Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2016**

Einführung in die mathematische Logik

Arbeitsblatt 14

Übungsaufgaben

AUFGABE 14.1. Zeige durch ein Beispiel, dass Lemma 14.5 ohne die Voraussetzung, dass eine surjektive Terminterpretation vorliegt, nicht gelten muss.

AUFGABE 14.2. Es seien $S \subseteq S'$ Symbolalphabete und seien $L^S \subseteq L^{S'}$ die zugehörigen Sprachen Es sei

$$\Gamma \subseteq L^S$$

eine Ausdrucksmenge.

(1) Γ sei widerspruchsfrei. Ist dann auch Γ, aufgefasst in $L^{S'}$, widerspruchsfrei?
(2) Γ sei maximal widerspruchsfrei. Ist dann auch Γ, aufgefasst in $L^{S'}$, maximal widerspruchsfrei?

AUFGABE 14.3. Es sei S ein Symbolalphabet und L^S die zugehörige Sprache und T die zugehörige Termmenge. Es sei

$$\Gamma \subseteq L^S$$

eine Ausdrucksmenge. Zeige, dass durch

$$s \cong_\Gamma t \text{ genau dann, wenn } I(s) = I(t) \text{ für jede Interpretation mit } I \vDash \Gamma$$

eine Äquivalenzrelation auf T definiert wird. Wenn man Γ vergrößert, werden dann die Äquivalenzklassen größer oder kleiner?

AUFGABE 14.4. Es sei S ein Symbolalphabet, T die zugehörige Termmenge und L^S die zugehörige Sprache. Es sei $\Gamma \subseteq L^S$ eine Ausdrucksmenge. Zeige, dass die formale Äquivalenzrelation $\sim_\Gamma$ aus Konstruktion 14.7 die semantische Äquivalenz $\cong_\Gamma$ aus Aufgabe 14.3 impliziert.

AUFGABE 14.5. Es sei S ein Symbolalphabet und L^S die zugehörige Sprache. Zeige, dass zu

$$\Gamma = \emptyset$$

die in Konstruktion 14.7 eingeführte Äquivalenzrelation die Identität ist.

Aufgabe 14.6. Es sei S ein Symbolalphabet und L^S die zugehörige Sprache. Die Ausdrucksmenge Γ bestehe aus $x = y$, wobei x, y veschiedene Variablen seien. Zeige, dass zwei Terme s, t genau dann äquivalent im Sinne von Konstruktion 14.7 sind, wenn es eine Kette von Termen

$$t_0 = s, t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}, t_k = t$$

derart gibt, dass beim Übergang von t_i nach t_{i+1} genau ein Vorkommen von x (bzw. y) in t_i durch y (bzw. x) ersetzt wird.

In der folgenden Aufgabe sollen die Variablen $x_1, \ldots, x_n$ verschieden sein. Dennoch gibt es zwei Interpretationen für Teil (2), die aber inhaltlich äquivalent sind.

Aufgabe 14.7. Es sei S ein Symbolalphabet und L^S die zugehörige Sprache. Es sei $\Gamma \subseteq L^S$ eine Ausdrucksmenge. Zu fixiertem $n \in \mathbb{N}_+$ sei F_n die Menge der n-stelligen Funktionssymbole. Zeige die folgenden Aussagen.

(1) Durch
$$f \cong g\,, \text{ falls } I(f) = I(g) \text{ für alle Interpretationen } I \text{ mit } I \vDash \Gamma$$
wird eine Äquivalenzrelation auf F_n definiert.

(2) Durch
$$f \sim g\,, \text{ falls } \Gamma \vdash \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n f x_1 \ldots x_n = g x_1 \ldots x_n$$
wird eine Äquivalenzrelation auf F_n definiert.

(3) Die Äquivalenzrelation $\sim$ impliziert die Äquivalenzrelation $\cong$.

(4) Es sei $\sim$ die zu Γ gehörende formale Äquivalenzrelation auf der Termmenge im Sinne von Konstruktion 14.7. Dann gilt für Terme $s_1 \sim t_1, \ldots, s_n \sim t_n$ und Funktionssymbole $f, g \in F_n$ mit $f \sim g$ die Beziehung
$$f s_1 \ldots s_n \sim g t_1 \ldots t_n.$$

Aufgabe 14.8. Es sei $\alpha \in L^S$ ein atomarer Ausdruck, der zugleich eine Tautologie ist, also $\vdash \alpha$. Zeige, dass α gleich $s = s$ mit einem S-Term s ist.

Aufgabe 14.9. Bestimme den Rang der folgenden Ausdrücke.

(1) $a = fx$,
(2) $\exists x a = fx$,
(3) $(\neg Rxy \wedge ffx = c) \rightarrow (\exists x a = fx)$,
(4) $(\forall y Rxy) \rightarrow (\exists x a = fx)$.

Aufgabe 14.10. Zeige durch Induktion über den Aufbau der Ausdrücke, dass sich bei einer Termsubstitution der Rang eines Ausdrucks nicht ändert.

Aufgabe 14.11. Warum führt man im Beweis zum Satz von Henkin nicht Induktion über den Aufbau der Ausdrücke?

Aufgabe 14.12. Das Symbolalphabet S bestehe aus einer einzigen Variablen x und einem einzigen einstelligen Relationssymbol P. Zeige, dass zu einer Interpretation I die Gültigkeitsmenge $I^{\vDash} \subseteq L^S$ keine Beispiele enthalten muss.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 14.13. (3 Punkte)

Es sei Γ eine Menge an S-Ausdrücken (über einem Symbolalphabet S), die folgende Eigenschaften erfüllt.

(1) Für jeden Ausdruck α ist $\alpha \in \Gamma$ oder $\neg\alpha \in \Gamma$.
(2) Aus $\Gamma \vdash \alpha$ folgt $\alpha \in \Gamma$, d.h. Γ ist abgeschlossen unter Ableitungen.
(3) Γ ist widerspruchsfrei.

Zeige, dass Γ maximal widerspruchsfrei ist.

Aufgabe 14.14. (4 Punkte)

Es sei S ein Symbolalphabet und L^S die zugehörige Sprache. Es seien s, t verschiedene Terme. Zeige, dass es eine S-Interpretation I mit

$$I(s) \neq I(t)$$

gibt.

Aufgabe 14.15. (8 (1+3+1+3) Punkte)

Es sei S ein Symbolalphabet und L^S die zugehörige Sprache. Es sei $\Gamma \subseteq L^S$ eine Ausdrucksmenge. Zu fixiertem $n \in \mathbb{N}_+$ sei R_n die Menge der n-stelligen Relationssymbole. Zeige die folgenden Aussagen.

(1) Durch
$$P \cong Q\,, \text{ falls } I(P) = I(Q) \text{ für alle Interpretationen } I \text{ mit } I \vDash \Gamma$$
wird eine Äquivalenzrelation auf R_n definiert.
(2) Durch
$$P \sim Q\,, \text{ falls } \Gamma \vdash \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n P x_1 \ldots x_n \leftrightarrow Q x_1 \ldots x_n$$
wird eine Äquivalenzrelation auf R_n definiert.
(3) Die Äquivalenzrelation $\sim$ impliziert die Äquivalenzrelation $\cong$.

(4) Es sei $\sim$ die zu Γ gehörende formale Äquivalenzrelation auf der Termmenge im Sinne von Konstruktion 14.7. Dann gilt für Terme $s_1 \sim t_1, \ldots, s_n \sim t_n$ und Relationsssymbole $P, Q \in R_n$ mit $P \sim Q$ die Beziehung

$$\Gamma \vdash Ps_1 \ldots s_n \leftrightarrow Qt_1 \ldots t_n \,.$$

Aufgabe 14.16. (2 Punkte)

Bestimme den Rang der folgenden Ausdrücke.

(1) $gxy = c$,
(2) $\forall xgcx = gxx$,
(3) $(\neg Pz \vee ggxyy = gcc) \to (\exists xPx)$,
(4) $(\forall yPy) \to (\neg \exists xgcx = gcgcx \wedge c = c)$.