Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2019**

Grundkurs Mathematik II

Vorlesung 57

Unabhängige Ereignisse

Definition 57.1. Zwei Ereignisse E und F in einem endlichen Wahrscheinlichkeitsraum (M, P) heißen *unabhängig*, wenn

$$P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F)$$

ist.

Man spricht auch von *stochastischer Unabhängigkeit*. Wenn die Ereignisse nicht unabhängig sind, werden sie abhängig genannt.

Lemma 57.2. *Es sei (M, P) ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum.*

(1) *Jedes Ereignis ist zu $\emptyset$ und zu M unabhängig.*
(2) *Wenn die Ereignisse E und F unabhängig sind, so sind auch E und $M \setminus F$ unabhängig.*
(3) *Wenn ein Ereignis E zu sich selbst unabhängig ist, so ist*

$$P(E) = 0 \text{ oder } 1.$$

Beweis. (1) Für die leere Menge gilt

$$P(E \cap \emptyset) = P(\emptyset) = 0 = P(E) \cdot P(\emptyset)$$

und für die Gesamtmenge ist

$$P(E \cap M) = P(E) = P(E) \cdot 1 = P(E) \cdot P(M).$$

(2) Seien E und F unabhängig. Dann ist nach Lemma 55.8 (3)

$$\begin{aligned} P(E \cap (M \setminus F)) &= P(E \setminus E \cap F) \\ &= P(E) - P(E \cap F) \\ &= P(E) - P(E) \cdot P(F) \\ &= P(E)(1 - P(F)) \\ &= P(E)P(M \setminus F), \end{aligned}$$

was die behauptete Unabhängigkeit bedeutet.

(3) Die Unabhängigkeit von E mit sich selbst bedeutet

$$P(E) = P(E \cap E) = P(E) \cdot P(E) = P(E)^2,$$

diese Gleichung erfüllen nur die Zahlen 0 und 1.

□

Beispiel 57.3. Wir betrachten einen Würfelwurf mit dem Laplace-Raum $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und dabei die Ereignisse

$$G = \{2, 4, 6\},$$
$$U = \{1, 3, 5\}$$

und

$$E = \{1, 2\}.$$

Die Ereignisse E und G sind unabhängig, da

$$E \cap G = \{2\}$$

und somit

$$P(E \cap G) = \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = P(E) \cdot P(G).$$

Ebenso sind E und U unabhängig (dies folgt auch aus Lemma 57.2 (2)). Dagegen sind G und U nicht unabhängig, da

$$G \cap U = \emptyset$$

ist, aber beide Ereignisse eine positive Wahrscheinlichkeit haben.

Beispiel 57.4. In einem Papageienhaus sind die beiden Geschlechter gleichmäßig verteilt und ebenso sind die Farben rot, gelb und grün gleichmäßig und unabhängig vom Geschlecht verteilt. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Papagei ein rotes Weibchen ist, gleich

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Beispiel 57.5. Wir betrachten die Ziehung der Lottozahlen. Sind die Ereignisse, dass zwei bestimmte Zahlen gezogen werden, unabhängig voneinander? Dazu müssen wir die relevanten Wahrscheinlichkeiten berechnen. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine bestimmte Zahl, sagen wir die 17 gezogen wird, ist, wie in Beispiel 55.12 berechnet, gleich $\frac{6}{49}$. Diese Wahrscheinlichkeit ist für jede Zahl gleich. Die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Zahlen gezogen werden, sagen wir die 17 und die 31, ist, ebenfalls wie in Beispiel 55.12 berechnet, gleich

$$\frac{5}{392} = 0,012755102....$$

Die Produktwahrscheinlichkeit der beiden einzelnen Ereignisse ist hingegen

$$\frac{6}{49} \cdot \frac{6}{49} = \frac{36}{2401} = 0,014993753....$$

Die Ereignisse sind also nicht unabhängig.

Beispiel 57.6. Es sei ein Laplace-Raum M gegeben, dessen Anzahl eine Primzahl p ist. Dann sind zwei Ereignisse $E, F \subseteq M$ nur dann unabhängig, wenn einer von ihnen leer oder gleich M ist. Die Unabhängigkeitsbedingung bedeutet ja für einen Laplaceraum

$$\frac{\#(E \cap F)}{p} = \frac{\#(E)}{p} \cdot \frac{\#(F)}{p}.$$

Dies bedeutet

$$p \cdot \#(E \cap F) = \#(E) \cdot \#(F).$$

Somit teilt die Primzahl p das Produkt $\#(E) \cdot \#(F)$. Nach dem Lemma von Euklid kann das nur sein, wenn p einen der Faktoren teilt. Dann muss aber die Anzahl eines Faktors, sagen wir von $\#(E)$, gleich 0 oder p sein, was $E = \emptyset$ oder $E = M$ bedeutet.

Zu einer Produktmenge $M_1 \times \cdots \times M_n$ und zu $i \in \{1, \ldots, n\}$ heißt die Abbildung

$$q_i \colon M_1 \times \cdots \times M_n \longrightarrow M_i,\ (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto x_i,$$

die i-te *Projektion*. Zu einer Teilmenge $T \subseteq M_i$ nennen wir das Urbild

$$q_i^{-1}(T) = M_1 \times \cdots \times M_{i-1} \times T \times M_{i+1} \times \cdots \times M_n$$

auch den *Zylinder* über T.

Lemma 57.7. *Es seien $(M_1, P_1), \ldots, (M_n, P_n)$ endliche Wahrscheinlichkeitsräume und*

$$M = M_1 \times \cdots \times M_n$$

der Produktraum. Dann sind zu Ereignissen $E_i \subseteq M_i$ und $E_j \subseteq M_j$ mit $i \neq j$ die Zylindermengen $q_i^{-1}(E_i)$ und $q_j^{-1}(E_j)$ unabhängig.

Beweis. Es ist (sagen wir $i < j$)

$$\begin{aligned} & q_i^{-1}(E_i) \cap q_j^{-1}(E_j) \\ = \ & (M_1 \times \cdots \times M_{i-1} \times E_i \times M_{i+1} \times \cdots \times M_n) \\ & \cap (M_1 \times \cdots \times M_{j-1} \times E_j \times M_{j+1} \times \cdots \times M_n) \\ = \ & M_1 \times \cdots \times M_{i-1} \times E_i \times M_{i+1} \times \cdots \times M_{j-1} \times E_j \times M_{j+1} \times \cdots \times M_n, \end{aligned}$$

somit folgt die Aussage aus Lemma 56.4 (2). □

Diese Aussage bedeutet beispielsweise, dass bei der Hintereinanderausführung von Münzwürfen der i-te Münzwurf vom j-ten Münzwurf ($i \neq j$) unabhängig ist. Dies ist natürlich intuitiv klar, die vorstehende Aussage ist eine Bestätigung dafür, dass die Modellierung eines wiederholten Experimentes durch einen Produktraum und das oben formulierte Konzept der Unabhängigkeit sinnvoll sind.

Definition 57.8. Es sei ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum (M, P) gegeben. Die Ereignisse

$$E_1, \ldots, E_k \subseteq M$$

heißen *paarweise unabhängig*, wenn

$$P(E_i \cap E_j) = P(E_i) \cdot P(E_j)$$

für alle $i \neq j$ ist.

Das bedeutet einfach, dass je zwei Mengen der E_i unabhängig sind.

Definition 57.9. Es sei ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum (M, P) gegeben. Die Ereignisse $E_1, \ldots, E_k \subseteq M$ heißen *vollständig unabhängig*, wenn für jedes r, $2 \leq r \leq k$, und jede r-elementige Teilmenge $I \subseteq \{1, \ldots, k\}$ die Gleichheit

$$P\left(\bigcap_{i \in I} E_i\right) = \prod_{i \in I} P(E_i)$$

gilt.

Da insbesondere für zweielementige Teilmengen diese Gleichung gelten muss, impliziert die vollständige Unabhängigkeit die paarweise Unabhängigkeit. Wenn I die Form

$$I = \{i_1, \ldots, i_r\}$$

hat, so bedeutet die Unabhängigkeit einfach

$$P(E_{i_1} \cap \ldots \cap E_{i_r}) = P(E_{i_1}) \cdots P(E_{i_r}).$$

Das folgende Beispiel zeigt, dass die vollständige Unabhängigkeit echt stärker als die paarweise Unabhängigkeit ist.

Beispiel 57.10. Wir betrachten einen dreifachen Münzwurf, also den Wahrscheinlichkeitsraum $\{Z, K\}^3$ mit $p = \frac{1}{2}$. Das Ereignis, dass bei den ersten beiden Würfen das gleiche Ergebnis herauskommt (also beide Mal Kopf oder beidemal Zahl), sei mit E bezeichnet, das Ereignis, dass beim ersten und beim dritten Wurf das gleiche Ergebnis herauskommt, sei mit F bezeichnet, und das Ereignis, dass beim zweiten und beim dritten Wurf das gleiche Ergebnis herauskommt, sei mit G bezeichnet. Wir behaupten, dass diese Ereignisse paarweise unabhängig sind, aber nicht vollständig unabhängig. Zu E gehören genau die Elementarereignisse der Form (K, K, X) und (Z, Z, X), das sind vier Stück. Somit ist die Wahrscheinlichkeit der Einzelereignisse E, F, G stets $\frac{1}{2}$. Das Ereignis E und F tritt genau dann ein, wenn alle drei Münzwürfe das gleiche Ergebnis haben, also nur bei (K, K, K) oder (Z, Z, Z). Die Wahrscheinlichkeit davon ist also

$$P(E \cap F) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(E) \cdot P(F).$$

Entsprechendes gilt für die Paare E und G und F und G. Wenn man dagegen alle drei Ereignisse miteinander schneidet, so ist

$$E \cap F \cap G = \{(K,K,K),(Z,Z,Z)\} = E \cap F = E \cap G = F \cap G.$$

Die Wahrscheinlichkeit davon ist nach wie vor $\frac{1}{4}$, aber das Produkt der drei Einzelwahrscheinlichkeiten ist

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}.$$

Beispiel 57.11. Es werde eine Münze n-mal hintereinander geworfen. Wir interessieren uns für die Ereignisse E_i, dass sich das Ergebnis vom $i-1$-ten zum i-ten Wurf ändert ($i = 2, \ldots, n$). Sind diese Ereignisse vollständig unabhängig? Das ist nicht so unmittelbar klar, da ja E_i und E_{i+1} beide auf den i-ten Wurf Bezug nehmen. Trotzdem sind diese Ereignisse vollständig unabhängig. Sei dazu $2 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leq n$ fixiert. Ein Wechsel an der i-ten Stelle (verglichen zum Vorgängerwurf) hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$. Wenn E_i gelten soll, so ist der i-te Würfelwurf durch das Ergebnis des $(i-1)$-ten Würfelwurfs festgelegt. Wenn das Ereignis $E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \ldots \cap E_{i_r}$ gelten soll, so gibt es keinerlei Bedingung an den Stellen i mit $i \neq i_j$ für alle j, während dadurch an den Stellen i_j alles fixiert ist. Somit gibt es 2^{n-r} günstige Kombinationen für dieses Durchschnittsereignis. Seine Wahrscheinlichkeit ist somit

$$\frac{2^{n-r}}{2^n} = \frac{1}{2^r} = \left(\frac{1}{2}\right)^r,$$

was mit dem Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten übereinstimmt.

Lemma 57.12. *Es seien $(M_1, P_1), \ldots, (M_n, P_n)$ endliche Wahrscheinlichkeitsräume und*

$$M = M_1 \times \cdots \times M_n$$

der Produktraum. Es seien Ereignisse $E_1 \subseteq M_1$, $E_2 \subseteq M_2$, ... , $E_n \subseteq M_n$ gegeben und es seien $\tilde{E}_i$ die zugehörigen Zylindermengen im Produktraum, also

$$\tilde{E}_i = M_1 \times \cdots \times M_{i-1} \times E_i \times M_{i+1} \times \cdots \times M_n = q_i^{-1}(E_i).$$

Dann sind die Ereignisse $\tilde{E}_1, \ldots, \tilde{E}_n$ vollständig unabhängig.

Beweis. Es sei $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$. Dann ist

$$\bigcap_{i \in I} \tilde{E}_i = F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_n,$$

wobei

$$F_i = E_i$$

ist, falls $i \in I$ ist, und andernfalls

$$F_i = M_i.$$

Nach Lemma 56.4 (2) ist

$$P\left(\bigcap_{i\in I}\tilde{E}_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P_i(F_i) = \prod_{i\in I} P_i(E_i) = \prod_{i\in I} P(\tilde{E}_i),$$

was die vollständige Unabhängigkeit bedeutet. $\square$

Abbildungsverzeichnis