.41		99.88	5.79	
98.07	5.04	84	99.36	5.42		99.88	5.80	
98.12	5.05		99.39	5.43		99.89	5.81	
98.17	5.06		99.41	5.44		99.90	5.82	97
98.22	5.07		99.43	5.45		99.91	5.83	
98.26	5.08		99.45	5.46	91	99.91	5.84	
98.31	5.09		99.46	5.47		99.92	5.85	
98.35	5.10	85	99.48	5.48		99.93	5.86	
98.40	5.11		99.50	5.49		99.93	5.87	
98.44	5.12		99.52	5.50		99.94	5.88	98
98.48	5.13		99.54	5.51		99.95	5.89	
98.52	5.14		99.55	5.52	92	99.95	5.90	
98.56	5.15		99.57	5.53		99.96	5.91	
98.60	5.16	86	99.59	5.54		99.96	5.92	
98.64	5.17		99.60	5.55		99.97	5.93	
98.68	5.18		99.62	5.56		99.98	5.94	99
98.71	5.19		99.63	5.57		99.98	5.95	
98.75	5.20		99.65	5.58	93	99.99	5.96	
98.78	5.21		99.66	5.59		99.99	5.97	
98.82	5.22	87	99.67	5.60		100.00	5.98	
98.85	5.23		99.69	5.61		100.00	5.99	
98.89	5.24		99.70	5.62		100.00	6.00	100

表 X　根據常態曲線下面積，採取其底線之 10σ 測定問題難易表

此表底線距離定爲 $\pm5\sigma$。以 -5σ 所在之點爲 0，平均數所在之點爲 50，$+5\sigma$ 所在之點爲 100。表中之每一標準差用 10 乘之。

標準差之價值	百分率	標準差之價值	百分率	標準差之價值	百分率	標準差之價值	百分率
0	99.999971	25	99.38	50	50.00	75	0.62
0.5	99.999963	25.5	99.29	50.5	48.01	75.5	0.54
1	99.999952	26	99.18	51	46.02	76	0.47
1.5	99.899938	26.5	99.06	51.5	44.04	76.5	0.50
2	99.99992	27	98.93	52	42.07	77	0.35
2.5	99.99990	27.5	98.78	52.5	40.13	77.5	0.30
3	99.99987	28	98.61	53	38.21	78	0.26
3.5	99.99983	28.5	98.42	53.5	36.52	78.5	0.22
4	99.99979	29	98.21	54	34.46	79	0.19
4.5	99.99973	29.5	97.98	54.5	32.64	79.5	0.16
5	99.99966	30	97.72	55	30.85	80	0.13
5.5	99.99957	30.5	97.44	55.5	29.12	80.5	0.11
6	99.99946	31	97.13	56	27.43	81	0.097
6.5	99.99932	31.5	96.78	56.5	25.78	81.5	0.082
7	99.99905	32	96.41	57	24.20	82	0.069
7.5	99.9989	32.5	95.99	57.5	22.66	82.5	0.058
8	99.9987	33	95.54	58	21.19	83	0.048
8.5	99.9983	33.5	95.05	58.5	19.77	83.5	0.040
9	99.9979	34	94.52	59	18.41	84	0.034
9.5	99.9974	34.5	93.94	59.5	17.11	84.5	0.028
10	99.9968	35	93.32	60	15.87	85	0.023
10.5	99.9961	35.5	92.65	60.5	14.69	85.5	0.019
11	99.9952	36	91.92	61	13.57	86	0.016
11.5	99.9941	36.5	91.15	61.5	12.51	86.5	0.013
12	99.9928	37	90.32	62	11.51	87	0.011
12.5	99.9912	37.5	89.44	62.5	10.56	87.5	0.009
13	99.989	38	88.49	63	9.68	88	0.007
13.5	99.987	38.5	87.49	63.5	8.85	88.5	0.0059
14	99.984	39	86.43	64	8.08	89	0.0048
14.5	99.981	39.5	85.31	64.5	7.35	89.5	0.0039
15	99.977	40	84.13	65	6.68	90	0.0032
15.5	99.972	40.5	82.89	65.5	6.06	90.5	0.0026
16	99.966	41	81.59	66	5.48	91	0.0021
16.5	99.960	41.5	80.23	66.5	4.95	91.5	0.0017
17	99.952	42	78.81	67	4.46	92	0.0013
17.5	99.942	42.5	77.34	67.5	4.01	92.5	0.0011
18	99.931	43	75.80	68	3.59	93	0.0009
18.5	99.918	43.5	74.22	68.5	3.22	93.5	0.0007
19	99.903	44	72.57	69	2.87	94	0.0005
19.5	99.886	44.5	70.88	69.5	2.56	94.5	0.00043
20	99.865	45	69.15	70	2.28	95	0.00034
20.5	99.84	45.5	67.36	70.5	2.02	95.5	0.00027
21	99.81	46	65.54	71	1.79	96	0.00021
21.5	99.78	46.5	63.68	71.5	1.58	96.5	0.00017
22	99.74	47	61.79	72	1.39	97	0.00013
22.5	99.70	47.5	59.87	72.5	1.22	97.5	0.00010
23	99.65	48	57.93	73	1.07	98	0.00008
23.5	99.60	48.5	55.96	73.5	0.94	98.5	0.000062
24	99.53	49	53.98	74	0.82	99	0.000048
24.5	99.46	49.5	51.99	74.5	0.71	99.5	0.000037
						100	0.000029

教育統計學

附錄二　本書所用之符號及公式

1. 符號

A_{md}=assumed median 假定中點數

b_1 代表 y 依 x 爲消長之係數

b_2 代表 x 依 y 爲消長之係數

C=Correction 校正數 或 =Contingency 代表均方相關之係數

d.=deviation 差數

dis.=distribution 分配

E.M.=estimated mean 估計平均數

f=frequency of measures 量數次數

G 代表正的差數

H.=harmonic mean 調和平均數

i=class interval 組距

j 代表偏斜係數

L=lower limit of the class interval 組距之下限;或

L 代表二量同號差數

log=logarithm 對數

m=measure 量數

M.=arithmetic mean 算術平均數

Md.=median 中點數

M.D.=mean deviation 平均差

Md.D.=median deviation 中點差

Mg.=geometric mean 幾何平均數

Mo.=mode 衆數

N=totals number of measures 量數總數

Na=number of measures above T.Md. 眞確中點數以上之量數

Nb=number of measures below T.Md. 眞確中點數以下之量數

nc 代表相關表中每竪行量數總數

nr 代表相關表中每橫行量數總數

ncr 代表每竪行與橫行相交格中之量數數目

nx 代表每一竪行之量數總數

O.M.=obtained mean 實得平均數

P.E.=probable error 概誤差

$P.E._{m}$= 實得平均數與眞確平均數之差度之概誤差

$P.E._{md}$= 實得中點數與眞確中點數之差度之概誤差

$P.E._{\sigma}$= 實得標準差與眞確標準差之差度之概誤差

$P.E._{r}$ =實得相關係數與眞確相關係數之差度之概誤差

Q_1=first or lower quartile point 下二十五分點

Q_3=third or upper quartile point 上二十五分點

Q=quartile deviation 二十五分差

γ=co-efficient of correlation 相關係數

η= 相關比率(讀如 eta)

ρ= 由等級差異法求出之相關係數(讀如 rho)

R= 由相關"尺度"求出之相關係數

S= 總和之記號;常用 Σ 代之(Σ 讀如 sigma)

S.D.=standard deviation 標準差;亦有用 σ 代之者(σ讀如 sigma)

σ dis.= 實際分配之標準差

σ_d= 差數之標準差

σ_m = 實得平均數與眞確平均數之差度之標準差

σ_{md} = 實得中點數與眞確中點數之差度之標準差

σ_q= 實得二十五分差與眞確二十五分差之差度之標準差

σ_r= 實得相關係數與眞確相關係數之差度之標準差

T. Md=true median 眞確中點數

U=upper limit of the class interval 組距之下限;或

U 代表二量異號差數;由異號法求出之相關數亦用 U 代表之

V=co-efficient of variation 差異係數

x 代表一系量數;或 x 量中之一量數與其平均數之差數;或在曲線之底線上由平均數至某一點之距離

y 代表又一系量數;或 y 量中之一量數與其平均數之差數;或爲由曲線之底線上 x 點向上引出縱線之高度

yo 爲曲線下最高之縱線

$\bar{y}$ 代表 y 量之平均數

$\bar{y}x$ 代表每一豎行之平均數

e =2•71828

π =180°

2. 公式

(1) 求近似衆數之公式:

(a) $Mo = L + \frac{f_2}{f_1 + f_2} \times i$,

或 $Mo = U - \frac{f_1}{f_1 + f_2} \times i$

(b) $Mo = M. - 3(M. - Md)$

(2) 求平均數之公式:

(a) $M. = \frac{\Sigma m}{N}$,

或 $M. = \frac{\Sigma fm}{N}$

(b)其簡法之公式爲:

$M. = E.M. + C$

或 $M. = E.M. + \frac{\Sigma fd}{N} \times i$

(3) 求調和平均數之公式:

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{N}\Sigma\left(\frac{1}{m}\right)$$

(4) 求幾何平均數之公式:

$$M_g = \sqrt[n]{(m_1 m_2 m_3 m_4 \cdots\cdots m_n)}$$

或 $\log M_g = \frac{\Sigma \log m}{N}$

(5) 求中點數之公式:

$$Md = L + \frac{\frac{N}{2} - F}{f} \times i$$

或 $Md. = U - \frac{\frac{N}{2} - F}{f} \times i$

(6) 求下二十五分點之公式:

$$Q_1 = L + \frac{\frac{N}{4} - F}{f} \times i$$

(7) 求上二十五分點之公式:

$$Q_3 = L + \frac{\frac{3}{4}N - F}{f} \times i$$

(8) 求二十五分差之公式:

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

(9) 求平均差之公式:

(a) $\mathrm{M.D.} = \frac{\Sigma d}{N}$,

或 $\mathrm{M.D.} = \frac{\Sigma fd}{N}$

(b) 其簡法之公式為:

$$\mathrm{M.D.} = \frac{\Sigma fd + c(N_b - N_a)}{N} \times i$$

(10) 求標準差之公式:

(a) $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{N}}$,

或 $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N}}$

(b) 其簡法之公式為:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{N} - C^2} \times i$$

(11) 求皮爾生差異係數之公式:

$$V = \frac{100\sigma}{M}$$

(12) 求桑戴克差異係數之公式:

$$V=\frac{100\,M.D.}{\sqrt{Md}}$$

(13)求偏斜度之公式：

(a) $$j=\frac{M-M_o}{\sigma},$$

或 $$j=\frac{3(M-Md)}{\sigma}$$

(b) $$j=\frac{(Q_3-Md)-(Md-Q_1)}{Q}=\frac{Q_3+Q_1-2Md}{Q}$$

(14)用乘積率法求相關係數之公式(列相關表)：

(a) $$r=\frac{\Sigma xy}{N\sigma_x\sigma_y}$$

(b) 其簡法之公式爲：

$$r=\frac{\frac{\Sigma x'y'}{N}-C_xC_y}{\sigma_x\sigma_y}$$

(15)求消長係數之公式：

$$b_1=r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

$$b_2=r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$$

(16)求 CC′ 直線及 RR′ 直線之公式：

$$y=r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}x$$

$$x=r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}y$$

(17)用乘積率法求相關係數之公式(不列相關表)：

$$r=\frac{\Sigma xy}{\sqrt{\Sigma x^2\cdot\Sigma y^2}}$$

(18)用相關比率求相關之公式：

$$\eta = \frac{\Sigma}{\sigma_y} = \frac{\sqrt{\dfrac{S[n_x(\bar{y}_x-\bar{y})^2]}{N}}}{\sigma_y}$$

(19)用等級法求相關之公式:

(a) $$\rho = 1 - \frac{6\Sigma D^2}{N(N^2-1)},$$

由此種相關數轉化爲 r 之公式爲:

$$r = 2\mathrm{Sin}\left(\frac{\pi}{6}\rho\right)$$

(b) $$R = 1 - \frac{6\Sigma G}{N^2-1},$$

由此種相關數轉化爲 r 之公式爲:

$$r = 2\mathrm{Cos}\frac{\pi}{3}(1-R)-1$$

(20)用四層表法求 r 之公式:

(a) $$r = \mathrm{Cos}\frac{\sqrt{b_0}}{\sqrt{ad}+\sqrt{bc}}\pi$$

(b) $$r = \mathrm{Cos}\frac{U}{L+U}\pi$$

(21)用均方相關法求相關之公式:

$$C = \sqrt{\frac{-NS}{S}},$$

而 $$S = \Sigma\left(\frac{\dfrac{(n_{r0})^2}{n_r n_0}}{N}\right)$$

(22)求算術平均數確度之公式:

(a) $$\sigma_m = \frac{\sigma \mathrm{dis}}{\sqrt{N}}$$

(b) $$P.E._m = \frac{.6745\sigma \mathrm{dis}}{\sqrt{N}}$$

(23)求中點數確度之公式:

(a) $\sigma_{md}=\frac{1\cdot 25331\sigma dis}{\sqrt{N}}$,

或 $=\frac{1\frac{1}{4}\sigma dis.}{\sqrt{N}}$

(b) $P.E._{md}=\frac{\cdot 84535\sigma dis}{\sqrt{N}}$

(24)求二十五分差確度之公式:

$$\sigma_q=\frac{1\cdot 11\sigma dis}{\sqrt{2N}}$$

(25)求標準確度之公式:

(a) $\sigma_\sigma=\frac{\cdot\sigma dis}{\sqrt{2N}}$

(b) $P.E._\sigma=\frac{\cdot 6745\sigma dis}{\sqrt{2N}}$

(26)求相關係數確度之公式:

(I) r 由 $\frac{\Sigma xy}{N\sigma_x\sigma_y}$ 求得,其公式爲

(a) $\sigma\gamma=\frac{1-\gamma^2}{\sqrt{N}}$

(b) $P.E._r=\cdot 6745\,\frac{1-\gamma^2}{\sqrt{N}}$

(II) γ 由 $2\text{Sin}\left(\frac{\pi}{6}\rho\right)$ 求得,其公式爲

$$\sigma\gamma=105\,\frac{1-\gamma^2}{\sqrt{N}}$$

(III) γ 由 $2\text{Cos}\,\frac{\pi}{3}(1-R)-1$ 求得,其公式爲

$$\sigma\gamma=\frac{\cdot 638}{\sqrt{N}}$$

(IV) γ 由 $\text{Cos}\,\pi U$ 求得,其公式爲

$$\sigma\gamma = \frac{1.63}{\sqrt{N}}$$

(27)求差數確度之公式：

$$\sigma_d = \sqrt{(\sigma_{\text{量數I}})^2 + (\sigma_{\text{量數II}})^2}$$

(28)求實驗係數之公式：

$$\text{實驗係數} = \frac{\text{差數}}{2.78\sigma_d}$$

附錄三 譯名對照表

Absoute variability	絕對差異
Analytic method	分析法
Applied statistics	應用統計學
Approximate mode	近似衆數
Arithmetic average	算術平均數
Arithmetic mean	算術平均數
Assumed median	假定中點數
Asymmetrical	不對稱的
Attribute	品質
Average	平均數
Average deviation	平均差
Ayres	愛里斯
Bar diagram	直條圖
Base	基點底
Binomial expansion	二項式展開
Both limit method	雙限法
Central tendency	集中趨勢
Chance	機會
Class	組
Class interval	組距

Class-limit	組限
Cleveland	克里弗蘭
Co-efficient of correlation	相關係數
Co-efficient of skewness	偏斜係數
Co-efficient of variation	差異係數
Constant	常數
Contingency	相關
Continuous series	連續量數
Correction	校正數
Correlation	相關
Correlation co-efficient	相關係數
Correlation ratio	相關比率
Correlation table	相關表
Criterion	標準
Crude mode	粗略衆數
Cumulative curve	累進曲線
Curve	曲線
Data	事實
Deviation	差數
Diagram	圖
Discontinuous series	不連續量數
Discrete series	不連續量數

Dispersion	差異，分數
Distribution	分配
Double distribution	雙式分配
Educational statistics	教育統計學
Emperical mode	經驗衆數
Estimated mean	估計平均數
Experimental co-efficient	實驗係數
Fifty percentile point	五十分點
"Foot-rule" for correlation	相關"尺度"
Fourfold table	四層表
Frequency	次數
Frequency distribution	次數分配
Frequency polygon	次數多邊形
Frequency surface	次數面積
Geometric mean	幾何平均數
Grand totals	大總數
Graphic method	圖示法
Grouped measures	已歸類量數
Harmonic mean	調和平均數（或譯倒數平均數）
Histogram	直方圖
Index-number	指數
Inspection mode	視察衆數

Kansas	康沙斯
King, W. J.	克　尼
Less than	以下
Lockford	洛克富得
Logarithm	對數
Long method	詳法
Lower limit	下限
Lower limit method	下限法
Lower quartile point	下二十五分點
Maximum ordinate	最大縱線
McCall, W. A.	麥　柯
Mean	平均數
Mean deviation	平均差
Mean square deviation	均方差(即標準差)
Measure	量數(或譯數量)
Measures of absolute variability	絕對差異量數
Measures of central tendency	集中量數
Measures of mass	全體量數
Measures of relationship	相關量數
Measures of relative variability	相對差異量數
Measures of skewness	偏斜量數
Measures of variability	差異量數

Median	中點數
Median deviation	中點差
Method for fourfold tables	四層表法
Method of mean square contingency	均方相關法
Method of rank difference	等級差異法
Method of unlike signs	異號法
Mid point	中點
Midpoint method	中點法
Mid-value	中値
Mode	衆數
More than	以上
Multi-modal	多衆數的
Multi-modal frequency surface	多衆數次數面積
Non-rectilinear correlation	非直線相關
Norm	常模
Normal age	常年齡
Normal curve	常態曲線
Normal distribution	常態分配
Normal frequency surface	常態次數面積
Obtained mean	實得平均數
Order distribution	順序分配
Ordinate	縱線

Original data	原始的事實
Original table	原始的表
Over-age	高年齡
Pearson	皐爾生
Performance	作業
Performance test	作業測驗
Personal investigation	個人調查
Probability	概率
Probable error	概誤差
Product-moment method	乘積率法
Product scale	作品測驗
Quartile deviation	二十五分差(或作四分差)
Question blank or questionnaire	訪問表格
Random sampling	隨機取樣
Range	全距
Rank	等級
Rank difference	等級差
Rank distribution	等級分配
Ratio	比例
Reciprocal	倒數
Rectilinear correlation	直線相關
Reference point	標準點(或作參照點)

Regression co-efficient	消長係數
Relation line	相關線
Relative variability	相對差異
Reliability or unreliability	確度(或譯可靠度)
Rugg, H. O.	拉格
Sampling of fluctuation	所取事樣變動
Scale	量表(或譯量尺)
Secondary table	第二次的表
Secrist, H.	塞克里斯特
Sectioned-bar diagram	分段直條圖
Sector	扇形
Semi-logarithmic	半對數的
Short method	簡法
Sheppard	謝巴得
Simple arithmetic mean	簡單算術平均數
Skewed	偏態
Skewed frequency surface	偏態次數面積
Skewness	偏斜
Smoothed curve	修勻之曲線
Spearman	斯柏滿
Standard deviation	標準差
Statistical method	統計法

Statistics of attributes	品質之統計
Statistics of variables	變量之統計
Step interval	級距
Step-limits	級限
Sub-totals	分總數
Summaries	總法
Symmetrical	對稱的
Tabular method	列表法
Tabulation	表列
Time rate	時間速率
Theoretical mode	理論衆數
Thorndike	桑戴克
True arithmetic mean	眞確算術平均數
True median	眞確中點數
True mode	眞確衆數
Types	代表數
Under-age	低年齡
Ungrouped measures	未歸類量數
Unimodal	單衆數的
Unit	單位
Unit of time	時間單位
Unit of work	工作單位

Upper limit	上限
Upper quartile point	上二十五分點
Value of midpoint	中點之價值
Variability	差異
Weighted arithmetic mean	均衡算術平均數
Woody	吳狄
Yule	尤爾
Zero point	零點