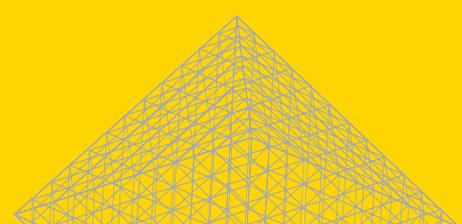
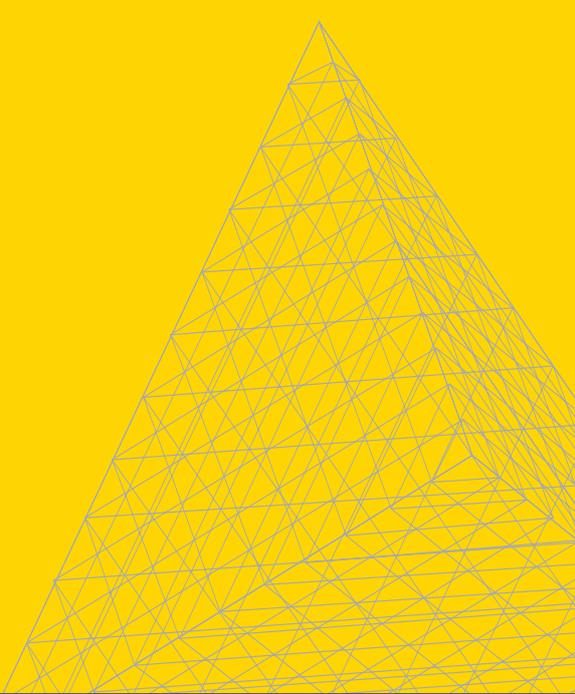




QUADERNO TECNICO

STRUTTURE RETICOLARI SPAZIALI

di Ettore Ventrella



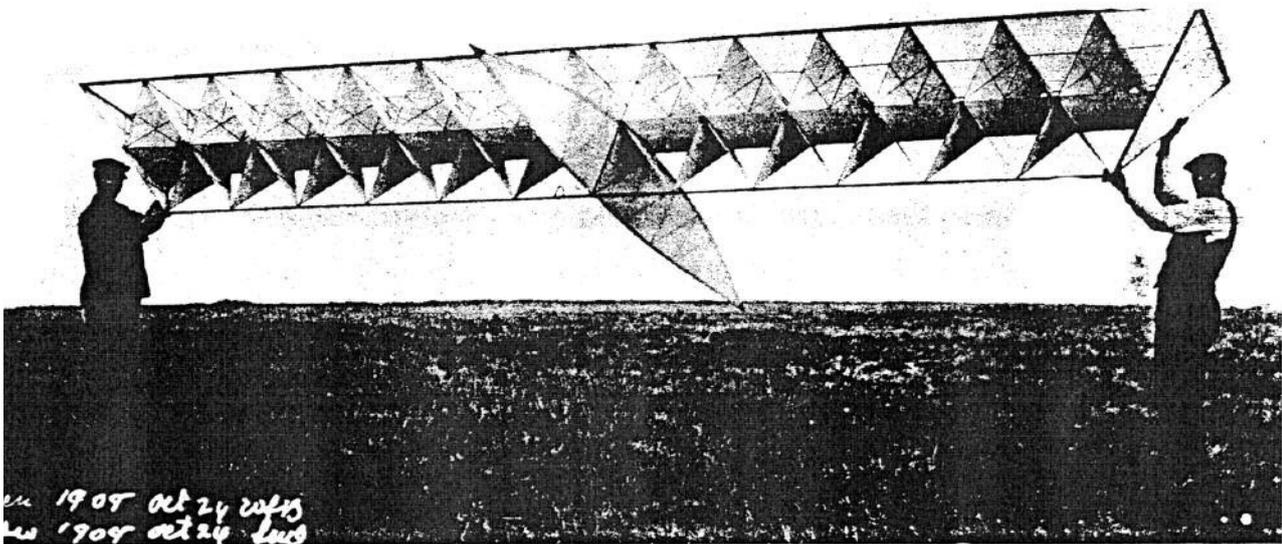
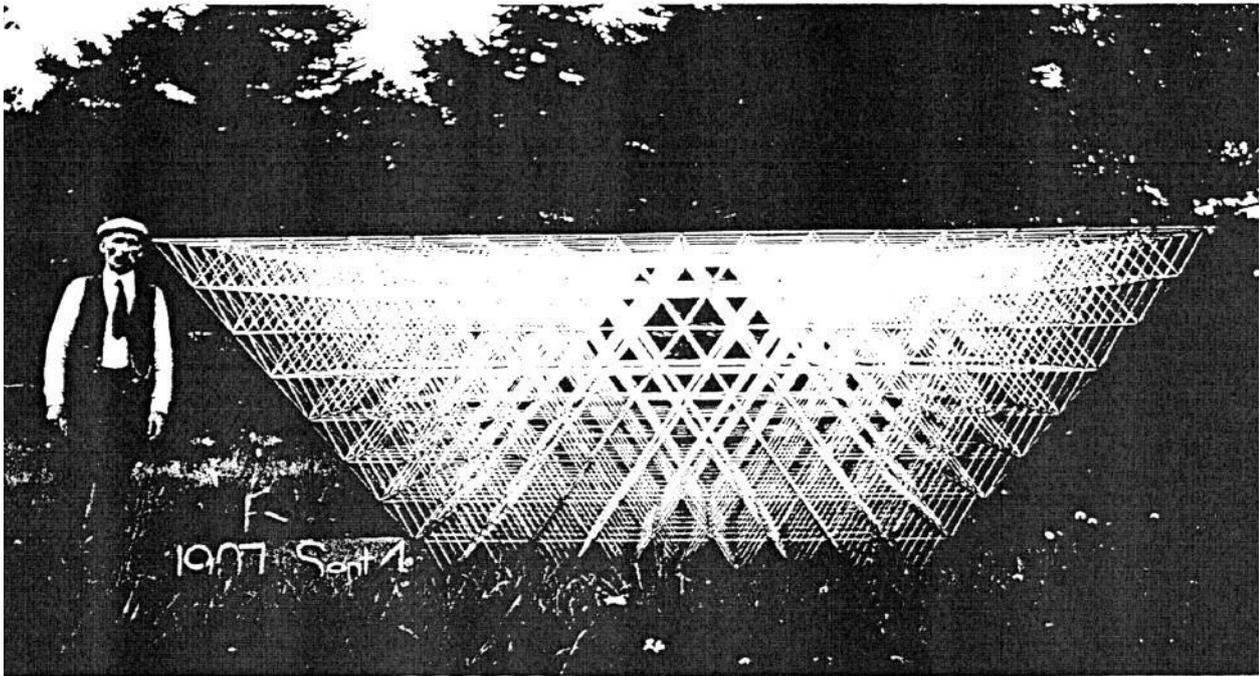




Quaderno Tecnico delle Strutture Reticolari Spaziali

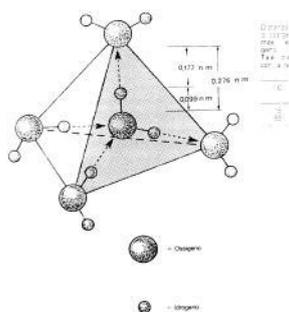
INDICE

INTRODUZIONE	pag. 5
1 > ASPETTI E TIPOLOGIE GEOMETRICHE	pag. 9
I poliedri fondamentali	
Il tetraedro regolare	
Il semiottaedro regolare	
Definizioni	
Strutture spaziali a doppio strato	
Piastre piane a modulo tetraedrico regolare	
Piastre piane a modulo tetraedrico regolare con interposti semiottaedri	
Piastre piane a modulo tetraedrico isoscele	
Piastre piane a tre o più strati	
2 > ESEMPI DI DIMENSIONAMENTO	pag. 20
3 > LE CUPOLE GEODETICHE	pag. 24
I poliedri	
La suddivisione geodetica	
4 > LA GENESI DEL SISTEMA VESTRUT	pag. 32
Definizione	
Caratteristiche	
Montaggio	

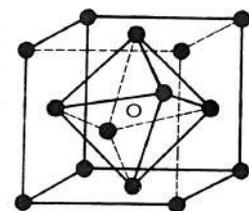


INTRODUZIONE

Quando nel 1880 **August Föppl** pubblicò la sua *Teoria dei sistemi reticolari spaziali* in cui - come anche in successive pubblicazioni apparse nel 1881 sulle riviste "Eisenbahn" e "Schweizerische Bauzeitung" - delineava i fondamenti teorici e pratici delle strutture, spaziali, certo non prevedeva che, solo molti decenni dopo, e praticamente solo ai nostri giorni, quelle intuizioni teorico-pratiche avrebbero avuto il giusto riconoscimento da parte degli operatori del settore delle costruzioni. Solo oggi, infatti, si è riusciti a coniugare insieme la tecnologia e la scienza, da un lato, con l'economia di mercato e il profitto dall'altro. Ciò si è verificato per l'avvento di nuovi procedimenti nella produzione di sistemi spaziali, per le nuove tecniche nella produzione dei collegamenti nodali, per la sistemazione scientifica di nuovi codici di calcolo e di verifica connessi all'evoluzione delle capacità degli elaboratori elettronici. È del 1891 l'opera del Föppl "Das Fachwerk in Raume" che, scritta dopo il crollo del ponte di Birs, presso Monchestein, getta le basi scientifiche e tecnologiche delle strutture spaziali in acciaio. Nel 1892 Föppl un testo dettagliato del suo tipo di volta a botte irrigidita, influenzando il successivo sviluppo dei sistemi tridimensionali. La struttura originale, rifiutata dall'Ufficio Brevetti tedesco nel 1890, consiste in una serie di travi reticolari disposte nel senso della lunghezza della volta a botte, e poggiate agli estremi su travi o pareti. Pochi anni più tardi **Robert Le Ricolais**, noto ingegnere francese, fu il primo ad intuire le possibilità potenziali dei reticoli a doppio strato, dimostrando che simili forme possono essere riscontrate in alcune strutture che la natura costruisce in maniera tale che le forze interne agiscono sempre nella direzione del minimo sforzo. A tal proposito rimangono tutt'oggi affascinanti i disegni degli scheletri di alcuni animali marini osservati



• Coordinazione tetraedrica delle molecole dell'acqua nel ghiaccio.



• Soluzione solida interstiziale del carbonio nel ferro gamma.

al microscopio che il darwiniano **Ernst Heinrich Haeckel** ci ha tramandato da oltre cento anni. Anche in campo biologico vi sono moltissimi esempi di strutture molecolari basate su geometrie spaziali elementari. Può apparire sorprendente che l'acqua possiede una struttura che regola nello spazio le combinazioni degli atomi di ossigeno e di idrogeno: "ciò è molto importante, perchè è proprio da questa che derivano molte delle sue proprietà fondamentali per la vita" (Giovanni Parisi - Propedeutica Biologica). La stessa struttura molecolare dell'acciaio presenta una disposizione degli atomi di ferro e carbonio secondo un ordine tridimensionale.

Gli anni a cavallo dei due secoli sono un fermento di invenzioni ed innovazioni tecnologiche: l'Esposizione Universale di Parigi ha innescato il grande cambiamento. In questa atmosfera di modernità e di ricerca **Alexander Graham Bell** si fa ritrarre con i suoi pionieristici prototipi di modelli di intelaiature per aerei, basati sul tetraedro, introducendo i primi collegamenti asta-nodo, lontano dall'immaginare che al giorno d'oggi sono stati depositati brevetti per oltre cento sistemi per strutture reticolari spaziali. Un grande contributo alla prefabbricazione industriale ed in particolare alle strutture tridimensionali è stato dato, a partire dagli anni '50, da **Richard Buckminster Fuller**, uomo di grande ingegno, in quanto, alla ricerca semplificativa delle cupole geodetiche di sua invenzione, si associano universali concetti scientifici, filosofici, pratici e teorici, scaturiti dalla sua immensa sensibilità. In questi ultimi decenni moltissimo interesse è stato rivolto alle strutture spaziali da parte dei più famosi architetti e studiosi: sono della metà degli anni '60 gli studi condotti da **Konrad Wachsmann** presso l'Università del Sud California su nuovi sistemi di giuntaggio e la loro applicazione alle geometrie fondamentali. **Max Mengerhausen** è l'ideatore del nodo Mero-Trigonal, ancora oggi tra i sistemi più commercializzati al mondo. Svariate strutture sono state realizzate con il sistema Spherobot, inventato dal francese **Stephane Du Chateau**.

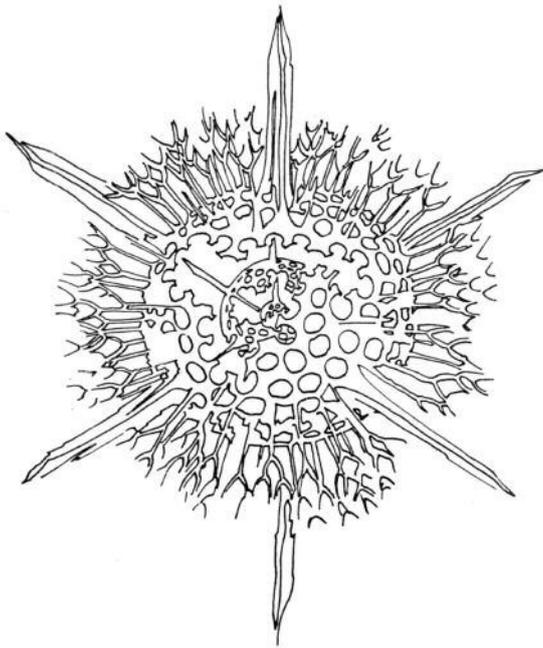
Un valido e fondamentale contributo viene da molti anni dato dal Dipartimento di Ingegneria Civile dell'Università di Surrey, diretto da **Z.S. Makowsky**: dal 1966 sono state organizzate dal **Centro di Ricerca sulle Strutture Spaziali** di Guildford (UK) ben quattro Conferenze Internazionali.

E' del recente Settembre 1995 l'ultimo Simposio organizzato dall'IASS, l'Associazione Internazionale Strutture Spaziali.

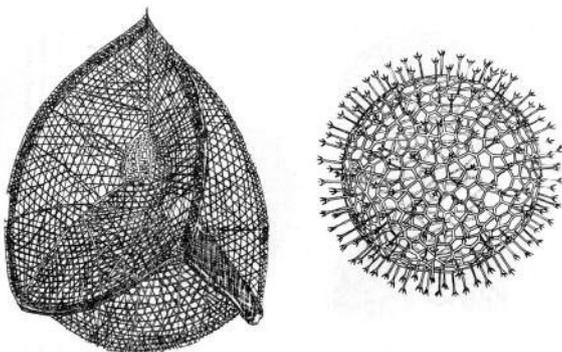
Il vantaggi di una struttura reticolare spaziale costituita dall'assemblaggio di elementi tetraedrici, si possono riassumere nei seguenti punti:

- la definizione, attraverso un modello semplice (tetraedro di aste), dell'*elemento finito fondamentale*;
- la leggerezza strutturale, che si accompagna ad una quanto mai opportuna distribuzione uniforme di tensione (trazione e compressione) negli elementi che la compongono;
- la possibilità, attesa la grande versatilità compositivi e di assemblaggio, di realizzare accoppiamenti strutturali e geometrie che escludano, in presenza di sisma e/o di vibrazioni, il verificarsi di fenomeni di risonanza;
- l'agnello e rapido montaggio con l'impiego di manodopera non particolarmente specializzata;
- la possibilità di procedere rapidamente alla trasformazione, al rinforzo, allo smontaggio della struttura con conseguente recupero del materiale.

Quanto innanzi esposto è anche perfettamente congruente con quanto è richiesto a strutture da realizzarsi in zona sismica. Per questo basti una semplice osservazione di fondo legata alla



intrinseca geometria della struttura reticolare spaziale. L'elemento tetraedrico, variamente assemblato fino a formare strutture più complesse a sviluppo verticale e orizzontale, ridisegna nello spazio l'elemento finito fondamentale del continuo deformabile; la semplicità strutturale accoppiata alla tecnologia del nodo spaziale, permette a tale tipo di strutture, di ottenere una risposta tensoriale uniforme rispetto a situazioni di carico costituite da forze verticali e orizzontali di direzione variabile. Ciò che, invece, è reso problematico con elementi strutturali costituiti da ossature di travi e pilastri e orizzontamenti a solaio intrinsecamente ortotteri. Nasce da ciò anche la possibilità di una isotropia di risposta all'azione delle sollecitazioni esterne che, unitamente alla leggerezza, pone l'orizzontale costituito dal sistema tridimensionale in una ripartizione delle forze comunque agenti sui pilastri di piano, attraverso la semplice distribuzione spaziale di sforzi normali nodali.

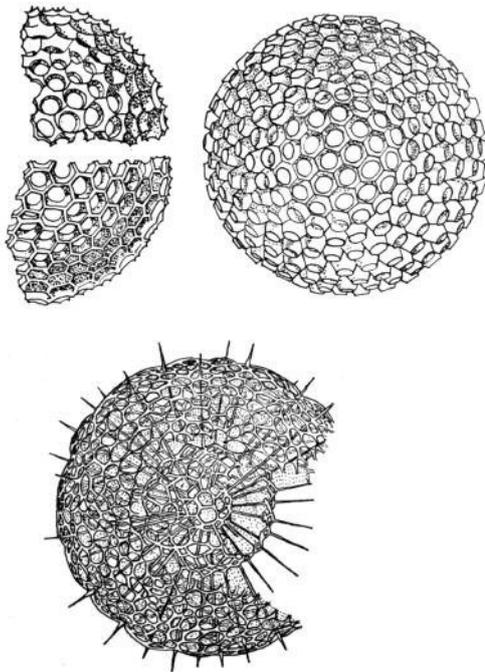


• Coordinazione tetraedrica delle molecole dell'acqua nel ghiaccio.

A questi aspetti positivi, collegati alla geometria e alla concezione strutturale del sistema, si aggiungono, poi, gli aspetti più meramente economici e pratici. Purtroppo, il sempre più crescente prevalere del profitto a svantaggio della ricerca e della qualità, ha determinato, specie, in questi ultimi anni, un sempre più crescente disinteresse da parte delle Aziende produttrici, ad eccezione di casi particolari, ad investire risorse atte, mediante la sperimentazione, all'accresciuto delle conoscenze, con il conseguente sviluppo di nuove tecnologie. L'attuale mercato richiede prodotti sempre più concorrenziali, con il risultato di opere sempre meno creative e sempre più commerciali. Ciò dipende anche dal fatto della mancanza di strumenti idonei e di più specifici orientamenti ed informazioni che siano di aiuto ai progettisti nella scelta della geometria o della tecnologia più appropriata e conveniente, senza penalizzare forma e creatività. E', ad esempio, paradossale che nei vari capitolati e prezzari regionali, non esistono attualmente voci di elenco e prezzi riferite a strutture reticolari spaziali che ne individuino le caratteristiche strutturali e tecnologiche.

In 1880 **August Föppl** published his "Theory of space grid systems" where – as well as in his following articles published in 1881 in "Eisenbahn" and "Schweizerische Bauzeitung journals" – he defined the theoretical and practical foundations of space structures. Certainly, at the time he could not imagine that many decades later, nowadays, his theoretical and practical intuitions would have been appropriately acknowledged by those working in the building trade. As a matter of fact, only today have technology and science come together with market economy and profit. This has happened thanks to the introduction of new processes in the production of space systems, to the new techniques employed in the production of truss joints, to the scientific systematization of new calculus and test codes connected to the newly developed potentials of computers. Föppl's "Das Fachwerk in Raume" dates back to 1891. It was written after a bridge in Birs, near Monchestein, collapsed because of the instability of its space structure in space. This text laid the scientific and technological foundations of steel space structures. In 1892 Föppl worked out a detailed description of a rigid barrel vault that influenced the subsequent development of three-dimensional systems. The original structure, rejected by the German Patent Office in 1890, consisted of beam grids arranged along the length of the barrel vault with the beams resting at their extremes on pillars or walls. A few years later, **Robert Le Ricolais**, a well-known French engineer, was the first to perceive the potential of double-layer grids, proving that such shapes can be also found in structures created by nature in such a way that the internal forces always act in the direction of minimum stress. In this regard, it is still captivating to observe the drawings of some marine animal skeletons viewed through a microscope and drawn by **Ernest Heinrich Haeckel** more than a-hundred years ago. Also the field of biology offers very many examples of molecular structures based on elementary space geometries.

It may be surprising to know that the "water" structure organizes the



combinations of oxygen and hydrogen atoms in space, but "this is very important, because it is from it [the combination] that many of its fundamental properties allowing life derive." (Giovanni Parisi, *Biological Propaedeutics*). The molecular structure of steel itself shows a three-dimensional arrangement of iron and carbon atoms.

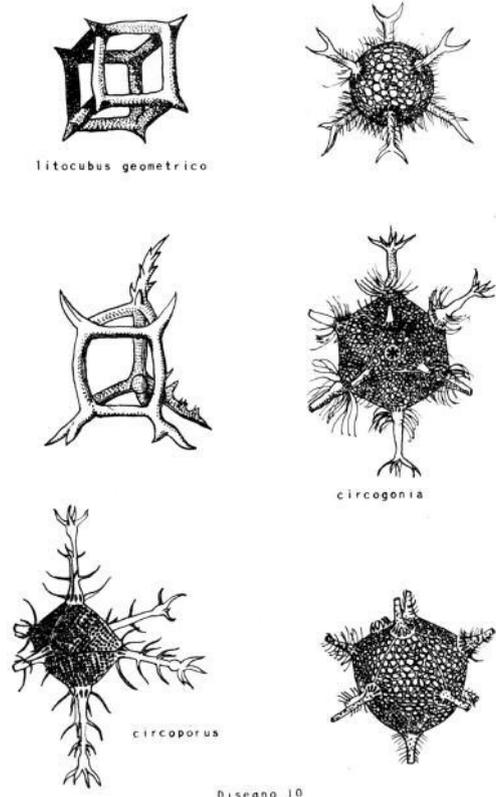
The years straddling the two centuries were an exciting time in terms of inventions and technological innovations: the Universal Exhibition in Paris had triggered a deep change. In this climate of modernity and research **Alexander Graham Bell** was portrayed with his pioneering prototypes of plane frames based on tetrahedron. He introduced the first rod-node connection, even if he was far from imagining that about a century later more than one-hundred patents concerning space grids would have been issued. Starting from the 50's, an important contribution to industrial prefabricated constructions and in particular to three-dimensional structures was given by **Richard Buckminster Fuller**, a man of great intelligence, who was able to combine his simplifying research on the geodesic domes he invented with universal scientific and philosophical practical and theoretical concepts derived from his immense sensitivity. In the last decades many of the most famous architects and scholars have turned their attention to space structures. In the mid-sixties **Konrad Wachsmann** carried out his studies at the University of South California on new joint systems and their application in the field of fundamental geometries. **Max Mengerhausen** is the creator of the Mero-Trigonal node, which is still one of the most merchandised systems in the world. The realization of several structures has been based on the Spherobat system, invented by **Stephane**

Du Chateau, a French scholar. For many years the Department of Civil Engineering of the University of Surrey, directed by **Z.S. Makowsky**, has been providing a valid and fundamental contribution: since 1966 the **Space Structure Research Center (UK)** has organized four International Conferences. The latest symposium organized by **IASS (International Association for Shell and Spatial Structures)** has taken place quite recently, in September 1995.

The advantages of a space grid system based on the assembly of tetrahedral elements can be summed up as follows:

- defining a basic finished element through a simple model (rod tetrahedron) to achieve an effective and essential representation of material continuity in space;
- its structural lightness, together with an extremely appropriate uniform distribution of stress (tension and compression) in the composing elements;
- considering the great constituent and assembly versatility, the possibility to realize structural couplings and geometries that may exclude resonance phenomena in case of earthquakes and/or vibrations;
- the convenient and quick assembly using not particularly skilled labour;
- the possibility to easily transform, reinforce and disassemble the structure, and consequently recover the material employed.

54



What has been said before is also perfectly coherent with the properties structures intended for seismic areas are required to have. As far as this is concerned, it is enough to make an observation about the intrinsic geometry of space grid structures. The tetrahedral element, variously assembled in order to form more complex vertical and horizontal structures, redesigns in space the basic finite element of deformable continuity; structural simplicity as well as the technology of space truss enable this kind of structures to provide a uniform tensional response when loaded with variable horizontal and vertical forces. Instead, this uniformity cannot be achieved when using structural elements made of intrinsically orthotropic beam- and pillar-based frames and of horizontal slab floors. The above listed properties also allow an isotropic response to external stress; together with lightness, this puts the plane represented by the three-dimensional system in a distribution of forces anyway acting on the plane pillars through the simple space distribution of nodal normal stress. These positive aspects related to the geometry and structural conception of the system are reinforced by merely economic and practical aspects. Unfortunately, especially in recent years, profit has more and more prevailed over research and quality and producers have been less and less interested in investing in the experimentation necessary to increase knowledge and develop new technologies. Nowadays, the market demands more and more competitive products and this results in less creative and more commercial products. This is also due to the lack of proper tools and specific guidance and information that may help designers choose the most appropriate and convenient geometry or technology without hindering form and creativity. For example, it is paradoxical that the different regional specification and price lists do not include items or prices related to space grid systems defining their structural and technological characteristics.

ASPETTI GEOMETRICI E TIPOLOGIE

Le **strutture reticolari spaziali** sono basate su due caratteristiche fondamentali, tra loro sinergicamente interconnesse: la **geometria** e la **ripetitività**.

La **geometria**, intesa come forma, è l'unione delle leggi che regolano le aggregazioni nello spazio di solidi elementari, combinandoli tra loro. Essa definisce i rapporti tra i vari elementi (angoli e spigoli) occorrenti per la costruzione di poliedri più o meno complessi, regolari e non, inscrivibili in altri solidi più elementari, o generati da intersezioni con altri. Stabilisce, altresì, i parametri che intervengono nella individuazione del solido di base, essendo anch'esso un poliedro: il **modulo**.

Allo stesso tempo è, quindi, generatrice sia del modulo di base, sia della forma più complessa che da esso deriva. La **ripetitività**, invece, oltre a regolare l'intensità del moltiplicarsi del modulo nello spazio, ne determina il ritmo, la frequenza, in una infinita ed armonica composizione di forme, allo stesso tempo rispettose di rigorosi canoni geometrici.

Space grid systems are based on two fundamental characteristics synergetically interconnected: geometry and repetitiveness. "Geometry" – we mean form by it – is the set of laws regulating the aggregations of elementary solids in space and their combinations. It defines the relations among the different elements (angles and edges) necessary to build more or less complex regular and irregular polyhedrons that can be inscribed in more elementary solids or are generated by the intersection with other polyhedrons. It also sets the parameters to identify the basic solid, which is in turn a polyhedron: the module.

At the same time, therefore, it generates both the basic module and the more complex form deriving from it.

Instead, repetitiveness governs the intensity of the module multiplication in space as well as its rhythm and frequency allowing an infinite and harmonious composition of forms, all respectful of rigorous geometric canons.

I Poliedri

Nelle strutture reticolari spaziali, i **poliedri** non sono rappresentati come solidi in quanto "porzioni" di spazio, ma sono schematizzati in elementi "asta" ed elementi "nodo": le aste sono i loro spigoli, mentre i nodi sono vertici. Di conseguenza, in un reticolo spaziale, ad ogni intersezione di aste corrisponde un nodo, e viceversa. Le facce del poliedro possono anch'esse essere suddivise in elementi triangolari, formati da aste e nodi. Molti poliedri sono inscrivibili in altri, o derivano da loro intersezioni. Per ovvi motivi sono qui rappresentati i poliedri regolari più in uso (fig. 1).

L'avvento dei programmi dei personal computers e l'uso dei programmi di grafica 3D ha enormemente facilitato il controllo e la rappresentazione di queste geometrie, le quali diventano estremamente complesse quando le facce di tali poliedri sono tridimensionali ed ulteriormente suddivise in poliedri più elementari. Il disegno in 3D di una struttura modulare mediante l'uso di software in commercio, costituisce una verifica essenziale nella progettazione delle strutture

reticolari spaziali, perché ne permette di individuare, in tempi brevissimi, l'andamento ed il controllo di tutti gli elementi asta e nodo che le compongono. Inoltre, le moderne tecnologie a disposizione dei progettisti hanno consentito di superare, con estrema facilità, le innumerevoli questioni sulla verifica di calcolo e di dimensionamento dei grigliati tridimensionali, alcune delle quali, fino a qualche anno fa, sembravano non avessero soluzione.

Poliedri fondamentali (Platonici)

- tetraedro • esaedro • ottaedro • dodecaedro • icosaedro

Poliedri Archimedei

- tetraedro troncato • esaedro troncato • ottaedro troncato
- dodecaedro troncato • icosaedro troncato • cubettaedro
- cubettaedro troncato • rombicubettaedro • icosidodecaedro
- icosidodecaedro troncato • rombicoidodecaedro

Poliedri semiregolari

- dodecaedro rombico • triancotaedro

I poliedri Platonici e Archimedei sono detti anche **regolari**, e sono inscrivibili e circoscrittibili in una sfera, il cui raggio, riportato nelle alleghe tabelle, è stato direttamente rilevato dal solido disegnato in 3D, considerando unitaria la dimensione dei loro spigoli.

Nei poliedri **Platonici** gli spigoli, uguali tra loro, individuano poligoni regolari (triangoli, quadrati, pentagoni) **dello stesso tipo** in ciascuno dei poliedri. I poliedri Archimedei derivano da intersezioni di solidi Platonici, ruotati nello spazio, l'uno rispetto all'altro, intorno al centro delle sfere che li contengono. Gli spigoli, uguali tra loro, individuano le varie facce, formate da poligoni regolari (triangoli,

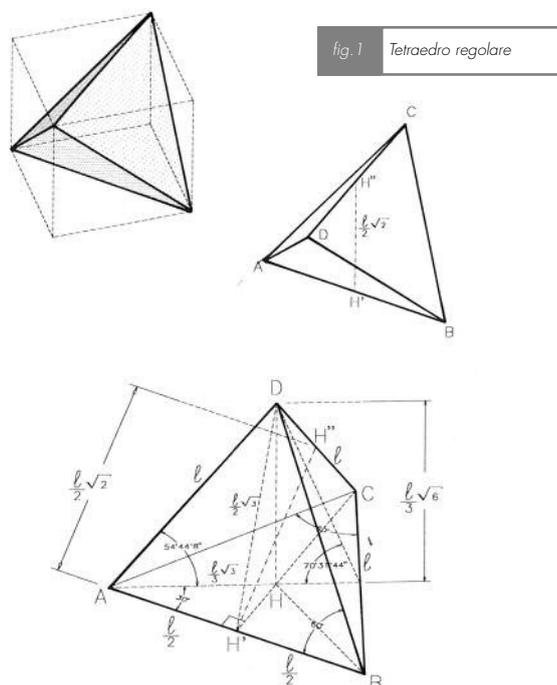


fig. 1 Tetraedro regolare

quadrati, pentagoni, esagoni, ottagoni, decagoni) di tipo diverso in ciascuno dei poliedri. I poliedri che hanno lo stesso numero di spigoli sono inscrittibili e circoscrivibili l'uno dentro l'altro (dualità), essendo il numero dei vertici dell'altro e viceversa, ad eccezione del **tetraedro** che ha numero di facce e vertici uguali. In particolare l'**esaedro** e l'**ottaedro** sono inscrittibili l'uno dentro l'altro, analogamente per **dodecaedro** ed **icosaedro**, mentre il **tetraedro** è inscrittibile solo in un altro tetraedro. L'applicazione dei poliedri Platonici e Archimedeevi viene impiegata, nelle strutture reticolari spaziali, per la creazione delle varie geometrie: oltre a quelle classiche derivanti dal tetraedro regolare, sono utilizzate per forme più complesse, ad esempio nella generazione delle strutture geodetiche, che derivano dalla proiezione dei vertici dei sottomoduli triangolari delle facce di un icosaedro sulla sfera che lo contiene.

Il **tetraedro tronco** è ottenuto dalla intersezione di un tetraedro di spigolo ℓ con un altro tetraedro di spigolo $\ell \times 1,6666666$. Il suo spigolo misura $\ell/3$.

L'**esaedro tronco** deriva da un cubo di spigolo ℓ con un ottaedro di spigolo $\ell \times 1,70710678$.

L'**ottaedro tronco** deriva da un ottaedro di spigolo ℓ con un cubo di spigolo $\ell \times 0,9428094$.

Il **dodecaedro tronco** deriva da un dodecaedro di spigolo ℓ e un icosaedro di spigolo $\ell \times 1,7236068$.

L'**icosaedro tronco** deriva da un icosaedro di spigolo ℓ e un dodecaedro di spigolo $\ell \times 0,69672331$. Il suo spigolo è $\ell/3$.

Il **cubottaedro** deriva da un cubo di spigolo ℓ con un ottaedro di lato $\ell \times \sqrt{2}$, mentre il suo spigolo è $\ell \times \sqrt{2}/2$.

Il **cubottaedro tronco** deriva dall'intersezione di tre esaedri di spigolo ℓ con un esaedro di spigolo $\ell \times 0,8672954$ ed un ottaedro di spigolo $\ell \times 1,16018862$.

Il **rombicubottaedro** deriva da tre esaedri di spigolo ℓ , ruotati di 45° , ed un ottaedro di lato $\ell \times 1,29289322$. Il suo spigolo misura $\ell \times 0,41421356$.

L'**icosidodecaedro** deriva da un icosaedro di spigolo ℓ e un dodecaedro di spigolo $\ell \times 0,61803399$. Il suo spigolo misura $\ell/2$.

L'**icosidodecaedro tronco** deriva da un dodecaedro di spigolo ℓ , un icosaedro di spigolo $\ell \times 1,57082039$ e un triancotaedro di spigolo $\ell \times 0,87840226$.

Il **rombicosidodecaedro** deriva da un icosaedro di spigolo ℓ , un dodecaedro di spigolo $\ell \times 0,64962709$ e un triancotaedro di spigolo $\ell \times 0,53916846$.

Tra i poliedri semiregolari viene fatto cenno al **dodecaedro rombico** e al **triancotaedro**, caratterizzati dall'essere circoscritti ad una sfera, ed inscritti in due sfere individuate dai vertici in cui convergono lo stesso numero di spigoli. Le 12 facce del **dodecaedro rombico**, tutte uguali tra loro, sono rombi, la cui diagonale minore è pari alla diagonale maggiore $\times \sqrt{2}/2$. Analogamente le 30 facce rombiche del **triancotaedro** hanno la diagonale minore pari alla maggiore $\times 0,61803399$.

In space grid structures polyhedrons are not represented as solids, i.e. as "portions" of space; rather, they are schematized as "struts" and "nodes": struts are the solid edges, while nodes are its angles. Consequently, in a space grid each strut intersection corresponds to a node. The sides of the polyhedron can also be divided into triangular elements, made of struts and nodes. Many polyhedrons can be inscribed in others or derive from their intersection. Tetrahedrons, hexahedrons, octahedrons, dodecahedrons and icosahedrons are fundamental polyhedrons. These polyhedrons are also called Platonic; all their edges have the same length and they can be inscribed in, and circumscribed to, a sphere. In the field of space grids Platonic polyhedrons are applied to the creation of several geometries. Apart from the typical ones, resulting from regular tetrahedrons, geometries are employed for more complex forms, for example to generate geodesic structures deriving from the projection of the angles of the triangular sub-modules of the icosahedron sides on the sphere containing it.

Il tetraedro regolare

Rappresenta il solido ideale per eccellenza:

- è *isostatico* in quanto le sue quattro facce sono triangolari;
- le *aste* che lo compongono sono tutte uguali tra loro;
- i *nodi* sono regolari in quanto in essi convergono aste inclinate di 60° rispetto a quelle adiacenti.

Nel tetraedro regolare ABCD (fig. 1), l'altezza relativa ad ogni faccia è $\ell/3 \times \sqrt{6}$, mentre la distanza tra due spigoli non convergenti è $\ell \times \sqrt{2}/2$. L'altezza è pertanto funzione del lato del modulo. Tale correlazione, come di seguito esposto, è un vincolo che caratterizza tutte le strutture spaziali a doppio strato con modulo di base regolare, essendo l'altezza elemento fondamentale nella determina-



zione delle caratteristiche di sollecitazione cui sono sottoposti i vari componenti. L'angolo formato tra due facce è di $70^{\circ}31'44''$, mentre l'angolo formato tra uno spigolo e la faccia su cui si proietta è di $54^{\circ}44'8''$.

They represent the ideal solid par excellence:

- they are isostatic since their four sides are triangular;
- the struts composing them are all the same length;
- nodes are regular since struts form 60° angles at the node.

In the regular tetrahedron ABCD (fig. 1) the height relative to each side is $\ell/3 \times \sqrt{6}$, while the distance between two non-convergent edges is $\ell \times \sqrt{2}/2$. The height is therefore a function of the side of the module. As we will see, this correlation is a constraint characterizing all space double-layer structures with regular basic module: height is the fundamental element to determine the stress characteristics undergone by the different elements. The angle formed by two sides is $70^{\circ}31'44''$, while the angle formed by an edge and the face on which it is projected is $70^{\circ}31'44''$.

Il semi ottaedro regolare

L'unione di quattro tetraedri regolari disposti ortogonalmente e con uno spigolo comune, determina un *semioottaedro* (fig. 2), la cui altezza è $\ell \times \sqrt{2}/2$, pari alla distanza tra due lati non convergenti del tetraedro, ed alla metà della diagonale del quadrato di base. L'angolo formato tra la faccia triangolare e la base quadrata è di $54^{\circ}44'8''$, mentre quello che lo spigolo forma con la sua proiezione su di essa, è di 45° .

Il semioottaedro viene considerato, dal punto di vista statico, una struttura *labile*, in quanto una delle sue facce non è triangolare.

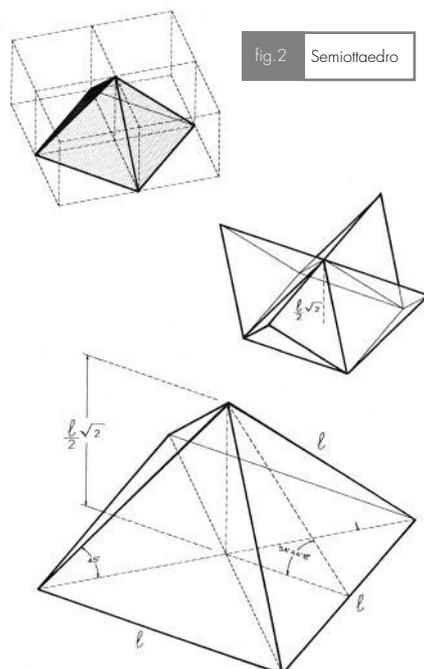
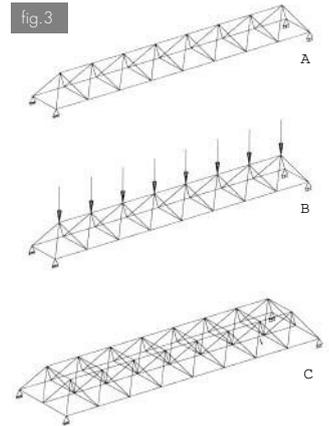


fig. 2 Semioottaedro

A tal proposito una struttura composta da una serie di semioottaedri con interposti tetraedri, disposti nello spazio in maniera allineata (fig. 3a), e vincolata esternamente ai nodi di estremità, è labile per vincoli interni, mancando un'asta

diagonale in ogni quadrato di base dall'elemento semioottaedrico. Essa è isostatica nella particolare condizione di soli carichi verticali (fig. 3b).

Contrariamente, la struttura diventa isostatica per qualsiasi condizione di carico (fig. 3c), quando è composta da almeno due strutture unimodulari affiancate.



"Semi-octahedrons" result from the union of four regular tetrahedrons arranged orthogonally and with a common edge (fig. 2), the height of which is $\ell \times \sqrt{2}/2$, equal to the distance between two non-convergent sides of the tetrahedron and to half of the diagonal of the basic square. The angle formed by the triangular side and the square base is $54^{\circ}44'$, while the one formed by the edge and its projection on the base is 45° .

From the point of view of statics, octahedrons are considered "labile" structures, insofar as one of their sides is not triangular. In this respect, a structure composed by a series of octahedrons interposed with tetrahedrons, arranged in space along a line (fig. 3a) and constrained externally by the end nodes is labile because of its internal constraints: the semi-octahedron element lacks a diagonal strut in each base square. It is isostatic only in the peculiar condition of vertical loads (fig. 3b). Instead, the structure becomes isostatic in any load condition when it is composed of at least two joined unimodular structures (fig. 3c).

Definizioni

Le strutture reticolari spaziali sono classificate in: due o più strati e monostrato.

Si definiscono **strutture reticolari spaziali a due o più strati** i grigliati composti da aste e nodi generati dall'aggregazione di moduli di base di forma tetraedrica.

Il moltiplicarsi dei vari *tetraedri* nello spazio, sia essi regolari che irregolari, determina pertanto una serie infinita di geometrie. Nella presente monografia verranno espone quelle più in uso, anche in riferimento ai vari sistemi di giuntaggio attualmente utilizzati, ai loro costi di produzione, ai tempi di progettazione e montaggio. Non verranno analizzate nel presente studio tutte quelle geometrie che, per loro conformazione, risultino staticamente labili.

Si definiscono **strutture reticolari spaziali monostrato** i grigliati composti da aste e nodi generati dall'aggregazione di moduli trian-

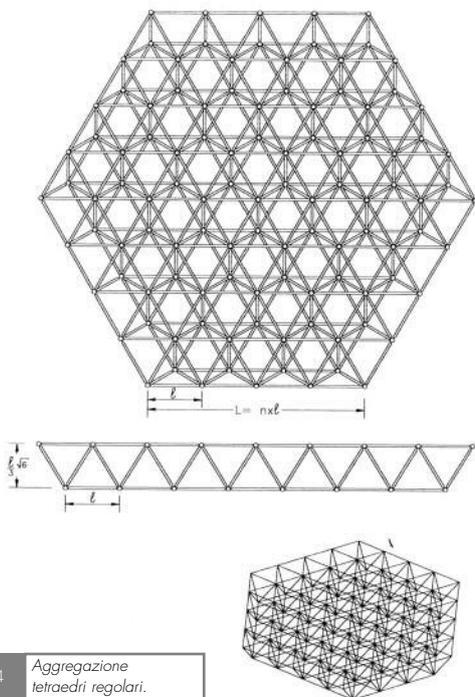


fig. 4 Aggregazione tetraedri regolari.

golari, disposti in modo da formare superfici quadriche, i cui nodi perimetrali sono tutti vincolati esternamente.

Sono pertanto esclusi da tale categoria i reticoli a guscio monostrato "aperti", i cui nodi perimetrali non sono tutti esternamente "incernierati", in quanto definiscono strutture labili dal punto di vista statico (es. volte a vela, a botte e a crociera monostrato non chiuse alle estremità, gusci a membrane molto ribassati e con appoggi puntuali limitati ai soli nodi d'angolo, strutture piane o non discretizzate in triangoli).

Space grid systems are grouped in two categories: "double or multi-layer" structures and "monolayer" structures.

Double or multi-layer structures are the grids made of struts and nodes generated by the aggregation of tetrahedral based modules. Several "tetrahedrons" multiplied in space – whether regular or irregular – result in an endless series of geometries. This essay will discuss the most frequently used ones, also referring to the different joint systems presently used, to their production costs, to design and monitoring times. This study will not analyze any labile geometrical forms.

Space monolayer grid structures are those composed of struts and nodes generated by the aggregation of triangular modules arranged in such a way as to form quadric surfaces, the perimetric nodes of which are all externally constrained.

As a consequence, this category does not include "open" monolayer shell grids, the perimetric nodes of which are not all "hinged" externally, because they represent labile structures from the static point of view (for example, ribbed, barrel and cross vaults, open-ended monolayer structures, extremely lowered shells and correct

supports only at the angle nodes, flat structures or not divided into triangles).

Strutture spaziali a doppio strato

La caratteristica tipologica di ogni struttura reticolare spaziale, sia a doppio che a singolo strato, dipende dalla suddivisione in moduli elementari della superficie che si vuole ottenere, sia curva che piana; per cui è di estrema importanza, ai fini della sua configurazione finale, l'individuazione geometrica e dimensionale dell'elemento base, del numero di moduli, la loro ripartizione e le variazioni angolari tra i vari elementi. L'individuazione dimensionale del modulo di base riveste un'importanza fondamentale anche ai fini dei costi della struttura che si intende realizzare. Infatti la lunghezza delle aste e la loro angolazione determina sia il numero di elementi da utilizzare (asti e nodi), sia i processi di lavorazione e successivo montaggio dei singoli nodi. A vantaggio dell'economicità, è pertanto indispensabile, in una singola struttura, l'utilizzo di un numero limitato di diversi tipi di nodi e lunghezze di aste, al fine di ridurre al minimo i costi di produzione e tempi di montaggio. Il numero di variabili e le loro infinite combinazioni rendono, d'altra parte, estremamente ardua una seppur limitata codificazione delle possibili geometrie. Nella presente monografia verranno pertanto analizzate le strutture spaziali realizzate o individuate da moduli regolari di possibile realizzazione in riferimento ai sistemi e ai prodotti esistenti in commercio.

Le strutture reticolari spaziali **regolari** a doppio strato, dette anche *piastre*, più in uso, sono di due tipi: quelle generate dall'aggregazione di tetraedri regolari (fig.4), e quelle formate da tetraedri con interposti semiottaedri regolari (fig.5).

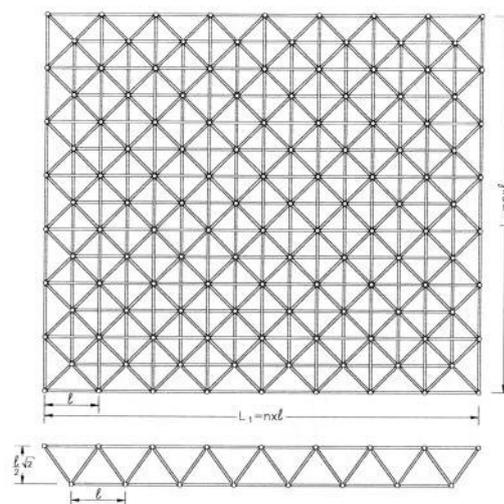
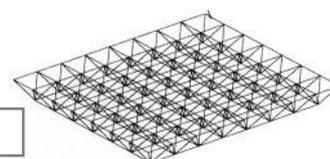


fig. 5 Tetraedri con interposti semiottaedri regolari



The typological characteristic of each space grid structure – both double-layer and monolayer structures – depends on the subdivision into elementary modules of the surface one wants to obtain, be it curved or flat. Consequently it is extremely important to identify the geometry and the size of the basic element, the number of modules, their distribution and the angular variations among the different layers in order to achieve the correct final configuration. Identifying the size of the basic module is fundamental also in relation to the cost of the structure to be realized. The length of the struts and their angulations determine both the number of elements to be used (struts and nodes) and the working processes and the following assembly of the single nodes. To achieve an economic advantage, then, it is essential to use a limited range of nodes and strut lengths for a single structure in order to minimize production costs and assembly times. However, the number of variables and their endless combinations make it extremely difficult to classify, even if only limitedly, the possible geometries. As a consequence, this essay will examine the space structures that have been realized or that can be formed by regular modules that can be realized considering the merchandized systems and products.

The most common double-layer **regular** space grid structures, also called plates, are of two types: those generated by the aggregation of regular tetrahedrons (fig.4), and those formed by tetrahedrons interposed with regular semi-octahedrons (fig.5).

Piastre piane a modulo tetraedico regolare

Queste strutture sono caratterizzate da reticoli spaziali di forma esagonale, le cui aste, tutte uguali tra loro, individuano triangoli equilateri su due piani paralleli: quelle che formano i *correnti superiori* sono collegate ai *correnti inferiori* mediante aste di parete della stessa lun-

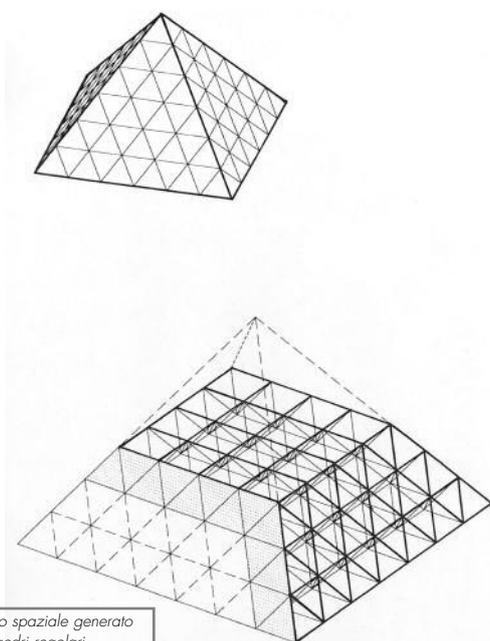


fig. 6 Reticolo spaziale generato da ottaedri regolari

ghezza, in modo che i vertici dei triangoli del reticolo superiore corrispondano, in pianta, ai baricentri dei triangoli del reticolo inferiore, formando due reticoli piani sfalsati tra loro. I vari tetraedri sono disposti in modo da avere uno spigolo in comune. L'altezza della piastra è determinata dalla lunghezza l dell'asta $\times \sqrt{6}/3$, mentre l'angolo formato dal piano individuato dalle aste di parete rispetto ai piani corrente è $70^{\circ}31'44''$. L'asta obliqua di parete è inclinata di $54^{\circ}44'88''$ rispetto ai piani individuati dalle aste di corrente.

These structures are characterized by hexagonal space grids the struts of which, all being the same length, form equilateral triangles on two parallel planes: those forming the "upper stringers" are connected to the "lower stringers" by equal length wall struts so that, in a pine-shaped structure, the triangle vertices of the upper grid match the barycentre of the lower grid triangles, thus forming two shifted flat grids. The different tetrahedrons are arranged in such a way as to have a common edge. The height of the plate is determined by the length l of the strut $\times \sqrt{6}/3$, while the angle formed by the plane identified by the wall struts and the stringer planes is $70^{\circ}31'44''$. The slanting wall strut form a $54^{\circ}44'88''$ angle with the planes identified by the stringers.

Piastre piane a modulo tetraedico regolare con interposti semiottaedri

La caratteristica di queste strutture spaziali a doppio strato è quella di definire reticoli a piastra i cui due piani individuati dai correnti sia superiori che inferiori sono quadrati sfalsati tra loro, in modo che i nodi dei quadrati del reticolo superiore corrispondono, in pianta, ai centri delle diagonali dei quadrati del reticolo inferiore. Esse sono pertanto generate da una serie di semiottaedri che hanno in comune uno spigolo del quadrato di base, in modo da formare tra loro altrettanti tetraedri. L'altezza della piastra è determinata dalla lunghezza l dell'asta $\times \sqrt{2}/2$, mentre l'angolo formato dal piano formato dal piano individuato dalle aste di parete rispetto ai piani di corrente è di $54^{\circ}44'88''$. L'asta di parete è inclinata di 45° rispetto ai piani individuati dalle aste di corrente.

Il conteggio delle aste che compongono piastre del tipo descritto si può determinare dal prodotto:

$$8 \times m \times n$$

dove m ed n sono il numero di moduli sui due lati di L_1 e L_2 della piastra, mentre il numero dei nodi è dato da:

$$(n + 1) \times (m + 1) + n \times m$$

Nota. La fig.6 rappresenta un reticolo spaziale generato da ottaedri regolari, disposti in modo da formare un semiottaedro regolare. In tale disposizione sono contenuti ambedue i reticoli analizzati nei precedenti paragrafi. Difatti, gli strati orizzontali sono piastre a modulo semiottaedrico con interposti tetraedri, mentre le facce oblique individuano con il piano ad esse parallelo piastre a modulo tetraedrico con interposti semiottaedri. Le due tipologie spaziali analizzate nei paragrafi 1.3.1 e 1.3.2 appartengono in effetti alla medesima struttura in fig. 5, a seconda del suo diverso orientamento nello spazio.

The characteristic of these double-layer space structures is to define plate grids in which the two planes identified both by the upper and the lower stringers are shift squares in such a way that the upper grid nodes match the midpoints of the diagonals of the lower grid squares. Therefore, these structures are generated by a series of octahedrons having in common an edge of the base square, so that they form an equal number of tetrahedrons. The height of the plate is determined by the length l of the strut $\times \sqrt{2}/2$, while the angle formed by the planes identified by the wall struts and by the grinders is $54^{\circ}44'88''$. The wall strut is 45° angled to the planes identified by the grinder planes. The number of struts composing such plates is given by the product:

$$8 \times m \times n$$

where m and n are the number of modules on the two sides L_1 and L_2 of the plate, while the number of nodes is given by:

$$(n + 1) \times (m + 1) + n \times m$$

Note: Fig. 6 shows a space grid generated by regular octahedrons arranged in such a way as to form a regular semi-octahedron. This arrangement includes both the grids analyzed in the previous paragraphs. As a matter of fact, the horizontal layers are octahedral module plates interposed with tetrahedrons, while the two slanting sides and the parallel plane identify tetrahedral module plates interposed with semi-octahedrons. The two space typologies analyzed in paragraphs 1.3.1 and 1.3.2. actually belong to the same structure shown in fig.5, depending on its orientation in space.

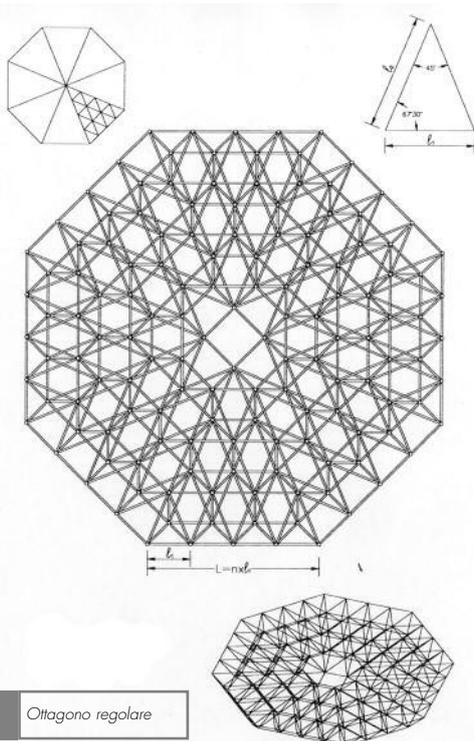
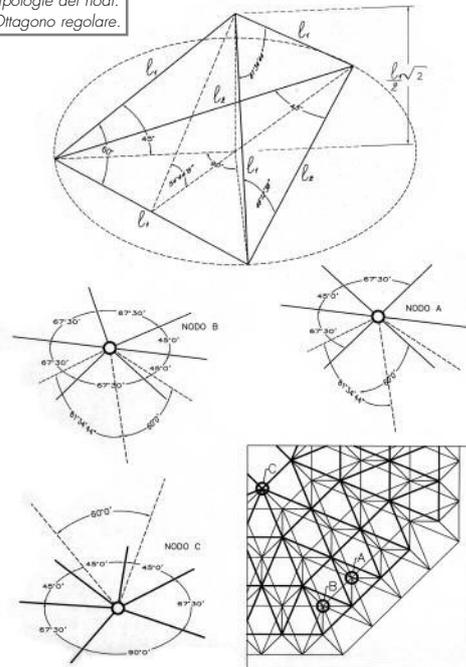


fig.7 Ottagono regolare

fig.8 Tipologie dei nodi. Ottagono regolare.



Piastre piane a modulo tetraedico isoscele

Un particolare contributo alle strutture reticolari spaziali per la ricerca di nuove geometrie, è stato dato dagli studi, compiuti recentemente, che individuano come modulo-base elementi tetraedici composti da triangoli isosceli. L'aggregazione di tali elementi, caratterizzati da opportune lunghezze ed angolazioni in ogni singolo modulo, consente la generazione di tutte le piastre poligonali a doppio strato mediante l'uso, per ogni geometria, di due soli tipi di nodi e due sole lunghezze di aste, ad eccezione del nodo centrale, dove convergono un numero di aste di corrente pari al numero dei lati.

A particular contribution to space grid structures for the research of new geometries has been recently provided by the studies identifying tetrahedral elements made of isosceles triangles as basic modules. The aggregation of such elements, characterized by the necessary lengths and angulations in each module, allows the generation of all the double-layer polygonal plates through the use, for each geometry, of only two kinds of nodes and two strut lengths except for the central node, where as many stringers as the sides of the polygon converge.

Ottagono regolare

Suddividendo un ottagono regolare in otto settori triangolari, e ripartendolo ulteriormente in una serie di triangoli simili, si ottiene una griglia (fig.7) il cui elemento base è un triangolo isoscele, di lati l_1 ed l_2 , con $l_1 < l_2$. Di conseguenza, l'angolo compreso tra i due lati maggiori l_2 è di 45° . Costruendo un secondo reticolo, uguale al primo, ed appartenente ad un piano ad esso parallelo, ad una distanza pari ai $l_1 \times \sqrt{2}/2$, e trasladandolo in modo che i nodi del primo reticolo corrispondano, in pianta, al centro delle circonfe-



renze circoscritte ai triangoli isosceli del secondo reticolo, si ottengono i correnti superiori ed inferiori di una struttura ottagonale reticolare spaziale a doppio strato, le cui diagonali, di lunghezza pari a ℓ_1 , sono le congiungenti dei nodi del reticolo superiore con quelli della griglia inferiore.

La dimensione dell'asta ℓ_2 è uguale a:

$$\ell_1 \times \sqrt{2/2 + 1}$$

Il modulo tetraedico di tale struttura è composto da una base a triangolo isoscele di lati ℓ_1 ed ℓ_2 , con l'angolo compreso tra ℓ_2 di 45° , una faccia a triangolo equilatero di lati ℓ_1 , e due facce a triangolo isoscele di lati ℓ_1 ed ℓ_2 . Il tetraedro formato dalla faccia equilatera con la sua proiezione sul triangolo di base è $1/4$ di semiottaedro regolare; l'angolo compreso tra questi due triangoli è di $54^\circ 45' 8''$. I nodi principali sono di due tipi: A e B.

I nodi di tipo A sono disposti lungo i raggi del cerchio circoscritto all'ottagono individuati dai vertici, mentre quelli di tipo B sono interni ai settori triangolari del poligono (fig. 8).

Un terzo nodo, di tipo C, caratterizza i quattro giunti nella parte centrale. Per semplificazioni di tipo tecnologico, il nodo centrale di convergenza di 12 aste è stato eliminato, essendo ininfluente dal punto di vista statico. La disposizione innanzi descritta rappresenta l'unico sistema di ripartizione di una struttura spaziale piana a doppio strato ottagonale formata da elementi tetraedrici isosceli tutti uguali tra loro ed è applicabile indipendentemente dal

numero di aste con le quali si suddivide il lato dell'ottagono. La copertura dell'Auditorium della Cittadella Postale nel Centro Direzionale di Napoli, oggi sede della Telecom, rappresenta un primo esempio di applicazione di tale geometria. Una sintesi di tale opera è riportata nella memoria presentata al XV Congresso CTA.

Dividing a regular octahedron into eight triangular sectors and further dividing it into a series of similar triangles we obtain a grid in which the basic element is an isosceles triangle bound by the sides ℓ_1 and ℓ_2 where $\ell_1 < \ell_2$. Consequently, the angle by the two major sides ℓ_2 is 45° .

Building another grid, equal to the former and belonging to a plane parallel to it at a distance equal to $\ell_1 \times \sqrt{2}/2$, and moving it so that the nodes of the former grid match the centre of the circumcircles in the isosceles triangles of the latter grid, we obtain the upper and lower stringers of an octagonal double-layer grid structure where the diagonals, as long as ℓ_1 , join the upper grid nodes and the lower grid nodes.

The size of ℓ_2 strut is equal to:

$$\ell_1 \times \sqrt{2/2 + 1}$$

The tetrahedral module of this structure is made of an isosceles triangle base having ℓ_1 and ℓ_1 as sides and a 45° angle to ℓ_1 's, an equilateral triangle side having ℓ_1 as sides, and two isosceles triangles having ℓ_1 and ℓ_2 sides and an $81^\circ 34' 44''$ angle to ℓ_1 's. The tetrahedron formed by the equilateral side and its projection on the base triangle is $1/4$ of regular semi-octahedron; the angle to these two triangles is $54^\circ 45' 8''$.

The main nodes are of two types: A and B.

A type nodes are arranged along the radius of the circumcircle to the octagon identified by the vertices, while B type nodes are internal to the triangular sectors of the polygon. (fig. 8).

There is a C type node, characterizing the four joints in the central part. Because of technological simplification, the central node where 12 struts converged has been eliminated, being it irrelevant from the point of view of statics. The arrangement above described represents the only division system of a flat double-layer octagonal space structure formed by equal isosceles tetrahedral elements. It can be applied independently of the number of struts used to divide the octagon sides. The roofing of the Auditorium of the Post Office Area in the Management Centre of Naples, where the Telecom office is located now, represents an early instance where this geometry was applied. An outline of this work is included in the records presented at the XV CTA Conference and is attached here.

La metodologia esposta può essere altresì applicata nella ripartizione di tutti i poligoni regolare, allo scopo di ottenere strutture spaziali con un numero limitato di tipi di aste e nodi.

A titolo esemplificativo si illustrano di seguito due tipi di strutture spaziali poligonali piane a doppio strato, decagono e dodecagono, utilizzando il procedimento di ripartizione innanzi descritto.

The related methodology can be also applied to the division of all regular polygons in order to achieve space structures requiring a limited number of struts and nodes.

As an example we are going to describe two types of polygonal double-layer flat space structure, a decagon and a dodecagon, using the division method described above.

Decagono regolare

La ripartizione di un poligono di dieci lati in altrettanti settori, determina triangoli elementari isosceli (fig.9), con sottomoduli simili di lati ℓ_1 ed ℓ_2 , con $\ell_1 < \ell_2$. L'angolo tra i lati ℓ_2 è 36° . Il modulo di base (fig.10) è costruito in modo che il reticolo parallelo è posto ad una distanza h pari a:

$$\ell_1 \times \sqrt{1 - 1 / (16 \sin^2 18^\circ \cos^2 18^\circ)}$$

per cui:

$$h = \ell_1 \times 0,5257311121$$

La dimensione dell'asta ℓ_2 è uguale a:

$$\ell_1 / 2 \times 1 / \sin 18^\circ$$

per cui:

$$\ell_2 = \ell_1 \times 1,6180339887$$

L'angolo compreso tra i triangoli equilateri di lato ℓ_1 ed i triangoli isosceli di lati ℓ_1 ed ℓ_2 , è di $37^\circ 22' 39''$.

La faccia triangolare isoscele di base ℓ_2 e lati ℓ_1 è la porzione di un pentagono delimitato da una sua diagonale, per cui il rapporto tra ℓ_1 ed ℓ_2 è pari al rapporto tra il lato di un pentagono regolare e la sua diagonale.

Analogamente all'ottagono, i nodi di tipo A sono disposti lungo i raggi del cerchio circoscritto al decagono ed individuati dai suoi vertici, mentre quelli di tipo B sono interni ai settori di ripartizione del poligono: ciò avviene, quindi, per tutte le strutture spaziali a doppio strato di più lati. In ognuno dei nodi tipo A e B convergono al massimo 9 aste, di cui 6 di corrente e 3 oblique. I nodi di tipo C, disposti nella parte centrale, sono in numero di 5. Il numero dei lati della figura centrale corrisponde alla metà di quelli perimetrali: all'ottagono corrisponde al centro un quadrato, al decagono un pentagono, al dodecagono un esagono, e così via. In ognuno dei vertici della figura centrale convergono 8 aste di cui 2 oblique: tale distribuzione avviene qualunque sia il poligono.

The division of a ten-side polygon into the same number of sectors results in elementary isosceles triangles (fig.9), with similar submodules having sides ℓ_1 and ℓ_2 ($\ell_1 < \ell_2$). The angle to the ℓ_2 sides is 36° . The basic module (fig.10) is built in such a way that the parallel grid is located at a distance h equal to:

$$\ell_1 \times \sqrt{1 - 1 / (16 \sin^2 18^\circ \cos^2 18^\circ)}$$

consequently:

$$h = \ell_1 \times 0,5257311121$$

The size of ℓ_2 strut is:

$$\ell_1 / 2 \times 1 / \sin 18^\circ$$

consequently:

$$\ell_2 = \ell_1 \times 1,6180339887$$

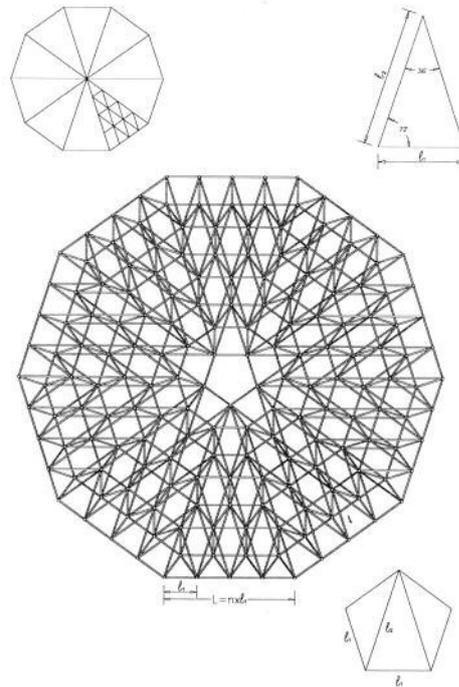


fig.9 Decagono regolare.

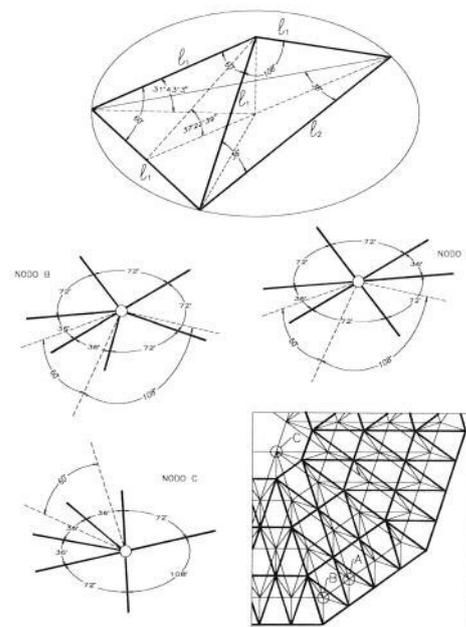


fig.10 Decagono regolare.

The angle to the equilateral triangles with side ℓ_1 and the isosceles triangles with sides ℓ_1 and ℓ_2 is $37^\circ 22' 39''$. The isosceles triangle face with base ℓ_2 and sides ℓ_1 is the portion of a pentagon bounded by one of its diagonals; so, the ratio between ℓ_1 and ℓ_2 is equal to the ratio between the side of a regular pentagon and its diagonal. Similarly to the octagon, A type nodes are arranged along the radiuses of the circumcircle to the decagon and identified by its vertices, while B type ones are internal to the division sectors of the polygon; therefore, this happens in all multi-sided double-layer space structures. No more than 9 struts, 6 of which are stringers and 3 slanting, converge in each of A- and B-type nodes. C type nodes, located in the central part, are 5. The side number of the central figure is equal to half the number of the perimetrical sides: a square in the centre corresponds to an octagon, a pentagon to a decagon, and hexagon to a dodecagon, and so on.

8 struts, two of which are slanting, converge in the vertices of the central figure: this distribution takes place whatever polygon it is.

Dodecagono regolare

Il dodecagono viene diviso in triangoli isosceli (fig. 11), con sottomoduli simili ai lati ℓ_1 ed ℓ_2 , con $\ell_1 < \ell_2$. L'angolo tra i lati ℓ_2 è di 30° . Il modulo tetraedico isoscele di base (fig. 12) è costruito in modo che le aste diagonali sono di lunghezza ℓ_2 , non essendo possibile dimensionarle di lunghezza ℓ_1 in quanto le loro proiezioni sul triangolo isoscele di base formano un triangolo equilatero di lato ℓ_1 . Tale coincidenza è dovuta al fatto che l'angolo al centro che sottende la corda ℓ_1 è di 60° , essendo il doppio dell'angolo alla circonferenza corrispondente, che è 15° .

Il reticolo parallelo è disposto ad una distanza h pari a:

$$\ell_1 \times \sqrt{\sqrt{3} + 1}$$

per cui:

$$h = \ell_1 \times 1,6528916502$$

La dimensione dell'asta ℓ_2 è uguale a:

$$\ell_1/2 \times 1/\sin 15^\circ$$

ovvero:

$$\ell_1 \times \sqrt{\sqrt{3} + 2}$$

per cui:

$$\ell_2 = \ell_1 \times 1,9318516525$$

Il modulo di base tetraedico della piastra a doppio strato dodecagonale ha due facce equilatero di lato ℓ_2 e le altre due isosceli di base ℓ_1 e lati ℓ_2 . L'angolo compreso tra le facce isosceli di base ℓ_1 è di $62^\circ 20' 52''$. Tali rapporti scaturiscono dal fatto di utilizzare due sole lunghezze di aste per la costruzione del poligono; è evidente che è possibile inserire, per le aste oblique, una dimensione più corta, al fine di ridurre la distanza tra i due reticoli. In tal caso variano sia le proporzioni tra le tre aste, che le angolazioni delle aste di parete rispetto ai piani individuati da quelle di corente.

A dodecagon is divided into isosceles triangles (fig. 11), with submodules similar to ℓ_1 and ℓ_2 sides, with $\ell_1 < \ell_2$. The angle to the ℓ_1

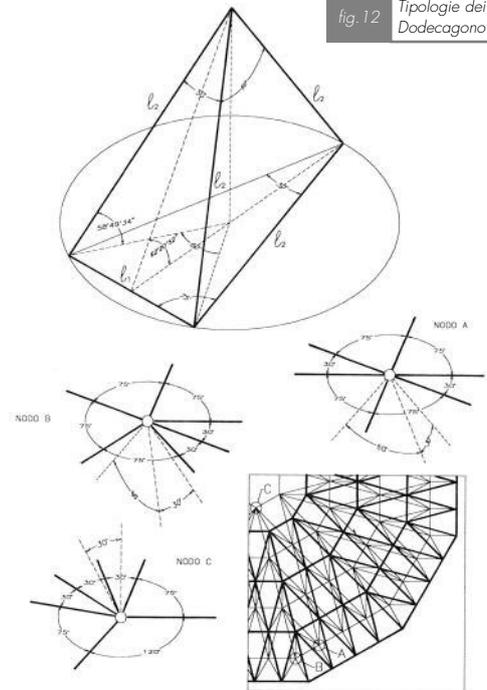


fig. 12 Tipologie dei nodi. Dodecagono regolare.

sides is 30° . The basic isosceles tetrahedral module (fig. 12) is built in such a way that the slanting struts have an ℓ_2 length: it is not possible to make them equal to ℓ_1 length since their projections on the basic isosceles triangle form an equilateral triangle with ℓ_1 side. This coincidence is due to the fact that the central angle subtending the ℓ_1 chord is 60° since it is twice as wide as the angle to the corresponding circle, which is 15° .

The parallel grid is located at a distance h equal to:

$$\ell_1 \times \sqrt{\sqrt{3} + 1}$$

consequently:

$$h = \ell_1 \times 1,6528916502$$

The size of the ℓ_2 strut is equal to:

$$\ell_1/2 \times 1/\sin 15^\circ$$

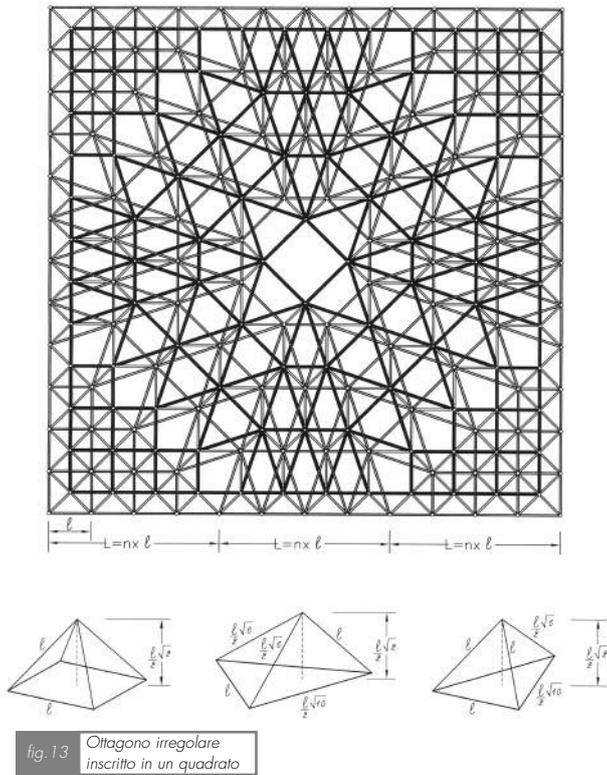
i.e.:

$$\ell_1 \times \sqrt{\sqrt{3} + 2}$$

consequently:

$$\ell_2 = \ell_1 \times 1,9318516525$$

The tetrahedral basic module of the dodecagonal double-layer plate has two equilateral faces with side ℓ_2 while the other two faces are isosceles with base ℓ_1 and sides ℓ_2 . The angle to the isosceles faces with base ℓ_1 is $62^\circ 20' 52''$. These ratios result from using only two strut lengths to build the polygon; it is clear that it is possible to introduce a shorter size for the slanting struts to reduce the distance between the two grids. In this case, both the proportions between the three struts and the angulations of the wall struts vary in relation to the planes identified by the grinders.



Ottagono irregolare inscritto nel quadrato

Un'altra significativa e particolare geometria è rappresentata dal grigliato a doppio strato che individua in pianta un ottagono inscritto in un quadrato (fig. 13). Il rapporto tra i lati dell'ottagono è $\sqrt{2}$. L'importanza di tale struttura consiste nell'utilizzo sia del modulo semioctaedrico che di quello tetraedrico isoscele, in base alla proprietà indicata al paragrafo 1.3.3, per la quale, nel modulo elementare della piastra ottagonale, il tetraedro formato dalla faccia equilatera con la sua proiezione sul triangolo di base, è $1/4$ di semioctaedro regolare. Sia lo strato superiore di aste, che quello inferiore, sono suddivisi in due tipi di triangoli isosceli e in quadrati di lato ℓ .

La suddivisione del lato L del quadrato circoscritto all'ottagono deve essere fatta in modo che si ottengano tre suddivisioni $n \times \ell$ uguali tra loro.

I tipi di moduli sono tre:

il semioctaedro di spigolo ℓ ;

il tetraedro isoscele la cui base ha lo spigolo minore $\ell \times \sqrt{2}$, il maggiore $\ell \times \sqrt{10}$, ed è alto $\ell \times \sqrt{2}/2$;

un altro tetraedro isoscele la cui base ha lo spigolo minore ℓ , maggiore $\ell \times \sqrt{10}$, ed è di eguale altezza $\ell \times \sqrt{2}/2$. Vi sono sei tipi di nodi e quattro lunghezze diverse di aste: le aste diagonali ℓ del semioctaedro sono di dimensione uguale alle diagonali corte dei tetraedri isosceli la cui altra diagonale misura $\ell/2 \times \sqrt{6}$.

I correnti maggiori individuati dai triangoli di base dei tetraedri isosceli misurano entrambi $\ell/2 \times \sqrt{10}$.

Another meaningful and particular geometry is represented by the double-layer grid identifying, in the plan, an octagon inscribed in a square (fig. 13). The ratio among the octagon sides is $\sqrt{2}$. The importance of such a structure consists in its use both in the semi-octahedral and in the isosceles tetrahedral modules according to the property pointed out in paragraph 1.3.3. According to it, in the elementary module of the octagonal plate, the tetrahedron formed by the equilateral face and its projection on the base triangle is $1/4$ of regular semi-octahedron. Both the upper and the lower strut layers are divided into two types of isosceles triangles and into squares with side ℓ .

The division of side L of the square inscribed in the octagon must be carried out in such a way that three equal subdivisions $n \times \ell$ are obtained. There are three types of modules:

the semi-octahedron with edge ℓ ;

the isosceles tetrahedron the base of which has the shorter edge $\ell \times \sqrt{2}$, the longer $\ell/2 \times \sqrt{10}$ and is $\ell \times \sqrt{2}/2$ high;

another isosceles tetrahedron the base of which has the shorter edge ℓ , the longer $\ell \times \sqrt{10}$ and has the same $\ell \times \sqrt{2}/2$ height. There are six node types and four different strut lengths: the slanting struts ℓ of the semi-octahedron are the same length as the short diagonals of the isosceles triangles, the other diagonal of which is $\ell/2 \times \sqrt{6}$.

The major stringers identified by the base triangles of the isosceles tetrahedrons are both $\ell/2 \times \sqrt{10}$.

Piastre piane a tre o più strati

La fig. 5 mostra una struttura spaziale a più strati composta da semioctaedri regolari. Le piastre a tre o più strati sono generate dall'aggregazione ad una struttura spaziale a doppio strato, di un ulteriore numero di elementi tetraedrici tali da consentire la formazione di più piani paralleli tra loro. Tale disposizione si ottiene moltiplicando nello spazio le aste diagonali. Se la piastra di partenza è del tipo a doppio strato ed è composta da soli tetraedri regolari, prolungando la struttura nella direzione delle aste diagonali utilizzando lo stesso modulo, si ottengono piani paralleli ai primi due e composti da triangoli equilateri sfalsati; se invece la piastra generatrice a doppio strato è formata da tetraedri con interposti semioctaedri, si ottengono piani, paralleli ai primi due, caratterizzati da quadrati sfalsati, in modo che, in pianta, i quadrati del primo livello coincidono con quelli del terzo, quelli del secondo si sovrappongono a quelli del quarto, e così via. Le strutture spaziali a più livelli non sono utilizzate di frequente, a causa dei costi maggiori dovuti all'utilizzo di un numero considerevole di aste e nodi; esse sono utilizzate in prevalenza quando, per motivi architettonici o funzionali, occorre che una piastra a doppio strato abbia un'altezza maggiore in determinati punti dello spazio che si sta coprendo. Le variazioni di altezza in una piastra piana a doppio strato conferiscono un gradevole aspetto alla struttura spaziale, in quanto rendono più movimentato il suo andamento. Nelle piastre a modulo tetraedrico regolare, variazioni tra uno strato e l'altro creano incrementi o riduzioni dell'altezza utile pari a $\ell \times \sqrt{3}/3$, mentre per le piastre a modulo semioctaedrico regolare, la variazione di altezza è $\ell \times \sqrt{2}/2$, dove ℓ è il lato del modulo. Nello svolgimento della progettazione di tali strutture, bisogna prestare particolare attenzio-

ne all'andamento della piastra, in quanto le variazioni di altezza avvengono nella direzione delle aste diagonali.

Fig.5 shows a multi-layer space structure composed of regular semi-octahedrons. The three or more layer plates are generated by the aggregation to a double-layer structure of a further number of tetrahedral elements so that the formation of more parallel planes is made possible. Such an arrangement can be obtained by multiplying the slanting struts in space. If the starting plate is double-layer and is made only of regular tetrahedrons, parallel planes to the previous two and made of shift equilateral triangles are obtained extending the structure in the direction of the slanting struts using the same modules. If, instead, the generating double-layer plate is formed by tetrahedrons interposed with semi-octahedrons, we obtain parallel planes to the previous two characterized by shift squares so that, in the plan, the squares of the first layer match those of the third, those of the second match the squares of the fourth and so on.

They are used especially when, for architectural or functional reasons, a double-layer plate has to have a greater height in some parts of the space that is being roofed. The height variations in a flat double-layer plate give the space structure a pleasant aspect, since they make its development livelier. In the regular tetrahedral module plates variations between one layer and the other increase or reduce the useful height equal to $\ell \times \sqrt{3}/3$, while in the regular semi-octahedral module plates the height variation is $\ell \times \sqrt{2}/2$, where ℓ is the side of the module. In carrying out the design of these structures it is important to pay particular attention to the development of the plate, since the height variations take place in the direction of the slanting struts.

Piastra a doppio stato "in diagonale"

La struttura reticolare piana a doppio strato, detta "in diagonale", si ottiene facendo ruotare di 45° intorno al proprio asse i semiottaedri risultanti da una piastra generata da tetraedri.

Il grigliato che ne deriva, i cui correnti dello strato inferiore equivalgono in lunghezza alla diagonale delle basi dei quadrati dello strato superiore, non appartiene alla categoria delle strutture reticolari spaziali, in quanto non generato dai moduli tetraedrici.

Tale geometria, spesso usata in passato nella costruzione di strutture reticolari, consente una riduzione del numero di aste e nodi, con conseguenti vantaggi economici; purtroppo, dal punto di vista statico, risulta labile per vincoli interni.

The flat double-layer grid structure, so-called "diagonal", is achieved by rotating the semi-octahedrons resulting from a grid created by tetrahedrons at a 45° angle around their axis.

The resulting grid, the lower layer battens of which have the same length as the diagonal of the bases of the upper layer squares, does not belong to the category of space grid structures since it does not spring from tetrahedral modules.

This geometry, often used in the past to build grid structures, allows to reduce the number of struts and nodes and therefore provides economical advantages. Unfortunately, from the point of view of statics, it appears to be weak for internal constraints.

Piastra a doppio stato a tronco di icosaedro

Una particolare struttura spaziale a doppio strato formata da moduli di base tetraedrici regolari, ad eccezione di quelli sugli spigoli, è rappresentata dalla piastra i cui piani dei correnti sono disposti secondo le facce di un tronco di icosaedro, in modo da ottenere una struttura a forma di piramide a base pentagonale.

Le facce del poliedro sono suddivise in triangoli equilateri. Per ottenere una piastra a doppio strato, ad ognuno dei triangoli, in maniera alternata, corrisponde un tetraedro regolare; unendo i vertici interni di questi ultimi, si ottiene un ulteriore tronco di icosaedro le cui facce sono parallele a quello di origine.

A peculiar double layer space structure formed by regular tetrahedral base modules with the exception of the corner modules is represented by the plate of which the batten planes are arranged according to the sides of a truncated icosahedron, thus achieving a pyramid-shaped structure with a pentagonal base.

The polyhedron sides are divided into equilateral triangles. To obtain a double-layer plate, a regular tetrahedron, alternately, corresponds to each of the triangles; joining the internal vertexes of the tetrahedron, another truncated icosahedron is obtained and its sides are parallel to the original one.

ESEMPI DI DIMENSIONAMENTO

Dal punto di vista statico le travature reticolari spaziali devono essere considerate come una discretizzazione dell'elemento continuo. Una configurazione strutturale che affida prevalentemente la sua resistenza agli sforzi di flessione è sicuramente più sollecitata di un'altra configurazione che lavora prevalentemente per sforzi assiali. La scomposizione del continuo in nodi cerniera ed elementi asta consente di trasformare tutti gli sforzi flessionali in sforzi di trazione o compressione. In particolare la tecnologia del sistema Vestrut, a differenza di tutti gli altri sistemi reperibili in commercio, realizza una cerniera perfetta e fa sì che siano rispettate tutte le ipotesi di calcolo:

i nodi si assimilano a cerniere perfette
le aste sono soggette a soli sforzi assiali.

Condizione necessaria per la verifica di tali condizioni è che i carichi agiscano correttamente sui nodi; è sempre necessaria quindi una struttura secondaria per il sostegno del manto di copertura. In genere la struttura secondaria si realizza con profilati ad "omega" oppure con un tubo rettangolo poggiato sui nodi del reticolo superiore con elementi regolabili atti anche a dare la pendenza voluta al manto di copertura. Particolare importanza rivestono gli apparecchi di appoggio, rappresentando il punto di contatto tra la struttura orizzontale e verticale. A seconda della disposizione e della tipologia di vincolo il comportamento della struttura reticolare può essere a piastra oppure a trave.

Indipendentemente dalla scelta che viene operata si distinguono tre tipologie di vincolo:

- appoggio fisso;
- il nodo di appoggio realizza lo schema di una cerniera fissa e la reazione risultante ha tre componenti (X, Y e Z).
- appoggio unidirezionale;
- il nodo di appoggio realizza lo schema di un carrello e la reazione risultante ha due componenti (X o Y e Z).
- appoggio multidirezionale;
- il comportamento è analogo al precedente, il nodo di appoggio è libero di scorrere nel piano di appoggio e la reazione risultante ha una sola componente (Z).

La disposizione dei vincoli al contorno consente anche di annullare gli effetti dovuti alle dilatazioni termiche. La perfetta compatibilità tra le reazioni della travatura reticolare e le conseguenti azioni sulla sottostante struttura di sostegno può essere raggiunta curando proprio la particolare distribuzione dei vincoli al contorno.

Vari procedimenti di calcolo approssimato sono stati proposti per ricondurre lo studio di tali reticoli da quello di sistemi continui a quello, in genere più semplice, di sistemi discreti equivalenti, ma la via più agevole e spontanea consiste nell'affidare le calcolazioni ad un elaboratore elettronico. A titolo di esempio riportiamo di seguito le fasi di dimensionamento di una piastra rettangolare di dimensioni mt 10,00 x 12,00. Essa è composta da moduli semiottaedrici a base quadrata di lato mt 2,00, con un'altezza di mt 1,40 (fig. 1). La normativa individua le azioni del vento, della

neve e del sisma nelle varie regioni d'Italia e gli eventuali sovraccarichi cui devono rispondere le strutture oggetto di calcolazioni. È pertanto indispensabile, per procedere alla progettazione, individuare i valori di tali azioni.

Si considera:

- Peso proprio e carichi permanenti
- Carico accidentale
- Carico da Neve
- Carico da Vento
- Carico Sismico
- Carico Termico

Le azioni dovute a questi carichi vengono trasferite tramite il manto di copertura ai nodi del grigliato superiore, computandole per area d'influenza del singolo nodo.

Per un carico verticale $q=100\text{kg/m}$ avremo quindi:

$$P=q \cdot l = 100\text{kg/m} \cdot 2,00 = 400\text{kg}$$

Questa analisi viene effettuata per tutte le tipologie di carico impuntandole per singole condizioni di carico. I risultati delle singole condizioni vengono combinati secondo i dettami della normativa. Infine si procede alle verifiche di resistenza e di stabilità per le singole membrature per tutte le combinazioni di carico.

From the static point of view the reticular spatial trusses must be considered as a moderation of the continuous element. A structural configuration that primarily entrusts its resistance to the efforts of bending is surely more urgent than another configuration that works primarily for axial stress. The resolution of the continuous one in hinged nodes and pole elements allows the transformation of all the flexion stresses into stresses of traction or compression. In particular, the technology of the Vestrut system, unlike all the other available systems in commerce, creates a perfect hinge and it ensures that all the hypotheses of calculation are respected:

*the nodes are assimilated to perfect hinges
the poles are subject only to axial stress.*

A necessary condition for the verification of such conditions is that the loads act correctly on the nodes; it is always necessary, therefore, to have a secondary structure for the support of the mantle of coverage. In general, the secondary structure is constructed with "omega" section bars or with a right-angled tube resting on the nodes of the upper grid with adjustable elements made also to give the required inclination to the mantle of coverage. Particular importance is given to the support apparatus representing the point of contact between the horizontal and vertical structure. According to the disposition and the type of tie the behaviour of the grid structure can be either plate or beam.

Independently from the choice that is operated, three types of tie can be distinguished:

- fixed support;
- the support node realizes the scheme of a fixed hinge and the resultant reaction has three components (X, Y and Z).

ESEMPIO DI DIMENSIONAMENTO ASTE PER TRAVE STANDARD CON NODO DIAM. 120

NUMERO ASTE

luce (L) mt	lato modulo cm	numero moduli	carico kg/mq	altezza cm	numero nodi		48,3*5	60,3*5	76,1*5	88,9*6,3	48,3*5 diagonali	MQ	incidenza nodi/mq	incidenza aste/mq	peso proprio kg/mq
10,80	180	6	230	35	33		32	6	4	6	48	38,88	0,848765	2,469136	30,96
10,80	180	6	510	70	33		32	6	4	6	48	38,88	0,848765	2,469136	31,43
10,80	180	6	900	127	33		32	6	4	6	48	38,88	0,848765	2,469136	33,67
16,20	180	9	230	70	48		41	15	8	8	72	58,32	0,823045	2,469136	31,53
16,20	180	9	400	127	48		41	15	8	8	72	58,32	0,823045	2,469136	33,76
21,60	180	12	230	127	63		56	18	8	14	96	77,76	0,810185	2,469136	33,75

NUMERO ASTE

luce (L) mt	lato modulo cm	numero moduli	carico kg/mq	altezza cm	numero nodi		48,3*5	60,3*5 diagonali	76,1*5	88,9*6,3	48,3*5 diagonali	MQ	incidenza nodi/mq	incidenza aste/mq	peso proprio kg/mq
9,60	240	4	250	40	23		26	16	0	6	16	46,08	0,499132	1,388889	24,3
9,60	240	4	570	90	23		26	16	0	6	16	46,08	0,499132	1,388889	24,65
9,60	240	4	1070	170	23		26	8	8	6	16	46,08	0,499132	1,388889	26,45
14,40	240	6	250	90	33		38	16	4	6	32	69,12	0,477431	1,388889	23,48
14,40	240	6	480	170	33		38	12	8	6	32	69,12	0,477431	1,388889	24,97
19,20	240	8	270	170	43		50	16	4	10	48	92,16	0,46658	1,388889	24,42

NUMERO ASTE

luce (L) mt	lato modulo cm	numero moduli	carico kg/mq	altezza cm	numero nodi		48,3*5	76,1*5	114,3*5	88,9*6,3 diagonali	48,3*5 diagonali	MQ	incidenza nodi/mq	incidenza aste/mq	peso proprio kg/mq
9,00	300	3	360	50	18		17	11	4	8	8	54	0,333333	0,888889	23,55
9,00	300	3	800	110	18		17	11	4	8	8	54	0,333333	0,888889	23,72
9,00	300	3	1500	212	18		17	11	4	8	8	54	0,333333	0,888889	24,2
15,00	300	5	260	110	28		29	19	4	4	24	90	0,311111	0,888889	20,52
15,00	300	5	500	212	28		29	11	4	12	24	90	0,311111	0,888889	21,86
21,00	300	7	250	212	38		41	27	8	4	32	126	0,301587	0,888889	21,65

ESEMPIO DI DIMENSIONAMENTO ASTE PER TRAVE STANDARD CON NODO DIAM. 160

NUMERO ASTE

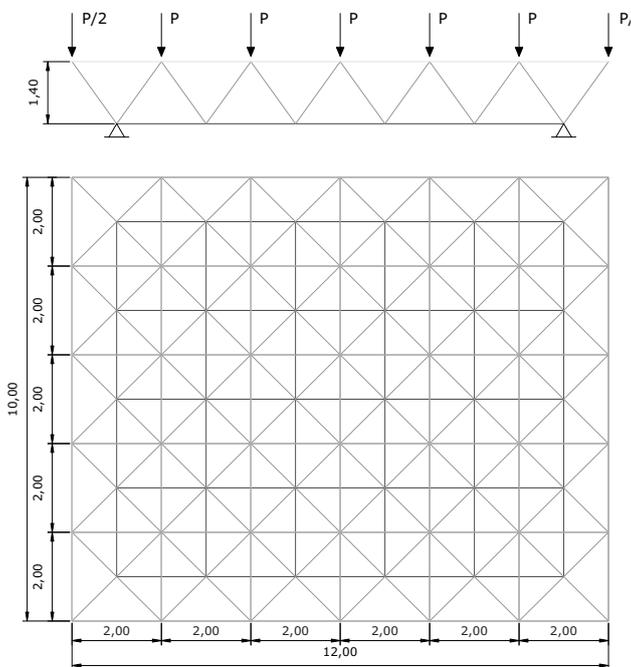
luce (L) mt	lato modulo cm	numero moduli	carico kg/mq	altezza cm	numero nodi		48,3*5	60,3*5	76,1*5	88,9*6,3	139,7*5	48,3*5 diagonali	MQ	incidenza nodi/mq	incidenza aste/mq	peso proprio kg/mq
					120	160										
18,00	180	10	160	30	22	31	44	22	12	4	14	64	64,8	0,817901	2,469136	39,62
18,00	180	10	380	70	22	31	44	30	6	10	14	56	64,8	0,817901	2,469136	41,74
18,00	180	10	700	127	22	31	44	22	14	10	14	56	64,8	0,817901	2,469136	43,81
23,40	180	13	230	70	26	42	53	0	28	7	16	104	84,24	0,807217	2,469136	39,83
23,40	180	13	410	127	32	36	59	24	25	4	16	80	84,24	0,807217	2,469136	41,69
30,60	180	17	240	127	38	50	71	12	12	21	20	136	110,16	0,798838	2,469136	41,77

NUMERO ASTE

luce (L) mt	lato modulo cm	numero moduli	carico kg/mq	altezza cm	numero nodi		48,3*5	60,3*5	76,1*5	114,3*5	139,7*6,3	48,3*5 diagonali	MQ	incidenza nodi/mq	incidenza aste/mq	peso proprio kg/mq
					120	160										
16,80	240	7	190	40	10	28	29	8	22	13	8	32	80,64	0,47123	1,388889	33,56
16,80	240	7	430	90	10	28	29	8	22	13	8	32	80,64	0,47123	1,388889	33,92
16,80	240	7	800	170	16	22	29	0	26	17	8	32	80,64	0,47123	1,388889	35,52
21,60	240	9	250	90	16	32	35	22	22	13	12	40	103,68	0,462963	1,388889	33,15
21,60	240	9	480	170	16	32	35	14	24	19	12	40	103,68	0,462963	1,388889	35,33
28,80	240	12	270	170	22	41	50	22	30	20	14	56	138,24	0,455729	1,388889	33,77

NUMERO ASTE

luce (L) mt	lato modulo cm	numero moduli	carico kg/mq	altezza cm	numero nodi		48,3*5	76,1*5	114,3*5	139,7*5	168,3*5	48,3*5 diagonali	MQ	incidenza nodi/mq	incidenza aste/mq	peso proprio kg/mq
					120	160										
18,00	300	6	160	50	6	27	26	14	22	4	6	24	108	0,305556	0,888889	29,05
18,00	300	6	360	110	6	27	26	14	22	4	6	24	108	0,305556	0,888889	29,3
18,00	300	6	700	212	12	21	26	14	22	4	6	24	108	0,305556	0,888889	29,56
24,00	300	8	200	110	16	27	32	22	28	4	10	32	144	0,298611	0,888889	28,89
24,00	300	8	390	212	16	27	32	22	28	4	10	32	144	0,298611	0,888889	29,62
33,00	300	11	210	212	16	42	47	38	12	19	12	48	198	0,292929	0,888889	28,83



To be considered:

- its weight and permanent loads
- incidental load
- Snow load
- Wind load
- Seismic load
- Thermal load

The actions due to these loads are transferred through the mantle of coverage to the nodes of the upper grid, calculating them for area of influence of the individual node.

For a vertical load $q=100\text{kg/m}$ we will have therefore:

$$P=q \cdot l = 100\text{kg/m} \cdot 2.00 = 400\text{kg}$$

This analysis is carried out for all the types of load ascribing them for single conditions of load. The results of the individual conditions are combined according to the dictates of the law. Finally you go on to the verification of resistance and stability for the individual structures for all the possible combinations of load.

unidirectional support;

- the support node realizes the scheme of a carriage and the resultant reaction it has two components (X or Y and Z).
- multi-directional support;
- the behaviour is analogous to the above, the support node is free to flow on the support plane and the resultant reaction it has one component only (Z).

The disposition of the surrounding ties also allows the annulling of the effects due to thermal expansions. Perfect compatibility between the reactions of the grid truss and the consequent actions on the underlying support structure can be reached, taking care of the particular distribution of the ties to the surround.

Varied procedures of approximate calculation have been proposed in order to renew the study of such grids from those of continuous systems to that, generally more simple, of equivalent discreet systems, but the easiest and spontaneous way is to entrust the calculations to an electronic computer.

By way of example, we show below the phases of sizing of a rectangular plate of dimensions 10.00×12.00 m. It is made up of semi-octahedral shapes with square base of 2.00 m per side, with a height of 1.40 m (fig. 1). The normative individualizes the actions of the wind, of snow and of earthquakes in the various regions of Italy and the possible overloads which the structures subject of calculations must answer. It is therefore essential to proceed with the planning to individualize the values of such actions.



LE CUPOLE GEODETICHE

Indipendentemente da tutte le qualità spaziali ed i principi formali ispiratori di questa tipologia di coperture, ci interessa innanzitutto analizzare la loro genesi spaziale e geometrica; essa è basata sulla scomposizione di solidi tridimensionali regolari che, attraverso le geniali intuizioni dell'arch. americano Richard Buckminster Fuller, si trasformano nel solido conosciuto più prossimo alla sfera. Le cupole tradizionalmente nascono come superficie di rivoluzione di una sezione intorno ad un'asse, mentre le cupole geodetiche nascono come scomposizione di un oggetto tridimensionale nella sua interezza che, proiettato sulla superficie di una sfera, dà vita ad un organismo complesso ed indipendente.

La sinergia che ogni piccolo componente sviluppa e costruisce all'interno delle complessità geometriche di questa tipologia di cupole rappresenta pienamente il pensiero filosofico che Fuller ha sviluppato nel corso degli anni di studio e di sperimentazioni.

Independently of all the space qualities and the formal principles lying behind this type of roofing, we aim above all at analysing its spatial and geometric genesis. It is based on the decomposition of three-dimensional regular solids that, thanks to the genial intuitions of the American architect Richard Buckminster Fuller, change into the known solid closest to the sphere.

Domes traditionally develop as revolution surfaces of a section around its axis, while geodesic domes derive from the decomposition of a whole three-dimensional object that, projected on a sphere surface, originates a complex and independent organism.

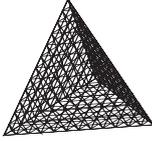
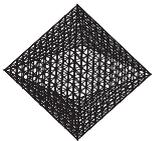
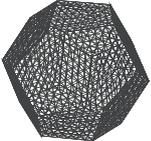
Within the geometric complexities of these domes each small component develops and builds a synergy that fully reflects the philosophy Fuller developed after years of study and experimentation.

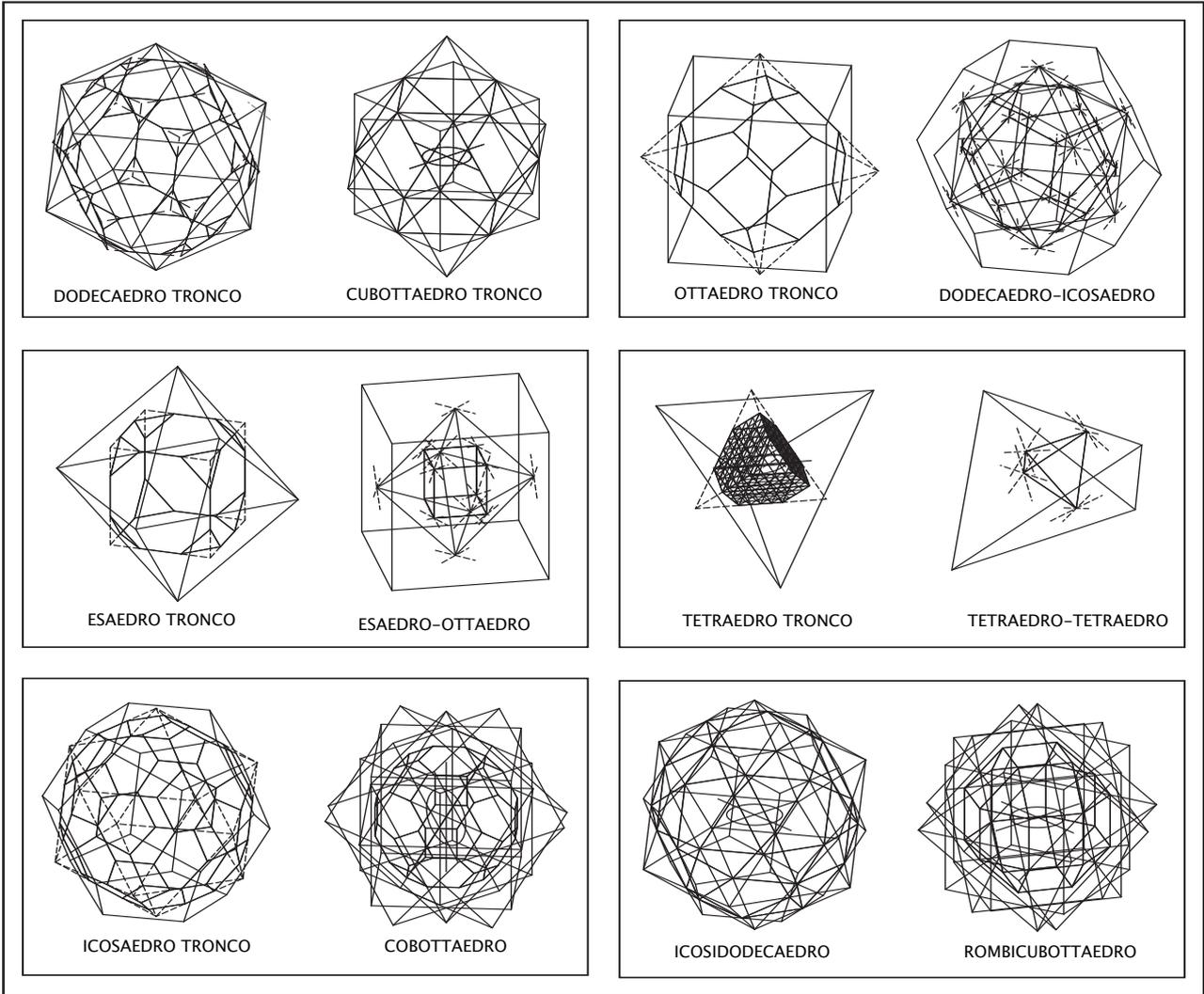
I POLIEDRI

Per lo studio delle cupole geodetiche bisogna ricordare alcune proprietà fondamentali dei poliedri, in quanto esse derivano proprio dalla loro scomposizione. I poliedri fondamentali, detti poliedri platonici, sono cinque: il tetraedro, il cubo o esaedro, l'ottaedro, il dodecaedro ed infine l'icosaedro (fig. 1). Essi hanno una caratteristica peculiare: tutte le facce e gli spigoli sono uguali tra loro e sono inscrittibili in una sfera e circoscrivibili ad una sfera.

Nella figura 1 si evidenzia che il numero delle facce dell'esaedro è pari al numero dei vertici dell'ottaedro e viceversa; tale corrispondenza si verifica anche tra il dodecaedro e l'icosaedro, mentre il tetraedro ha lo stesso numero di vertici e di facce.

Questa proprietà ci permette di comporre nello spazio le coppie di solidi e realizzare così degli altri poliedri, ottenuti posizionando il vertice del primo in corrispondenza dell'asse del baricentro della faccia del secondo (fig. 2). Questi sono detti poliedri archimedeei (fig. 3), i quali conservano la proprietà di avere tutti gli spigoli uguali tra loro ma non le facce, inoltre sono inscrittibili in una sfera, ma non ne sono più circoscrivibili. Altri due poliedri fondamentali per lo studio delle cupole geodetiche sono i poliedri semiregolari (fig. 4), caratterizzati dall'avere facce rombiche. Di notevole interesse è il triancotaedro essendo il poliedro inscrittibile in una sfera con il maggior numero di facce uguali tra loro. I poliedri, inoltre, possono essere considerati come schematizzazione della sfera. In quest'ottica è di fondamentale importanza analizzare il rapporto tra il volume che ogni poliedro riesce a contenere e lo sviluppo della superficie delle sue facce (fig. 5). Questo rapporto rappresenta l'attitudine di ogni solido a contenere il massimo volume con una minima superficie. La dualità evidenziata in precedenza tra esaedro ed ottaedro e tra dodecaedro ed icosaedro

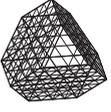
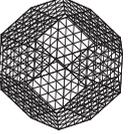
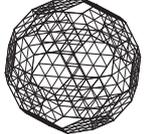
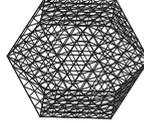
POLIEDRI PLATONICI					
	TETRAEDRO	ESAEDRO	OTTAEDRO	DODECAEDRO	ICOSAEDRO
facce	4	6	8	12	20
vertici	4	8	6	20	12
spigoli	6	12	12	30	30
geometria delle facce	triangoli	quadrati	triangoli	pentagoni	triangoli
raggio sfera circoscritta	lato x 0,6123724	lato x 0,8660254	lato x 0,7071068	lato x 1,4012585	lato x 0,9510565

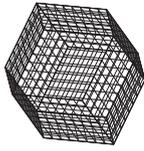
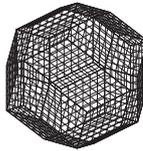


si conserva anche in questa schematizzazione; infatti il rapporto tra volume e superficie di queste coppie di solidi è identico e la sfera, naturalmente, è il solido che più di ogni altro meglio si presta a contenere un grosso volume con una minima superficie. La cupola geodetica, in quanto "discretizzazione" ottimale della sfera e derivante dalla scomposizione diretta di un poliedro, è il solido che più si approssima alla caratteristica intrinseca della sfera appena accennata.

To study geodesic domes it is essential to remember some of the fundamental properties concerning polyhedrons, because they derive exactly from their decomposition. There are five fundamental polyhedrons, known also as Platonic polyhedrons,: tetrahedrons, cubes or hexahedrons, octahedrons, dodecahedrons and, finally, icosahedrons (fig. 1). They have a peculiar characteristic: all their faces and edges are equal and can be inscribed in, and circumscribed to, a sphere. Fig. 1 shows that the hexahedron face number is equal to the octahedron vertex number and vice versa; this correspondence occurs also between dodecahedrons and icosahedrons, while tetrahedrons have

the same number of faces and vertices. This property enables us to compose pairs of solids in space to create in this way other polyhedrons obtained by the matching of the vertices of the first polyhedron with the barycentre axis of the face of the second (fig. 2). These are called Archimedean polyhedrons (fig. 3), which keep the property of having equal edges, whereas they have different faces; moreover, they can be inscribed in a sphere but they cannot be circumscribed. Two more fundamental polyhedrons for the study of geodesic domes are semi-regular polyhedrons (fig. 4). They are characterized by rhombic faces. Triancotahedrons are especially interesting since they are the inscribable polyhedrons with the higher number of equal faces. Furthermore, polyhedrons can be seen as a schematization of the sphere. In this respect, it is fundamental to analyse the ratio between the volume each polyhedron can contain and the development of its face surface (fig. 5). This ratio represents the attitude of each solid to contain the largest volume with the smallest surface. The duality previously stressed between hexahedrons and octahedrons and dodecahedrons and icosahedrons is kept also in this schematiza-

POLIEDRI ARCHIMEDEI						
	TETRAEDRO TRONCO	ESAEDRO TRONCO	OTTAEDRO TRONCO	DODECAEDRO TRONCO	ICOSAEDRO TRONCO	CUBOTTAEDRO
facce	8	14	14	32	32	14
vertici	12	24	24	60	60	12
spigoli	18	36	12	90	90	24
geometria delle facce	4 esagoni 4 triangoli	6 ottagoni 8 triangoli	8 esagoni 6 quadrati	12 decagoni 20 triangoli	20 esagoni 12 pentagoni	6 quadrati 8 triangoli
raggio sfera circostrita	lato x 1,1726039	lato x 1,7788236	lato x 1,5811388	lato x 2,9694490	lato x 2,4780187	lato x 0,7071068
poliedri generatori	tetraedro + tetraedro	esaedro + ottaedro	esaedro + ottaedro	dodecaedro + icosaedro	dodecaedro + icosaedro	esaedro + ottaedro
POLIEDRI ARCHIMEDEI						
	CUBOTTAEDRO TRONCO	ROMBICUBOTTAEDRO	ICOSIDODECAEDRO	ICOSIDODECAEDRO TRONCO	ROMBICOSIDODECAEDRO	
facce	26	26	32	62	62	
vertici	48	24	40	120	60	
spigoli	72	48	60	180	120	
geometria delle facce	8 esagoni 12 quadrati 6 ottagoni	18 quadrati 8 triangoli	12 pentagoni 20 triangoli	20 esagoni 30 quadrati 12 dodecagoni	20 triangoli 30 quadrati 12 pentagoni	
raggio sfera circostrita	lato x 2,3176109	lato x 1,3989663	lato x 1,6180340	lato x 3,8023945	lato x 2,2329505	
poliedri generatori	3 esaedri + 1 esaedro + ottaedro	4 esaedri + ottaedro	dodecaedro + icosaedro	dodecaedro + icosaedro + triancotaedro	dodecaedro + icosaedro + triancotaedro	

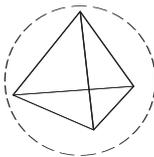
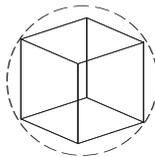
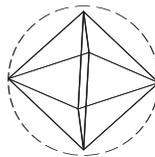
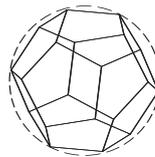
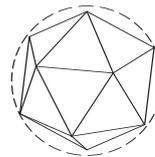
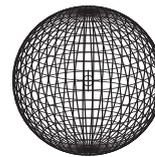
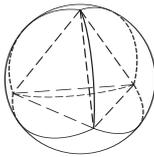
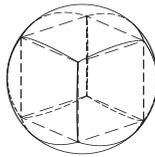
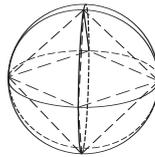
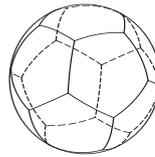
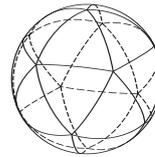
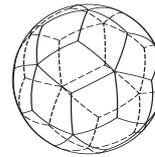
POLIEDRI SEMIREGOLARI	 	
	DODECAEDRO ROMBICO	TRIANCOTAEDRO
facce	12	30
vertici	14	32
spigoli	20	60
geometria delle facce	rombi	rombi
raggio sfera circoscritta	lato x 0,8165966	lato x 1,3763819

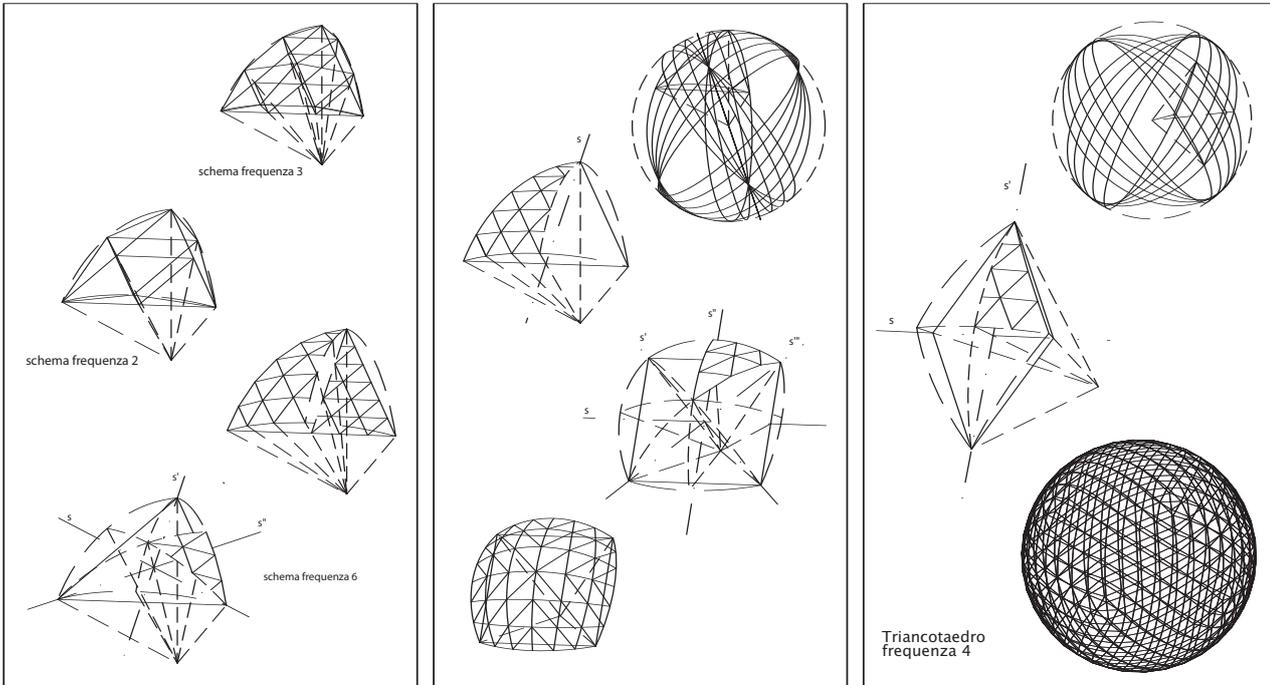
tion: the volume-surface ratio in these pairs of solids is identical and the sphere, obviously, is the solid that is best apt to contain a large volume in a very small surface. Insofar as they represent the optimal

"approximation" to the sphere and derive from the direct decomposition of a polyhedron, geodesic domes are the solids coming closest to the intrinsic characteristic of the sphere we have just referred to.

La suddivisione geodetica

Secondo Fuller, la trasformazione, il passaggio, dei poliedri alle cupole geodetiche poteva avvenire attraverso tre metodi. Primo metodo opera direttamente sulla faccia piena del poliedro d'origine. Esso consiste nel suddividere ogni faccia del poliedro generatore in tanti triangoli e poi proiettare i vertici così ottenuti sulla superficie della sfera circoscritta (fig. 6). Il numero di parti in cui viene diviso lo spigolo del poliedro è detta "frequenza". La lunghezza finale dell'asta è funzione del tipo di poliedro prescelto, della frequenza e del raggio della sfera circoscritta, questa funzione si chiama "fattore di corda". Il secondo metodo opera sulla faccia del poliedro sferico, ossia gli spigoli del poliedro di origine vengono proiettati sulla sfera e poi suddivisi in parti uguali, per questi punti si fanno passare le geodetiche ottenendo così il reticolo per realizzare la cupola (fig. 7). Il terzo metodo consiste nel suddividere in parti uguali l'angolo al centro sotteso allo spigolo del poliedro generatore. Questo terzo metodo coincide nei risultati con il secondo, differenziandosene solo nella procedura di calcolo della lunghezza delle aste. Evidentemente il criterio di maggior economia e praticità è quello di limitare il più possibile l'eterogeneità delle varie aste. Operando su poliedri aventi facce triangolari con il primo metodo di suddivisione geodetica il calcolo della lunghezza

					
TETRAEDRO	ESAEDRO	OTTAEDRO	DODECAEDRO	ICOSAEDRO	SFERA
$\frac{V}{S} = \frac{0.513}{4.619} = 0.111 \quad \frac{V}{S} = \frac{1.540}{8.000} = 0.192 \quad \frac{V}{S} = \frac{1.333}{6.928} = 0.192 \quad \frac{V}{S} = \frac{2.785}{10.515} = 0.265 \quad \frac{V}{S} = \frac{2.536}{9.574} = 0.265 \quad \frac{V}{S} = \frac{4.187}{12.521} = 0.334$					
					
TETRAEDRO SFERICO	ESAEDRO SFERICO	OTTAEDRO SFERICO	DODECAEDRO SFERICO	ICOSAEDRO SFERICO	TRIACONTAEDRO SFERICO



•Primo metodo di Fuller per trasformare i poliedri in cupole geodetiche: si suddivide ogni faccia del poliedro in triangoli e se ne proiettano i vertici sulla superficie della sfera circoscritta

•Secondo metodo di Fuller per trasformare i poliedri in cupole geodetiche: gli spigoli del poliedro vengono proiettati sulla superficie della sfera e poi suddivisi in parti uguali.

•Terzo metodo di Fuller per trasformare i poliedri in cupole geodetiche: si suddivide in parti uguali l'angolo al centro sotteso allo spigolo del poliedro generatore.

delle aste viene ridotto dalla presenza di tre assi di simmetria, mentre con il secondo metodo la simmetria si conserva rispetto ad un solo asse, complicando così sia le fasi di progettazione che di esecuzione e montaggio. Operando invece su poliedri aventi facce quadrangolari gli assi di simmetria che vengono conservati nella proiezione sono due in ogni caso, quindi è conveniente utilizzare il secondo metodo di suddivisione geodetica poiché il reticolo presenta al bordo aste tutte della stessa lunghezza. Negli schemi seguenti si riportano varie tipologie con le lunghezze delle aste riferite ad una cupola di raggio unitario.

According to Fuller, three are the methods to transform polyhedrons into geodesic domes. The first works directly on the original polyhedron plane face. It consists in subdividing each face of the generating polyhedron into many triangles and then project the vertices thus obtained onto the surface of the circumscribed sphere (fig. 6).

The number of parts into which the polyhedron edge is divided is called "frequency". The final strut length is a function of the chosen type of polyhedron, of the frequency and of the radius of the circumscribed sphere. This function is called "chord factor".

The second method works on the spherical polyhedron faces, i.e., the originating polyhedron edges are projected on the sphere and then subdivided into equal parts. Geodesic lines are traced among these points and this creates the grid on which the dome will be based (fig. 7). The third method consists in subdividing into equal parts the central

angle subtended to the edge of the generating polyhedron. The results obtained by this method match those of the previous; the only difference lies in the procedure to calculate the strut length. It is clear that the most economical and practical criterion is to limit the strut heterogeneity as much as possible. Adopting the first subdivision method to work on triangular face polyhedron, the strut length calculation is reduced by the presence of three axes of symmetry, while using the second method the symmetry is kept only in relation to one axis and this complicates both designing and production, and assembly.

Instead, two axis of symmetry are anyway kept in the projection when working on quadrangular face polyhedrons; consequently, it is better to use the second subdivision method because the grid edge line is formed by struts all having the same length.

The following tables show several typologies where the strut lengths are referred to a unitary radius dome.



Tetraedro frequenza 6

1	0.19901729
2	0.31415235
3	0.43695759
4	0.54292717
5	0.24435653
6	0.45950584
7	0.33502296
8	0.63243553
9	0.67142137

1	0.19707524
2	0.26546630
3	0.32954449
4	0.27735010
5	0.24196965
6	0.33192017
7	0.29693078
8	0.37796447
9	0.38517503

Ottaedro frequenza 6

1	0.20480029
2	0.22238677
3	0.23096031
4	0.23334506
5	0.25729293
6	0.26454172
7	0.28522540
8	0.39182162
9	0.32024729
10	0.23874178
11	0.27478616
12	0.35762159
13	0.30862789

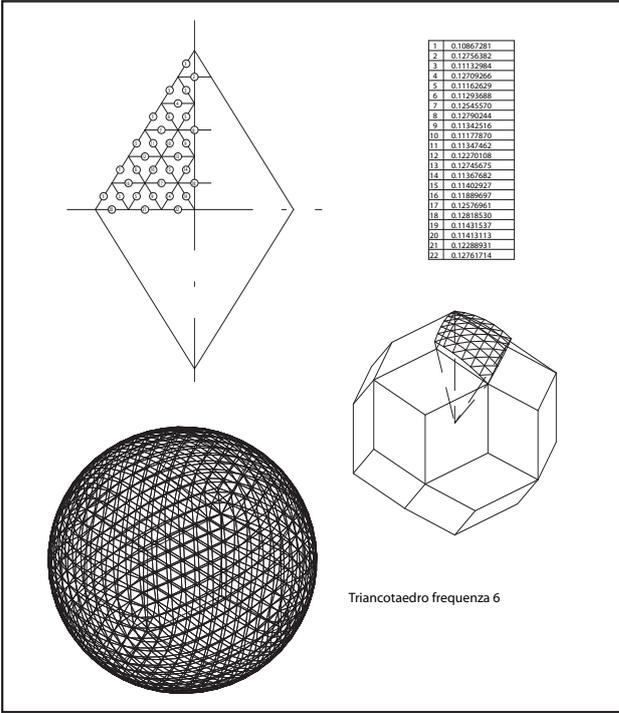
Esaedro frequenza 6

1	0.11545491
2	0.12262711
3	0.12655601
4	0.10235120
5	0.09817825
6	0.10421868
7	0.09222963
8	0.10364196
9	0.08542728
10	0.12658284
11	0.13048101
12	0.13277129
13	0.10760907
14	0.11021011
15	0.10254056
16	0.11007295
17	0.09581749
18	0.13240645
19	0.13740716
20	0.11562353
21	0.13211609
22	0.11609454
23	0.10613667
24	0.13980913
25	0.14263966
26	0.11992480
27	0.12120603
28	0.11545491
29	0.14542317
30	0.12485175
31	0.12262711
32	0.14847736
33	0.12655601

Dodecaedro frequenza 6

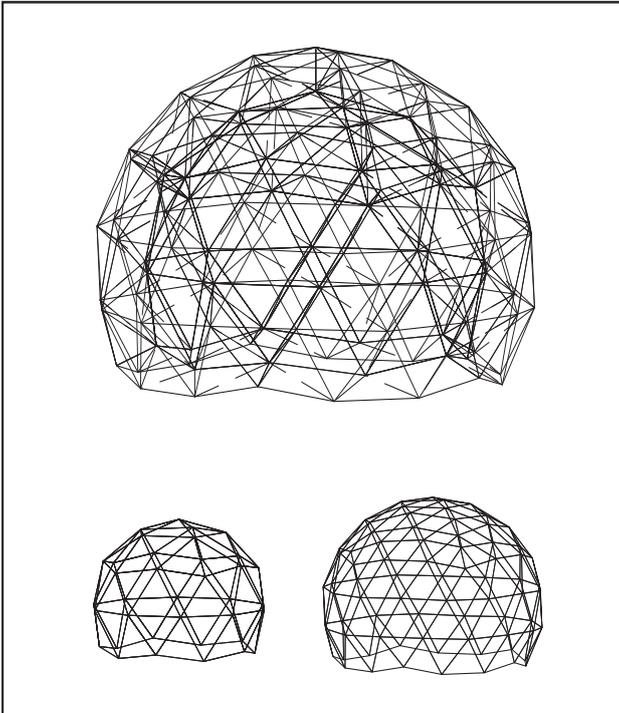
1	0.16256723
2	0.18738540
3	0.20281970
4	0.19047686
5	0.18190825
6	0.20590773
7	0.19801257
8	0.21535373
9	0.21662821

Icosaedro frequenza 6

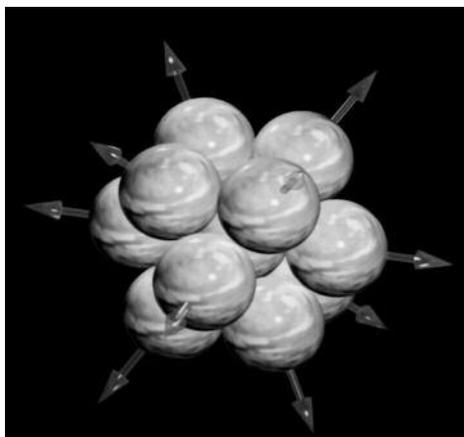


1	0.10867281
2	0.12750382
3	0.11132884
4	0.12709266
5	0.11662659
6	0.12916888
7	0.12645510
8	0.12790344
9	0.11342516
10	0.11177819
11	0.11347462
12	0.12220108
13	0.12466095
14	0.11367482
15	0.11400292
16	0.11889697
17	0.12526981
18	0.12018130
19	0.11431537
20	0.11413112
21	0.12289911
22	0.12761714

Triacotaedro frecuencia 6



LA GENESI DEL SISTEMA VESTRUT



Origine

L'idea che ha generato il giunto Vestrut rispetta una rigorosa legge geometrica: dodici sfere di ugual diametro raggruppate su se stesse sono tutte tra loro tangenti e tutte tangenti ad una tredicesima sfera contenuta al loro interno. Inoltre tutte queste sfere sono tangenti ad un'altra sfera che le contiene di diametro triplo alle precedenti. Le dodici sfere diventano i terminali delle dodici aste di una travatura reticolare, la tredicesima sfera è rappresentata dal perno che blocca insieme le due calotte del giunto.

I terminali a testa sferica, una volta bloccati all'interno del nodo, hanno la possibilità di ruotare intorno al nodo stesso; questa caratteristica fa sì che non si creino sforzi di taglio e momento all'interno delle aste per effetto degli abbassamenti della struttura dovuti ai carichi accidentali.

Nel corso delle sperimentazioni, attraverso una severa qualificazione del sistema, la geometria del giunto Vestrut si è modificata, in funzione delle esigenze tecnologiche e strutturali.

Il terminale a "testa sferica" è stato trasformato in un terminale dalla caratteristica forma a "martello"; questo ne ha notevolmente aumentato la sezione resistente, conservando altresì la possibilità di rotazione intorno al nodo.

Definition

The Vestrut joint conforms to a rigorous geometric law: twelve spheres of equal diameter grouped on each other are all tangent and all tangent to a thirteenth sphere contained inside them. Further, all these spheres are tangent to another sphere that contains them of triple diameter to the preceding ones.

The twelve spheres become the terminals of the twelve poles of a reticular truss, the thirteenth sphere is represented by the pivot that blocks together the two caps of the joint.

The terminals with a spherical head, once blocked inside the node, can rotate around the same node; this characteristic ensures that they don't create shearing stress inside the poles because of the lowering of the structure owed to the incidental loads.

During the experiments, through a severe qualification of the system, the geometry of the Vestrut joint is modified, in operation of the technological and structural demands. The terminal with the spherical head has

been transformed in a terminal with the typical hammer shape; this has notably increased the resistant section, also preserving the possibility of rotation around the node.

La tecnologia

Il sistema è composto da due calotte identiche ed una piastra centrale all'interno delle quali vengono inseriti i terminali a testa cilindrica avvitati tramite un raccordo filettato all'estremità delle aste. Le calotte, la piastra ed i terminali sono ottenuti mediante stampaggio a caldo e successivamente sottoposti ad un trattamento termico che ne aumenta le caratteristiche meccaniche.

Alla fine del processo di stampaggio tutti gli elementi vengono coniciati al fine di consentirne il perfetto l'accoppiamento.

I vari componenti completano il loro ciclo produttivo attraverso una serie di lavorazioni meccaniche eseguite su macchine a controllo numerico: le calotte e le piastre vengono forate per consentire l'inserimento del bullone centrale, i terminali vengono filettati e successivamente zincati elettroliticamente e deidrogenati secondo la norma UNI EN ISO 2081.

I raccordi filettati che consentono l'avvitaggio dei terminali a martello sulle aste sono anch'essi ottenuti da barre trafilate a sezione circolare mediante lavorazione meccanica su macchine CNC.

La filettatura all'interno del tubo viene ottenuta attraverso un'operazione di "maschiatura" realizzata su macchine automatiche. Dopo un severo ciclo di controlli dei materiali, sia in accettazione che durante il ciclo produttivo tutti i componenti vengono tra loro assemblati ed approntati per le successive fasi di lavorazione: verniciatura e montaggio.

Technology

The system is made up of two identical caps and a central plate inside which the terminals with cylindrical heads, screwed by way of a fitting bolted at the ends of the pole, are inserted.

The caps, the plate and the terminals are made through hot-pressing and subsequently submitted to a thermal treatment that increases the mechanical characteristics of it.

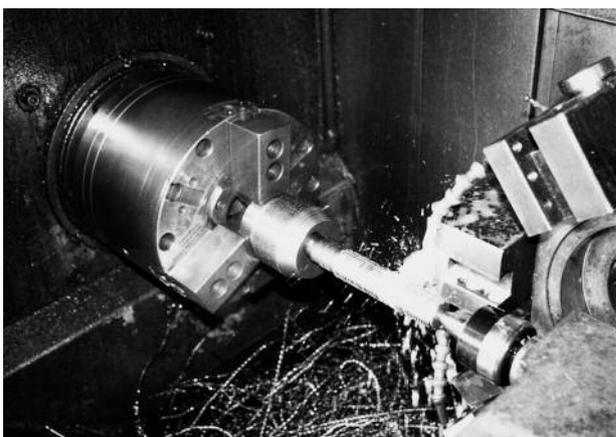
At the end of the hot-pressing process all the elements are minted with

the purpose of allowing perfect joining.

The various components complete their production cycle through a series of mechanical processes carried out on machines with numerical control: the caps and the plates are perforated to allow the insertion of the central bolt, the terminals are filleted and subsequently electrolytically galvanized and dehydrated according to the AN ENs ISO 2081 norm. The filleted bolts that allow the screwing of the hammer terminals to the poles are also obtained by circular section drawn bars through mechanical working on CNC machines.

The edging inside the pipe is done through an operation of tapping carried out on automatic machines.

After a severe cycle of controls of the materials, both in acceptance and during the production cycle all the components are assembled and made ready for the following phases of workmanship: painting and assembly.

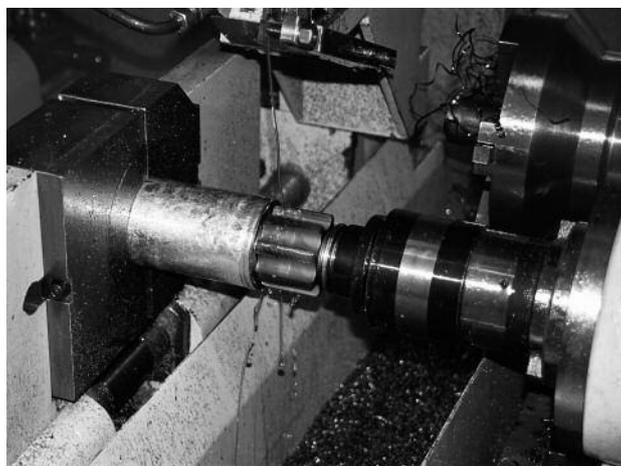


Il montaggio

Il montaggio degli elementi che compongono la travatura reticolare deve avvenire su di un piano di posa livellato preconstituito.

Le aste del reticolo inferiore, complete di terminali a martello, vengono adagiate nell'incavo delle calotte e successivamente bloccate dalla piastra centrale serrando un dado basso sullo stesso perno che successivamente chiuderà tutto il giunto. Una volta realizzato il reticolo delle aste inferiori, si procede posizionando sui vari nodi le piramidi precedentemente assemblate a parte; inserendo la calotta superiore del nodo vengono bloccate anche queste piramidi. Si procede poi al collegamento dei vertici delle piramidi inserendo le aste di corrente superiore ed infine tutti i nodi vengono chiusi controllando la coppia di serraggio del bullone centrale.

In funzione delle dimensioni finali della struttura, della disponibilità di aree o dell'accessibilità del cantiere, si può decidere di montare la spaziale in un solo elemento oppure separarlo in vari conci. In questa seconda ipotesi, una volta posizionati i vari conci sugli appoggi definitivi, sfruttando le caratteristiche di versatilità del sistema VESTRUT, si procede al collegamento in quota dei nodi di collegamento ricostituendo l'unità dell'intero organismo statico.



The assembly of the elements that form the reticular truss must be done on a pre-established levelled work surface. The poles of the lower grid, complete with hammer terminals, are placed in the hollow of the caps and subsequently blocked from the central plate tightening a nut low on the same pivot that will, later, close the whole joint.

Once the network of the lower poles is assembled, you continue, positioning the pyramids assembled previously on the various nodes; inserting the upper cap of the node these pyramids are also blocked.

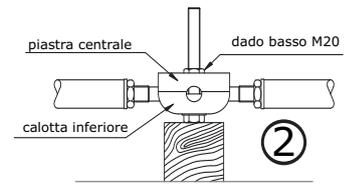
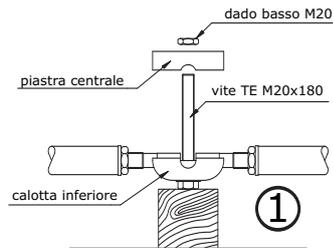
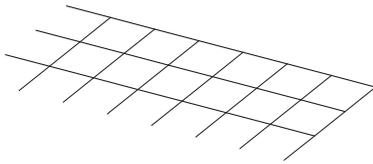
You then go on to the connection of the tops of the pyramids inserting the upper electricity poles and finally all the nodes are closed checking the torque wrench setting of the central bolt.

With regard to the final size of the structure, the availability of areas or accessibility of the yard, it can be decided to mount the spatial in only one element or separating it in various ashlars.

For the latter, once positioned the various ashlars on the final supports, exploiting the characteristics of versatility of the VESTRUT system, you go on to the connection on high of the connection nodes making up the unit of the whole static structure.

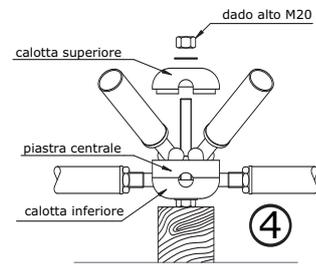
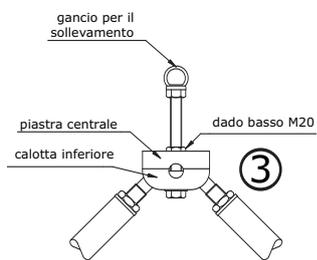
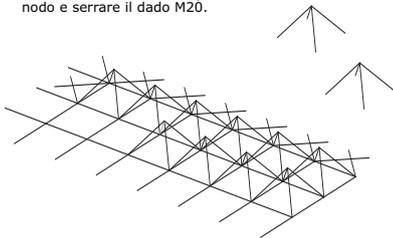


- 1) Posizionare le calotte dei nodi ed in correnti inferiori all'interasse stabilito.
- 2) Posizionare le piastre centrali sui nodi e bloccarle con il controdado M20.



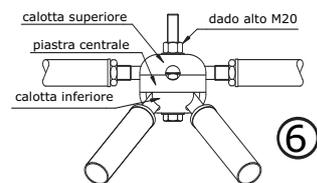
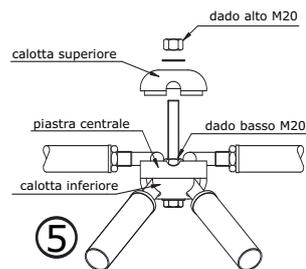
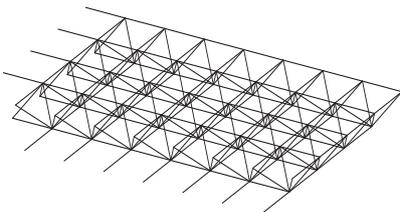
I

- 3) Preparare separatamente le piramidi e predisporre il gancio per il sollevamento.
- 4) Posizionare le piramidi sui corrispondenti moduli di base, bloccarle con la calotta superiore del nodo e serrare il dado M20.



II

- 5) Posizionare i correnti superiori sui vertici delle piramidi così ottenute.
- 6) Completare il nodo con la calotta superiore e serrare il dado M20.
- 7) Continuare a posizionare i correnti del reticolo inferiore ricominciando così dalla prima fase fino al centro dell'intera piastra.



III

