

## Lineare Algebra und analytische Geometrie I

### Vorlesung 26

Für die weitere Untersuchung von linearen Abbildungen und speziell trigonalisierbaren Abbildungen müssen wir noch eine wichtige Gesetzmäßigkeit im Polynomring über einem Körper besprechen, das *Lemma von Bezout*.

#### Das Lemma von Bezout

Wir erinnern daran, dass ein Polynom  $T \in K[X]$  ein Polynom  $P \in K[X]$  teilt, wenn es ein Polynom  $Q \in K[X]$  mit

$$P = TQ$$

gibt. Dies entspricht der Teilbarkeitsbeziehung für ganze Zahlen. Von dort ist auch das Konzept von einem größten gemeinsamen Teiler bekannt.

**DEFINITION 26.1.** Es seien  $P_1, \dots, P_n \in K[X]$  Polynome über einem Körper  $K$ . Man sagt, dass ein Polynom  $T \in K[X]$  ein *gemeinsamer Teiler* der gegebenen Polynome ist, wenn  $T$  jedes  $P_i$  teilt.

**DEFINITION 26.2.** Es seien  $P_1, \dots, P_n \in K[X]$  Polynome über einem Körper  $K$ . Man sagt, dass ein Polynom  $G \in K[X]$  ein *größter gemeinsamer Teiler* der gegebenen Polynome ist, wenn  $G$  ein gemeinsamer Teiler der  $P_i$  ist und wenn  $G$  unter allen gemeinsamen Teilern der  $P_i$  maximalen Grad besitzt.

Ein größter gemeinsamer Teiler ist nicht eindeutig bestimmt, da mit  $G$  auch  $cG$  für eine Konstante  $c \neq 0$  ein größter gemeinsamer Teiler ist. Wenn man sich allerdings auf normierte Polynome beschränkt, so ist der größter gemeinsame Teiler eindeutig bestimmt.

**DEFINITION 26.3.** Polynome  $P_1, \dots, P_n \in K[X]$  über einem Körper  $K$  heißen *teilerfremd*, wenn sie außer den Konstanten  $c \neq 0$  keine gemeinsamen Teiler besitzen.

**SATZ 26.4.** *Es sei  $K$  ein Körper und seien  $P_1, \dots, P_n$  Polynome über  $K$ . Es sei  $G$  ein größter gemeinsamer Teiler der  $P_i$ . Dann gibt es eine Darstellung*

$$G = Q_1P_1 + \dots + Q_nP_n$$

mit  $Q_1, \dots, Q_n \in K[X]$ .

*Beweis.* Wir betrachten die Menge aller Linearkombinationen

$$I = \{Q_1P_1 + \dots + Q_nP_n \mid Q_i \in K[X]\}.$$

Dies ist ein Ideal von  $K[X]$ , wie man direkt überprüft. Nach Satz 20.9 ist dieses Ideal ein Hauptideal, also

$$I = (E)$$

mit einem gewissen Polynom  $E$ . Es ist  $E$  ein gemeinsamer Teiler der  $P_i$ . Wegen  $P_i \in I = (E)$  ist nämlich

$$P_i = H_i E,$$

d.h.  $E$  ist ein Teiler von jedem  $P_i$ . Aufgrund einer ähnlichen Überlegung ist

$$P_i \in (G)$$

für alle  $i$  und damit auch

$$(E) = I \subseteq (G).$$

Also ist

$$E = GF.$$

Da nach Voraussetzung  $G$  den maximalen Grad unter allen gemeinsamen Teilern besitzt, muss  $F \neq 0$  eine Konstante sein. Also ist

$$(G) = (E) = I$$

und insbesondere  $G \in I$ . Also ist  $G$  eine Linearkombination der  $P_i$ .  $\square$

**KOROLLAR 26.5.** *Es sei  $K$  ein Körper und seien  $P_1, \dots, P_n$  teilerfremde Polynome über  $K$ . Dann gibt es eine Darstellung*

$$Q_1 P_1 + \dots + Q_n P_n = 1$$

mit  $Q_1, \dots, Q_n \in K[X]$ .

*Beweis.* Dies folgt direkt aus Satz 26.4.  $\square$

**BEMERKUNG 26.6.** Zu gegebenen Polynomen  $P_1, \dots, P_n \in K[X]$  lässt sich sowohl der größte gemeinsame Teiler  $G$  bestimmen als auch eine Darstellung

$$G = Q_1 P_1 + \dots + Q_n P_n$$

wie in Satz 26.4 explizit angegeben. Dazu kann man sich auf  $n = 2$  beschränken. Es sei der Grad von  $P_1$  mindestens so groß wie der Grad von  $P_2$ . Die Division mit Rest liefert

$$P_1 = P_2 H_2 + R_2$$

mit einem Restpolynom, dessen Grad kleiner als der Grad von  $P_2$  ist bzw. das 0 ist. Entscheidend ist, dass die Ideale

$$(P_1, P_2) = (P_2, R_2)$$

und damit der größte gemeinsame Teiler von  $P_1$  und  $P_2$  und von  $P_2$  und  $R_2$  übereinstimmen. Nun führt man die Division mit Rest durch, bei der  $P_2$  durch  $R_2$  mit dem Rest  $R_3$  geteilt wird, wobei wiederum das Ideal  $(R_2, R_3)$  mit dem Ausgangsideal übereinstimmt. So erhält man eine Folge von Restpolynomen

$$R_0 = P_1, R_1 = P_2, R_2, \dots, R_k \neq 0, 0,$$

wobei zwei benachbarte Reste das gleiche Ideal erzeugen. Es ist dann  $R_k$  (also der letzte von 0 verschiedene Rest) der größte gemeinsame Teiler von  $R_0$  und  $R_1$ . Eine Darstellung von  $R_k$  als Linearkombination der  $R_0, R_1$  erhält man, indem man die Gleichungen, die die Division mit Rest beschreiben, von unten nach oben zurückerarbeitet.

Das in der vorstehenden Bemerkung beschriebene Verfahren heißt *euklidischer Algorithmus*. Es gilt entsprechend auch für ganze Zahlen.

BEISPIEL 26.7. Wir möchten den größten gemeinsamen Teiler für die beiden Polynome  $X^3 + 6X^2 - 7X + 3$  und  $X^2 - 5X + 4$  aus  $\mathbb{Q}[X]$  berechnen. Dazu führt man die Division mit Rest durch und erhält

$$X^3 + 6X^2 - 7X + 3 = (X^2 - 5X + 4)(X + 11) + 44X - 41.$$

Nach Bemerkung 26.3 haben die beiden Ausgangspolynome und  $X^2 - 5X + 4$  und  $44X - 41$  den gleichen größten gemeinsamen Teiler. Eine weitere Division mit Rest ergibt

$$X^2 - 5X + 4 = (44X - 41) \left( \frac{1}{44}X - \frac{179}{1936} \right) + \frac{405}{1936}.$$

Daher sind die beiden Polynome teilerfremd.

## Haupträume

Wir wollen weiterhin untersuchen, inwiefern man trigonalisierbare Abbildungen durch Matrizen beschreiben kann, die nicht nur obere Dreiecksgestalt haben, sondern darüber hinaus noch weitere einfache Eigenschaften erfüllen. Dafür gehen wir zwei Schritte. In dieser Vorlesung werden wir eine trigonalisierbare Abbildung als direkte Summe von Abbildungen auf Haupträumen darstellen. In den nächsten beiden Vorlesungen werden wir die Endomorphismen auf den Haupträumen selbst studieren.

DEFINITION 26.8. Zu einer linearen Abbildung  $\varphi$  auf einem  $K$ -Vektorraum  $V$  und einem *Eigenwert*  $\lambda \in K$  nennt man

$$\text{Haupt}(\varphi, \lambda) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{kern}(\varphi - \lambda \text{Id})^n$$

den *Hauptraum* zu  $\varphi$  zu diesem Eigenwert.

Wenn  $V$  endlichdimensional ist, so wird die Kette

$$\text{kern}(\varphi - \lambda \text{Id}) \subseteq \text{kern}(\varphi - \lambda \text{Id})^2 \subseteq \text{kern}(\varphi - \lambda \text{Id})^3 \subseteq \dots$$

stationär, d.h. es gibt ein  $r \in \mathbb{N}$  mit

$$\text{Haupt}(\varphi, \lambda) = \text{kern}(\varphi - \lambda \text{Id})^r.$$

Haupträume sind nach Aufgabe 26.22 invariant unter der linearen Abbildung. Es gilt nach Definition

$$\text{Eig}_\lambda(\varphi) \subseteq \text{Haupt}(\varphi, \lambda),$$

wobei für diagonalisierbares  $\varphi$  Gleichheit gilt, siehe Aufgabe 26.18. Trigonalisierbare Abbildungen werden wir über ihre Haupträume verstehen.

LEMMA 26.9. *Es sei  $\varphi: V \rightarrow V$  eine lineare Abbildung auf einem endlichdimensionalen  $K$ -Vektorraum  $V$  und sei*

$$\chi_\varphi = P \cdot Q$$

*eine Faktorzerlegung des charakteristischen Polynoms in teilerfremde Polynome  $P, Q \in K[X]$ . Dann gilt die direkte Summenzerlegung*

$$V = \text{kern } P(\varphi) \oplus \text{kern } Q(\varphi),$$

*wobei diese Räume  $\varphi$ -invariant sind. Die Einschränkung von  $P(\varphi)$  auf den kern  $Q(\varphi)$  ist bijektiv.*

*Beweis.* Nach dem Lemma von Bezout gibt es Polynome  $S, T \in K[T]$  mit

$$SP + TQ = 1.$$

Sei  $U = \text{kern } P(\varphi)$  und  $W = \text{kern } Q(\varphi)$ . Sei  $v \in V$ . Nach Cayley-Hamilton ist

$$0 = \chi_\varphi(\varphi) = (P(\varphi) \circ Q(\varphi))(v) = P(\varphi)(Q(\varphi)(v))$$

und somit gehört das Bild von  $Q(\varphi)$  zum Kern von  $P(\varphi)$  und umgekehrt. Aus

$$\begin{aligned} v &= \text{Id}_V(v) \\ &= (SP + TQ)(\varphi)(v) \\ &= S(\varphi)P(\varphi)(v) + T(\varphi)Q(\varphi)(v) \\ &= P(\varphi)(S(\varphi)(v)) + Q(\varphi)(T(\varphi)(v)) \end{aligned}$$

kann man ablesen, dass der linke Summand zu  $\text{bild } P(\varphi) \subseteq \text{kern } Q(\varphi)$  und der rechte Summand zu  $\text{bild } Q(\varphi) \subseteq \text{kern } P(\varphi)$  gehört. Es liegt also eine Summenzerlegung vor, die direkt ist, da aus  $P(\varphi)(v) = Q(\varphi)(v) = 0$  sofort  $v = 0$  folgt. Für die  $\varphi$ -Invarianz der Räume siehe Aufgabe 26.22. Zu  $v \in \text{kern } Q(\varphi)$  ist

$$v = S(\varphi)(P(\varphi)(v)) + T(\varphi)(Q(\varphi)(v)) = S(\varphi)(P(\varphi)(v)),$$

d.h. es gilt  $\text{bild } P(\varphi) = \text{kern } Q(\varphi)$  und somit ist die Einschränkung von  $P(\varphi)$  auf den Kern von  $Q(\varphi)$  surjektiv, also bijektiv.  $\square$

SATZ 26.10. *Sei*

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

*ein Endomorphismus auf dem endlichdimensionalen  $K$ -Vektorraum  $V$  und sei  $\lambda \in K$ . Dann ist die Dimension des Hauptraumes  $\text{Haupt}(\varphi, \lambda)$  gleich der algebraischen Vielfachheit von  $\lambda$ .*

*Beweis.* Wir schreiben das charakteristische Polynom zu  $\varphi$  als

$$\chi_\varphi = (X - \lambda)^k Q,$$

wobei  $(X - \lambda)$  in  $Q$  nicht als Linearfaktor vorkommt, d.h.  $k$  ist die algebraische Vielfachheit von  $\lambda$ . Dann sind  $P = (X - \lambda)^k$  und  $Q$  teilerfremd und nach Lemma 26.9 ist dann

$$V = \ker P(\varphi) \oplus \ker Q(\varphi)$$

und

$$P(\varphi): \ker Q(\varphi) \longrightarrow \ker Q(\varphi)$$

ist eine Bijektion. Es ist ferner

$$H = \ker P(\varphi),$$

wobei die Inklusion  $\supseteq$  klar ist und die andere Inklusion sich daraus ergibt, dass höhere Potenzen von  $X - \lambda$  wegen der eben erwähnten Bijektivität auf  $W$  keine weiteren Elemente annullieren. Für das charakteristische Polynom gilt wegen der direkten Summenzerlegung nach Lemma 23.7 die Beziehung

$$\chi_\varphi = \chi_1 \cdot \chi_2,$$

wobei  $\chi_1$  das charakteristische Polynom zu  $\varphi|_H$  und  $\chi_2$  das charakteristische Polynom zu  $\varphi|_{\ker Q(\varphi)}$  ist. Da  $(\varphi - \lambda)^k$  auf  $H$  die Nullabbildung ist, ist das Minimalpolynom zu  $\varphi|_H$  und damit auch das charakteristische Polynom  $\chi_1$  eine Potenz von  $(X - \lambda)$ , sagen wir

$$\chi_1 = (X - \lambda)^d,$$

wobei

$$d = \dim(H)$$

sei. Insbesondere ist somit  $d \leq k$ . Bei  $d < k$  müsste  $\lambda$  eine Nullstelle von  $\chi_2$  sein und  $\lambda$  wäre ein Eigenwert von  $\varphi|_{\ker Q(\varphi)}$ . Dies ist aber ein Widerspruch dazu, dass  $P(\varphi)$  auf diesem Raum eine Bijektion ist.  $\square$

**KOROLLAR 26.11.** *Zu einer linearen Abbildung  $\varphi: V \rightarrow V$  auf einem endlichdimensionalen  $K$ -Vektorraum  $V$  und zwei Eigenwerten  $\lambda \neq \delta$  haben die zugehörigen Haupträume den Durchschnitt 0, also*

$$\text{Haupt}(\varphi, \lambda) \cap \text{Haupt}(\varphi, \delta) = 0.$$

*Beweis.* Das charakteristische Polynom von  $\varphi$  sei

$$\chi_\varphi = (X - \lambda)^k (X - \delta)^\ell F,$$

wobei in  $F$  weder  $\lambda$  noch  $\delta$  eine Nullstelle sei. Nach Satz 26.10, angewendet auf  $Q = (X - \delta)^\ell F$ , ist

$$\text{Haupt}(\varphi, \lambda) \cap \ker Q(\varphi) = 0.$$

Wegen  $\text{Haupt}(\varphi, \delta) \subseteq \ker Q(\varphi)$  folgt daraus sofort

$$\text{Haupt}(\varphi, \lambda) \cap \text{Haupt}(\varphi, \delta) = 0.$$

$\square$

SATZ 26.12. *Sei*

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

*ein trigonalisierbarer  $K$ -Endomorphismus auf dem endlichdimensionalen  $K$ -Vektorraum  $V$ . Dann ist  $V$  die direkte Summe der Haupträume, also*

$$V = \text{Haupt}(\varphi, \lambda_1) \oplus \cdots \oplus \text{Haupt}(\varphi, \lambda_m),$$

*wobei  $\lambda, \dots, \lambda_m$  die verschiedenen Eigenwerte zu  $\varphi$  durchläuft, und  $\varphi$  ist die direkte Summe der Einschränkungen*

$$\varphi_i = \varphi|_{H_i}: H_i \longrightarrow H_i$$

*auf den Haupträumen.*

*Beweis.* Es sei

$$\chi_\varphi = (X - \lambda_1)^{k_1} \cdots (X - \lambda_m)^{k_m}$$

das charakteristische Polynom, das nach Satz 25.9 in Linearfaktoren zerfällt, wobei die  $\lambda_i$  verschieden seien. Wir führen Induktion über  $m$ . Bei  $m = 1$  gibt es nur einen Eigenwert  $\lambda$  und nur einen Hauptraum. Nach Korollar 24.3 ist dann auch das Minimalpolynom von der Form  $(X - \lambda)^s$  und daher ist  $V = \text{Haupt}(\varphi, \lambda)$ . Sei die Aussage nun für kleineres  $m$  bewiesen. Wir setzen  $P = (X - \lambda_1)^{k_1}$  und  $Q = (X - \lambda_2)^{k_2} \cdots (X - \lambda_m)^{k_m}$  und sind damit in der Situation von Lemma 26.9 und Satz 26.10. Wir haben also eine direkte Summenzerlegung in  $\varphi$ -invariante Untervektorräume

$$V = \text{Haupt}(\varphi, \lambda_1) \oplus \text{kern } Q(\varphi).$$

Das charakteristische Polynom ist nach Lemma 23.7 das Produkt der charakteristischen Polynome der Einschränkungen auf die beiden Räume. Nach Satz 26.10 ist  $(X - \lambda_1)^{k_1}$  das charakteristische Polynom der Einschränkung auf den ersten Hauptraum, daher muss  $Q$  das charakteristische Polynom der Einschränkung auf  $\text{kern } Q(P)$  sein. Das heißt insbesondere, dass diese Einschränkung ebenfalls trigonalisierbar ist. Nach der Induktionsvoraussetzung ist also  $\text{kern } Q(P)$  die direkte Summe der Haupträume zu  $\lambda_2, \dots, \lambda_m$  und daraus ergibt sich insgesamt die direkte Summenzerlegung für  $V$  und für  $\varphi$ .  $\square$