三ツノ點ヲ過ル二次曲線

三ツノ點ヲ $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, $R(x_3, y_3)$ トシ，之等ハ同一ノ直線上ニアラザルモノトス。今三ツノ直線 PQ, QR, RP ノ方程式ヲ

$$\alpha=a_1x+b_1y+c_1=0$$
$$\beta=a_2x+b_2y+c_2=0$$
$$\gamma=a_3x+b_3y+c_3=0$$

トスレバ，此等ノ三ツノ點ヲ過ル二次曲線ノ方程式ハ

$$a\beta\gamma+b\gamma\alpha+c\alpha\beta=0 \quad\cdots\cdots\cdots(11)$$

ナリ。茲ニ a, b, c ハ同時ニ零ナラザル任意ノ常數ナリトス。

四ツノ點ヲ過ル二次曲線

四ツノ點ヲ $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, $R(x_3, y_3)$, $S(x_4, y_4)$ トシ之等ノ三ツハ何レモ一直線上ニアラザルモノトス。然ルトキ四ツノ直線 PQ, QR, RS, SP ノ方程式ヲ夫々

$$\alpha=a_1x+b_1y+c_1=0$$
$$\beta=a_2x+b_2y+c_2=0$$
$$\gamma=a_3x+b_3y+c_3=0$$
$$\delta=a_4x+b_4y+c_4=0$$

トスレバ，四ツノ點ヲ過ル二次曲線ノ方程式ハ

$$a\alpha\gamma+b\beta\delta=0 \quad\cdots\cdots\cdots(12)$$

ナリ。茲ニ a, b ハ零ナラザル任意ノ常數ナリ。

二ツノ二次曲線ノ交點ヲ過ル二次曲線

二ツノ二次曲線ノ方程式ヲ

$$s=ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$
$$s'=a'x^2+2h'xy+b'y^2+2g'x+2f'y+c'=0$$

トスレバ．之等ガ交ル四ツノ實又ハ虚ナル點ヲ過ル二次曲線ノ方程式ハ

$$s-\lambda s'=0 \quad\cdots\cdots\cdots(13)$$

ナリ。茲ニ λ ハ任意ノ常數ナリ。

二次曲線ト二ツノ直線トノナス四ツノ交點ヲ過ル二次曲線

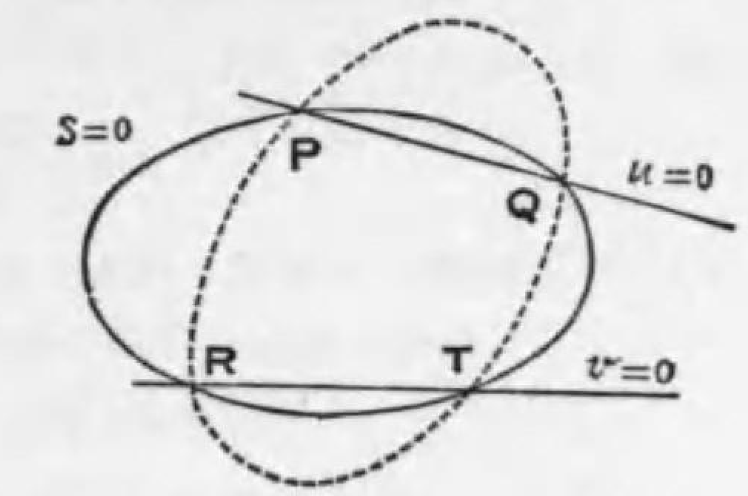
$s=0$ ヲ二次曲線ノ方程式トシ

$$u=0, \quad v=0$$

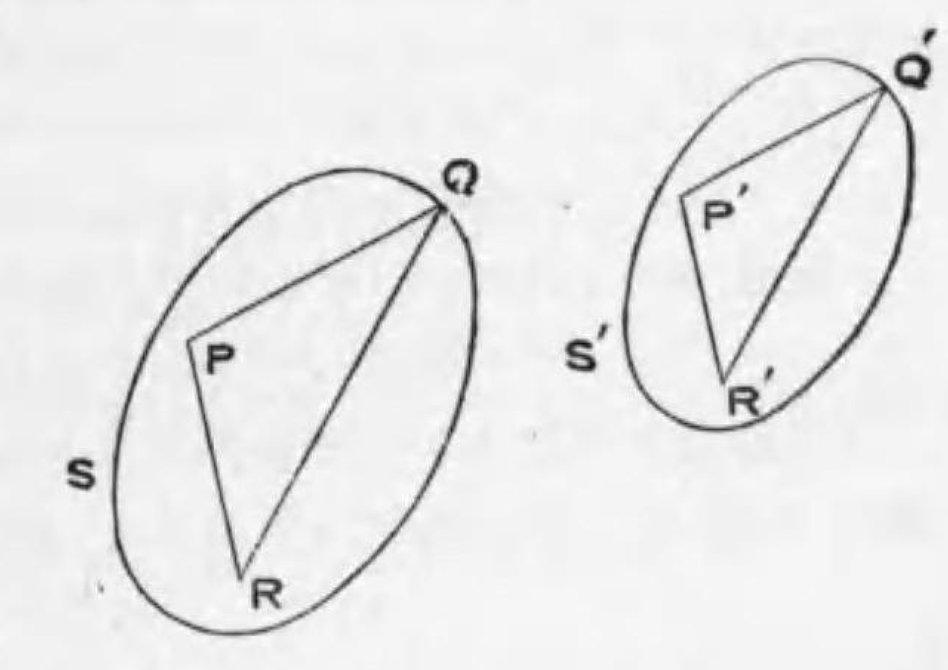
ヲ二ツノ直線ノ方程式トスレバ之等ガ二次曲線ト交ル四ツノ點 P, Q, R, T ヲ過ル二次曲線ノ方程式ハ

$$s=\lambda uv \quad\cdots\cdots\cdots(14)$$

ナリ。茲ニ λ ハ任意ノ常數ナリトス。



定義 二ツノ曲線ガ相似ニシテ且ツ相似ノ位置ニアリトハ，或一ツノ點 P ヨリ第一ノ曲線ニ引キタル動徑ノ長サガ，他ノ一ツノ點 P′ ヨリ第二ノ曲線ニ前ノ動徑ニ平行ニ引キタル動徑ノ長サニ對シテ一定ノ比ヲナス事ナリ。而シテ二ツノ點 P, P′ ヲ相似ノ中心トイヒ，Q, Q′ ヲ相對應スル點トイフ。



定義 二ツノ二次曲線ノ一ツヲ或角ダケ廻轉スル時，相似ニシテ且ツ相似ノ位置ナラシムル事ヲ得バ，之等ノ二ツノ曲線ハ相似ナリトイフ。

注意 二次曲線ノ一般論トシテ掲グベキ公式ハ尚此外ニ多數アリ。然レドモ之等ハ問題解義ニ於テ詳論スルコトヽシ茲ニハ省略スベシ。

第十二章 問題解義

1. 直線 $lx+my+n=0$ ガ二次曲線

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

ニ切スル爲ノ條件ヲ求メヨ。

〔解〕 $lx+my+n=0$ ヨリ

$$y=-\frac{lx+n}{m}$$

コレヲ二次曲線ノ方程式ニ代入シ且ツ分母ヲ拂ヘバ

$$(am^2-2hlm+bl^2)x^2-2(hmn-bln-gm^2+flm)x$$
$$+bn^2-2fmn+cm^2=0$$

コノ方程式ヨリ得ラルル x ノ二ツノ値ハ直線ガ二次曲線ト交ル點ノ x 坐標ナリ。故ニ與ヘラレタル直線ハ二次曲線ノ切線ナル爲ニハ，其二根ハ相等シカルベキ筈ナリ。從ツテ求ムル條件ハ

$$(hmn-bln-gm^2+flm)^2$$
$$=(am^2-2hlm+bl^2)(bn^2-2fmn+cm^2)$$

簡單ニスレバ

$$l^2(bc-f^2)+m^2(ca-g^2)+n^2(ab-h^2)$$
$$+2mn(gh-af)+2nl(hf-bg)+2lm(fg-ch)=0$$

2. 直線 $Ax^2+2Hxy+By^2=0$ ガ二次曲線

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

ノ共軛徑ニ平行ナルベキ條件ヲ求メヨ。

〔解〕 直線 $Ax^2+2Hxy+By^2=0$ ハ二ツノ直線

$$x=mx \qquad y=m'x$$

ヲ表ハスモノトスレバ

$$m+m'=-\frac{2H}{B} \qquad mm'=\frac{A}{B}$$

ヨツテ公式 (6) ニヨリ求ムル條件ハ

$$a+h\left(-\frac{2H}{B}\right)+b\frac{A}{B}=0$$

卽チ

$$Ab-2Hh+Ba=0$$

3. 二ツノ曲線

$$x^2+4xy+6y^2=1, \qquad 2x^2+6xy+9y^2=1$$

ニ共通ナル共軛徑ノ方程式ヲ求メヨ。

〔解〕 二ツノ與ヘラレタル二次曲線ハ共ニ中心ニ原點ヲ置ク同心曲線ナリ。故ニ共軛徑モ又原點ヲ通ズベシ。ソコデ假リニ

$$Ax^2+2Hxy+By^2=0$$

トスレバ，二ツノ曲線ノ共軛徑ナルガ爲ニハ，公式前題ニヨリ

$$Ab-2Hh+Ba=0$$

故ニ

$$6A-4H+B=0$$
$$9A-6H+2B=0$$

コレヨリ

$$A:H:B=2:3:0$$

ヨツテ求ムルモノハ

$$x^2+3xy=0$$

ナリ。

4. 二ツノ直線

$$l_1x+m_1y+n_1=0 \qquad l_2x+m_2y+n_2=0$$

ガ二次曲線

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

ニ關シテ互ニ共軛ナル爲ノ條件ヲ求メヨ。

〔解〕 直線 $l_1x+m_1y+n_1=0$ ニ關スル極ヲ點 (x_1, y_1) トスル時ハ其點ニ關スル極線ノ方程式ハ

$$axx_1+h(xy_1+x_1y)+byy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0$$

卽チ

$$(ax_1+hy_1+g)x+(hx_1+by_1+f)y+gx_1+fy_1+c=0$$

コレガ直線 $l_1x+m_1y+n_1=0$ ニ一致スル爲ニハ

$$ax_1+hy_1+g=\lambda l_1 \qquad \cdots\cdots(1)$$
$$hx_1+by_1+f=\lambda m_1 \qquad \cdots\cdots(2)$$
$$gx_1+fy_1+c=\lambda n_1 \qquad \cdots\cdots(3)$$

然ルニ定義ニヨリテ點 (x_1, y_1) ハ直線 $l_2x+m_2y+n_2=0$ ノ上ニアルヲ以テ

$$l_2x_1+m_2y_1+n_2=0 \qquad \cdots\cdots(4)$$

(1), (2), (3) 及ビ (4) ヨリ x_1, y_1 及ビ λ ヲ消去スレバ

$$\begin{vmatrix} a & h & g & l_1 \\ h & b & f & m_1 \\ g & f & c & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 & o \end{vmatrix} = 0$$

コレ求ムル結果ナリ。

5. 一點 O ヲ過ル直線ガ，二次曲線ヲ截ル點ヲ P, R トシ，O 點ノ其二次曲線ニ關スル極線ヲ截ル點ヲ Q トスル時，四ツノ點ガ調和列點ヲナス。

[解] O ヲ原點トシ，PO ヲ x 軸トスル時，曲線ノ方程式ヲ

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

トセヨ。今コノ方程式ニ $y=0$ ト置カバ

$$ax^2+2gx+c=0$$

而シテ此二ツノ根ハ OP, OR ノ長サニ等シキヲ以テ

$$\mathrm{OP}+\mathrm{OR}=-\frac{2g}{a} \qquad \mathrm{OP}.\ \mathrm{OR}=\frac{c}{a}$$

ヨツテ

$$\frac{\mathrm{OP}+\mathrm{OR}}{\mathrm{OP}.\ \mathrm{OR}}=\frac{1}{\mathrm{OP}}+\frac{1}{\mathrm{OR}}=-\frac{2g}{c} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又 O 點 (0, 0) ノ極線ハ公式 (7) ノ x', y' ＝零ト置キタルモノ卽チ

$$gx+fy+c=0$$

コノ式ニ $y=0$ ト置キタル時ノ x ノ値ハ OQ ノ長サニ等シキガ故ニ

$$\mathrm{OQ}=-\frac{c}{g} \quad 從ツテ \quad \frac{1}{\mathrm{OQ}}=-\frac{g}{c} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1) 及ビ (2) ヨリ

$$\frac{1}{\mathrm{OP}}+\frac{1}{\mathrm{OR}}=\frac{2}{\mathrm{OQ}}$$

コレ四ツノ點 O, P, Q, R ハ調和列點ヲナスコトヲ示スモノナリ。

6. 五點 $\left(0,\ \frac{1}{3}\right)$ $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$ $(0,\ -2)$, $(2,\ 0)$, $(2,\ 1)$ ヲ通ル二次曲線ノ方程式ヲ求メヨ。

[解] 求ムル二次曲線ノ方程式ヲ

$$x^2+2lxy+my^2+2px+2qy+r=0$$

ト假定スレバ，公式 (8) ニヨリテ

$$\frac{m}{9}+\frac{2}{3}q+r=0$$

$$\frac{1}{4}+p+r=0$$

$$4m-4q+r=0$$

$$4+4p+r=0$$

$$4+4l+m+4p+2q+r=0$$

ヲ解ク時ハ

$$l=1, \quad m=-\frac{3}{2} \quad p=-\frac{5}{4} \quad q=-\frac{5}{4} \quad r=1$$

ヨツテ求ムル二次曲線ノ方程式ハ

$$x^2+2xy-\frac{3}{2}y^2-\frac{5}{2}x-\frac{5}{2}y+1=0$$

卽チ

$$2x^2+4xy-3y^2-5x-5y+2=0$$

別 解 先ヅ四ツノ點 $\mathrm{P}_1\left(0,\ \frac{1}{3}\right)$, $\mathrm{P}_2\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$, $\mathrm{P}_3(0,\ -2)$, $\mathrm{P}_4(2,\ 0)$ ヲ過ル二次曲線ヲ求メンニ，四ツノ直線 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$, $\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$. $\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4$, $\mathrm{P}_4\mathrm{P}_1$ ノ方程式ハ夫々

$$3y+2x-1=0 \qquad y-4x+2=0$$

$$y-x+2=0 \qquad 6y+x-2=0$$

ナルヲ以テ公式 (12) ニヨリ

$$a(3y^2-xy-2x^2+5x+5y-2)=b(6y^2-23xy-4x^2+10x$$
$$+10y-4)$$

然ルニ此二次曲線ハ第五ノ點 (2, 1) ヲ通ルベキニヨリ之ニ代入スレバ

$$6a=-30b \quad 卽チ \quad a:b=-5:1$$

ナル關係アルベシ。ヨツテ求ムル方程式ハ

$$14x^2+28xy-21y^2-35x-35y+14=0$$

或ハ

$$2x^2+4xy-3y^2-5x-5y+2=0$$

7. 二ツノ等邊双曲線ノ交點ヲ過ル二次曲線ハ又等邊双曲線ナルコトヲ證セヨ。

［解］ 二ツノ等邊双曲線ノ方程式ヲ

$$s=ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0 \quad \cdots\cdots(1)$$

$$s'=a'x^2+2h'xy+b'y^2+2g'x+2f'y+c'=0 \quad \cdots\cdots(2)$$

トスレバ，之等ハ各々等邊双曲線ナルコトヨリ

$$a+b=0 \qquad a'+b'=0$$

ナリ。

サテコノ二ツノ双曲線ノ交點ヲ過ル二次曲線ノ方程式ハ

$$s-\lambda s'=0 \quad \cdots\cdots(3)$$

ナリ。然ルニ (3) ノ x^2, y^2 ノ係數ノ和ハ

$$(a-a')\lambda+(b-b')\lambda=(a+b)-\lambda(a'+b')=0$$

即チ λ ノ値ノ如何ニ關セズ零ナリ。故ニ (3) ニテ表ハサルル凡テノ二次曲線ハ悉ク等邊双曲線ナリ。

注意 (1), (2) ハ等邊双曲線ナル時ハ

$$a+b=a'+b'=0$$

ナルコトヲ説明センニ有心二次曲線例ヘバ (1) ニ於テ軸ヲ平行移動セシメ原點ヲ中心ニ置ク時ハ x, y ノ一次ノ項ハ消失シ

$$ax^2+2hxy+by^2+c'=0$$

トナル。茲ニ常數項ハ變化スルモ a, b, h ハ少シモ變化セズ。

次ニ坐標軸ヲ θ ダケ廻轉シテ曲線ノ軸ト一致セシムレバ xy ノ項ハ消失シテ

$$\mathrm{A}x^2+\mathrm{B}y^2+c'=0 \quad \cdots\cdots(1)$$

トナル。但シ

$$\mathrm{A}=a\cos^2\theta+2h\sin\theta\cos\theta+b\sin^2\theta$$

$$\mathrm{B}=a\sin^2\theta-2h\sin\theta\cos\theta+b\cos^2\theta$$

故ニ $\mathrm{A}+\mathrm{B}=a+b$

サテ (1) ハ等邊双曲線ナラバ $\mathrm{A}+\mathrm{B}=0$ ナラザルベカラズ。從ツテ $a+b$ モ亦零ナリ。

8. 二ツノ二次曲線ノ交點ヲ過ル直線ノ方程式ヲ求メヨ。

［解］ 二ツノ二次曲線ノ方程式ヲ

$$s=ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0 \quad \cdots\cdots(1)$$

$$s'=a'x^2+2h'xy+b'y^2+2g'x+2f'y+c'=0 \quad \cdots\cdots(2)$$

トスレバ，

$$s-\lambda s'=0$$

即チ

$$(a-a'\lambda)x^2+2(h-h'\lambda)xy+(b-b'\lambda)y^2+2(g-g'\lambda)x$$
$$+2(f-f'\lambda)y+c-c'\lambda=0 \quad \cdots\cdots(3)$$

ハ二ツノ曲線 (1), (2) ノ交點ヲ過ル二次曲線ノ方程式ナリ。

然ルニ (3) ハ如何ナル時直線ヲ表ハスカトイフニ，條件式

$$\Delta=af^2+bg^2+ch^2-2fgh-abc=0$$

ニ於テ $a=a-a'\lambda$ $b=b-b'\lambda$ $h=h-h'\lambda$…………ヲ代入セルモノ，即チ

$$(a-a'\lambda)(f-f'\lambda)^2+(b-b'\lambda)(g-g'\lambda)^2+(c-c'\lambda)(h-h'\lambda)^2$$
$$-2(f-f'\lambda)(g-g'\lambda)(h-h'\lambda)-(a-a'\lambda)(b-b'\lambda)(c-c'\lambda)=0$$

ナルコトナリ。而シテ此條件式ハ λ ニ關シテ三次ノ方程式ナルヲ以テ，λ ニ三ツノ値アリ之ヲ λ_1, λ_2, λ_3 トスレバ，求ムル直線ハ

$$s-\lambda_1 s'=0$$

$$s-\lambda_2 s'=0$$

$$s-\lambda_3 s'=0$$

ナル三双ノ直線（六本ノ直線）ナリ。

注意 s, s' ナル二ツノ方程式ノ如何ニ關セズ（即チ二ツノ曲線ノ相互ノ位置ノ如何ニ關セズ）λ ノ値ノ中少クトモ一ツハ常ニ實數ナリ。從ツテ少クトモ二本ノ直線ハ實ナル直線ナリ。

9. 二ツノ二次曲線ノ軸ガ平行ナル時ハ，其四ツノ交點ハ圓ノ上ニアルコトヲ證セヨ。

［解］ 二ツノ二次曲線ノ方程式ヲ

$$ax^2+by^2+2hxy+2gx+2fy+c=0 \quad \cdots\cdots(1)$$

$$a'x^2+b'y^2+2h'xy+2g'x+2f'y+c'=0 \quad \cdots\cdots(2)$$

ナリトスレバ，夫等ノ交點ヲ過ル二次曲線ノ方程式ハ

$$(a-\lambda a')x^2+(b-\lambda b')y^2+2(h-\lambda h')xy+2(g-\lambda g')x$$
$$+2(f-\lambda f')y+(c-\lambda c')=0 \quad \cdots\cdots(3)$$

然ルニ (1), (2) ノ軸ハ平行ナルニヨリ

$$\frac{2h}{a-b}=\frac{2h'}{a'-b'}$$

ナリ。何トナレバ之等ハ何レモ曲線ノ軸ガ x 軸トナス角ノ二倍ノ正切ナレバナリ。故ニ之等ノ分數ノ値ヲ k トスレバ,

$$2h=k(a-b) \qquad 2h'=k(a'-b') \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

ナルヲ以テ

$$2(h-h'\lambda)=k\{(a-b)-\lambda(a'-b')\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

サテ (1), (2) ノ四ツノ交點ハ同一ノ圓周上ニアルコトヲ證センニハ, λ ノ値ヲ適當ニトル時ハ方程式 (3) ノ x^2 ト y^2 トノ係數ガ相等シク且ツ xy ノ係數ガ零トナルコトヲ示セバ足ル。

ソコデ λ ノ値ヲ

$$a-\lambda a'=b-\lambda b' \quad 卽チ \quad \lambda=\frac{a-b}{a'-b'}$$

ナルヤウニ λ ノ値ヲ定ムレバ (3) ノ x^2 ト y^2 トノ係數ガ相等シクナルベク, 且ツコノ値ニヨツテ (5) ハ零トナルベシ。ヨツテ證明セラレタリ。

10. 四邊形ニ外接スル二次曲線ノ方程式ヲ求メヨ。

[解] 四邊形 ABCD ノ邊 AB, BC, CD, DA ノ方程式ヲ順次ニ

$$s_1=0 \quad s_2=0 \quad s_3=0 \quad s_4=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

トスル時ハ, 求ムル方程式ハ

$$s_1s_3=\lambda s_2s_4 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ナリ。茲ニ λ ハ任意ノ常數ナリトス。

何トナレバ (2) ハ x, y ニ就キテ二次式ナルガ故ニ二次曲線ヲ表ハス。又 A 點ノ坐標ハ方程式 (2) ヲ滿足ス。何トナレバ A ノ坐標ハ邊 AB, AD ノ方程式

$$s_1=0 \qquad s_4=0$$

ヲ同時ニ滿足スルヲ以テナリ。從ツテ二次曲線 (2) ハ A 點ヲ通過スベシ。同樣ニ (2) ハ他ノ頂點 B, C, D ヲ通過スルコトヲ知ル。

注意 四邊ノ方程式ヲ解キテ頂點ノ坐標ヲ求メ, 然ル後公式 (12) ヲ用フルモ可ナリト雖モ其計算ハ一般ニハ煩瑣ナリ。故ニ上ノ方法ヲ可トスベシ。

11. 平行四邊形ノ四ツノ頂點ヲ通過スル抛物線ハ存在セザルコトヲ證明セヨ。

[解] 平行四邊形 ABCD ニ於テ A ヲ原點, AB ヲ x 軸ニトル時, BC, DA ノ方程式ヲ夫々

$$y=m(x-a) \qquad y=mx$$

トシ CD ノ方程式ヲ $y=b$ トス。然ルトキハ四ツノ頂點ヲ通ズル二次曲線ノ方程式ハ

$$y(y-b)=\lambda(y-mx)\{y-m(x-a)\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

卽チ

$$y^2(1-\lambda)+2m\lambda xy-\lambda m^2x^2-y(b-ma\lambda)$$
$$+\lambda m^2ax=0$$

然ルニ之ハ抛物線ナルガ爲ニハ公式 $h^2-ab=0$ ニヨリ

$$(m\lambda)^2+\lambda m^2(1-\lambda)=0$$

卽チ

$$\lambda m^2=0$$

ナラザルベカラズ。然ルニ $\lambda=0$ ナル時ハ (1) ハ平行線 AB ト CD トヲ表ハシ, $m=0$ ナル時ハ BC, AD ハ AB ト重ルコトニナル。何レニシテモ平行四邊形トハナラズ。故ニ平行四邊形ニ外接スル抛物線ハ存在セズ。

12. 四ツノ點ヲ過ル抛物線ハ一般ニハ二個アルコトヲ示セ。

[解] 四ツノ點ヲ A, B, C, D トシ AB, BC, CD, DA ノ方程式ヲ夫々

$$s_1=a_1x+b_1y+c_1=0 \qquad s_2=a_2x+b_2y+c_2=0$$
$$s_3=a_3x+b_3y+c_3=0 \qquad s_4=a_4x+b_4y+c_4=0$$

トスレバ, 四ツノ點ヲ通ル二次曲線ノ方程式ハ一般ニ

$$s_1 \cdot s_3=\lambda s_2 \cdot s_4 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ナリ。卽チ (1) ハ

$$x^2(a_1a_3-\lambda a_2a_4)+y^2(b_1b_3-\lambda b_2b_4)$$
$$+xy\{a_1b_3+a_3b_1-\lambda(a_2b_4+a_4b_2)\}$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots=0$$

トナル。

サテ之ハ抛物線ヲ表ハス爲ニハ

$$\left[\frac{1}{2}\{(a_1b_3+a_3b_1)-\lambda(a_2b_4+a_4b_2)\}\right]^2-(a_1a_3-\lambda a_2a_4)(b_1b_3-\lambda b_2b_4)=0$$

ナルヲ要ス。(公式 $h^2-ab=0$ ヲ用ヒテ)

而シテ之ハ λ ニ就キテ二次方程式ナルヲ以テ (1) ヲシテ抛物線ナラシムルガ如キ場合ハ一般ニハ二ツアルヲ知ル。

13. P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2) ヲ二次曲線

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

ノ上ノ二ツノ點トスレバ直線 PQ ノ方程式ハ

$$a(x-x_1)(x-x_2)+2h(x-x_1)(y-y_2)+l(y-y_1)(y-y_2)$$
$$=ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c\ \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ナルコトヲ證セヨ。

〔解〕 (1) ハ x ト y トニ關シテ一次方程式ナルヲ以テ直線ニシテ而カモ點 P 及ビ Q ヲ通過ス。何トナレバ (1) ハ P ノ坐標 x_1, y_1 及ビ Q ノ坐標 x_2, y_2 ニヨツテ滿足セラルベケレバナリ。

14. 二次曲線上ノ一點ニ於ケル切線ト法線トヲ坐標軸トスル時二次曲線ノ方程式ハ如何ナル形トナルカ。

〔解〕 此場合ニハ原點ガ曲線上ニアルヲ以テ其方程式ガ坐標 (0, 0) ニテ滿足セラルベシ。故ニ常數項ヲ缺ク，即チ先ヅ

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy=0\ \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ナル形ヲトラザルベカラズ。次ニ切線ヲ x 軸ニトル時ハ，(1) ニ $y=0$ ト置ケバ x ノ値トシテ零ナル等根ヲ有スベキ筈ナリ。即チ $g=0$ ナラザルベカラズ。ヨツテ求ムル形ハ

$$ax^2+2hxy+by^2+2fy=0$$

ナリ。

注意 若シ切線ヲ y 軸ニトラバ其形ハ

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx=0$$

トナル。

15. A ヲ二次曲線上ノ點ナリトシ，弦 PQ ガ A 點ニ對シテ直角ヲ張ル時ハ，PQ ハ A 點ニ於ケル法線ト其上ノ定點ニ於テ相交ルコトヲ證セヨ。

〔解〕 A 點ニ於ケル切線ヲ x 軸，法線ヲ y 軸トスル時ハ二次曲線ノ方程式ハ

$$ax^2+2hxy+by^2+2fy=0\ \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

サテ PQ ノ方程式ヲ

$$y=mx+c\ \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

トスレバ AP, AQ ノ方程式ハ第四章問題解義 11 ニヨリテ

$$c(ax^2+2hxy+by^2)+2fy(y-mx)=0\ \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

然ルニ AP, AQ ハ互ニ垂直ナルベキ條件ハ上ノ方程式ヲ $\dfrac{y}{x}$ ニ關スル二次方程式トシテ解ク時，其二根ノ積ハ -1 ナルベシ。故ニ

$$ac+bc+2f=0$$

即チ

$$c=-\frac{2f}{a+b}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

換言スレバ PQ ハ A ニ對シテ直角ヲ張ル爲ニハ其直線ハ m ノ如何ニ關セズ

$$y=mx-\frac{2f}{a+b}$$

ナルベキ筈ナリ。ヨツテ PQ ハ A 點ニ於ケル法線即チ $x=0$ ト交ル點ハ定點 $\left(0,\ -\dfrac{2f}{a+b}\right)$ ナルコトヲ知ル。

16. 前題ニ於テ AP, AQ ハ A ニ於ケル法線ト相等シキ角ヲナス時ハ，PQ ハ A ニ於ケル切線ト定點ニテ交ルコトヲ證セヨ。

〔解〕 AP, AQ ハ A ニ於ケル法線ト相等シキ角ヲナスヲ以テ，前題ニ於ケル (3) ヲ $\dfrac{y}{x}$ ニ就キテ解クトキ其二ツノ根ノ和ハ零ナルベキ筈ナリ。ヨツテ

$$hc-fm=0$$

故ニ

$$\frac{c}{m}=\frac{f}{h}=(\text{常數})$$

然ルニ $-\dfrac{c}{m}$ ガ弦 PQ ハ x 軸即チ切線ヲ截リ取ル截片ナリ。

ヨツテ PQ ハ原點ニ於ケル切線上ノ定點ニテ相交ル。

17. 二次曲線

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

ニ於テハ $gx+fy=0$ ハ原點ニテ二等分セラルヽ弦ナルコトヲ示セ。

〔解〕 曲線ト弦トノ交點ヲ $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$ トスレバ x_1, x_2 ハ曲線ノ方

程式ノ y ノ代リ＝ $-\frac{gx}{f}$ ト置キタル方程式卽チ

$$ax^2+2hx\left(-\frac{gx}{f}\right)+b\left(-\frac{gx}{f}\right)^2+2gx+2f\left(-\frac{g}{f}x\right)+c=0$$

ノ x ノ二ツノ根ナリ。然ル＝此方程式ヲ簡單＝スレバ x ノ係數ハ零トナル。卽チ

$$x_1+x_2=0$$

同樣＝

$$y_1+y_2=0$$

卽チ弦 $gx+fy=0$ ハ原點＝テ二等分セラル。

18. 五ツノ點ノ中，三ツノ點ガ一直線上＝アル時ハ夫等ヲ過ル二次曲線ハ一對ノ直線ナルコトヲ示セ。

〔解〕 二次曲線ハ一ツノ直線ト二ツヨリモ多クノ點＝テ交ルコトヲ得ズ。故＝求ムル二次曲線ハ三ツノ點ヲ過ル直線ト他ノ二ツノ點ヲ結ブ直線ナリ。

19. 楕圓ノ一ツノ焦點ヲ過リテ二ツノ弦ヲ引クトキ楕圓トナス四ツノ交點及ビ中心ヲ過ル二次曲線ガ x 軸ト交ル點ガ定點ナリ。

〔解〕 楕圓ノ方程式ヲ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

トシ，一ツノ焦點 $(ea,\ 0)$ ヲ過ル二ツノ弦ノ方程式ヲ

$$y=m(x-ea)$$

$$y=m'(x-ea)$$

トス。然ルトキハ之等ガ楕圓ト交ル四ツノ點ヲ過ル二次曲線ノ方程式ハ公式 (14) ＝ヨリ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=\lambda\{y-m(x-ea)\}\{y-m'(x-ea)\}$$

而シテ此曲線ガ中心 $(0,\ 0)$ ヲ通ル爲＝ハ

$$\lambda=\frac{-1}{mm'(ea)^2}$$

從ツテ二次曲線ノ方程式ハ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=-\frac{1}{mm'(ea)^2}\{y-m(x-ea)\}\{y-m'(x-ea)\}$$

ナリ。而シテ之ガ長軸ト交ル點ノ x 坐標ハ上ノ方程式＝ $y=0$ ト置クコト＝ヨリテ得ラル。卽チ

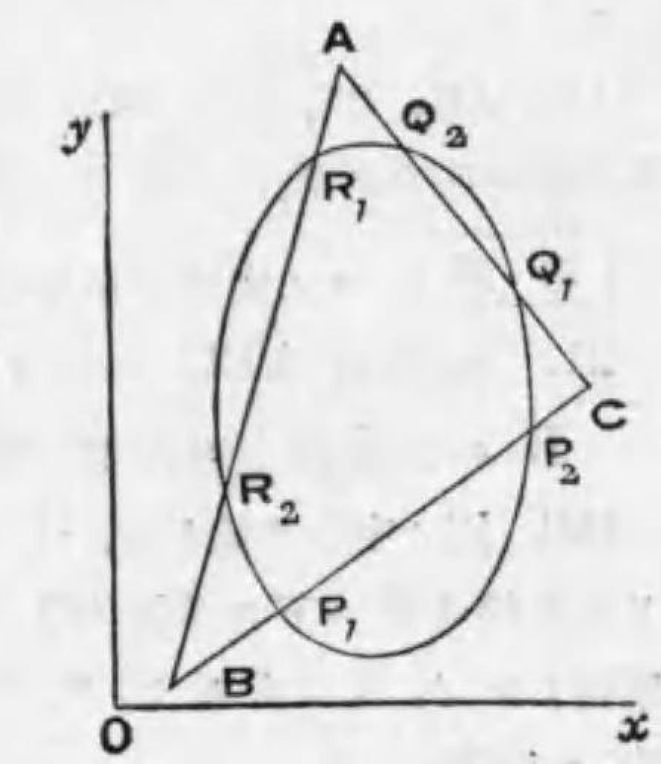
$$x=0,\quad 或ハ\quad x=\frac{e^2+1}{2ea}$$

ヨツテ長軸ト定點 $\left(\frac{2ea}{e^2+1},\ 0\right)$ ＝テ交ル。

20. 二次曲線ガ三角形ノ三ツノ邊 BC, CA, AB ト交ル點ヲ夫々 $P_1,\ P_2;\ Q_1,\ Q_2;\ R_1,\ R_2$ トスレバ

$$AR_1\cdot AR_2\cdot BP_1\cdot BP_2\cdot CQ_1\cdot CQ_2=$$
$$BR_1\cdot BR_2\cdot CP_1\cdot CP_2\cdot AQ_1\cdot AQ_2$$

ナルコトヲ證セヨ。



〔解〕 二次曲線ノ方程式ヲ

$$f(x,\ y)=ax^2+2hxy+by^2$$
$$2gx+2fy+c=0\ \dots\dots\dots(1)$$

トシ BC, CA, AB ノ x 軸トナス角ヲ夫々 $\theta_1,\ \theta_2,\ \theta_3$ トス。今 B 點ヲ $(x',\ y')$ トスレバ BC ノ方程式ハ

$$\frac{x-x'}{\cos\theta_1}=\frac{y-y'}{\sin\theta_1}=l\ \dots\dots(2)$$

ナルヲ以テ BP_1, BP_2 ノ長サハ (1) ノ x, y ＝夫々 (2) ヨリ得ル値

$$x'+l\cos\theta_1\qquad y'+l\sin\theta_1$$

ト置キタル方程式

$$a(x'+l\cos\theta_1)^2+2h(x'+l\cos\theta_1)(y'+l\sin\theta_1)+b(y'+l\sin\theta_1)^2$$
$$+2g(x'+l\cos\theta_1)+2f(y'+l\sin\theta_1)+c=0$$

卽チ

$$l^2\{a\cos^2\theta_1+2h\sin\theta_1\cos\theta_1+b\sin^2\theta_1\}$$
$$+2l\{(ax'+hy'+g)\cos\theta_1+(hx'+by'+f)\sin\theta_1\}$$
$$+f(x',\ y')=0\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots(3)$$

ノ l ノ二ツノ値ナリ。故＝

$$\mathrm{BP_1 \cdot BP_2} = \frac{f(x',\ y')}{a\cos^2\theta_1 + 2h\sin\theta_1\cos\theta_1 + b\sin^2\theta_1}$$

同様＝

$$\mathrm{BR_1 \cdot BR_2} = \frac{f(x',\ y')}{a\cos^2\theta_3 + 2h\sin\theta_3\cos\theta_3 + b\sin^2\theta_3}$$

從ツテ

$$\frac{\mathrm{BP_1 \cdot BP_2}}{\mathrm{BR_1 \cdot BR_2}} = \frac{a\cos^2\theta_3 + 2h\sin\theta_3\cos\theta_3 + b\sin^2\theta_3}{a\cos^2\theta_1 + 2h\sin\theta_1\cos\theta_1 + b\sin^2\theta_1}$$

同様＝

$$\frac{\mathrm{CQ_1 \cdot CQ_2}}{\mathrm{CP_1 \cdot CP_2}} = \frac{a\cos^2\theta_1 + 2h\sin\theta_1\cos\theta_1 + b\sin^2\theta_1}{a\cos^2\theta_2 + 2h\sin\theta_2\cos\theta_2 + b\sin^2\theta_2}$$

$$\frac{\mathrm{AR_1 \cdot AR_2}}{\mathrm{AQ_1 \cdot AQ_2}} = \frac{a\cos^2\theta_2 + 2h\sin\theta_2\cos\theta_2 + b\sin^2\theta_2}{a\cos^2\theta_3 + 2h\sin\theta_3\cos\theta_3 + b\sin^2\theta_3}$$

ヨツテ

$\mathrm{AR_1 \cdot AR_2 \cdot BP_1 \cdot BP_2 \cdot CQ_1 \cdot CQ_2 = BR_1 \cdot BR_2 \cdot CP_1 \cdot CP_2 \cdot AQ_1 \cdot AQ_2}$ ナルコト容易＝明カナリ。

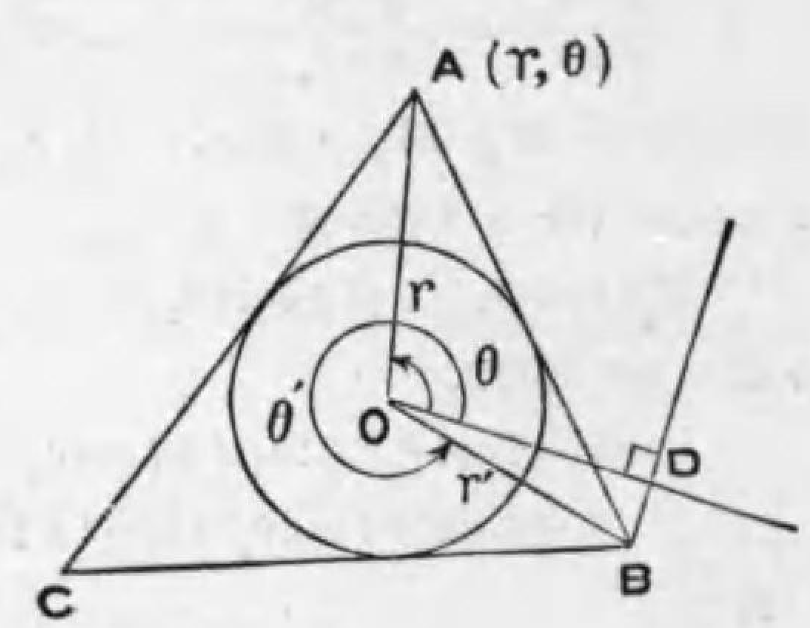
注　意　コノ定理ヲかるの一(Carnot's theorem) ノ定理トイフ。

21. 三角形 ABC ハ一ツノ圓＝外接ス。C 角ノ大サガ與ヘラレ, B ハ定直線上＝沿フテ動ク時頂點 A ノ軌跡ヲ求メヨ。

[解] 圓ノ中心ヲ極トシ, O ヨリ定直線 OD ＝下ス垂線 OD ヲ原線トシ A, B ヲ夫々 $(r,\ \theta)$, $(r',\ \theta')$ ト假定ス。今

$$r'\cos\theta' = p \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

トスレバ p ハ一定＝シテ線分 OD ノ長サ＝等シ。



又角 C ガ一定ナルガ故＝角 AOB ハ一定ナルヲ以テ之ヲ α トスレバ

$$\alpha = \theta + (2\pi - \theta') \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

又三角形 AOB ノ面積ハ

$$\frac{1}{2} rr'\sin\alpha \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

＝シテ且ツ

$$\mathrm{AB} = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\alpha} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

而シテ中心 O ヨリ AB ＝至ル距離ハ半徑 R ＝等シ。故＝ (3), (4) ヨリ

$$\mathrm{R} = \frac{rr'\sin\alpha}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\alpha}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

(5) ＝ (1) 及ビ (2) ヲ代入スレバ

$$\mathrm{R}^2 = \frac{r^2p^2\sin^2\alpha}{r^2\cos^2(\theta-\alpha) + p^2 - 2rp\cos(\theta-\alpha)\cos\alpha}$$

コレ A 點ノ極坐標 $r,\ \theta$ ノ間ノ關係ヲ示スモノナルガ故＝所要ノ軌跡＝シテ一ツノ二次曲線ヲ表ハス。

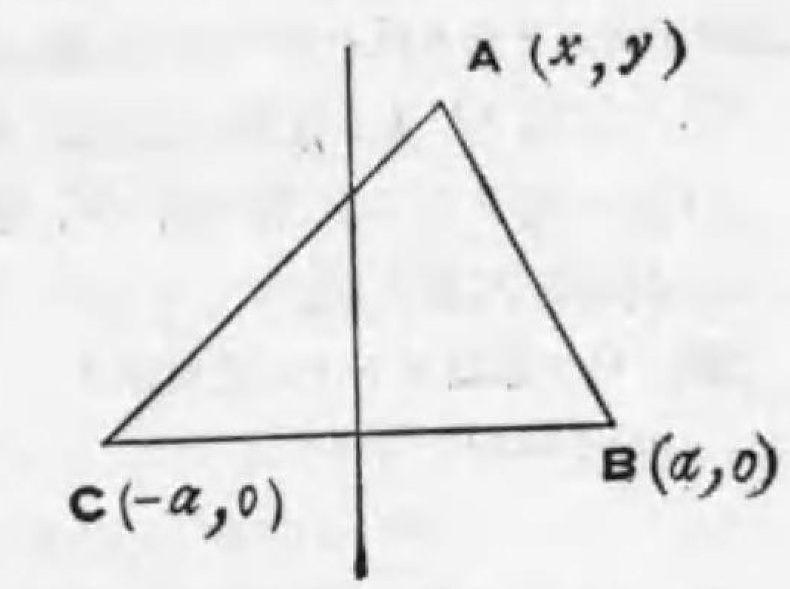
22. 三角形 ABC ノ底邊 BC ノ大サ及ビ位置ヲ與ヘラレ且ツ

$$\angle\mathrm{B} = 2\angle\mathrm{C}$$

ナル時, 頂點 A ノ軌跡如何。

[解] 三角形ノ底邊ノ長サヲ $2a$ トシ底邊ヲ x 軸, 其垂直二等分線ヲ y 軸トス。

然ル時ハ C 點ハ $(-a,\ 0)$, B 點ハ $(a,\ 0)$ ナリ。今軌跡ノ一點 A ヲ $(x,\ y)$ トスレバ圖ヨリ直チ＝



$$\tan\mathrm{C} = \frac{y}{x+a}$$

$$\tan\mathrm{B} = -\frac{y}{x-a} = \frac{y}{a-x}$$

然ル＝假定＝ヨリ

$$2\hat{\mathrm{C}} = \hat{\mathrm{B}}$$

從ツテ

$$\frac{\dfrac{2y}{x+a}}{1 - \dfrac{y^2}{(x+a)^2}} = \frac{y}{a-x}$$

整頓スレバ

$$3x^2 + 2ax - y^2 = a^2$$

コレ求ムル軌跡ノ方程式＝シテ一ツノ双曲線ナリ。

注意 i　コノ曲線ヲ利用スレバ任意ノ角ヲ三等分スルコトヲ得。今其方法ヲ述ブベシ，與ヘラレタル角ノ大サヲ α トシ，BC ヲ弦トシ其角ノ補角ヲ容ルヽガ如キ圓弧ヲ畫キ曲線ト交ル點ヲ A トス。然ル時 A ト C トヲ結ビ附クルトキ生ズル角 ACB ハ卽チ角 α ノ三等分角ナリ。何トナレバ作圖＝ヨリ

$$A\hat{C}B+A\hat{B}C=\alpha$$

＝シテ且ツ A ハ双曲線ノ上＝アルヲ以テ

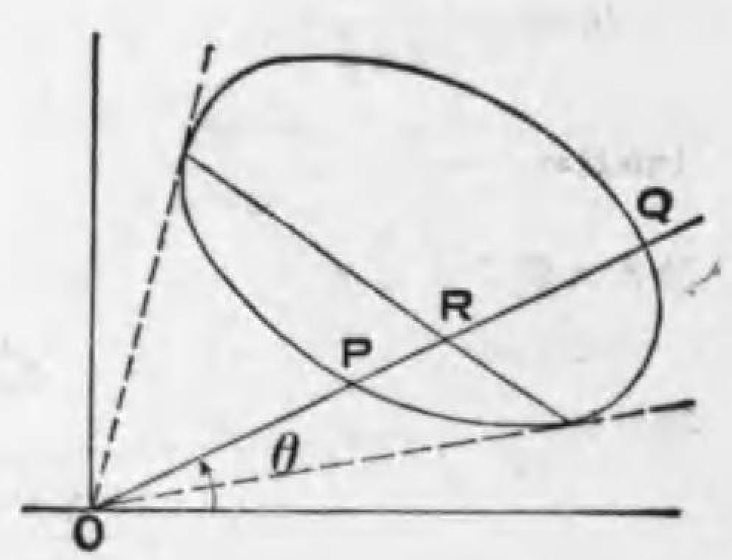
$$2A\hat{C}B=A\hat{B}C$$

$$\therefore\ A\hat{C}B=\frac{\alpha}{3}$$

注意 ii　又コノ曲線ヲ用ヒテ圓ノ弧ヲ三等分スルコトヲ得。ソノ方法ハ次ノ如シ。

圓弧ノ兩端ヲ圓ノ中心＝結ビテ生ズル中心角ヲ三等分スル直線ヲ引ケ，其直線ガ圓弧ト交ル點ハ卽チ三等分點ナリ。

23. 定點 O ヨリ任意ノ直線ヲ引キ，與ヘラレタル二次曲線ト P, Q ＝交ラシム。然ル時 P, Q ＝關スル O 點ノ調和共軛點 R ノ軌跡ヲ求メヨ。



［解］ O ヲ原點＝トリ二次曲線ヲ

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

トス。今 O ヨリ x 軸＝任意ノ角 θ ヲナス直線 OPQ ヲ作ルト OP, OQ ノ長サハ，

$$x=l\cos\theta$$
$$y=l\sin\theta$$

ヲ原式＝代入シタル方程式

$$l^2(a\cos^2\theta+2h\sin\theta\cos\theta+b\sin^2\theta)+2l(g\cos\theta+f\sin\theta)+c=0\quad\cdots\cdots(1)$$

ノ l ノ値＝等シ。

故＝ (1) ヲ $\dfrac{1}{l}$ ＝關スル方程式卽チ

$$c\frac{1}{l^2}+2\frac{1}{l}(g\cos\theta+f\sin\theta)+a\cos^2\theta+2h\sin\theta\cos\theta+b\sin^2\theta=0\quad\cdots\cdots(2)$$

ト直ストキハ根ト係數トノ關係＝ヨリ

$$\frac{1}{OP}+\frac{1}{OQ}=-2\frac{g\cos\theta+f\sin\theta}{c}$$

ナルコトヲ知ル。

ソコデ R ヲ求ムル軌跡ノ一點トスレバ

$$\frac{2}{OR}=\frac{1}{OP}+\frac{1}{OQ}$$

ナル關係アラザルベカラズ。故＝ OR ノ長サヲ r トスレバ

$$\frac{2}{r}=-2\frac{g\cos\theta+f\sin\theta}{c}$$

分母ヲ拂ヒ整頓スレバ

$$gr\cos\theta+fr\sin\theta+c=0$$

コレ卽チ求ムル軌跡ノ極方程式ナリ。直角坐標＝直ス時ハ

$$gx+fy+c=0$$

24. 前題＝於テ OR ヲ OP ト OQ トノ相加平均タラシムル時，R ノ軌跡ヲ求メヨ。

［解］ 前題＝於ケルト同樣ノ方法＝ヨレバ，

$$OP+OQ=-2\frac{g\cos\theta+f\sin\theta}{a\cos^2\theta+2h\sin\theta\cos\theta+b\sin^2\theta}$$

ナルヲ以テ OR ノ長サヲ r トスレバ

$$r=\frac{1}{2}(OP+OQ)=-\frac{g\cos\theta+f\sin\theta}{a\cos^2\theta+2h\sin\theta\cos\theta+b\sin^2\theta}$$

卽チ求ムル軌跡ノ方程式ハ

$$ar\cos^2\theta+2hr\sin\theta\cos\theta+br\sin^2\theta+g\cos\theta+f\sin\theta=0$$

或ハ

$$ax^2+2hxy+by^2+gx+fy=0$$

25. 方向一定ナル二次曲線ノ平行弦ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ。

[解] 平行弦ガ x 軸トナス角ヲ θ トシ，二次曲線ノ方程式ヲ

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0 \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

トス。今平行弦ノ一ツヲ QR トシ，其中點ヲ P トシ其坐標ヲ x, y トス。然ル時ハ PQ ト PR トハ方向相反スルニヨリ，其長サノ代數和ハ零トナルベシ故ニ中點ノ坐標ヲ x', y' トスレバ，(20) ノ方程式 (3) ニ於ケル l ノ係數ガ零ナルベク，從ツテ求ムル軌跡ハ x', y' ヲ流通坐標ニ直シタルモノ卽チ

$$(ax+hy+g)\cos\theta+(hx+by+f)\sin\theta=0$$

ナリ。

26. 二ツノ二次曲線

$$s=ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$
$$s'=a'x^2+2h'xy+b'y^2+2g'x+2f'y+c'=0$$

ノ四ツノ交點ヲ通ル二次曲線ノ中心ノ軌跡ヲ求メヨ。

[解] 二ツノ二次曲線ノ交點ヲ過ル二次曲線ノ方程式ハ一般ニ

$$s-\lambda s'=0$$

卽チ

$$(a-\lambda a')x^2+2(h-\lambda h')xy+(b-\lambda b')y^2$$
$$+2(g-\lambda g')x+2(f-\lambda f')y+c-\lambda c'=0$$

而シテ此二次曲線ノ中心ノ坐標ヲ x, y トスレバ

$$(a-\lambda a')x+(h-\lambda h')y+g-\lambda g'=0$$
$$(h-\lambda h')x+(b-\lambda b')y+f-\lambda f'=0$$

ヨツテ求ムル軌跡ノ方程式ハ上ノ二ツヨリ不定係數 λ ヲ消去スレバ可ナリ。卽チ

$$\frac{ax+hy+g}{a'x+h'y+g'}=\frac{hx+by+f}{h'x+b'y+f'}$$

ニシテ一ツノ二次曲線ナリ。

27. 定點 O ヲ過リ互ニ垂直ナル二ツノ直線ヲ引キ，二次曲線ト P, P'; Q, Q' ニテ交ラシムル時ハ

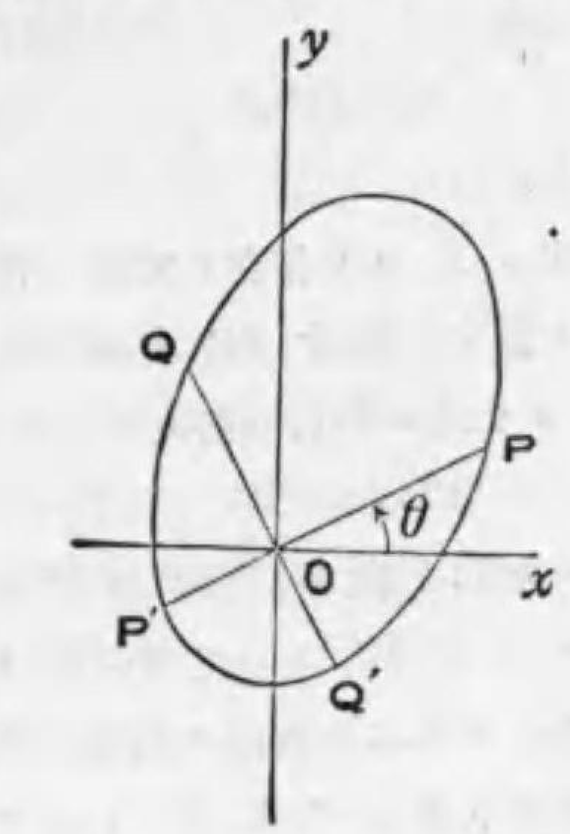
$$\frac{1}{OP.OP'}+\frac{1}{OQ.OQ'}$$

ハ一定ナルコトヲ證セヨ。

[解] O ヲ原點トシ二次曲線ノ方程式ヲ

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0 \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

トシ OP ガ x 軸ト θ ヲナスモノトスレバ



其方程式ハ

$$\frac{x}{\cos\theta}=\frac{y}{\sin\theta}=r \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

ニシテ，ソレニ垂直ナル弦 OQ ノ方程式ハ

$$\frac{x}{\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{y}{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}=r'$$

卽チ

$$\frac{x}{-\sin\theta}=\frac{y}{\cos\theta}=r' \quad \cdots\cdots\cdots(3)$$

從ツテ OP, OP' ノ長サハ方程式 (1) ニ (2) ヲ代入シタルモノ卽チ

$$ar^2\cos^2\theta+2hr^2\sin\theta\cos\theta+br^2\sin^2\theta+2gr\cos\theta$$
$$+2fr\sin\theta+c=0 \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

ヨリ得ラルベク，OQ, OQ' ノ長サハ (1) ニ (3) ヲ代入シタルモノ卽チ

$$ar'^2\sin^2\theta-2hr'^2\sin\theta\cos\theta+br'^2\cos^2\theta-2gr'\sin\theta$$
$$+2fr'\cos\theta+c=0$$

ヨリ得ラルベシ。故ニ根ト係數トノ關係ニヨリ

$$\frac{1}{OP.OP'}=\frac{(a\cos^2\theta+2h\sin\theta\cos\theta+b\sin^2\theta)}{c}$$

$$\frac{1}{OQ.OQ'}=\frac{(a\sin^2\theta-2h\sin\theta\cos\theta+b\cos^2\theta)}{c}$$

故ニ

$$\frac{1}{OP.OP'}+\frac{1}{OQ.OQ'}=\frac{(a+b)}{c}$$

卽チ一定ナリ。

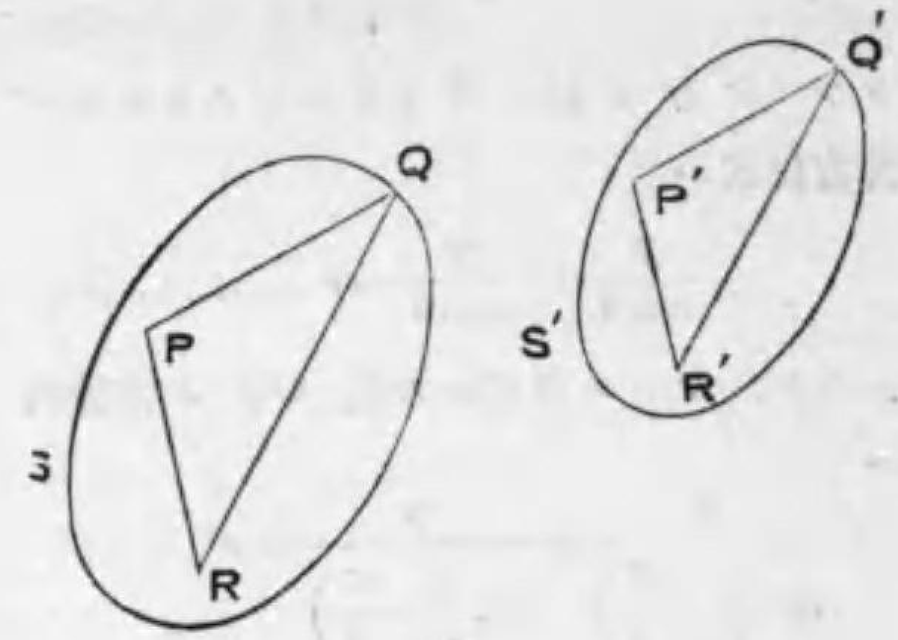
28. 二ツノ二次曲線ガ相似ニシテ且ツ相似ノ位置ニアル時ハ，相似ノ中心ハ無數ニアルコトヲ示セ。

[解] 二ツノ相似二次曲線ヲ S, S' トシ，P 及ビ P' ヲ一組ノ相似ノ中心ナリトス。然ル時ハ二ツノ點 P, P' ヨリ一組ノ平行線 PQ, P'Q' ヲ引ク時

ハ，定義ニヨリテ k ヲ常數トスル時ハ

$$PQ=kP'Q'$$

ナリ。



次ニ P ヨリ任意ノ方向ニ任意ノ長サノ線分 PR ヲトリ，P′ ヨリ之ニ平行ニ而カモ

$$PR=kP'R'$$

ナルガ如キ線分 P′R′ ヲ引ク時ハ R ト R′ トハ又與ヘラレタル二ツノ二次曲線ノ相似ノ中心トナル。

如何トナレバ R, R′ ト二ツノ曲線上ノ對應スル點 Q, Q′ トヲ結ブ時ハ三角形 PQR ト P′Q′R′ トハ相似形ナルガ故ニ RQ ト R′Q′ トハ互ニ平行ニシテ而カモ

$$RQ=kR'Q'$$

而シテ Q ヲ S ノ上ニ沿フテ動カシテモ常ニ上式ガ成立スルガ故ナリ。

ソコデ PR ノ方向ト長トヲ任意ニトル時其端點 R ハ常ニ相似ノ中心トナル。ヨツテ相似ノ中心ハ無數ニアリ。

注意　相似ノ中心 P ガ一ツノ曲線ノ中心ナル時ハ，他ノ相似ノ中心モ亦他ノ曲線ノ中心ニシテ，二ツノ曲線ノ軸ハ互ニ平行ナリ。

29.　二ツノ二次曲線ガ相似ニシテ且ツ相似ノ位置ニアル爲ノ條件ヲ求メヨ。

［解］ 二ツノ有心曲線ノ方程式ヲ

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0 \qquad \cdots\cdots(1)$$

$$a'x^2+2h'xy+b'y^2+2g'x+2f'y+c'=0 \qquad \cdots\cdots(2)$$

ナリトシ，點 $P(x_1,\ y_1)$ ヲ一ツノ相似ノ中心トス。今 P ヲ過リ x 軸ト角 θ ヲナス直線ヲ引ケバ，其方程式ハ

$$\frac{x-x_1}{\cos\theta}=\frac{y-y_1}{\sin\theta}=l \qquad \cdots\cdots(3)$$

(3) ハ二次曲線 (1) ト交ル點ヲ Q, R トスレバ PQ, PR ノ長サハ (3) ヨ

リ得ル

$$x=x'+l\cos\theta \qquad y=y'+l\sin\theta$$

ヲ (1) ニ代入シタル時ノ方程式

$$Al^2+2Bl+C=0 \qquad \cdots\cdots(4)$$

ノ l ノ値ニ等シ。但シ

$$A=a\cos^2\theta+2h\sin\theta\cos\theta+b\sin^2\theta$$

$$B=(ax_1+hy_1+g)\cos\theta+(hx_1+by_1+f)\sin\theta$$

$$C=ax_1^2+2hx_1y_1+by_1^2+2gx_1+2fy_1+c$$

同樣ニ他ノ點 $P'(x_2,\ y_2)$ ヨリ先キノ直線ニ平行ヲ引キ二次曲線 (2) トノ交點ヲ Q′, R′ トスレバ P′Q′, P′R′ ノ長サハ方程式

$$A_1l_1^2+2B_1l_1+C_1=0 \qquad \cdots\cdots(5)$$

ノ l_1 ノ値ニ等シ。茲ニ

$$A_1=a'\cos^2\theta+2h'\sin\theta\cos\theta+b'\sin^2\theta$$

$$B_1=(a'x_2+h'y_2+g')\cos\theta+(h'x_2+b'y_2+f)\sin\theta$$

$$C_1=a'x_2^2+2h'x_2y_2+b'y_2^2+2g'x_2+2f'y_2+c'$$

然ルニ (1), (2) ハ相似ニシテ且ツ相似ノ位置ニアル時ハ角 θ ノ大サノ如何ニ關セズ

$$l=kl_1$$

ナルベキヲ以テ (4) ト (5) トヨリ

$$\frac{k^2A}{A_1}=\frac{kB}{B_1}=\frac{C}{C_1} \qquad \cdots\cdots(6)$$

ナル關係ヲ得ベキナリ。サテ上ノ第三項ハ角 θ ヲ含マザルガ故ニ第一項即チ

$$\frac{k^2(a\cos^2\theta+2h\sin\theta\cos\theta+b\sin^2\theta)}{a'\cos^2\theta+2h'\sin\theta\cos\theta+b'\sin^2\theta}$$

モ亦 θ ニ無關係ナル定値ヲ有スベキナリ。故ニ

$$\frac{a}{a'}=\frac{h}{h'}=\frac{b}{b'} \qquad \cdots\cdots(7)$$

コレ二ツノ曲線ガ相似ニシテ且ツ相似ノ位置ニアル爲ノ必要條件ナリ。而シテコノ條件ハ同時ニ十分條件ナルコト明カナリ。

注意　(6)ハ θ ノ如何ニ關セズ成立スルガ故ニ第二項ト第三項トニヨリ

$$\frac{ax_1+hy_1+g}{a'x_2+h'y_2+g'}=\frac{hx_1+by_1+f}{h'x_2+b'y_2+f'}=\frac{C}{kC_1} \quad \cdots\cdots\cdots(8)$$

ナルコトヲ知ル。

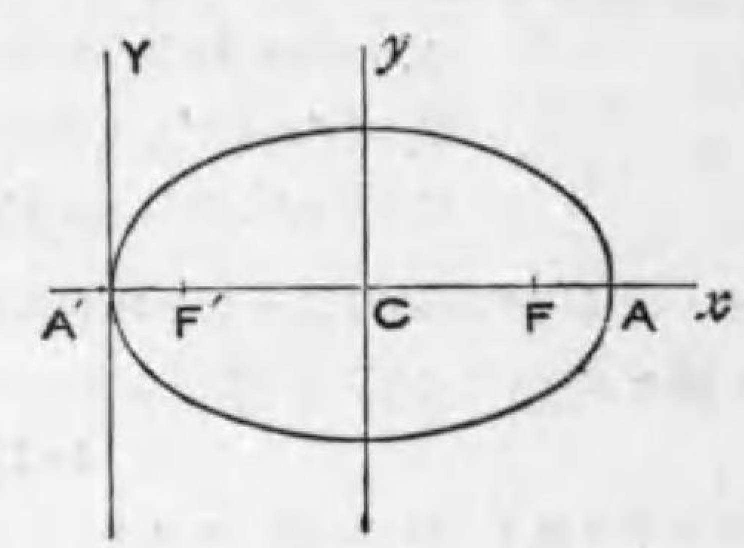
故ニ一ツノ相似ノ中心 $P(x_1, y_1)$ ヲ知ル時ハ，之ニ對應スル相似ノ中心 $P'(x_2, y_2)$ ガ知ラルベシ。

30. 拋物線ト楕圓トノ關係ヲ論ゼヨ。

［解］ 拋物線ハ楕圓ノ一ツノ頂點例ヘバ A' ト之ニ對應スル焦點 F' トノ位置ヲ固定シ置キ，中心ヲ無限遠ニ動カシタル時ノ極限ノ形ト考フルコトヲ得。今之ヲ説明セン。

原點ヲ A' ニ移シ，X 軸ヲ元ノ儘トシ，Y 軸ヲ A' ヨリ之ニ垂直ニ引キタルモノトスレバ，楕圓ノ方程式

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \cdots\cdots\cdots(1)$$



ハ，方程式

$$\frac{(X-a)^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1 \cdots(2)$$

トナル。(2) ヲ書キカフレバ

$$Y^2=\frac{b^2}{a^2}(2aX-X^2) \cdots(3)$$

今 $A'F'=p$ トシ之ヲ不變ナリトスレバ，

$$A'F'+F'C=p+\sqrt{a^2-b^2}=a$$

ナルガ故ニ

$$b^2=2ap-p^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

ノ關係アリ (4) ヲ (3) ニ代入スレバ

$$Y^2=\frac{(2ap-p^2)(2aX-X^2)}{a^2}=\left(2p-\frac{p^2}{a}\right)\left(2X-\frac{X^2}{a}\right) \quad \cdots\cdots\cdots(5)$$

今中心ヲ無限遠ニ動カスト，a ハ無限大トナルガ故ニ X ガ無限大ナラザル限リハ $\frac{p^2}{a}$，$\frac{X^2}{a}$ ハ共ニ無限小トナル，從ツテ方程式 (5) ハ如何ホドニテモ

$$Y^2=4pX$$

ニ近ヅクベシ。

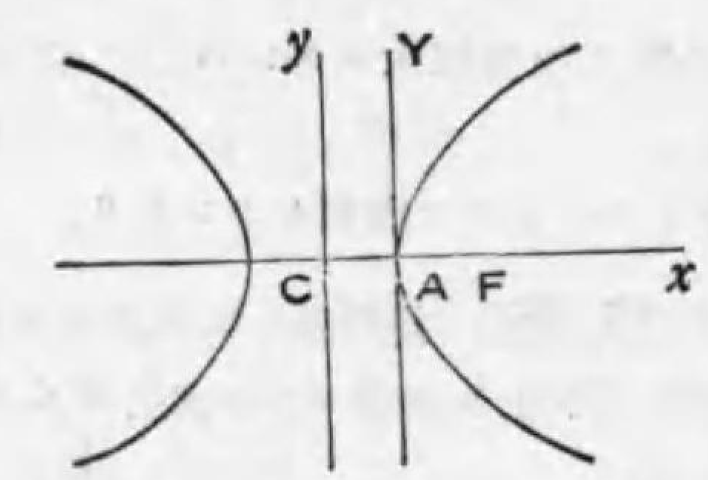
ヨツテ拋物線ハ楕圓ノ一ツノ頂點ト焦點トヲ固定シ中心ヲ無限遠點ニトリタル極限ノ形ナリトイフヲ得ベシ。

31. 拋物線ト双曲線トノ關係ヲ論ゼヨ。

［解］ 拋物線ハ双曲線ノ一ツノ頂點例ヘバ A ト之ニ對應スル焦點 F トノ位置ヲ固定シ，中心ヲ無限遠點ニ動カシタル時ノ極限ノ形ト考フコトヲ得。何トナレバ

坐標軸ヲ平行ニ動カシテ原點ヲ A ニ移ス時ハ，双曲線ノ方程式

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$



ハ，方程式

$$\frac{(X+a)^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1 \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

トナル。即チ

$$Y^2=\frac{b^2}{a^2}(2aX+X^2) \quad \cdots\cdots\cdots(3)$$

今 $AF=p$ トシ之ヲ不變ナルモノトス。然ル時ハ

$$CF-AF=a$$

ナルヲ以テ

$$\sqrt{a^2+b^2}-p=a$$

即チ

$$b^2=2ap+p^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

(4) ヲ (3) ニ代入スレバ，

$$Y=\frac{(2ap+p^2)(2aX+X^2)}{a^2}=\left(2p+\frac{p^2}{a}\right)\left(2X+\frac{X^2}{a}\right) \quad \cdots(5)$$

今中心ヲ無限遠ニ動カスト，a ガ無限大トナルガ故ニ X ガ無限大ナラザル限リハ $\frac{p^2}{a}$，$\frac{X^2}{a}$ ハ共ニ無限小トナル從ツテ方程式 (5) ハ如何ホドニテモ

$$Y^2=4pX$$

ニ近ヅクベシ。 ヨツテ拋物線ハ又双曲線ノ一ツノ頂點ト之ニ對應スル一ツノ焦點トヲ固定シ，中心ヲ無限遠點ニトレル極限ノ形ナリトイフヲ得ベシ。

32. 拋物線ハ楕圓ノ離心率ガ 1 トナレル極限ノ場合ニ相當スルコトヲ示セ。

[解] 楕圓ノ離心率ヲ e トスレバ, 定義ニヨリ

$$e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}$$

然ルニ問題三十ニヨレバ

$$b^2=2ap-p^2$$

ヨツテ

$$e^2=1-\frac{2p}{a}+\frac{p^2}{a^2}$$

今 a ヲ無限大ニスレバ

$$e=1$$

トナル。ヨツテ證明セラレタリ。

注意 拋物線ハ又双曲線ノ離心率ガ 1 トナレル極限ノ場合ニ相當スルコト上ト同様ニシテ證明スルヲ得ベシ。

第十二章　練習問題

1. 二次曲線

$$x^2+4xy+3y^2-5x-6y+3=0$$

ノ切線ノ中, 直線 $x+4y=0$ ニ平行ナルモノヲ求メヨ。

答　$x+4y-5=0$　$x+4y-8=0$

2. 五點 (0, 0), (1, 1), (−1, 1), (2, 0) 及ビ (3, 2) ヲ通ズル二次曲線ノ方程式ヲ求メヨ。

答　$6x^2+12xy+7y^2-12x-13y=0$

3. 二次曲線 $ax^2+2hxy+by^2=1$ ノ切線ノ, 二次曲線 $a'x^2+2h'xy$ $b'y^2=1$ ニ關スル極ノ軌跡ヲ求メヨ。

答　$a(h'x+b'y)^2-2h(a'x+h'y)(h'x+b'y)$
$+b(a'x+h'y)^2=ab-h^2$

4. 四ツノ定點ヲ過ル凡テノ二次曲線ニ關スル與ヘラレタル直線ノ極ノ軌跡ハ一ツノ二次曲線ナルコトヲ證セヨ。

5. 前題ニ於テ一ツノ定點ノ極線ハ凡テ定點ヲ過ルコトヲ證セヨ。

6. 五ツノ點ノ中, 四ツノ點ハ一直線上ニアル時ハ夫等ノ點ヲ過ル二次曲線ハ無數ニアルコトヲ證セヨ。

7. 四ツノ點ガ何レノ三ツモ同一ノ直線上ニアラザル時ハ之等ノ點ヲ通過スル双曲線ハ一般ニハ一個ナルコトヲ證セヨ。

8. 二次曲線ト圓トガ二ツノ點 P, Q ニ於テ切スル時, 切點ヲ結ビ付クル直線 PQ ガ二次曲線ノ一ツノ主軸ニ垂直ナルコトヲ證セヨ。

9. 二次曲線ニ三角形ヲ內接セシメ, 一ツノ頂點ハ定位置ヲモチ且ツ其點ニ於ケル法線ハ頂角ヲ二等分スルトキハ其頂點ニ對スル邊ハ法線ノ兩端ニ引キタル切線ノ交點ヲ過ルコトヲ證セヨ。

10. 二ツノ拋物線ハ一ツヨリ多クノ點ニ於テ切スルコト能ハズ, 之ヲ證セヨ。

11. 二次曲線

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

ニ於テ h ダケ變化セシムル時其中心ノ軌跡如何。

答　$by^2+fy=ax^2+gx$

12. 前題ニ於テ a 及ビ g ヲ變ズル時ハ如何。

答　$hx+by+f=0$

13. 定點 O ヨリ任意ノ直線ヲ引キ, 與ヘラレタル二次曲線ト P, Q ニ交ラシム。今其直線上ニ一點 R ヲトリ

$$OR^2=OP, OQ$$

ナラシムル時 R ノ軌跡ヲ求メヨ。

14. 與ヘラレタル三角形 ABC ノ二ツノ邊 AB, AC ノ中ニ二

ツノ點 M, N ヲトリ之ヲ結ビ付クル直線ノ中ニ一點 P ヲトリ

$$BM:MA=AN:NC=MP:PN$$

ナラシムル時 P ノ軌跡ヲ求メヨ。

15. 定點 O ヲ過ル半徑 r ナル圓ヲ畫キ與ヘラレタル二次曲線トノ交點ヲ P, Q, R, S トスレバ比

$$OP.OQ.OR.OS:r$$

ガ一定ナルコトヲ證セヨ。

第十三章

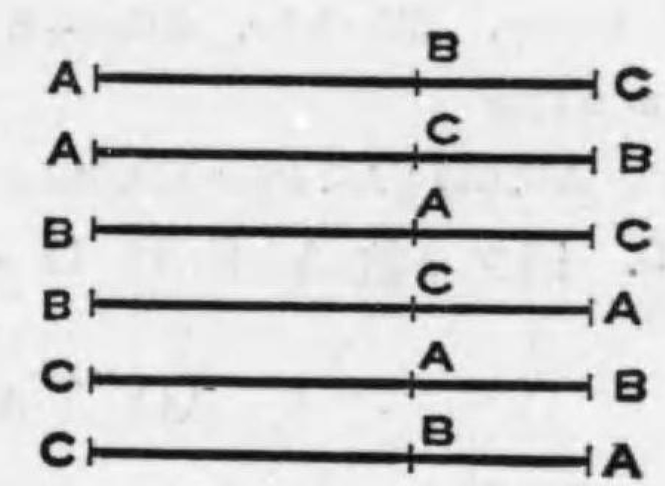
雜問題解義

1. 一直線上ニ任意ノ三點 A, B, C アル時ハ,

$$AB+BC+CA=0$$

ナルコトヲ證セヨ。

[解] 直線上ニ三ツノ點ガ並ブ仕方ハ右圖ノ如ク六通リアリ。最初ノ圖ニ於テ AB, BC ノ長サヲ a, b トスレバ $AC=a+b$ ナルヲ以テ CA ノ長サハ $-(a+b)$ ナリトイフベク從ッテ



$$AB+BC+CA=a+b-(a+b)=0$$

第二圖ニ於テハ

$$AC=a,\quad CB=b$$
$$AB=a+b$$

ナルヲ以テ $BC=-b \quad CA=-a$

故ニ $AB+BC+CA=a+b-b-a=0$

又第三圖ニ於テハ $BA=a$, $AC=b$, $BC=a+b$ ナルヲ以テ $AB=-a$, $CA=-b$ ヨッテ又

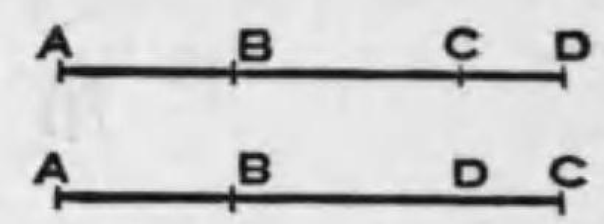
$$AB+BC+CA=-a+a+b-b=0$$

以下同樣ナレバ省略ス。

2. 四ツノ點 A, B, C, D ガ一直線上ニアル時ハ, 次ノ關係アルコトヲ證セヨ。

$$AB.CD+AC.DB+AD.BC=0$$

[解] A, B, C, D ナル四ツノ點ガ一直線上ニ並ブ仕方ハ



$$_4P_4=4.3.2.1=24$$

即チ二十四通リアルヲ以テ一々ノ場合ニ就キテ研究スルコトハ煩瑣ナリ。

故ニ右圖ノ如キ二ツノ場合ヲトリテ研究シ其他ノ場合ハ各自ノ驗證ニ待タントス。第一圖ニ於テ

$$AB=a,\qquad BC=b,\qquad CD=c$$

トスレバ $AC=a+b$, $AD=a+b+c$, $DB=-(b+c)$ ナルヲ以テ

$$AB.CD+AC.DB+AD.BC=ac-(a+b)(b+c)+(a+b+c)b=0$$

第二圖ニ於テハ

$$AB=a,\quad BC=b+c,\quad CD=-c,\quad AC=a+b+c.\quad DB=-b,\quad AD=a+b$$

ナルヲ以テ

$$AB.CD+AC.DB+AD.BC=-ac-(a+b+c)b+(a+b)(b+c)=0$$

3. 四ツノ點 A, B, C, D ハ一直線上ニアリテ

$$\frac{2}{AC}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AD}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ナル時ハ

$$\frac{AB}{BC}=-\frac{AD}{DC}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ナルコトヲ證セヨ。

[解] (1) ノ分母ヲ拂フト

$$2AB.AD=AC.AD+AC.AB\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

然ルニ A, B, C ハ直線上如何ナル順序ニアルモ

$$AC=AB+BC$$

ナルガ故ニ (3) ニコノ關係ヲ入レルト

$$AB.AD=BC.AD+AB^2+AB.BC$$

ヨツテ

$$AB(AD-AB-BC)=BC.AD$$

然ルニ $AD=AB+BC+CD$ ナルヲ以テ (點ノ順序ノ如何ニ關セズ)

$$AB.CD=BC.AD$$

而シテ　$CD=-DC$

ヨツテ

$$\frac{AB}{BC}=-\frac{AD}{DC}$$

注意　M ハ A ト C トノ中點ナリトスレバ

$$AB=AM+MB\qquad -DC=MD-MC=MD-AM$$
$$BC=AM-MB\qquad AD=MD+AM$$

ナルヲ以テ (2) ニ代入スレバ

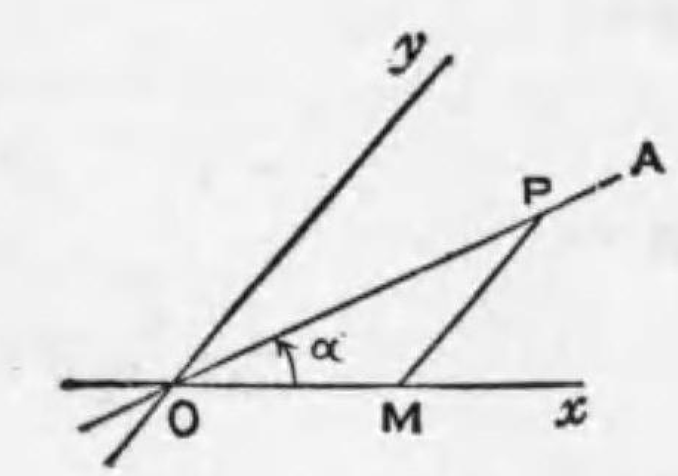
$$MB.MD=MA^2$$

ナル關係ヲ得。

4. 斜交軸ニ關スル直線ノ方程式ヲ求メヨ。

[解] 1° 原點ヲ過ル直線ノ方程式

OA ヲ直線トシ, x 軸トナス角ヲ α, 二ツノ坐標軸ノナス角ヲ ω トス。今直線上ニ任意ノ一點 $P(x, y)$ ヲトリ, 縱線 PM ヲ作ル時ハ



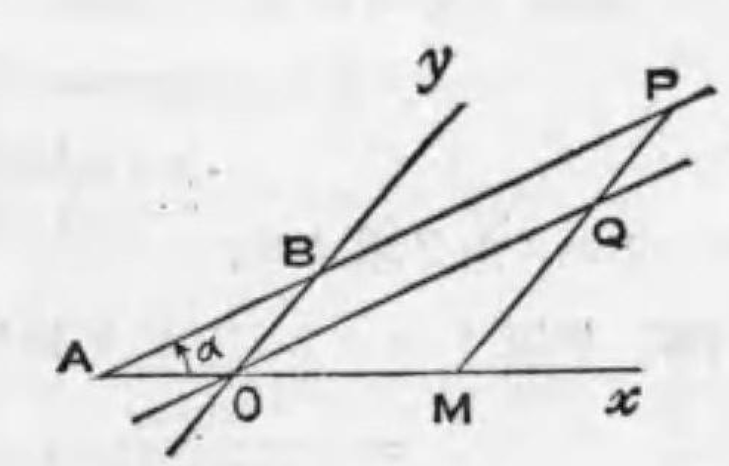
$$\frac{y}{x}=\frac{MP}{OM}=\frac{\sin x\hat{O}P}{\sin O\hat{P}M}$$
$$=\frac{\sin\alpha}{\sin(\omega-\alpha)}$$

ヨツテ求ムル方程式ハ

$$y=\frac{\sin\alpha}{\sin(\omega-\alpha)}x$$

2° 一般ノ方程式

AB ヲ直線ナリトシ, $x\hat{A}B$ ヲ α, $OB=b$ トシ, P ヲ直線上ノ任意ノ一點トシ其坐標ヲ x, y トス。今 O ヨリ AB ニ平行ニ OQ ヲ引キ P ヨリノ縱線ト Q ニテ交ラシム。然ル時ハ



$$y = \mathrm{MP} = \mathrm{MQ} + \mathrm{QP}$$

$$= \frac{\sin\alpha}{\sin(\omega-\alpha)}\mathrm{OM} + \mathrm{OB}$$

$$= \frac{\sin\alpha}{\sin(\omega-\alpha)}x + b$$

5. 兩軸ノ交角ガ 45° ナル時, 直線 $\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}=0$ ガ x 軸ノ正ノ方向トナス角 α ヲ求メヨ。

[解] 與ヘラレタル直線ノ方程式ヨリ

$$y = -\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}x - \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{B}}$$

故ニ前題ニヨリ

$$\frac{-\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \frac{\sin\alpha}{\sin(45^\circ-\alpha)} = \frac{\sin\alpha}{\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\alpha - \sin\alpha)}$$

卽チ

$$\frac{-\mathrm{A}}{\sqrt{2}\,\mathrm{B}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$$

從ツテ

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{A}-\sqrt{2}\,\mathrm{B}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$$

ヨツテ

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{A}-\sqrt{2}\,\mathrm{B}}$$

6. 兩軸ノ交角ガ ω ナル時, 二ツノ直線

$$y = mx + b \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$y = m'x + b' \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ノナス角ヲ求メヨ。

[解] 問題 4 ニヨリ (1) ガ x 軸トナス角ヲ α トスレバ,

$$m = \frac{\sin\alpha}{\sin(\omega-\alpha)} = \frac{\sin\alpha}{\sin\omega\cos\alpha - \cos\omega\sin\alpha}$$

ナルヲ以テ

$$\tan\alpha = \frac{m\sin\omega}{1+m\cos\omega} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

ナリ。同樣ニ (2) ガ x 軸トナス角ヲ α' トスレバ

$$\tan\alpha' = \frac{m'\sin\omega}{1+m'\cos\omega} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

故ニ (1) ト (2) トノ交角ヲ θ トスレバ

$$\tan\theta = \tan(\alpha-\alpha') = \frac{\tan\alpha - \tan\alpha'}{1+\tan\alpha\tan\alpha'}$$

ナルヲ以テ (3), (4) ヲ代入スレバ

$$\tan\theta = \frac{(m-m')\sin\omega}{1+(m+m')\cos\omega + mm'}$$

コレヨリ θ ヲ求ムルコトヲ得。

注　意　二次ノ同次方程式 $ax^2+2hxy+by^2=0$ ノ表ハス二ツノ直線ノナス角ヲ θ トスルト此場合ニハ

$$m+m' = \frac{-2h}{b} \qquad mm' = \frac{a}{b}$$

ナルヲ以テ

$$\tan\theta = \frac{\pm 2\sqrt{(h^2-ab)}\sin\omega}{a+b-2h\cos\omega}$$

トナル。

7. 三ツノ點 $(r\cos\alpha,\ r\sin\alpha)$, $(r\cos\beta,\ r\sin\beta)$, $(r\cos\gamma,\ r\sin\gamma)$ ヲ頂點トスル三角形ノ垂心ノ坐標ハ $r(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)$, $r(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)$ ナルコトヲ證セヨ。

[解] 點 $(r\cos\alpha,\ r\sin\alpha)$ ヨリ對邊ニ下セル垂線ノ方程式ハ

$$y - r\sin\alpha = -\frac{\cos\beta-\cos\gamma}{\sin\beta-\sin\gamma}(x - r\cos\alpha)$$

卽チ

$$y(\sin\beta-\sin\gamma) + x(\cos\beta-\cos\gamma) - r(\sin\alpha\sin\beta - \sin\alpha\sin\gamma$$
$$+\cos\alpha\cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma) = 0$$

同樣ニ頂點 $(r\cos\beta,\ r\sin\beta)$ ヨリ對邊ニ下セル垂線ノ方程式ハ

$$y(\sin\gamma-\sin\alpha)+x(\cos\gamma-\cos\alpha)-r(\sin\beta\sin\gamma-\sin\beta\sin\alpha$$
$$+\cos\beta\cos\gamma-\cos\beta\cos\alpha)=0$$

垂心ハ之等ノ交點ナリ。而シテ點 $r(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)$, $r(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)$ ハ之等ノ二ツノ方程式ヲ同時ニ滿足ス。ヨツテ證明セラレタリ。

8. 四點 A, B, C, D ガ一ツノ圓ノ上ニアル時ハ四ツノ三角形 ABC, BCD, CDA, DAB ノ垂心ハ一ツノ圓ノ上ニアルコトヲ證セヨ。

[解] 四ツノ點ハ半徑 r ナル圓ノ上ニアリトシ, 其坐標ヲ夫々 $(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$, $(r\cos\beta, r\sin\beta)$, $(r\cos\gamma, r\sin\gamma)$, $(r\cos\delta. r\sin\delta)$ トスレバ

三角形 ABC ノ 垂心 H_1 ハ $r(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)$, $r(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)$
" BCD " H_2 ハ $r(\cos\beta+\cos\gamma+\cos\delta)$, $r(\sin\beta+\sin\gamma+\sin\delta)$
" CDA " H_3 ハ $r(\cos\gamma+\cos\delta+\cos\alpha)$, $r(\sin\gamma+\sin\delta+\sin\alpha)$
" DAB " H_4 ハ $r(\cos\delta+\cos\alpha+\cos\beta)$, $r(\sin\delta+\sin\alpha+\sin\beta)$

ナリ。

然ルニ之等ハ何レモ點 $r(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos\delta)$, $r(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma+\sin\delta)$ ヲ中心トシ半徑 r ナル圓ノ上ニアルコト容易ニ知ラルベシ。

9. 正方形ノ四邊ヨリノ距離ノ自乘ノ和ガ一定 $(=k)$ ナルガ如キ點ノ軌跡ヲ求メヨ。

[解] 正方形 ABCD ノ一邊ノ長サヲ a トシ AB ヲ x 軸ニ AD ヲ y 軸ニトルト, 四邊ノ方程式ハ夫々

AB: $y=0$　　BC: $x=a$
CD: $y=a$　　AD: $x=0$

今軌跡ノ一點ヲ $P(x, y)$ トスレバ四邊ニ至ル距離ハ夫々次ノ如シ

AB ニ至ル距離ハ y,　BC " $a-x$
CD " $a-y$,　AD " x

從ツテ題意ニヨリ

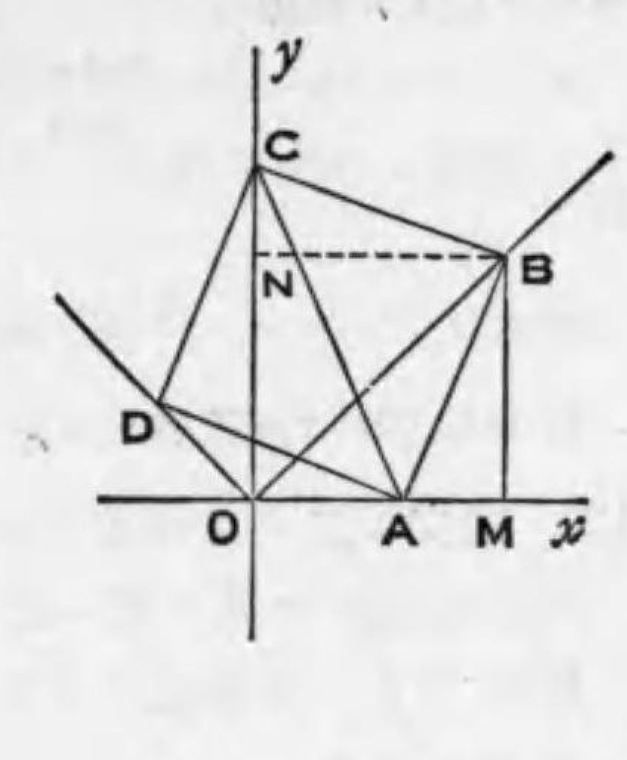
$$y^2+(a-x)^2+(a-y)^2+x^2=k$$

整頓スレバ

$$2(x^2+y^2-ax-ay)=k-2a^2$$

コレ一ツノ圓周ニシテ求ムル軌跡ナリ。

10. 正方形 ABCD ノ一ツノ對角線 AC ノ兩端ガ直交スル二直線上ヲ動クトキ他ノ一ツノ對角線 BD ノ兩端ノ軌跡如何。



[解] 直交スル二直線ヲ坐標軸ニトリ B ヨリ垂線 BM, BN ヲ引クトキハ

$$\triangle ABM\equiv\triangle CBN \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

故ニ正方形ノ一邊ノ長サヲ l トスレバ B ノ坐標ハ

$$x=NB=l\cos C\hat{B}N$$
$$y=MB=l\cos A\hat{B}M$$

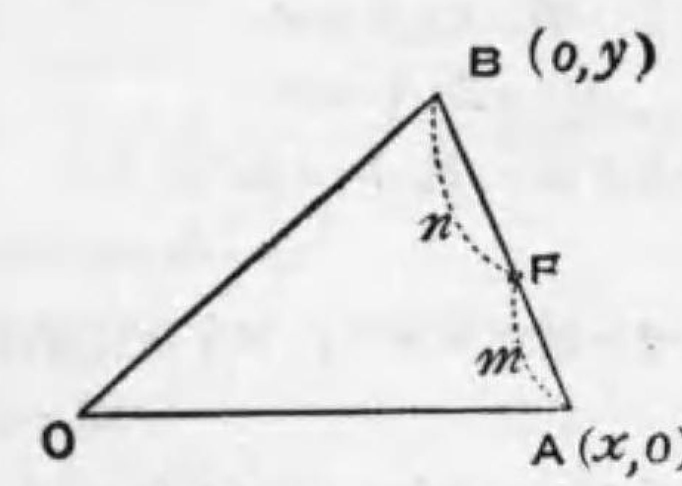
然ルニ (1) ニヨリテ $C\hat{B}N=A\hat{B}M$

故ニ B ノ坐標 x, y ノ間ニ

$$x=y$$

ナル關係アリ。コレ B 點ノ軌跡ニシテ角 xOy ノ二等分線ナリ。同樣ニ D 點ノ軌跡ガ $x=-y$ ナリ。

11. 三角形ノ一ツノ頂角及ビ面積ガ一定ナル時, 底邊ヲ定比ニ分ツ點ノ軌跡ヲ求メヨ。



[解] 三角形 AOB ニ於テ一ツノ頂角 O ガ一定角 α ナリトシ且ツ其面積ヲ k^2 トス。今 OA, OB ノ長サヲ夫々 x, y トシ底邊 AB ヲ P ニテ

$$PA:PB=m:n$$

ナルヤウニ内分スルモノトス。

今 OA, OB ヲ二ツノ軸ニトル時 P ノ坐標ヲ X, Y トスレバ

$$X=\frac{nx}{m+n} \qquad Y=\frac{my}{m+n}$$

故ニ

$$x=\frac{(m+n)X}{n} \qquad y=\frac{(m+n)Y}{m}$$

然ルニ假定ニヨリテ

$$\frac{1}{2}xy\sin\alpha=k^2$$

ヨツテ求ムル軌跡ハ

$$\frac{(m+n)^2}{2mn}\mathrm{XY}\sin\alpha=k^2$$

卽チ

$$\mathrm{XY}=\frac{2mnk^2}{(m+n)^2\sin\alpha}$$

コレ OA, OB ヲ漸近線トスル一ツノ双曲線ナリ。

12. 相交ルニツノ直線 Ox, Oy 上ニ兩端ヲ置キ此二直線ト相交ル定直線ニヨリテ常ニ比 $m:n$ ニ分タレルヤウニ移動スル直線 MN アリ。共兩端ヨリ夫々 Ox, Oy ニ垂線ヲ引ク時共交點ノ軌跡ヲ求メヨ。

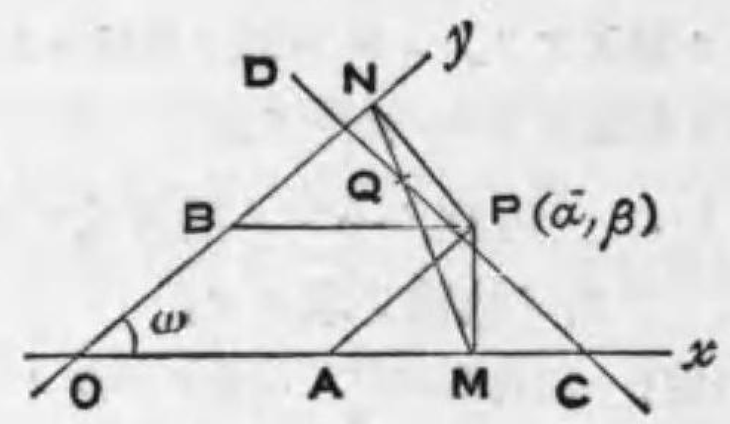
[解] 軌跡ノ一點ヲ $P(\alpha,\beta)$ トシ定直線 CD ノ方程式ヲ

$$y=m'x+b$$

トスレバ

$$\mathrm{OM}=\alpha+\beta\cos\omega$$

$$\mathrm{ON}=\beta+\alpha\cos\omega$$



ナルガ故ニ M, N ノ坐標ハ夫々

$$(\alpha+\beta\cos\omega,\ 0),\qquad (0,\ \beta+\alpha\cos\omega)$$

サテ題意ニヨリテ MN ガ定直線 CD ニヨツテ

$$\mathrm{MQ}:\mathrm{QN}=m:n$$

ニ分タルヽガ故ニ Q ノ坐標ハ

$$x=\frac{n(\alpha+\beta\cos\omega)}{m+n}\qquad y=\frac{m(\beta+\alpha\cos\omega)}{m+n}$$

ナリ而シテ Q ハ定直線 CD ノ上ニアルヲ以テ

$$\frac{m(\beta+\alpha\cos\omega)}{m+n}=\frac{m'n(\alpha+\beta\cos\omega)}{m+n}+b$$

ヨツテ求ムル軌跡ハ α, β ヲ流通坐標ニ化シタルモノ卽チ

$$y=\frac{m'n-m\cos\omega}{m-m'n\cos\omega}x+\frac{m+n\,b}{m-m'n\cos\omega}$$

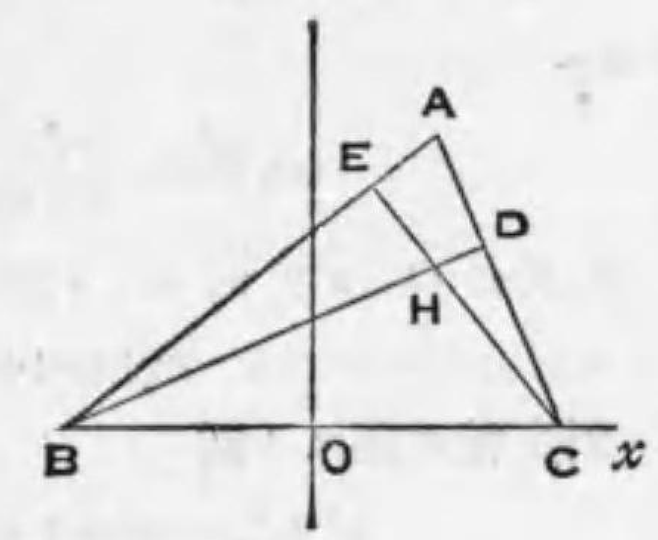
ツマリ一ツノ直線ナリ。

13. 三角形 ABC ノ一邊 BC ノ長サガ一定 $(2a)$ ニシテ且ツ對角 A ノ大サモ一定 (α) ナルトキ此三角形ノ垂心ノ軌跡ヲ求メヨ。

[解] BC ヲ x 軸トシ其垂直二等分線ヲ y 軸トスレバ, B, C ハ夫々點 $(-a,\ 0)$, $(a,\ 0)$ ナルヲ以テ垂線 BD, CE ノ方程式ハ夫々

$$y=m(x+a)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$y=m'(x-a)\ \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$



故ニ

$$\tan \mathrm{B\hat{H}C}=\frac{m'-m}{1+mm'}$$

然ルニ

$$\mathrm{B\hat{H}C}=\pi-\alpha$$

ナルヲ以テ

$$\tan \mathrm{B\hat{H}C}=-\tan\alpha=\frac{m'-m}{1+mm'}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

(1), (2) 及ビ (3) ヨリ不定ノ文字 m, m' ヲ消去スレバ求ムル軌跡ヲ得ベシ。卽チ

$$x^2+(y+a\cot\alpha)^2=a^2\operatorname{cosec}^2\alpha$$

卽チ點 $(0,\ -a\cot\alpha)$ ヲ中心トシ $a\operatorname{cosec}\alpha$ ヲ半徑トスル圓周ノ中, 弦 BC ヨリ上部ニアル部分ナリ。

注 意 A 點ヲ BC ヨリ下部ニトル時ニハ BC ニ關シテ對稱ノ弧ヲ得ベシ。卽チ中心ヲ $(0,\ a\cot\alpha)$ ニ置ク圓

$$x^2+(y-a\cot\alpha)^2=a^2\operatorname{cosec}^2\alpha$$

ノ弧ノ中, 弦 BC ヨリ下部ニアル部分ナリ。同様ノ注意ハ次ノ問題ニモ要求セラル。

14. BC$(=2a)$ ヲ斜邊トスル直角三角形ノ內切圓ノ中心ノ軌跡ヲ求メヨ。

［解］ 二ツノ軸ヲ前題ト同様ニ

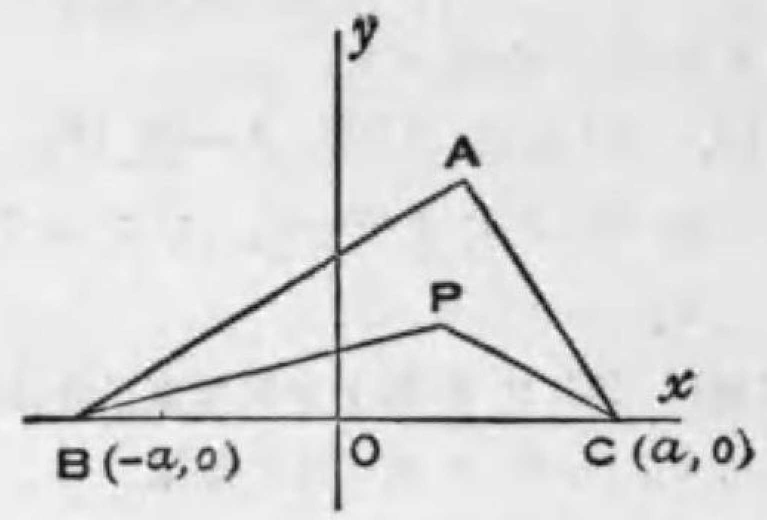
トリ $\hat{B}$ 及ビ $\hat{C}$ ノ二等分線 BP,

CP ノ方程式ヲ夫々

$$y=m(x+a) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$y=m'(x-a) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ナリトスレバ



$$B\hat{P}C=\frac{\pi}{2}+\frac{\hat{A}}{2}=\frac{3\pi}{4}$$

ナルガ故ニ

$$\tan B\hat{P}C=\frac{m'-m}{1+mm'}=-1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(1), (2) 及ビ (3) ヨリ m, m' ヲ消去スレバ所要ノ軌跡ヲ得。即チ

$$x^2+(y+a)^2=2a^2$$

15. 斜交軸ニ關スル圓

$$x^2+2xy\cos\omega+y^2-ax-by=0$$

ノ半徑ヲ求メヨ。

［解］ 圓ノ中心ヲ (a', b') 半徑ヲ r トスレバ其方程式ハ

$$(x-a')^2+(y-b')^2+2(x-a')(y-b')\cos\omega=r^2$$

但シ ω ハ斜交軸ノ交角ナリトス。(第五章公式(6))

コノ方程式ト與ヘラレタル方程式トハ同値ナルガ故ニ係數ヲ比較シテ

$$a=2(a'+b'\cos\omega) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$b=2(b'+a'\cos\omega) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$r^2=a'^2+b'^2+2a'b'\cos\omega \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(1), (2) ヨリ

$$a'=\frac{a-b\cos\omega}{2\sin^2\omega} \qquad b'=\frac{b-a\cos\omega}{2\sin^2\omega}$$

之等ヲ (3) ニ代入スレバ r ノ値ヲ得ベシ。即チ

$$r=\frac{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\omega}}{2\sin\omega}$$

16. 圓 $r^2-2r(\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta)=5$

ノ大サ及ビ位置ヲ定メヨ。

［解］ 第五章公式 (24) ニヨレバ圓ノ極方程式ハ

$$r^2+r'^2-2rr'\cos(\theta-\theta')=R^2$$

即チ

$$r^2-2rr'(\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta')+r'^2-R^2=0$$

之ト與ヘラレタル圓ノ方程式トヲ比較スレバ

$$r'\cos\theta'=1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$r'\sin\theta'=\sqrt{3} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$r'^2-R^2=-5 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(1) ト (2) トヨリ

$$\tan\theta'=\sqrt{3} \qquad \therefore\ \theta'=\frac{\pi}{3}$$

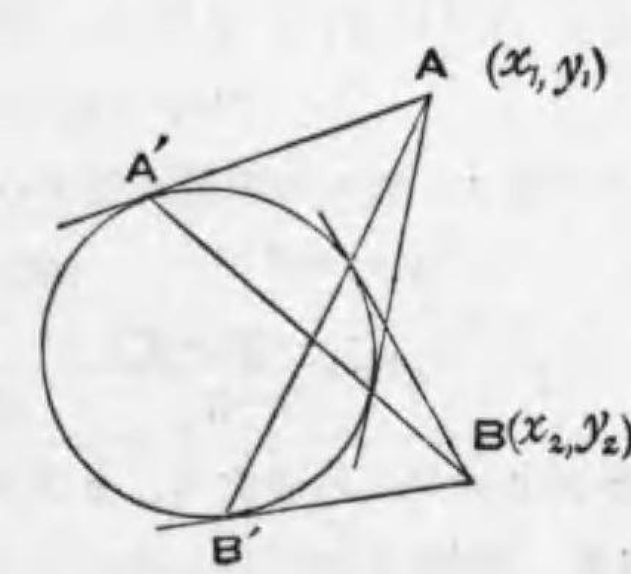
從ツテ (1) 或ハ (2) ヨリ $r'=2$, ヨツテ又 (3) ヨリ $R=3$ 故ニ與ヘラレタル圓ノ中心ハ $\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ ニシテ半徑ガ 3 ナリ。

17. A, B 二點ガ圓

$$x^2+y^2=r$$

ニ關シテ互ニ共軛ナル時ハ、AB ノ距離ノ平方ハ A, B ヨリ圓ニ至ル切線ノ長サノ平方ノ和ニ等シ。

［解］ 二點 A, B ハ圓ニ關シテ互ニ共軛ナル點ナリトハ, A ノ極線ハ B ヲ過リ, B ノ極線ハ A ヲ過ルガ如キ關係ニアル點ナリ。



サテ A, B ヲ點 (x_1, y_1), (x_2, y_2) トスレバ, A ノ極線ハ

$$xx_1+yy_1=r^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

然ルニ假定ニヨリテ此直線ハ $B(x_2, y_2)$ ヲ通ルガ故ニ

$$x_2x_1+y_2y_1=r^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ナル關係ガ成立ス。サテ

$$
\begin{aligned}
AB^2 &= (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2 = x_1^2+x_2^2+y_1^2+y_2^2-2(x_1x_2+y_1y_2)\\
&= x_1^2+x_2^2+y_1^2+y_2^2-2r^2 \quad \text{........[(2) ヨリ]}\\
&= (x_1^2+y_1^2-r^2)+(x_2^2+y_2^2-r^2)\\
&= AA'^2+BB'^2
\end{aligned}
$$

故ニ

$$AB^2 = AA'^2+BB'^2$$

18. 二點 A, B ガ一ツノ圓ニ關シテ共軛ナル時ハ AB ヲ直徑トシタル圓ハ與ヘラレタル圓ト直交ス。

[解] 與ヘラレタル圓ヲ

$$x^2+y^2=r^2 \quad \text{..................}(1)$$

ナリトシ, A, B ヲ點 (x_1, y_1), (x_2, y_2) ナリト假定スベシ。然ルトキハ AB ヲ直徑トスル圓ノ方程式ハ

$$\left(x-\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\left(y-\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left\{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2\right\} \quad \text{..........}(2)$$

然ルニ點 (x_1, y_1) ノ極線ハ點 (x_2, y_2) ヲ通ルガ故ニ

$$x_1x_2+y_1y_2=r^2 \quad \text{..................}(3)$$

ナル關係アリ。

ヨツテ (2) ニ (3) ヲ代入スレバ

$$x^2+y^2-(x_1+x_2)x-(y_1+y_2)y+r^2=0 \quad \text{..................}(4)$$

サテ (1) ト (4) トガ直交スル爲ニハ第六章公式 (1) ニヨリテ

$$2gg'+2ff'=c+c' \quad \text{..................}(5)$$

ナルヲ要ス。然ルニ本題ニ於テハ

$$g=f=0 \qquad c=-r^2$$

$$g'=\frac{-(x_1+x_2)}{2} \qquad f'=-\frac{y_1+y_2}{2} \qquad c'=r^2$$

ナルヲ以テ (5) ハ成立ス。ヨツテ證明セラレタリ。

19. 直線 $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ ト圓

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$

トノ二ツノ交點ヲ原點ト結ビ付クル直線ガ相互ニ垂直ナル爲ノ

條件ハ

$$2p^2+2p(g\cos\alpha+f\sin\alpha)+c=0$$

ナルコトヲ示セ。

[解] 第四章問題 11 ニヨリ直線ト圓トノ二ツノ交點ヲ原點ニ結ビ付クル直線ノ方程式ハ

$$x^2+y^2+\frac{2gx(x\cos\alpha+y\sin\alpha)}{p}+\frac{2fy(x\cos\alpha+y\sin\alpha)}{p}+c\left(\frac{x\cos\alpha+y\sin\alpha}{p}\right)^2=0$$

整頓スレバ

$$x^2(p^2+2pg\cos\alpha+c\cos^2\alpha)+2xy(pg\sin\alpha+fp\cos\alpha+c\sin\alpha\cos\alpha)+y^2(p^2+2fp\sin\alpha+c\sin^2\alpha)=0$$

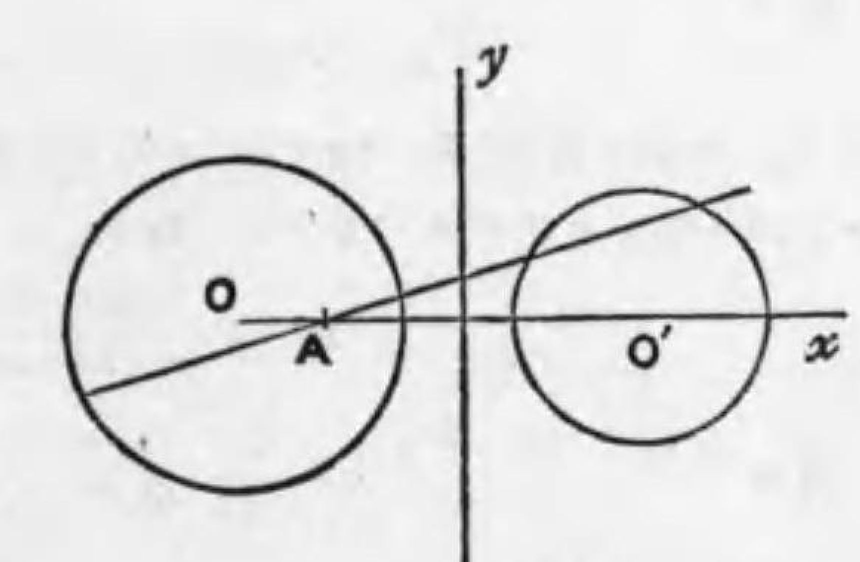
サテ此方程式ガ表ハス直線ノ方向係數ハ $\dfrac{y}{x}$ ニ關シテ解キタル二ツノ根 m, m' ニ等シ。故ニ夫等ノ二ツノ直線ハ互ニ垂直ナル爲ニハ

$$mm'=\frac{p^2+2pg\cos\alpha+c\cos^2\alpha}{p^2+2fp\sin\alpha+c\sin^2\alpha}=-1$$

或ハ

$$2p^2+2p(g\cos\alpha+f\sin\alpha)+c=0$$

20. 二ツノ圓ノ中心ヲ結ビ付クル直線上ニ一點ヲ取ルトキハ, コノ點ヲ過リテ引ケル任意ノ直線ノ各ノ圓ニ關スル極ヲ結ビ付クル直線ハ常ニ一定點ヲ通ルカ又ハ一定直線ニ平行ナルコトヲ證セヨ。



[解] 二ツノ圓ノ中心ヲ結ブ線分ヲ x 軸トシ其垂直二等分線ヲ y 軸トシ二ツノ圓 O, O' ノ方程式ヲ

$$(x-a)^2+y^2=r^2$$
$$(x+a)^2+y^2=r'^2$$

トス。今中心線上ノ一ツノ點 $A(\alpha, 0)$ ヲ過ル任意ノ直線ヲ

$$y=m(x-\alpha) \qquad (m\text{ ハ變數})$$

トスレバ此直線ノ二ツノ圓＝關スル極ハ第五章公式 (19′) ＝ヨリテ

$$\left(\frac{-r^2}{a-\alpha}+a,\ \frac{r^2}{m(a-\alpha)}\right),\quad \left(\frac{r'^2}{a+\alpha}-a,\ -\frac{r'^2}{m(a+\alpha)}\right)$$

故＝之等ヲ結ビ付ケル直線ノ方程式ハ

$$y-\frac{r^2}{m(a-\alpha)}=\frac{r^2(a+\alpha)+r'^2(a-\alpha)}{m\{2a(a^2-\alpha^2)-r^2(a+\alpha)-r'^2(a-\alpha)\}}\left(x+\frac{r^2}{a-\alpha}-a\right)$$

故＝此直線ハ常＝二ツノ定直線

$$y=0,\quad \frac{r^2(a+\alpha)+r'^2(a-\alpha)}{2a(a^2-\alpha^2)-r^2(a+\alpha)-r'^2(a-\alpha)}\left(x+\frac{r^2}{a-\alpha}-a\right)+\frac{r^2}{(a-\alpha)}=0$$

ノ交點ヲ過ル。

特別ノ場合トシテ $m=\infty$ ナル時即チ直線ガ x 軸＝垂直ナル時＝ハ極ハ

$$\left(\frac{-r^2}{a-\alpha}+a,\ 0\right),\quad \left(\frac{-r'^2}{a+\alpha}-a,\ 0\right)$$

ナルヲ以テ中心線ト一致ス。

21. 二ツノ圓 $x^2+y^2-6x+4=0$……………………………(1)

及ビ $x^2+y^2+5x+4=0$……………………………(2)

ト共軸＝シテ且ツ直線 $3x-4y=15$ ＝切スルガ如キ圓ノ方程式ヲ求メヨ。

［解］ (1) ト (2) トハ x ノ項ダケガ異ルヲ以テ第六章公式 (3) ＝ヨリ之等ノ圓ト共軸ナル圓ノ方程式ハ

$$x^2-2kx+y^2+4=0$$

即チ

$$(x-k)^2+y^2=k^2-4$$

ナリ。 此圓ガ直線 $3x-4y=15$ ＝切スル爲＝ハ中心ヨリ此直線＝至ル距離ハ半徑＝等シカラザルベカラズ。即チ

$$k^2-4=\frac{(3k-15)^2}{3^2+4^2}$$

故＝

$$k=\frac{5}{2}\text{ 或ハ }-\frac{65}{8}$$

ヨツテ求ムル圓ハ

$$x^2-5x+y^2+4=0$$

又ハ

$$x^2+\frac{65}{4}x+y^2+4=0$$

ナリ。

22. $x^2+y^2-2kx+c=0$ ＝於テ c ヲ一定數トシ k ヲ變數トスル時，此方程式ガ表ハス圓ノ一群ハ悉ク或定マレル二ツノ實又ハ虛ナル點ヲ過ルコトヲ示セ。

［解］ k ハ變數ナルヲ以テ與ヘラレタル圓ノ任意ノ二ツノ方程式ヲ

$$x^2+y^2-2k_1x+c=0$$
$$x^2+y^2-2k_2x+c=0$$

トスベシ。然ル時コノ二圓ノ交點ヲ求メン＝

$$x(2k_1-2k_2)=0$$

＝シテ $k_1 \neq k_2$ ナルヲ以テ

$$x=0$$

故＝與ヘラレタル圓ノ方程式＝ $x=0$ ト入レルコト＝ヨリ之等ノ一群ノ圓ハ常＝二ツノ點 $(0,\ \sqrt{-c})$, $(0,\ -\sqrt{-c})$ ヲ過ルコトヲ知ル。但シ $c>0$ ナラバ二ツガ虛點＝シテ $c\leqq 0$ ナル時ハ二ツガ實點ナリ。

23. $(n+1)(x^2+y^2)=ax+nby$ ……………………………(1)

＝テ表ハサルヽ凡テノ圓ハ n ノ値ノ如何＝關セズ同一ノ根軸ヲ有スルコトヲ證セヨ。

［解］ 與ヘラレタル方程式ヲ書キカフレバ

$$n(x^2+y^2-by)+(x^2+y^2-ax)=0$$

故＝ (1) ＝テ表ハサルヽ凡テノ圓ノ根軸ハ二ツノ圓

$$x^2+y^2-by=0$$
$$x^2+y^2-ax=0$$

ノ根軸＝一致ス。

24. 夫々二ツノ圓

$$(x-a)^2+y^2=r^2$$
$$(x+a)^2+y^2=r'^2$$

＝切シ且互＝直角＝交ル二ツノ直線ノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ。

［解］ 初メノ圓ノ切線ヲ

$$(x-a)\cos\alpha+y\sin\alpha=r \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

トスレバ第二ノ圓ニ切シ且ツ此直線ニ垂直ナル切線ノ方程式ハ

$$(x+a)\cos\left(\alpha\pm\frac{\pi}{2}\right)+y\sin\left(\alpha\pm\frac{\pi}{2}\right)=r'$$

卽チ

$$y\cos\alpha-(x+a)\sin\alpha=\pm r' \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1), (2) ヨリ

$$\frac{\cos\alpha}{\mp r'y-r(x+a)}=\frac{\sin\alpha}{-ry\pm r'(x-a)}=\frac{1}{a^2-x^2-y^2}$$

故ニ所要ノ軌跡ハ $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ヲ消去シタルモノ卽チ

$$\{\mp r'y-r(x+a)\}^2+\{-ry\pm r'(x+a)\}^2=(a^2-x^2-y^2)^2$$

ナリトス。

25. 圓ノ周上ノ點 P ヨリ二ツノ定半徑ニ夫々垂線 PM, PN ヲ引クトキ線分 MN ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ。

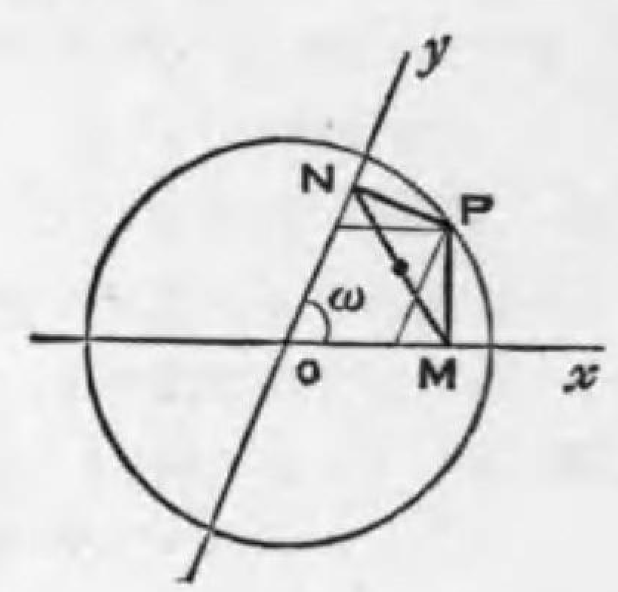
［解］ 定半徑ヲ二ツノ軸ニトリ與圓ノ方程式ヲ（中心ガ原點ニアルコトニ注意シテ）

$$x^2+y^2+2xy\cos\omega=r^2$$

トス。今 P ヲ (x', y') トスレバ

$$OM=x'+y'\cos\omega$$

$$ON=y'+x'\cos\omega$$



ナルガ故ニ MN ノ中點 R ヲ (x, y) トスレバ

$$x=\frac{x'+y'\cos\omega}{2} \qquad y=\frac{y'+x'\cos\omega}{2} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

然ルニ P 點 (x', y') ハ圓周上ノ點ナルヲ以テ

$$x'^2+y'^2+2x'y'\cos\omega=r^2 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1), (2) ヨリ x', y' ヲ消去スレバ所要ノ軌跡ヲ得ベシ。卽チ

$$x^2+y^2-2xy\cos\omega=\frac{1}{4}r^2\sin^2\omega$$

ナリ。

26. 一點ヲ過リ一直線ニ切スル圓ノ中心ノ軌跡ヲ求メヨ。

［解］ 與直線ヲ x 軸ニトリ一定點ヨリ之ニ下セル垂線ヲ y 軸トシ定點ヲ $(0, \beta)$ トス。今圓ノ方程式ヲ

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ト假定ス。然ルトキ點 $(0, \beta)$ ヲ過ル爲ニハ

$$\beta^2+2f\beta+c=0 \quad 卽チ \quad c=-\beta^2-2f\beta$$

ナラザルベカラズ。故ニ (1) ハ

$$x^2+y^2+2gx+2fy-\beta^2-2f\beta=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

而シテ (2) ハ x 軸ニ切スル爲ニハ

$$x^2+2gx-\beta^2-2f\beta=0$$

ガ（$y=0$ ト置キタルモノ）等根ヲ有スベキナリ。故ニ

$$g^2+\beta^2+2f\beta=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

サテ圓ノ中心ノ坐標ヲ X, Y トスレバ (1) ヨリ

$$\left.\begin{array}{l}X=-g\\ Y=-f\end{array}\right\} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

ヨツテ所要ノ軌跡ハ (3), (4) ヨリ g, f ヲ消去シタルモノ卽チ

$$X^2+\beta^2-2\beta Y=0$$

卽チ拋物線ナリ。

27. 直交軸ニ關スル三ツノ點ニテ作レル三角形ノ面積ノ公式

$$\frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$$

ハ, 其原點及ビ x 軸ヲ變ゼズシテ兩軸ノ交軸ガ ω ナル斜交軸ニ變更スルトキ如何ニナルベキカ。(第七章練習問題 6)

［解］ 直交軸ヨリ原點及ビ x 軸ヲ變ゼズ而カモ ω ナル交角ヲ有スル斜交軸ニ變換スル公式ヲ求メンニハ第七章公式 (5) ニ

$$\omega=\frac{\pi}{2} \qquad \beta=\omega$$

ト置ケバ

$$x=X+Y\cos\omega$$

$$y=Y\sin\omega$$

トナルヲ以テ, 面積ノ公式ニ代入スレバ

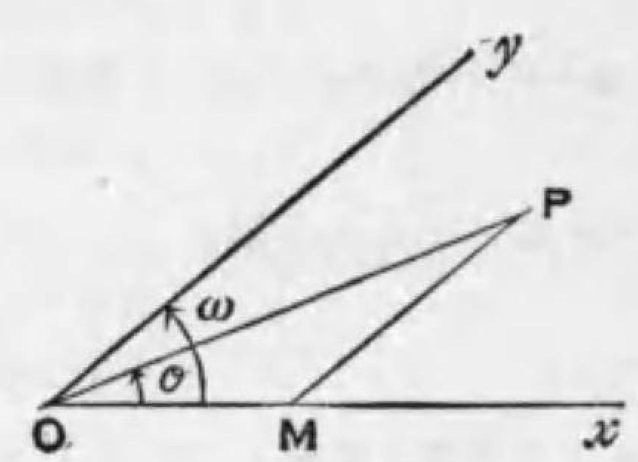
$$\frac{1}{2}\{(X_1+Y_1\cos\omega)(Y_2-Y_3)\sin\omega+(X_2+Y_2\cos\omega)(Y_3-Y_1)\sin\omega$$
$$+(X_3+Y_3\cos\omega)(Y_1-Y_2)\sin\omega\}$$
$$=\frac{1}{2}\sin\omega\{X_1(Y_2-Y_3)+X_2(Y_3-Y_1)+X_3(Y_1-Y_2)\}$$

即チ直交軸ニ關スル公式ニ $\sin\omega$ ヲ乘ズレバ可ナリ。

28. 原點ヲ極トシ x 軸ヲ原線ノ正ノ方向トシタル時，平行坐標ト極坐標トノ關係ヲ研究セヨ。

［解］ 軸ノ交角ヲ ω トシ一點 P ノ極坐標ヲ (r, θ) トスレバ圖ニ於ケル三角形 POM ニ於テ

$$\frac{x}{\sin(\omega-\theta)}=\frac{r}{\sin\omega}$$



故ニ

$$x=\frac{r\sin(\omega-\theta)}{\sin\omega}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

同樣ニ

$$y=\frac{r\sin\theta}{\sin\omega}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

ヲ得。(1), (2) ハ即チ求ムル關係式ナリ。

29. 斜交軸ニ關スル方程式

$$ax^2+2hxy+by^2+c=0$$

ガ原點ト x 軸ダケ共通ナル直交軸ニ直ストキ其方程式ガ

$$AX^2+2HXY+BY^2+C=0$$

トナル時ハ，

$$\frac{a+b-2h\cos\omega}{\sin^2\omega}=A+B,\quad \frac{ab-h^2}{\sin^2\omega}=AB-H^2$$

ナル關係アルコトヲ證セヨ。

［解］ 斜交軸ニ關シテ點 (x, y) ヲ直交軸ニテ表ハセバ其變換式ハ

$$x=X-Y\frac{\cos\omega}{\sin\omega}\qquad y=\frac{Y}{\sin\omega}$$

ナルヲ以テ，與ヘラレタル方程式ニ代入シテ整頓スレバ

$$aX^2+\left(-\frac{2a\cos\omega}{\sin\omega}+\frac{2h}{\sin\omega}\right)XY+\left(a\frac{\cos^2\omega}{\sin^2\omega}\right.$$
$$\left.-2h\frac{\cos\omega}{\sin^2\omega}+\frac{b}{\sin^2\omega}\right)Y^2+c=0$$

故ニ係數ヲ比較スレバ，

$$A=a,\qquad H=-\frac{a\cos\omega}{\sin\omega}+\frac{h}{\sin\omega}$$

$$B=a\frac{\cos^2\omega}{\sin^2\omega}-2h\frac{\cos\omega}{\sin^2\omega}+\frac{b}{\sin^2\omega}$$

故ニ

$$A+B=\frac{a+b-2h\cos\omega}{\sin^2\omega}$$

$$AB-H^2=\frac{ab-h^2}{\sin^2\omega}$$

ヲ得。

［別解］ 本題ハ又第七章問題解義 (12) ノ結果ニ於テ $\omega'=90°$ トスルコトニヨツテ直チニ得ラル。

30. 拋物線上ノ一點 $P(x', y')$ ニ於テノ法線ガ再ビ拋物線ト出會フ點 Q ノ坐標及ビ弦 PQ ノ長サヲ求メ且ツ焦點 F ヨリ P ニテノ切線へ引ケル垂線ノ長サヲ r トシ $FP=r'$ トスレバ

$$PQ=\frac{4rr'}{r'-p}$$

ナルコトヲ證セヨ。

［解］ P 點ニテノ法線ノ方程式ハ公式 (8) ニヨリテ

$$y-y'=-\frac{y'}{2p}(x-x')\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

コレヨリ

$$y=y'\left(1-\frac{x-x'}{2p}\right)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

サテ Q 點ノ坐標ハ，(2) ト拋物線ノ方程式

$$y^2=4px$$

トヨリ得ラル。即チ $\dfrac{(2p+x')^2}{x'}$，$-\dfrac{(2p+x')y'}{x'}$

故＝ PQ ノ長サハ $\dfrac{4\sqrt{p(p+x')^3}}{x'}$

ナルコトヲ知ル。又 F$(p, 0)$ ヨリ P ＝テノ切線＝下セル垂線ノ長サガ

$$r=\frac{2p(p+x')}{\sqrt{y'^2+4p^2}}=\sqrt{p(p+x')}\quad(\because\ y'^2=4px')$$

＝シテ FP ノ長サハ

$$r'=x'+p,$$

$$\therefore\qquad PQ=\frac{4\sqrt{p(p+x')^3}}{x'}=\frac{4rr'}{r'-p}$$

ナリ。

31. 拋物線ノ準線ト軸トノ交點 P ヲ通リ任意ノ直線ヲ引キ，曲線ト交ル點ヲ Q, R トシ，又焦點 F ヲ通ジテコレ＝平行ナル直線ガ曲線ト交ル點ヲ Q_1, R_1 トスレバ

$$PQ.\,PR=FQ_1.\,R_1F$$

［解］ P$(-p, 0)$ ヲ通ル直線ガ x 軸トナス角ヲ θ トスレバ其方程式ハ

$$\frac{x+p}{\cos\theta}=\frac{y}{\sin\theta}=r$$

ナルヲ以テ PQ, PR ノ長サハ之ヲ $y^2=4px$ ＝代入シテ得ル方程式

$$r^2\sin^2\theta-4pr\cos\theta+4p^2=0$$

ノ r ノ二ツノ値＝等シ。故＝根ト係數トノ關係＝ヨリ

$$PQ.\,PR=\frac{4p^2}{\sin^2\theta}$$

同樣＝ F ヲ通リ PQR ＝平行ナル直線ノ方程式ハ

$$\frac{x-p}{\cos\theta}=\frac{y}{\sin\theta}=r'$$

ナルヲ以テ FQ_1, FR_1 ノ長サハ

$$r'^2\sin^2\theta-4pr'\cos\theta-4p^2=0$$

ノ r' ノ二ツノ値＝等シキヲ以テ線ノ向キマデ考ヘ＝入ルレバ

$$FQ_1,\ FR_1=\frac{-4p^2}{\sin^2\theta}$$

故＝ $FR_1=-R_1F$ ナルコト＝注意スレバ

$$PQ.\,PR=FQ_1.\,R_1F$$

32. 拋物線上ノ一點ト焦點トヲ直徑ノ兩端トスル圓ハ共拋物線ノ頂點＝於ケル切線＝切スルコトヲ證明セヨ。

［解］ 拋物線上ノ一點 (x', y') ト焦點 $(p, 0)$ トヲ直徑ノ兩端トスル圓ノ方程式ハ

$$\left(x-\frac{x'+p}{2}\right)^2+\left(y-\frac{y'}{2}\right)^2=\frac{(x'-p)^2+y'^2}{4}$$

即チ

$$x^2-x(x'+p)+y^2-yy'+px'=0 \quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

此圓ガ拋物線ノ頂點＝於ケル切線

$$x=0$$

ト交ル點ノ y 坐標ハ

$$y^2-yy'+px'=0 \quad\cdots\cdots\cdots(2)$$

ヨリ得ラルベシ。然ル＝點 (x', y') ハ拋物線ノ上ノ點ナルヲ以テ

$$y'^2=4px' \quad\cdots\cdots\cdots(3)$$

ナル關係アリ。(3) ヲ (2) ＝代入スレバ

$$\left(y-\frac{y'}{2}\right)^2=0$$

即チ切線ト交ル二ツノ點ハ相重ルヲ知ル。故＝ (1) ハ頂點＝於ケル切線＝切ス。

33. 二ツノ相等シキ拋物線ガ同ジ焦點ヲ有シ，軸ハ同一直線ノ上＝反對ノ向キ＝アル時ハ，二ツノ曲線ハ直角＝交ルコトヲ證セヨ。

［解］ 一ツノ拋物線ヲ

$$y^2=4px$$

トスレバ，他ノ題意＝適スル拋物線ノ方程式ハ

$$y^2=-4p(x-2p)$$

＝シテ夫等ノ交點ハ $(p, \pm 2p)$ ナリ。今ソノ一ツノ交點 $(p, 2p)$ ＝於ケル切線ノ方程式ハ第十二章公式 (2) ＝ヨリテ

$$y-(x+p)=0 \quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$y+x-3p=0 \quad \cdots\cdots(2)$$

而シテ (1), (2) ハ垂直ニ交ルコト明カナリ。ヨツテ證明セラル。

注意　或點ニ於テ交ル二ツノ曲線ノナス角トイフハ，其點ニ於ケル切線ノナス角ヲ意味ス。本章問題解義 6 ヲ參照セヨ。

34. 拋物線ノ軸ハ x ノ軸ニシテ其頂點ハ原點ヨリ其主軸ノ四分ノ一ニ等シキ距離ニアリ，其方程式ヲ求メヨ。

[解]　主軸ヲ $4p$ トスレバ頂點ノ位置ハ $(p, 0)$ ナリ。故ニ求ムル方程式ハ

$$y^2=4px$$

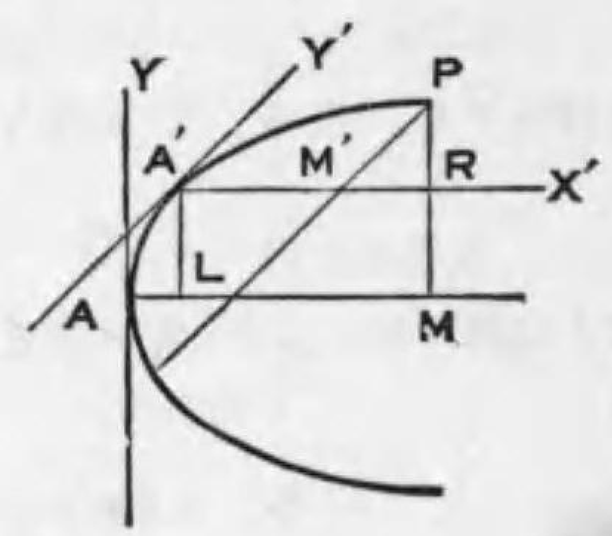
ヲ x 軸ヲカヘズニ原點ヲ $(p, 0)$ ニ移シタルモノ即チ

$$y^2=4p(x-p)$$

ナリ。

35. 拋物線ノ徑ト頂點ニ於ケル切線トヲ坐標軸トスル時ノ拋物線ノ方程式ヲ求メヨ。

[解]　一ツノ徑ヲ A'X' トシ頂點 A' ヲ (m, n) トシ A'X' ト切線 A'Y' トノナス角ヲ α トセヨ。切線 A'Y' ノ方程式ハ



$$ny=2p(x+m)$$

故ニ　$\tan\alpha=\dfrac{2p}{n}$ $\quad\cdots\cdots(1)$

サテ $P(x', y')$ ヲ拋物線上ノ任意ノ點トシ新軸 A'X', A'Y' ニ關スル坐標ヲ x, y トスレバ

$$AM=x'=AL+A'M'+M'R=m+x+y\cos\alpha \quad\cdots\cdots(2)$$

$$MP=y'=LA'+RP=n+y\sin\alpha \quad\cdots\cdots(3)$$

然ルニ P ハ拋物線ノ上ニアルヲ以テ舊軸ニ關シテハ

$$y'^2=4px' \quad\cdots\cdots(4)$$

(2), (3) ヲ (4) ニ入ルレバ

$$(n+y\sin\alpha)^2=4p(m+x+y\cos\alpha)$$

即チ

$$y^2\sin^2\alpha+2y(n\sin\alpha-2p\cos\alpha)+(n^2-4pm)=4px \quad\cdots\cdots(5)$$

然ルニ (1) ヨリ

$$\tan\alpha=\frac{2p}{n} \text{ 即チ } n\sin\alpha-2p\cos\alpha=0 \quad\cdots\cdots(6)$$

又 A' モ拋物線ノ上ニアルヲ以テ

$$n^2=4pm \quad\cdots\cdots(7)$$

(5) ニ (6) ト (7) トヲ代入スレバ

$$y^2\sin^2\alpha=4px \quad\cdots\cdots(8)$$

今 $\dfrac{p}{\sin^2\alpha}=p'$ ト置クト (8) ハ

$$y^2=4p'x \quad\cdots\cdots(9)$$

トナル。

36. p' ハ FA' ノ長サニ等シ。

[解]　$FA'=\sqrt{FL^2+A'L^2}=\sqrt{(p-m)^2+n^2} \quad\cdots\cdots(1)$

然ルニ　$n^2=4pm \quad\cdots\cdots(2)$

故ニ　$FA'=p+m$

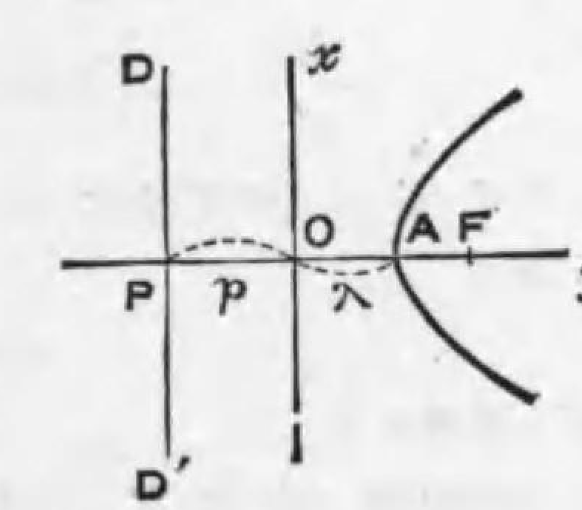
而シテ (2) ヨリ　$m=\dfrac{n^2}{4p}$

且ツ前題 (6) ヨリ　$n=2p\cot\alpha$

ヨツテ　$FA'=p+m=\dfrac{p}{\sin^2\alpha}=p'$

37. 拋物線ノ準線ノ足ヲ過リ軸ト四十五度ノ角ヲナス直線ハ同ジ軸及ビ同ジ準線ヲ有スル凡テノ拋物線ニ切ス。

[解]　準線ノ足 $(-p, 0)$ ヲ過リ軸ト四十五度ノ角ヲナス直線ノ方程式ハ



$$y=x+p \quad\cdots\cdots(1)$$

ニシテ同ジ軸及ビ同ジ準線ヲ有スル凡テノ拋物線ノ方程式ヲ求メンニ原點ヲ O トシ，OA ノ長サヲ變數 λ

ニテ表ハセバ抛物線ノ方程式ハ

$$(x-p-2\lambda)^2+y^2=(x+p)^2 \quad \cdots\cdots(2)$$

而シテ之ト直線 (1) トノ交點ヲ見ンニ

$$(x-p-2\lambda)^2=0$$

即チ x ノ二ツノ値ハ相等シ。故ニ λ ノ値ノ如何ニ關セズ (1) ハ (2) ニ切ス。

38. 抛物線ノ頂點ニ對シテ直角ヲ張ルガ如キ弦ノ極ノ軌跡ヲ求メヨ。

〔解〕 弦ヲ PP′ トシ頂點ヲ A トス。然ル時 AP ノ方程式ヲ

$$y=mx \quad \cdots\cdots 1)$$

トスレバ AP′ ノ方程式ハ (1) ト直交スルガ故ニ

$$y=-\frac{1}{m}x \quad \cdots\cdots(2)$$

故ニ P ノ坐標ハ $\left(\frac{4p}{m^2},\ \frac{4p}{m}\right)$ ニシテ P′ ノ坐標ハ $(4pm^2,\ -4pm)$ ナリ。

故ニ弦 PP′ ノ方程式ハ

$$y+4pm=\frac{m}{1-m^2}(x-4pm^2) \quad \cdots\cdots(1)$$

サテ弦 PP′ ノ極ヲ $(x',\ y')$ ト假定スレバ其極線即チ PP′ ノ方程式ハ

$$yy'=2p(x+x') \quad \cdots\cdots(2)$$

(1) ト (2) トガ同一ノ直線ナル爲ニハ

$$\frac{2p}{y'}=\frac{m}{1-m^2} \quad \cdots\cdots(3)$$

$$\frac{2px'}{y'}=-\left(4pm+\frac{4pm^3}{1-m^2}\right)=-\frac{4pm}{1-m^2} \quad \cdots\cdots(4)$$

(3) 及ビ (4) ヨリ不定文字 m ヲ消去シ且ツ $x',\ y'$ ヲ流通坐標ニ直シタルモノ即チ

$$x+4p=0$$

ハ所要ノ軌跡ナリ。

39. 抛物線ノ焦點 F ヲ過ル垂直ノ弦 PFP′ ノ一端 P ヨリ準線ヘ垂線 PN ヲ引ケバ三點 N, A, P′ ハ一直線上ニアルコトヲ證セヨ。

〔解〕 P 點ハ $(p,\ 2p)$ ニシテ P′ 點ハ $(p,\ -2p)$, 又 N ハ $(-p,\ 2p)$ ナリ。故ニ直線 NP′ ノ方程式ハ

$$y+2p=-2(x-p)$$

而シテ此方程式ハ A 點ノ坐標 (0, 0) ニテ滿足セラル。ヨツテ題言ノ如シ。

40. 軸ニ垂直ナル一直線上ノ任意ノ點ノ同ジ軸及ビ同ジ頂點ヲ有スル任意ノ抛物線ニ就キテノ極線ハ皆一ツノ定點ヲ過ル。

〔解〕 同ジ軸ト同ジ頂點トヲ有スル抛物線ノ方程式ハ

$$y^2=4px$$

ナリ。但シ p ハ變數ナリトス。サテ軸ニ垂直ナル一ツノ直線ヲ $x=\alpha$ トスレバ其上ノ任意ノ點 $(\alpha,\ \beta)$ ノ抛物線ニ關スル極線ノ方程式ハ

$$y\beta=2p(x+\alpha)$$

ナリ。而シテ此直線ハ $p,\ \beta$ ノ値ノ如何ニ關セズ定點 $(-\alpha,\ 0)$ ヲ通ル。

41. 抛物線ニ引キタル二ツノ法線ノ交點ヲ P トスル時此二ツノ法線ガ他ノ一ツノ定直線ト互ニ相等シキ角ヲナスモノトスレバ P 點ノ軌跡ハ一ツノ抛物線ナルコトヲ證セヨ。

〔解〕 一定直線ガ x 軸トナス角ヲ α ナリトス。今 $P(x,\ y)$ ニテ交ルベキ法線ノ方向ヲ與フベキ方程式ハ（講義百四十二頁）

$$y=mx-2pm-pm^3 \quad \cdots\cdots(1)$$

ナルヲ以テ，此三ツノ法線ノ中ノ二ツハ定直線ト相等シキ角ヲナスガ故ニ (1) ノ三ツノ根ヲ $m_1,\ m_2,\ m_3$ トスレバ

$$\tan^{-1}m_1+\tan^{-1}m_2=2\alpha$$

ナル關係ヲ有スベシ。即チ

$$\frac{m_1+m_2}{1-m_1m_2}=\tan 2\alpha=k$$

然ルニ (1) ヨリ

$$m_1+m_2+m_3=0$$

$$m_2m_3+m_3m_1+m_1m_2=\frac{2p-x}{p}$$

$$m_1m_2m_3=-\frac{y}{p}$$

故ニ

$$-m_3\div\left(1+\frac{y}{pm_3}\right)=k\ \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

又 m_3 ハ (1) ノ根ナルヲ以テ

$$pm_3^3+(2p-x)m_3+y=0\ \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

仍ツテ (2) ト (3) トヨリ m_3 ヲ消去セルモノハ求ムル軌跡ニシテ

$$k(ky+x-p)^2+p(1+k^2)\{(1-k^2)y+kx-kp\}=0$$

ナル拋物線ナリ。

42. 拋物線上ノ點 P, Q, R ニ於ケル法線ガ一點ニ會スル時ハ P, Q, R ヲ過ル圓ハ又此拋物線ノ頂點ヲ過ルコトヲ證セヨ。

[解] P, Q, R ヲ夫々點 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) トスレバ夫等ノ點ニ於ケル法線ノ方程式ハ

$$y-y_1=\frac{-y_1}{2p}(x-x_1)$$

$$y-y_2=\frac{-y_2}{2p}(x-x_2)$$

$$y-y_3=\frac{-y_3}{2p}(x-x_3)$$

然ルニ三ツノ法線ハ一點ニ於テ相會スルナラバ, 前題ニヨリテ

$$m_1+m_2+m_3=0$$

即チ

$$\frac{-y_1}{2p}+\frac{-y_2}{2p}+\frac{-y_3}{2p}=0$$

或ハ

$$y_1+y_2+y_3=0\ \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

今圓 PQR ノ方程式ヲ

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$

トスレバ此圓ガ拋物線 $y^2=4px$ ト交ル點ニ於テハ

$$\left(\frac{y^2}{4p}\right)^2+y^2+2g\frac{y^2}{4p}+2fy+c=0$$

根ト係數トノ關係ニヨリテ

$$y_1+y_2+y_3+y_4=0\ \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1), (2) ヨリ　$y_4=0$

從ツテ圓ト拋物線トノ第四ノ交點ハ拋物線ノ頂點ナリ。

43. 拋物線ニ定點ヲ通ズル數多ノ弦ヲ引キ之等ノ弦ノ兩端ヲ過リテ此拋物線ニ法線ヲ引ク時夫等ノ交點ノ軌跡如何。

[解] 任意ノ弦ノ兩端ヲ $\left(\frac{y_1^2}{4p},\ y_1\right)$, $\left(\frac{y_2^2}{4p},\ y_2\right)$ トスレバ此弦ノ方程式ハ

$$y(y_1+y_2)-4px-y_1y_2=0$$

此弦ハ定點 (α, β) ヲ通ズルヲ以テ

$$\beta(y_1+y_2)-4p\alpha-y_1y_2=0\ \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又弦ノ兩端ニ於ケル法線ノ方程式ハ

$$8p^2(y-y_1)+y_1(4px-y_1^2)=0\ \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$8p^2(y-y_2)+y_2(4px-y_2^2)=0\ \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

ヨツテ所要ノ軌跡ハ (1), (2) 及ビ (3) ヨリ y_1, y_2 ヲ消去シタルモノ即チ

$$2\{\beta(x-2p-\alpha)+2py\}^2=(\beta^2-4p\alpha)\{2\alpha(2p+\alpha-x)-\beta y\}$$

ニシテ一ツノ拋物線ナリ。

44. 拋物線ニ內接スル四邊形ノ三ツノ邊ガ夫々與ヘラレタル三ツノ直線ニ平行ナラバ第四ノ邊モ亦一ツノ定直線ニ平行ナリ。

[解] 拋物線 $y^2=4px$ ノ內接四邊形ヲ ABCD トシ且ツ其頂點 A, B, C, D ノ y 坐標ヲ y_1, y_2, y_3, y_4 トスレバ AB, BC, CD, DA ノ方程式ハ夫々次ノ如シ。

$$y(y_1+y_2)-4px-y_1y_2=0$$

$$y(y_2+y_3)-4px-y_2y_3=0$$

$$y(y_3+y_4)-4px-y_3y_4=0$$

$$y(y_4+y_1)-4px-y_4y_1=0$$

サテ三邊 AB, BC, CD ガ夫々與ヘラレタル三ツノ直線ニ平行ナリトスレバ方向係數

$$\frac{4p}{y_1+y_2},\quad \frac{4p}{y_2+y_3},\quad \frac{4p}{y_3+y_4}$$

ハ何レモ常數ナリ。從ツテ

$$(y_1+y_2)+(y_3+y_4)-(y_2+y_3)=y_1+y_4$$

モ一定ナリ。コレ卽チ第四ノ直線 DA ノ方向係數ガ一定ナルヲ以テ一ツノ定直線ニ平行ナリ。

45. 拋物線ニ於テ常ニ一定ノ距離ヲ有スル二ツノ直徑ガ曲線ト交ル點ヲ P 及ビ Q トス。P, Q ニ於ケル切線ノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ。

[解] 拋物線ノ方程式ヲ $y^2=4px$ トシ一定ノ距離ヲ k トスレバ，P ガ (x, y) ナル時ハ Q ガ $\left(\dfrac{(y+k)^2}{4p}, y+k\right)$ ナリ。故ニ P ニ於ケル切線ノ方程式ハ

$$yY=2p(X+x) \quad \cdots\cdots(1)$$

ニシテ，Q ニ於ケル切線ノ方程式ハ

$$(y+k)Y=2p\left\{X+\frac{(y+k)^2}{4p}\right\} \quad \cdots\cdots(2)$$

然ルニ點 (x, y) ハ拋物線ノ上ニアルヲ以テ

$$y^2=4px \quad \cdots\cdots(3)$$

(1), (2), (3) ヨリ x, y ヲ消去スレバ所要ノ軌跡ヲ得ベシ。而シテコレガ爲ニハ (1) ト (3) トヨリ

$$2yY=4pX+y^2 \quad \cdots\cdots(4)$$

(2) ヲ整頓スレバ，

$$2yY+2kY=4pX+y^2+2ky+k^2 \quad \cdots\cdots(5)$$

(4) ト (5) トヨリ

$$y=\frac{2Y-k}{2} \quad \cdots\cdots(6)$$

(6) ヲ (2) ニ代入スレバ

$$4Y^2=16pX+k^2 \quad \cdots\cdots(7)$$

コレ求ムルモノニシテ $h^2-ab=0$ ニ相當スルガ故ニ一ツノ拋物線ナリ。

46. 拋物線ニ於テ一定點ヲ過ル弦ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ。

[解] 定點 (α, β) ヲ過ル任意ノ直線ノ方程式ヲ

$$y-\beta=m(x-\alpha) \quad \cdots\cdots(1)$$

トスレバ (1) ガ拋物線 $y^2=4px$ ト交ル點ノ x 坐標ハ

$$\{m(x-\alpha)+\beta\}^2=4px$$

ヨリ得ラル、x ノ二ツノ値ナルヲ以テ弦ノ中點ノ x 坐標ハ

$$x=\frac{\alpha m^2+2p-\beta m}{m^2} \quad \cdots\cdots(2)$$

又 (1) ガ拋物線ト交ル點ノ y 坐標ハ

$$y^2=4p\left\{\frac{y-\beta}{m}+\alpha\right\}$$

ヨリ得ラル、y ノ二ツノ値ナルヲ以テ，弦ノ中點ノ y 坐標ハ

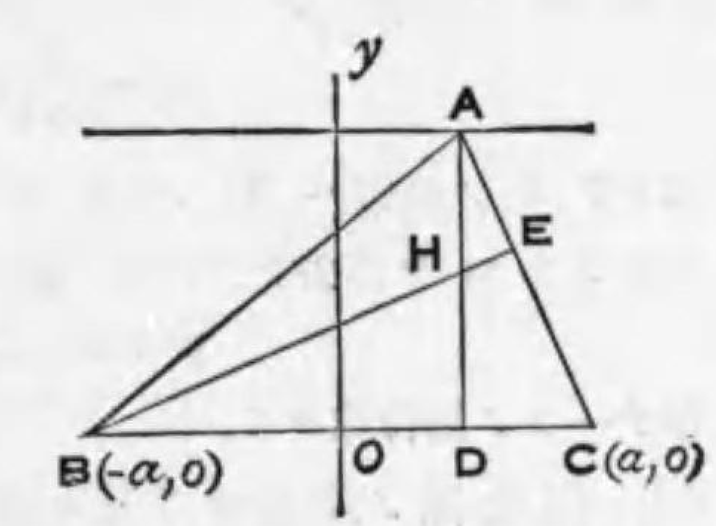
$$y=\frac{2p}{m} \quad \cdots\cdots(3)$$

故ニ所要ノ軌跡ハ (2) 及ビ (3) ヨリ不定係數 m ヲ消去シタルモノ卽チ

$$y^2-\beta y-2px+2\alpha p=0$$

ニシテ一ツノ拋物線ナリ。

47. 三角形 ABC ノ頂點 A ガ底邊 BC ニ平行ナル一直線上ヲ動クトキ，此三角形ノ垂心ノ軌跡ヲ求メヨ。



[解] 底邊 BC ヲ x 軸トシ，其長サヲ $2a$ トシ其垂直二等分線ヲ y 軸トスル時ハ B ハ $(-a, 0)$ ニシテ C ハ $(a, 0)$ ナリ。今頂點 A ノアルベキ直線ノ方程式ヲ

$$y=k$$

トシ A ヲ其上ノ任意ノ點 (x', k) トスレバ垂線 AD ノ方程式ハ

$$x=x' \quad \cdots\cdots(1)$$

ニシテ AC ノ方程式ハ

$$y=-\frac{k}{a-x'}(x-a)$$

ナルヲ以テ垂線 BE ノ方程式ハ

$$y=\frac{a-x'}{k}(x+a) \quad \cdots\cdots(2)$$

サテ垂心 H ハ (1) ト (2) ノ交點ナルヲ以テ所要ノ軌跡ハ之等ヨリ不定ノ文字 x' ヲ消去シタルモノ卽チ

$$y=\frac{a-x}{k}(x+a)$$

卽チ一ツノ拋物線ナリ。

48. AB, CD ハ圓ノ垂直ナル二ツノ直徑ナリ。A ヲ通ズル弦 AF ガ CD ト交ル點ヲ E トシ, E ヲ通ジテ AB ニ平行ナル直線ト FB トノ交點ヲ P トス。P ノ軌跡ヲ求メヨ。

［解］ 二ツノ直徑ヲ坐標軸トシ半徑ヲ a トスレバ圓ノ方程式ハ

$$x^2+y^2=a^2$$

ニシテ A, B ヲ夫々 $(-a, 0)$, $(a, 0)$ トシ。弦 AF ノ方程式ヲ

$$y=m(x+a)$$

トスレバ E ハ點 $(0, ma)$ ニシテ F ハ點 $\left(\frac{a(1-m^2)}{1+m^2}, \frac{2am}{1+m^2}\right)$ ナリ。故ニ EP ノ方程式ハ

$$y=ma \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

ニシテ BF ノ方程式ハ

$$y=-\frac{1}{m}(x-a) \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

而シテ P ノ坐標ハ (1) ト (2) トヲ同時ニ滿足スベキガ故ニ所要ノ軌跡ハ此等ヨリ m ヲ消去シタルモノ卽チ

$$y^2+ax-a^2=0$$

卽チ一ツノ拋物線ナリ。

49. 拋物線ノ頂點ヨリ互ニ垂直ナル直線 AB, AC ヲ引キ曲線トノ交點ヲ B, C トスルトキ BC ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ。

［解］ 拋物線 $y^2=4px$ ノ頂點ヨリ引ケル互ニ垂直ナル直線 AB, AC ノ方程式ヲ夫々 $y=mx$, $y=-\frac{1}{m}x$ トスレバ B ハ點 $\left(\frac{4p}{m^2}, \frac{4p}{m}\right)$ ニシテ C ハ點 $(4pm^2, 4pm)$ ナルヲ以テ BC ノ中點ヲ (x, y) トスレバ

$$\left.\begin{aligned} x&=2pm^2+\frac{2p}{m^2} \\ y&=2pm+\frac{2p}{m} \end{aligned}\right\}$$

ヨツテ求ムル軌跡ハ之等ヨリ m ヲ消去シタルモノ卽チ

$$\frac{y^2}{4p^2}-2=\frac{x}{2p}$$

ニシテ一ツノ拋物線ナリ。

50. 定規トこんぱすノミヲ用ヒテ拋物線ノ軸ヲ畫ケ。

［解］ 任意ノ二ツノ平行弦ヲ作リ其中點ヲ結ビテ徑 AB ヲ作ルベシ。而シテコノ徑ガ拋物線ト交ル點ヲ A トシ A ヲ過リテ AB ニ垂直ナル弦 AA′ ヲ作レバ, AA′ ノ垂直二等分線ハ卽チ求ムル軸ナリ。

51. 定規トこんぱすノミヲ用ヒテ楕圓ノ中心ヲ見出セ。

［解］ 任意ノ二ツノ平行弦ヲ作リ其中點ヲ連結スレバ一ツノ徑ヲ得。次ニ他ノ一組ノ平行弦ヲ作リ其中點ヲ連結スレバ又他ノ一ツノ徑ヲ得。楕圓ノ中心トハ要スルニ之等ノ徑ノ交點ナリ。

52. 一定點 P ヲ通リ互ニ垂直ナル任意ノ二直線ガ一定ノ楕圓又ハ双曲線ニ關シ常ニ共軛ナル時ハ P ハ焦點ノ一ツナルコトヲ證明セヨ。

［解］ P ヲ (x', y') トシ互ニ垂直ナル直線ヲ

$$y-y'=m(x-x') \cdots\cdots(1) \qquad y-y'=-\frac{1}{m}(x-x') \cdots\cdots(2)$$

ナリトシ, 楕圓ノ方程式ヲ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (a>b)$$

トセヨ。楕圓ニ關スル (1) ノ極ヲ (α, β) トスレバ, ソノ極線ハ

$$\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}=1$$

ニシテ (1) ト一致スベシ。故ニ

$$\frac{\alpha}{a^2}=\frac{-m}{y'-mx'} \cdots\cdots(3) \qquad \frac{\beta}{b^2}=\frac{1}{y'-mx'} \cdots\cdots(4)$$

又共軛ナル條件ヨリ點 (α, β) ハ (2) ノ上ニアルベシ。故ニ

$$\beta-y'=-\frac{1}{m}(\alpha-x') \quad \cdots\cdots\cdots(5)$$

(3), (4) 及ビ (5) ヨリ α, β ヲ消去シ且ツ整頓スレバ

$$m^2x'y'-m(a^2-b^2-x'^2+y'^2)-x'y'=0$$

コハ m ノ値ノ如何ニ關セズ成立スベキ筈ナリ。故ニ

$$x'y'=0 \qquad a^2-b^2=x'^2-y'^2$$

x', y' ハ實數ナルベキニヨリ $a>b$ ナルコトニ注意スレバ

$$y'=0 \qquad x'=\pm\sqrt{a^2-b^2}=\pm ea$$

故ニ P 點ハ二ツノ焦點 $(ea, 0)$, $(-ea, 0)$ ノ何レカナリ。

注意 以上ハ楕圓ニ就キテ研究セリト雖モ双曲線ノ場合モ同様ナリ。

53. ϕ_1, ϕ_2 ハ同焦點楕圓ナリ。若シ θ_1, θ_2 ヲ離心角トスル ϕ_1 上ノ二ツノ點ヲ P_1, P_2 トシ又 ϕ_2 上ノ二ツノ點ヲ Q_1, Q_2 トスルトキハ

$$P_1Q_2=P_2Q_1$$

ナルコトヲ證明セヨ。

[解] ϕ_1, ϕ_2 ノ方程式ヲ夫々

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad \frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}=1$$

トスレバ P_1, P_2, Q_1, Q_2 ハ次ノ如シ

$$P_1:(a\cos\theta_1,\ b\sin\theta_1), \qquad P_2:(a\cos\theta_2,\ b\sin\theta_2)$$
$$Q_1:(\sqrt{a^2+\lambda}\cos\theta_1,\ \sqrt{b^2+\lambda}\sin\theta_1)$$
$$Q_2:(\sqrt{a^2+\lambda}\cos\theta_2,\ \sqrt{b^2+\lambda}\sin\theta_2)$$

故ニ

$$P_1Q_2^2=(a\cos\theta_1-\sqrt{a^2+\lambda}\cos\theta_2)^2+(b\sin\theta_1-\sqrt{b^2+\lambda}\sin\theta_2)^2$$
$$P_2Q_1^2=(a\cos\theta_2-\sqrt{a^2+\lambda}\cos\theta_1)^2+(b\sin\theta_2-\sqrt{b^2+\lambda}\sin\theta_1)^2$$

然ルニソノ何レモ

$$a^2(\cos^2\theta_1+\cos^2\theta_2)+b^2(\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2)+\lambda$$
$$-2a\sqrt{a^2+\lambda}\cos\theta_1\cos\theta_2-2b\sqrt{b^2+\lambda}\sin\theta_1\sin\theta_2$$

トナル。故ニ相等シ。

54. 楕圓ノ上ノ切線ト，中心ト其切點トヲ結ブ直線トノナス角ノ最小ナル場合如何。

[解] 楕圓ノ上ノ點ヲ P トシ其離心角ヲ φ トスレバ，切線ノ方程式ハ第九章問題六注意 i ニヨリテ

$$\frac{x}{a}\cos\varphi+\frac{y}{b}\sin\varphi=1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又中心ト切點トヲ結ブ直線ノ方程式ハ

$$y=\frac{b\sin\varphi}{a\cos\varphi}x \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

故ニ (2) ト (1) トノ方向係數ハ夫々

$$m=\frac{b\sin\varphi}{a\cos\varphi} \qquad m'=-\frac{b\cos\varphi}{a\sin\varphi}$$

從ツテ二ツノ直線ノナス角ヲ θ トスレバ

$$\tan\theta=\frac{m-m'}{1+mm'}=\frac{ab}{(a^2-b^2)\sin\varphi\cos\theta} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

故ニ θ ヲ最小ニセンニハ (3) ノ分母ヲ最大ニスレバ可ナリ。然ルニ

$$\sin\varphi\cos\varphi=\frac{1}{2}\sin 2\varphi$$

ナルガ故ニ $\varphi=\frac{\pi}{4}$ ナル時ハ最大トナル。ヨツテ所要ノ切點ノ位置ハ離心率ガ $\frac{\pi}{4}$ ナル時ニシテ中心ヨリノ距離ヲ d トスレバ

$$d=\sqrt{\left(a\cos\frac{\pi}{4}\right)^2+\left(b\sin\frac{\pi}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{2}}$$

注意 離心角ガ $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$ ノ時ニモ要件ニ適スルヲ見ルベシ。

55. CP, CQ ハ楕圓ノ一對ノ共軛徑ナル時ハ

$$FP.F'P+FQ.F'Q=a^2+b^2$$

ナルコトヲ證セヨ。

[解] 第九章問題 31 ノ圖ニ於テ P ヲ (x', y') トスレバ Q ハ $\left(-\frac{a}{b}y',\ \frac{b}{a}x'\right)$ ナルヲ以テ

$$FP=\sqrt{(x'-ea)^2+y'^2}$$

而シテ $y'^2=b^2\left(1-\frac{x'^2}{a^2}\right)$ ニシテ $e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}$ ナルコトニ注意スレバ

$$\mathrm{FP}=\sqrt{(a-ex')^2}=a-ex' \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

同様ニ

$$\mathrm{F'P}=\sqrt{(x'+ea)^2+y'^2}=a+ex'$$

又 $$\mathrm{FQ}=\sqrt{\left(-\frac{a}{b}y'-ea\right)^2+\left(\frac{b}{a}x'\right)^2}=\sqrt{\left(a+\frac{ea}{b}y\right)^2}=a+\frac{ea}{b}y$$

$$\mathrm{F'Q}=\sqrt{\left(-\frac{a}{b}y'+ea\right)^2+\left(\frac{b}{a}x'\right)^2}=\sqrt{\left(a-\frac{ea}{b}y\right)^2}=a-\frac{ea}{b}y$$

故ニ

$$\mathrm{FP.\,FP'}+\mathrm{FQ.\,F'Q}=a^2-e^2x'^2+a^2-\frac{e^2a^2}{b^2}y'^2$$

然ルニ

$$e^2x'^2+\frac{e^2a^2}{b^2}y'^2=e^2x'^2+\left(1-\frac{x'^2}{a^2}\right)e^2a^2$$
$$=e^2a^2=a^2-b^2$$

ヨツテ

$$\mathrm{FP.\,FP'}+\mathrm{FQ.\,F'Q}=a^2+b^2$$

56. 楕圓ノ切線ガ長軸ト φ ナル角ヲナス時其中心ヨリノ距離ハ $a\sqrt{1-e^2\cos^2\varphi}$ ナルコトヲ示セ。

[解] 楕圓ノ方程式ヲ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

ナリトシ，切線ノ方程式ヲ

$$y=mx\pm\sqrt{m^2a^2+b^2}$$

ナリトスレバ，中心ヨリノ距離ハ

$$\frac{\sqrt{m^2a^2+b^2}}{\sqrt{1+m^2}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ナリ。然ルニ假定ニヨリテ

$$m=\tan\varphi \qquad e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ナルヲ以テ (1) ハ容易ニ

$$a\sqrt{1-e^2\cos^2\varphi}$$

ニ等シキコトヲ知ル。

57. 二ツノ曲線 $x^2+2y^2=1$, $3x^2-6y^2=1$ ハ直交スルコトヲ證セヨ。

[解] 二ツノ曲線ノ交點ノ一ツヲ (x', y') トスレバ其點ニ於ケル二ツノ切線ノ方程式ハ

$$xx'+2yy'=1, \qquad 3xx'-6yy'=1$$

從ツテ夫等ノ方向係數ハ

$$m=\frac{-x'}{2y'} \qquad m'=\frac{x'}{2y'}$$

故ニ

$$mm'=\frac{-x'^2}{4y'^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

然ルニ點 (x', y') ハ交點ナルヲ以テ

$$x'^2+2y'^2=1 \qquad 3x'^2-6y'^2=1$$

邊々相減ズレバ

$$-2x'^2+8y'^2=0 \quad 即チ \quad -x'^2=-4y'^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1) ニ (2) ヲ代入スレバ

$$mm'=-1$$

故ニ二ツノ曲線ハ互ニ直交ス。

58. 楕圓ヲ其短軸ニテ半分ニ分ツトキ其一ツニ內切スル圓ノ半徑ヲ求メヨ。

[解] 長軸上ニ中心ヲ置キ且ツ短軸ニ切スル圓ノ方程式ハ

$$(x-r)^2+y^2=r^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

然ルニ此圓ハ楕圓ニ切スル爲ニハ，(1) ニ楕圓ノ方程式

$$y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

ヲ代入シタルモノ即チ

$$x^2\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)-2rx+b^2=0$$

ハ等根ヲ有セザルベカラズ。故ニ判別式

$$r^2-\left(b^2-\frac{b^4}{a^2}\right)=0$$

故ニ

$$r=\frac{b\sqrt{a^2-b^2}}{a}=be$$

ナリ。

サテコノ圓ハ楕圓ノ中ニアルベキガ故ニ

$$a>2be \quad 從ツテ \quad a^4>4b^2(a^2-b^2)$$

即チ

$$a>\sqrt{2}\,b$$

ナルヲ要ス。即チ $a\leqq\sqrt{2}\,b$ ナル時ハ長軸 OA ノ中點ヲ中心トスル圓ナラザルベカラズ。故ニ其場合ノ半徑ハ $\frac{a}{2}$ ナリ。

59. 楕圓ノ通徑ノ端點 L ニ於ケル法線ガ B′ ヲ過ルトイフ。離心率ヲ求メヨ。

[解] L ノ坐標ハ $\left(ea,\ \frac{b^2}{a}\right)$ ナルヲ以テ其點ニ於ケル法線ノ方程式ハ

$$x-ey=ae^3$$

然ルニ此法線ハ B′(0, $-b$) ヲ過ルベキ爲ニハ

$$be=ae^3$$

$$\therefore\ e=\sqrt{\frac{a}{b}}$$

ナリ。

注意 通徑ニ就キテハ第九章二頁ニ定義シ置ケリ。

60. 有心曲線上ノ一點 P ニ於ケル法線ガ横軸ト N ニテ，短軸(又ハ共軛軸) ト N′ ニテ交ラシムル時ハ

$$\mathrm{PN}=\frac{bb'}{a} \qquad \mathrm{PN'}=\frac{ab'}{b}$$

又 CT ヲ中心 C ヨリ P ニ於ケル切線ヘノ垂線トスレバ

$$\mathrm{PN.CT}=b^2$$

ナルコトヲ證セヨ。但シ a, b ハ二ツノ半徑ニシテ b' ハ半徑 CP ニ關スル共軛半徑ナリトス。

[解] 楕圓ニ就キテ證明セン (双曲線ノ場合ハ各自ニヤラルベシ) 其方程式ヲ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

ナリトシ，P ヲ $(x',\ y')$ トスレバ其點ニ於ケル法線ノ方程式ハ

$$y-y'=\frac{a^2y'}{b^2x'}(x-x')$$

故ニ N, N′ ノ坐標ハ次ノ如シ

$$\mathrm{N}:\ \left(\frac{x'(a^2-b^2)}{a^2},\ 0\right) \quad \mathrm{N'}:\ \left(0,\ \frac{y'(a^2+b^2)}{b^2}\right)$$

故ニ

$$\mathrm{PN}=\frac{\sqrt{x'^2b^4+y'^2a^4}}{a^2} \qquad \mathrm{PN'}=\frac{\sqrt{x'^2b^4+y'^2a^4}}{b^2}$$

サテ半徑 CP ニ關スル共軛半徑ヲ CQ トスレバ，第九章公式 (13) ニヨリテ Q ハ點 $\left(\pm\frac{a}{b}y',\ \mp\frac{b}{a}x'\right)$ ナルヲ以テ，

$$\mathrm{CQ}=b'=\sqrt{\frac{a^2}{b^2}y'^2+\frac{b^2}{a^2}x'^2}=\frac{\sqrt{a^4y'^2+b^4x'^2}}{ab}$$

故ニ

$$\mathrm{PN}=\frac{bb'}{a} \qquad \mathrm{PN'}=\frac{ab'}{b}$$

又 P ニ於ケル切線ノ方程式ハ

$$\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}=1$$

ナルヲ以テ中心ヨリ之ニ至ル距離ヲ CT トスレバ

$$\mathrm{CT}=\frac{a^2b^2}{\sqrt{b^4x'^2+a^4y'^2}}$$

ナルヲ以テ

$$\mathrm{PN,CT}=b^2$$

61. 有心二次曲線ノ通徑ノ端ノ點 L ト A トヲ結ブ直線ノ方程式ヲ求メ然ル後 L ニ於ケル切線トナス角ヲ求メヨ。

[解] 楕圓ニ就キテ證明セン二 L ノ坐標ハ $ea,\ a(1-e^2)$ ニシテ A ノ坐標ハ $a,\ 0$ ナルヲ以テ直線 LA ノ方程式ハ

$$y-a(1-e^2)=\frac{a(1-e^2)}{ea-a}(x-ea)$$

整頓スレバ

$$y=-(1+e)(x-a)$$

又 L ＝於ケル切線ノ方程式ハ

$$\frac{ex}{a}+\frac{a(1-e^2)}{b^2}y=1$$

故＝切線ト直線トノ方向係數ハ夫々

$$m=-\frac{eb^2}{a^2(1-e^2)}=-e\left(\because\ \frac{b^2}{a^2}=1-e^2\right)$$

$$m'=-(1+e)$$

ヨツテ切線ト直線トノナス角ヲ θ トスレバ

$$\tan\theta=\frac{m-m'}{1+mm'}=\frac{1}{1+e(1+e)}=\frac{1}{1+e+e^2}$$

從ツテ　$$\theta=\tan^{-1}\frac{1}{1+e+e^2}$$

注　意　双曲線ノ場合ハ各自研究セラレヨ。

62. 楕圓ノ長軸ガ一定ナル時，通徑ノ端ノ點＝切スル切線ハ常＝二定點ノ中ノ一ツヲ過ルコトヲ證セヨ。

〔解〕 楕圓

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\quad(\text{但シ } a \text{ ガ一定，} b \text{ ハ變數})$$

ノ一ツノ焦點 $F(ea,\ 0)$ ヲ過ル通徑ノ端ノ點 L, L′ ＝於ケル切線ノ方程式ハ

$$\frac{xe}{a}\pm\frac{y}{a}=1$$

書キ變ヘルト

$$ex\pm y=a=0$$

故＝此切線ハ b ノ値ノ如何＝關セズ二定點 $(0,\ \pm a)$ ノ何レカ一ツヲ通ル。

注　意 i　他ノ焦點 $(-ea,\ 0)$ ヲ過ル通徑ノ端ノ點 L_1, L_1' ＝於ケル切線モ亦同樣ナリ。

注　意 ii　双曲線ノ場合モ同樣＝シテ成立ス。

63. 有心二次曲線ノ上ノ點 $P(x',\ y')$ ＝於ケル切線ガ PF トナス角ヲ θ トスレバ

$$\tan\theta=\frac{b^2}{aey'}$$

＝シテ

$$PC=\sqrt{a^2-b^2\cot^2\theta}$$

但シ C ヲ其曲線ノ中心トス。

〔解〕 楕圓＝就キテ證明セン＝（双曲線ノ場合ハ各自ヤラルベシ），P點＝於ケル切線ノ方程式ハ

$$\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}=1$$

故＝其方向係數ハ $-\dfrac{b^2x'}{a^2y'}$

次＝ PF ノ方程式ハ

$$y=\frac{y'}{x'-ea}(x-ea)$$

ナルヲ以テ其方向係數ハ $\dfrac{y'}{x'-ea}$

故＝ $b^2x'^2+a^2y'^2=a^2b^2$, $a^2-b^2=e^2a^2$ ナルコト＝注意スレバ，

$$\tan\theta=\frac{m-m'}{1+mm'}=-\left(\frac{y'}{x'-ea}+\frac{b^2x'}{a^2y'}\right)\div\left(1-\frac{b^2x'y'}{a^2y'(x'-ea)}\right)$$

$$=\frac{eab^2x'-a^2b^2}{y'(a^2x'-b^2x'-ea^3)}=\frac{b^2(eax'-a^2)}{y'(e^2a^2x'-ea^3)}$$

$$=\frac{b^2}{aey'}$$

又

$$PC=\sqrt{x'^2+y'^2}=\sqrt{a^2\left(1-\frac{y'^2}{b^2}\right)+y'^2}$$

$$=\sqrt{a^2-b^2\cot^2\theta} \qquad \left(\because \quad \tan\theta=\frac{b^2}{aey'}\right)$$

64. 楕圓ノ頂點 A ヲ過ル弦ガ短軸 CB ト R ニ於テ, 楕圓ト Q ニテ交ル; CP ハ之ニ平行ナル半徑ナル時ハ

$$AR.\,AQ=2CP^2$$

ナルコトヲ證セヨ。

[解] AQ ノ方程式ヲ

$$y=m(x-a)$$

トスレバ R ノ坐標ハ $(0,\ -ma)$ ニシテ Q ノ坐標ハ $\left(\frac{a^3m^2-ab^2}{b^2+a^2m^2},\ \frac{-2ab^2m}{b^2+a^2m^2}\right)$

故ニ

$$AR=\sqrt{a^2+m^2a^2}=a\sqrt{1+m^2}$$

$$AQ=\frac{2ab^2\sqrt{1+m^2}}{b^2+a^2m^2}$$

従ツテ
$$AR.\,AQ=\frac{2a^2b^2(1+m^2)}{b^2+a^2m^2}$$

又 CP ノ方程式ハ

$$y=mx$$

ナルヲ以テ, P 點ハ $\left(\frac{-ab}{\sqrt{b^2+a^2m^2}},\ \frac{-abm}{\sqrt{b^2+a^2m^2}}\right)$

$$\therefore \quad CP^2=\frac{a^2b^2(1+m^2)}{b^2+a^2m^2}$$

$$\therefore \quad AR.\,AQ=2CP^2$$

65. 一點 P ヨリ楕圓ニ下シタル二ツノ切線ノ切點ヲ中心ニ結ビ付ケル時互ニ垂直ナルトキ P ノ軌跡如何。

[解] 第九章問題解義二十七ニヨルト P 點 $(x',\ y')$ ヨリ楕圓ニ引ク二ツノ切線ノ切點ヲ中心ニ結ビ附ケル二ツノ直線ノ方程式ハ

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)=\left(\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}\right)^2$$

少シク書キ換ヘルト

$$\frac{y^2}{x^2}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{y'^2}{b^4}\right)-2\frac{y}{x}\frac{x'y'}{a^2b^2}+\left(\frac{1}{a^2}-\frac{x'^2}{a^4}\right)=0$$

然ルニ之等ノ二ツノ直線ノ方向係數ハ上ノ方程式ヲ $\frac{y}{x}$ ニ就キテ解キタル二ツノ根 $m,\ m'$ ナリ。故ニ互ニ垂直ナル條件ハ

$$mm'=\left(\frac{1}{a^2}-\frac{x'^2}{a^4}\right)\div\left(\frac{1}{b^2}-\frac{y'^2}{b^4}\right)=-1$$

仍ツテ所要ノ軌跡ハ $x',\ y'$ ヲ流通坐標ニ直シタルモノ即チ

$$\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$$

ナリ。

66. 楕圓ノ一焦點ヲ通ル弦 PFP′ ノ上ニ Q 點ヲトリ

$$FQ^2=FP,\ FP'$$

ナラシムル時 Q ノ軌跡如何。

[解] 第九章問題 17 ニヨレバ

$$FP.\,FP'=\frac{b^4}{a^2(1-e^2\cos^2\theta)}$$

今 Q ヲ $(R,\ \theta)$ トスレバ題意ニヨリ

$$\frac{b^4}{a^2(1-e^2\cos^2\theta)}=R^2$$

コレ求ムル軌跡ナリ。

注意 直交軸ニ關スル方程式ニ直サンニ $R\cos\theta=x,\ R^2=x^2+y^2$ ト置ケバ

$$b^4=a^2(x^2+y^2)-a^2e^2x^2$$

$$=a^2y^2+b^2x^2$$

故ニ
$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{\frac{b^4}{a^2}}=1$$

ヨツテ離心率ヲ e' トスレバ

$$e'^2=\left(b^2-\frac{b^4}{a^2}\right)\div b^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}=e^2$$

故ニ軌跡ハ一ツノ楕圓ニヨツテ其離心率ハ原ノ楕圓ノソレト同ジ。

67. 楕圓ノ一對ノ共軛徑ノ端ヲ結ビ付クル弦ヘ中心ヨリ引キタル垂線ノ足ノ軌跡ヲ求メヨ。

[解] 第九章公式 (13) ニヨリ一ツノ徑ガ楕圓ト交ル點ヲ $P(x', y')$ トスレバ共軛徑ガ楕圓ト交ル點 Q, Q' ハ

$$x=\pm\frac{a}{b}y' \qquad y=\mp\frac{b}{a}x'$$

故ニ PQ ノ方程式ハ (PQ′ ノ場合ハ各自研究セラレヨ)

$$ay(bx'-ay')=bx(ay'+bx')-b^2x'^2-a^2y'^2$$

即チ

$$ay(bx'-ay')=bx(ay'+bx')-a^2b^2 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ナルヲ以テ C ヨリ之ニ引ケル垂線ノ方程式ハ

$$y=-\frac{a(bx'-ay')}{2(ay'+bx')}x \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1), (2) ヨリ

$$x'=\frac{a(ax-by)}{2(x^2+y^2)} \qquad y'=\frac{-b(ax+by)}{2(x^2+y^2)} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

然ルニ (x', y') ハ楕圓ノ上ノ點ナルガ故ニ

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

ヨツテ求ムル軌跡ハ (4) ニ (3) ヲ入レタルモノ即チ

$$a^2x^2+b^2y^2=2(x^2+y^2)^2$$

ナリ。

68. 一定ノ長サヲ有スル線分 AB ノ兩端ガ夫々直角ニ相交ル二ツノ直線ノ上ニアル時, AB ヲ與ヘラレタル比ニ分ツ點ノ軌跡ヲ求ム。

[解] 直角ニ交ル直線ヲ Ox, Oy トシ之等ヲ座標軸ニトルモノトス。今 A 點ガ Ox 上ニ B 點ガ Oy 上ニ動クモノトシ

$$AC:BC=m:n$$

ナルガ如ク分ツ點 C ノ軌跡ヲ求メントス。今 AB ノ方程式ヲ

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

トスレバ A 點ハ $(a, 0)$ ニシテ B 點ハ $(0, b)$ ナルヲ以テ C 點ノ坐標ヲ X, Y トスレバ

$$\left.\begin{aligned} X&=\frac{na}{m+n} \\ Y&=\frac{mb}{m+n} \end{aligned}\right\}$$

サテ AB ノ長サヲ l トスレバ

$$a^2+b^2=l^2$$

ナル關係アルヲ以テ所要ノ軌跡ハ

$$\left(\frac{m+n}{n}X\right)^2+\left(\frac{m+n}{m}Y\right)^2=l^2$$

コレ即チ楕圓ナリ。

69. 楕圓上ノ一點ニ於テノ切線ヘ中心ヨリ引ケル垂線ト切點ノ縦線ノ延長トノ交點ノ軌跡ヲ求ム。

[解] 楕圓

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

ノ上ノ點 (x', y') ニ於ケル切線ヘ原點ヨリ引キタル垂線ノ方程式ハ

$$y=\frac{a^2y'}{b^2x'}x \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又切點ノ縦線ノ方程式ハ

$$x=x' \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

故ニ交點ニテハ (1) ト (2) トガ同時ニ滿足セラルベシ。而シテ

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

ナル關係アルヲ以テ所要ノ軌跡ハ (1), (2) 及ビ (3) ヨリ x', y' ヲ消去シタルモノ即チ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{b^2}{a^4}y^2=1$$

即チ一ツノ楕圓ナリ。

70. 楕圓上ノ一點 P ニ於テノ切線ガ長軸及ビ短軸ノ延長ト夫々

T 及ビ t ニ於テ交ル。Tt ヲ比 $m:n$ ニ内分スル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

[解] 楕圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ノ上ノ點 $P(x', y')$ ニ於ケル切線ノ方程式ハ

$$\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}=1$$

ナルヲ以テ T ハ點 $\left(\frac{a^2}{x'},\ 0\right)$ ニシテ t ハ點 $\left(0,\ \frac{b^2}{y'}\right)$ ナリ。故ニ

$$TQ:Qt=m:n$$

ナルヤウニ内分スル時 Q ノ坐標ヲ (x, y) トスレバ

$$x=\frac{\frac{na^2}{x'}}{m+n}\qquad y=\frac{\frac{mb^2}{y'}}{m+n}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又點 P ノ坐標ハ

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1\ \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ヲ滿足ス。ヨツテ所要ノ軌跡ハ (1), (2) ヨリ x', y' ヲ消去シタルモノ即チ

$$\frac{n^2a^2}{(m+n)^2X^2}+\frac{m^2b^2}{(m+n)^2Y^2}=1$$

ナリ。

71. 楕圓ノ互ニ直交スル徑ノ端ニ於ケル切線ノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ。

[解] 一ツノ徑ガ長軸ト φ ナル角ヲナスト假定スレバ其徑ノ方程式ハ $y=\tan\varphi.\ x$ ナルヲ以テ交點ノ一ツハ

$$x'=\frac{ab}{\sqrt{b^2+a^2\tan^2\varphi}}\qquad y'=\frac{ab\tan\varphi}{\sqrt{b^2+a^2\tan^2\varphi}}$$

故ニ交點ニ於ケル切線ノ方程式ハ

$$\frac{bx}{a\sqrt{b^2+a^2\tan^2\varphi}}+\frac{a\tan\varphi y}{b\sqrt{b^2+a^2\tan^2\varphi}}=1\ \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又他ノ徑ノ端ノ切線ノ方程式ハ (1) ノ φ 代リニ $\varphi+\frac{\pi}{2}$ ト置ケルモノニ等シ。即チ

$$\frac{bx}{a\sqrt{b^2+a^2\cot^2\varphi}}-\frac{a\cot\varphi}{b\sqrt{b^2+a^2\cot^2\varphi}}=1\ \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

仍ツテ所要ノ軌跡ハ (1), (2) ヨリ φ ヲ消去シタルモノ即チ

$$\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$$

ナリ。

72. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ト同焦點ナルスベテノ二次曲線ニ對シテ一ツノ與ヘラレタル直線 $lx+my=1$ ノ極ノ軌跡ヲ求メヨ。

[解] 與ヘラレタル曲線ト同焦點ナル二次曲線ヲ

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}=1\ \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

トシ，軌跡ノ一點ヲ (α, β) トスレバ其點ノ (1) ニ關スル極線ハ

$$\frac{\alpha x}{a^2+\lambda}+\frac{\beta y}{b^2+\lambda}=1$$

ナリ而シテ此直線ハ $lx+my=1$ ニ一致スルガ爲ニハ

$$\frac{\alpha}{a^2+\lambda}=l\qquad \frac{\beta}{b^2+\lambda}=m$$

コレヨリ變數 λ ヲ消去シ且ツ α, β ヲ流通坐標ニ直セバ所要ノ方程式ヲ得。即チ直線

$$\frac{x}{l}-\frac{y}{m}=a^2-b^2$$

ナリ。

73. 双曲線ノ上ノ點 P ニ於ケル切線ガ横軸ト交ル點ヲ T トス。今中心 C ト P トヲ結ブ直線ガ頂點 A ニ於ケル切線ト E ニテ交ラシムル時ハ直線 ET ハ PA ニ平行ナルコトヲ示セ。

[解] P 點ヲ (x', y') トスレバ切線ノ方程式ハ

$$\frac{xx'}{a^2}-\frac{yy'}{b^2}=1$$

ナルヲ以テ T ハ $\left(\frac{a^2}{x'},\ 0\right)$

又 CP ノ方程式ハ

$$y=\frac{y'}{x'}x$$

ナルヲ以テ頂點 A ニ於ケル切線 $x=a$ トノ交點 E ハ $\left(a,\ \frac{y'}{x'}a\right)$ ナリ。

故ニ ET ノ方程式ハ

$$y=\frac{\frac{y'}{x'}a}{a-\frac{a^2}{x'}}\left(x-\frac{a^2}{x'}\right)$$

即チ

$$y=\frac{y'}{x'-a}\left(x-\frac{a^2}{x'}\right)$$

ニシテ PA ノ方程式ハ

$$y=\frac{y'}{x'-a}(x-a)$$

故ニ ET ト PA トハ互ニ平行ナリ。

74. 漸近線ガ坐標軸ナル時ハ $y=mx$ ニ共軛ナル徑ノ方程式ハ $y=-mx$ ナリ。

［解］ 漸近線ヲ坐標軸トセル双曲線ノ方程式ヲ

$$xy=k^2$$

トスレバ，直線 $y=mx$ ト交ル點ノ坐標ハ

$$x=\pm\sqrt{\frac{k^2}{m}} \qquad y=\pm\sqrt{mk^2}$$

サテ直線 $y=mx$ ニ共軛ナル徑ハ此交點ニ於ケル切線ニ平行ナリ。而シテ其切線ノ方程式ハ

$$xy'+x'y=2k^2$$

即チ

$$x\sqrt{mk^2}+\sqrt{\frac{k^2}{m}}y=\pm 2k^2$$

或ハ變形シテ

$$y=-mx+\pm 2k\sqrt{m}$$

故ニ

$$y=-mx$$

ハ共軛徑ナリ。

注意　上ト同ジ方針ニヨリテ二次曲線ノ一對ノ共軛徑ヲ坐標軸トシタル時ハ，徑 $y=mx$ ニ共軛ナル徑ノ方程式ハ

$$y=\mp\frac{b'^2}{a'^2m}x$$

ナルコトヲ證明スルコトヲ得。但シ a', b' ハ共軛半徑ノ長サナリトス。

75. 双曲線ノ焦點ヲ中心トシ共軛徑ヲ直徑トシテ畫ケル圓ハ準線ガ漸近線ト交ル點ニ於テ漸近線ニ切スルコトヲ證セヨ。

［解］ 双曲線ノ一ツノ焦點 F$(ea,\ 0)$ ヲ中心トスル所題ノ圓ノ方程式ハ

$$(x-ea)^2+y^2=b^2$$

コノ圓ガ漸近線

$$y=\frac{b}{a}x$$

ト相重ル點 $\left(\frac{a}{e},\ \frac{b}{e}\right)$ ニ交ルガ故ニ漸近線ハ切線ナリ。而シテ此點ハ準線 $x=\frac{a}{e}$ ト漸近線トノ交點ニ一致ス。ヨツテ證セラレタリ。

76. P$(x_1,\ y_1)$, Q$(x_2,\ y)$ ヲ二次曲線

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

ノ上ノ二點トスル時，直線 PQ ノ方程式ハ

$$a(x-x_1)(x-x_2)+2h(x-x_1)(y-y_2)+b(y-y_1)(y-y_2)$$
$$=ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ナルコトヲ證明シ仍ツテ P ニ於ケル切線ノ方程式ヲ作レ。

［解］ 先ヅ (1) ハ計算ヲ實行スレバ x ト y トニ關スル一次ノ方程式トナルガ故ニ直線ヲ表ハス。次ニ點 $(x_1,\ y_1)$ ヲ代入スレバ (1) ハ成立スルガ故ニ P 點ヲ過ル。同樣ニ Q 點ヲモ過ル。

次ニ (1) ニ於テ x_2, y_2 ヲ夫々 x_1, y_1 ト置キカヘルト P 點ニ於ケル切線ノ方程式ヲ得ベク且ツ

$$ax_1^2+2hx_1y_1+by_1^2+2gx_1+2fy_1+c=0$$

即チ

$$ax_1^2+2hx_1y_1+by_1^2-(2gx_1+2fy_1+c)=0$$

ナルコトニ注意スレバ其方程式ガ一層美シキ形ヲトル。即チ

$$axx_1+h(xy_1+x_1y)+byy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0$$

トナル。

77. $x^2+2hxy+y^2-5x-7y+6=0$ ガ二ツノ直線ヲ表ハスヤウニ h ノ値ヲ定メヨ。

[解] 與ヘラレタル方程式ガ二ツノ直線ヲ表ハス爲ニハ判別式

$$\varDelta=\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & h & -\frac{5}{2} \\ h & 1 & -\frac{7}{2} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{7}{2} & 6 \end{vmatrix}=0$$

即チ

$$\frac{70h}{4}-\frac{50}{4}-6h^2=0$$

或ハ

$$12h^2-35h+25=(3h-5)(4h-5)=0$$

故ニ　$h=\frac{5}{3}$　又ハ　$\frac{5}{4}$

78. $5x^2-4xy+y^2-4x+2y+2$ ヲ吟味セヨ。

[解] 先ツ $h^2-ab=-1<0$ ニシテ且ツぢすくりみなんとガ零ナラズ。故ニ楕圓ナリ。中心ヲ求メンニハ

$$\left.\begin{array}{r} 10x-4y-4=0 \\ -4x+2y+2=0 \end{array}\right\}\quad 故ニ\quad (0,\ -1)$$

ソコデ原點ヲ $(0,\ -1)$ ニ移スト

$$5x^2-4xy+y^2+1=0$$

次ニ

$$\tan 2\theta=\frac{2h}{a-b}=-1$$

ニ適スル θ 即チ $\frac{135^\circ}{2}$ ダケ坐標軸ヲ廻轉スルト

$$a'x^2+b'y^2+1=0$$

トナル。但シ $a',\ b'$ ノ値ハ

$$t^2-6t+1=0$$

ノ根ニ於テ $h<0$ ナルヲ以テ

$$a'=3-\sqrt{8}\qquad b'=3+\sqrt{8}$$

ヨツテ結局

$$(3-\sqrt{8})x^2+(3+\sqrt{8})y^2=-1$$

或ハ變形シテ

$$\frac{x^2}{\frac{1}{3-\sqrt{8}}}+\frac{y^2}{\frac{1}{3+\sqrt{8}}}=-1$$

即チ一ツノ虚楕圓ナリ。

79. $x^2+4y^2+6x+9=0$ ヲ標準形ニ直セ。

[解] $a=1,\ h=0,\ b=4,\ g=3,\ f=0,\ c=9$ ナルヲ以テぢすくりみなんと

$$\varDelta=af^2+bg^2+ch^2-2fgh-abc=0$$

ヨツテ與ヘラレタル左邊ハ二ツノ因數ニ分解スルヲ得ヘシ。而シテ其分解法ハ一寸分リ難キヲ以テ x ニ就キテ之ヲ解クベシ。然ル時ハ

$$x=-3\pm 2iy$$

ヨツテ與ヘラレタル方程式ハ

$$(x+2iy+3)(x-2iy+3)=0$$

即チ二ツノ相交ル(交點 $(-3,\ 0)$ ダケハ實點)二ツノ虚直線ヲ得。

注 意　第四章(第三頁)注意 ii ニテ記述セルガ如ク二次式ノぢすくりみなんとガ零ナレバトテ方程式ガ實ナル因數ニ分解シ得ルニ限ラズ，從ツテ必ズ二ツノ實ナル直線トナルトハイヒ難シ。

80. 一點ヨリ二次曲線ニ至ル切線ノ方程式(二ツヲ一緒ニシタル)ヲ求メヨ。

[解] 與ヘラレタル二次曲線ノ方程式ヲ

$$f(x,\ y)=ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

トシ P ヲ與點 $(x',\ y')$ トシ PQ, PR ヲ二ツノ切線トセヨ。然ル時ハ QR ハ二次曲線ニ關スル P ノ極線ナルヲ以テ其方程式ハ

$$\mu=ax'x+h(xy'+x'y)+byy'+g(x+x')+f(y+y')+c=0$$

即チ

$$u=(ax'+hy'+g)x+(hx'+by'+f)y+gx'+fy'+c=0$$

今 Q, R ＝於テ二次曲線＝切スル二次曲線ノ方程式ハ

$$f(x,\ y)=\lambda\mu^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

即チ

$$\begin{aligned}&ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c\\&\quad=\lambda\{(ax'+hy'+g)x+(hx'+by'+f)y+gx'+fy'+c\}^2 \quad \cdots\cdots(2)\end{aligned}$$

サテ此二次曲線ヲシテ點 $P(x',\ y')$ ヲ過ラシムルガ如ク λ ノ値ヲ定ムレバ，即チ二ツノ切線 PQ, PR ヲ表ハスベシ。(二次曲線ハ二ツノ直線＝分解セラルヽ場合) ソレガ爲＝ハ

$$\begin{aligned}&ax'^2+2hx'y'+by'^2+2gx'+2fy'+c\\&\quad=\lambda\{ax'^2+2hx'y'+by'^2+2gx'+2fy'+c\}^2\end{aligned}$$

故＝

$$\lambda=\frac{1}{f(x',\ y')} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ヨツテ二ツノ切線 PQ, PR ヲ一緒＝表ハス方程式ハ

$$f(x,\ y)f(x',\ y')=\{(ax'+hy'+g)x+(hx'+by'+f)y+gx'+fy'+c\}^2=0$$

ナリ。

注　意　二次曲線ノ焦點ヨリ二ツノ切線ヲ引ク場合ヲ吟味セン＝，焦點ヲ原點トシ其點ヨリ準線＝引キタル垂線ヲ x 軸トシ焦點ヲ過リ之＝垂直ナル直線ヲ y 軸トスレバ，準線ノ方程式ハ $x+\alpha=0$ ナル形ナルヲ以テ二次曲線ノ方程式ハ一般＝

$$x^2+y^2=e^2(x+\alpha)^2$$

即チ

$$x^2(1-e^2)+y^2-2e^2\alpha x-e^2\alpha^2=0$$

玆＝ e ハ離心率ナリトス。故＝焦點 (原點) ヨリ引クニツノ切線ノ方程式ハ

$$\{x^2(1-e^2)+y^2-2e\alpha x-e^2\alpha^2\}(-e^2\alpha^2)=(-e^2\alpha x-e^2\alpha^2)^2$$

整頓スレバ

$$x^2+y^2=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

トナル。サテ原點及ビ坐標軸ヲ如何＝トルモ其變換式ハ

$$x=x'+\mathrm{X}\cos\theta-\mathrm{Y}\sin\theta$$

$$y=y'+\mathrm{X}\sin\theta+\mathrm{Y}\cos\theta$$

ナルヲ以テ (3) ＝代入スルモ矢張リ x^2 ト y^2 トノ係數ガ相等シク且ツ xy ノ係數ガ零ナリ。故＝焦點ヨリ引クニツノ切線ヲ一緒＝表ハス方程式ハ常＝圓ノ方程式ノ如キ形ヲトル。コレ甚ダ重要ナルコトナリ。

81.　二次曲線ノ補助圓又ハ準線ノ方程式ヲ求メヨ。

[解]　補助圓ノ上ノ點ヨリ楕圓又ハ双曲線＝引クニツノ切線ハ互＝垂直＝シテ (標準形ノ方程式＝就キテ研究セヨ) 準線上ノ點ヨリ拋物線＝引クニツノ切線モ互＝垂直ナリ。(第八章問題解義 52 ノ結果＝於テ $\tan\alpha=\infty$ トスレバ $x+p=0$ トナルコト明カナリ。) サテ任意ノ點 $P(x',\ y')$ ヨリ引クニツノ切線ノ方程式ハ前題＝ヨリテ

$$\begin{aligned}&(ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c)(ax'^2+2hx'y'+by'^2+2gx'+2fy'+c)\\&\quad=\{(ax'+hy'+g)x+(hx'+by'+f)y+gx'+fy'+c\}^2\end{aligned}$$

即チ

$$\begin{aligned}&x^2\{af(x',\ y')-(ax'+hy'+g)^2\}+2xy\{hf'(x',\ y')-(ax'\\&\quad+hy'+g)(hx'+by'+f)\}+y^2\{bf(x',\ y')-(hx'+by'+f)^2\}+\ldots=0\end{aligned}$$

然ル＝ P 點ハ補助圓ノ上＝アル爲＝ハ此二ツノ切線ハ互＝垂直ナルヲ要ス。即チ x^2 ト y^2 ノ係數ノ和ガ零ナルヲ要ス。即チ

$$af(x',\ y')-(ax'+hy'+g)^2+bf(x',\ y')-(hx'+by'+f)^2=0$$

故＝補助圓ノ方程式ハ x', y' ヲ流通坐標＝直シタルモノ即チ

$$\begin{aligned}&(x^2+y^2)(ab-h^2)+2x(bg-fh)+2y(af-gh)\\&\quad+c(a+b)-g^2-f^2=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)\end{aligned}$$

ナリ。

又拋物線＝アリテハ $h^2-ab=0$ ナルヲ以テ (1) ガ圓トナラズシテ直線

$$2x(bg-fh)+2y(af-gh)+c(a+b)-g^2-f^2=0$$

トナル。コレ即チ準線ノ方程式ナリ。

附　録 i

帝大入學試驗問題集

注意　本書ニハ平面解析幾何學ニ關スルモノヽミヲ揭ゲン。

大正十年度

東大工學部

1. $y=\dfrac{a+bx}{p+qx}$ ニテ表ハサレタル曲線ヲ書ケ。此ニ a, b, p, q ハ常數ナリ。

[解] 分母ヲ拂ヘバ

$$qxy+py-bx-a=0$$

故ニ h^2-ab ニ相當スルモノハ $\dfrac{q^2}{4}$ ニシテ正ニシテ且ツぢすくりみなんとガ零ナラズ。故ニ有心曲線ノ第二種双曲線ナリ。中心ノ坐標ハ

$$\left.\begin{aligned}qy-b&=0\\qx+p&=0\end{aligned}\right\}$$

ヨリ得ラル。卽チ $\left(-\dfrac{p}{q},\ \dfrac{b}{q}\right)$ ナリ。ヨツテ坐標軸ヲ平行ニ移シテ原點ヲ點 $\left(-\dfrac{p}{q},\ \dfrac{b}{q}\right)$ ニ置ケバ方程式ハ

$$qxy+\frac{bp}{q}-a=0$$

卽チ

$$xy=\frac{1}{q}\left(a-\frac{bp}{q}\right)$$

トナル。

コレ坐標軸ヲ漸近線トスル双曲線ニシテ $\dfrac{1}{q}\left(a-\dfrac{bp}{q}\right)$ ハ正ナル時ハ第一，第三象限ニアリ，負ナル時ハ第二，第四象限ニアルナリ。

大正十一年度

東大工學部

1. 次ノ二次式ニテアラハサレタル軌跡ノ中心ヲ求メヨ。

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

但シ $h^2-ab \neq 0$ ナリトス。

［解］ 先ヅ假定ニヨリテ $h^2-ab \neq 0$ ナルヲ以テ有心曲線ナリ。然ル時ハ坐標軸ノ原點ヲ中心ニ移ス時ハ其方程式ハ x ト y トノ一次ノ項ヲ缺クニ至ルベシ。何トナレバ點 (x', y') ハ曲線ノ上ニアル時ハ點 $(-x', -y')$ モ又其上ニアルベキガ故ナリ。ソコデ假リニ原點ヲ點 (x', y') ニ移シタリトセヨ。然ラバ其變換式ハ

$$x=X+x'$$
$$y=Y+y'$$

ナルヲ以テ與ヘラレタル方程式ハ

$$a(X+x')^2+2h(X+x')(Y+y')+b(Y+y')^2$$
$$+2g(X+x')+2f(Y+y')+c=0$$

トナル。即チ

$$aX^2+2hXY+bY^2+2(ax'+hy'+g)X+2(hx'+by'+f)Y$$
$$+(ax'^2+2hx'y'+by'^2+2gx'+2fy'+c)=0$$

故ニ點 (x', y') ヲ二ツノ方程式

$$\left.\begin{array}{l} ax'+hy'+g=0 \\ hx'+by'+f=0 \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ニヨツテ定メタリトスレバ結局

$$aX^2+2hXY+bY^2+c'=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

トナル。但シ

$$c'=ax'^2+2hx'y'+by'^2+2gx'+2fy'+c$$

要スルニ (1) ヲ滿足スルガ如ク x', y' ノ値ヲ定ムレバ與ヘラレタル二次方程式ハ (2) トナルヲ以テ點 (x', y') ハ曲線上ニアルナラバ點 $(-x', -y')$ モ亦其上ニアルナリ。故ニ (1) ヨリ得ラルヽ x' ト y' トノ値ハ求ムル中

心ノ坐標ナリ。

注意 (1) ヲ x', y' ニ就キテ解クトキハ

$$x'=\frac{\begin{vmatrix} -g, & h \\ -f, & b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a, & h \\ h, & b \end{vmatrix}} \qquad y'=\frac{\begin{vmatrix} a, & -g \\ h, & -f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a, & h \\ h, & b \end{vmatrix}}$$

然ルニ假定ニヨリ $ab-h^2 \neq 0$ ナルヲ以テ上ノ二ツヨリ得ラルヽ x', y' ハ有限確定ナル値ナリ。

大正十二年度

東大理學部

(2) 一ツノ定點ニ至ル距離ト一ツノ定直線ニ至ル距離トノ比ガ一定ナル點ノ軌跡ヲ求ム。

(第八, 第九, 第十章定義參照)

京大物理科

1. Two tangents are drawn from an external point of the ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Find the length of portion which the two tangents cut from the x—axis.

［解］ 楕圓ノ外部ノ點ヲ (α, β) トセヨ。然ル時ハ楕圓ノ切線ノ方程式

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ガ點 (α, β) ヲ過ル爲ニハ m ガ

$$\beta=m\alpha\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$$

ナラザルベカラズ。有理化シテ整頓スレバ

$$m^2+\frac{2\alpha\beta}{a^2-\alpha^2}m+\frac{b^2-\beta^2}{a^2-\alpha^2}=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

而シテ點 (α, β) ハ楕圓ノ外部ノ點ナルヲ以テ (2) ノ判別式ハ正ナリ。即チ

$$\left(\frac{a\beta}{a^2-\alpha^2}\right)^2-\frac{b^2-\beta^2}{a^2-\alpha^2}>0 \quad\cdots\cdots(3)$$

ヨツテ (2) ヨリ實ナル m ノ二ツノ値 m', m'' ヲ得ベク，從ツテ點 $(\alpha, \beta$ ヨリ楕圓ニ引クニツノ切線ノ方程式ハ

$$y-\beta=m'(x-\alpha) \quad\cdots\cdots(4)$$

$$y-\beta=m''(x-\alpha) \quad\cdots\cdots(5)$$

ヨツテ之等ハ x 軸ヲ截ル截片ハ (4), (5) ニ $y=0$ ト置クコトニヨツテ得ラル。即チ

$$\alpha-\frac{\beta}{m'};\quad \alpha-\frac{\beta}{m''}$$

ナリ。故ニ求ムル長サハ

$$\left(\alpha-\frac{\beta}{m'}\right)-\left(\alpha-\frac{\beta}{m''}\right)=\frac{\beta(m'-m'')}{m'm''} \quad\cdots\cdots(6)$$

然ルニ (2) ヨリ

$$m'+m''=-\frac{2a\beta}{a^2-\alpha^2} \qquad m'm''=\frac{b^2-\beta^2}{a^2-\alpha^2}$$

ナルヲ以テ

$$m'-m''=\frac{\sqrt{4\alpha^2\beta^2-4(b^2-\beta^2)(a^2-\alpha^2)}}{(a^2-\alpha^2)}$$

$$=\frac{2\sqrt{a^2\beta^2+b^2\alpha^2-a^2b^2}}{(a^2-\alpha^2)}$$

ヨツテ (6) ハ

$$\frac{2\beta\sqrt{a^2\beta^2+b^2\alpha^2-a^2b^2}}{b^2-\beta^2} \quad\cdots\cdots(7)$$

コレ求ムル結果ナリ。但シ (7) ノ値ハ負ナル時ハ其絶對値ヲ以テ答トナスベシ。((7) ノ根號内ハ正ナルコト (3) ヨリ明カナリ。)

東 大 工 學 部

1. 原點ヲ變ゼズシテ坐標軸ヲ變換スル一般ノ置キ代ヘ

$$X=mx+ny, \qquad Y=m'x+n'y$$

ニ於テ

$$\frac{m^2+m'^2-1}{n^2+n'^2-1}=\frac{mm'}{nn'}$$

ノ關係アルコトヲ示セ。

(第七章問題解義 8 参照)

大 正 十 三 年 度

東 北 帝 大 理 學 部

1. 坐標軸ノナス角ヲ ω トシ $(0, a^2)$, $(0, b^2)$ ニテ y 軸上ノ二點ヲ通リ x 軸ニ切スル圓ノ方程式ヲ求メヨ。

[解] 斜交軸ニ關シテ圓ノ方程式ノ特長ハ

1°, x^2 ト y^2 トノ係數ハ相等シキコト

2°, x^2 (又ハ y^2) ノ係數ト xy ノ係數トノナス比ハ $1:2\cos\omega$ ナリ。故ニ今求ムル方程式ヲ

$$x^2+y^2+2\cos\omega xy+gx+fy+c=0$$

ナリトス，然ル時此圓ヲシテ點 $(0, a^2)$, $(0, b^2)$ ヲ過ラシムル爲ニハ

$$a^4+a^2f+c=0 \quad\cdots\cdots(1)$$

$$b^4+b^2f+c=0 \quad\cdots\cdots(2)$$

又 x 軸ニ切スルニハ圓ノ方程式ニ $y=0$ ト置キタル時ハ x ニ就キテ等根ナラザルベカラズ故ニ，

$$g^2-4c=0 \quad\cdots\cdots(3)$$

(1), (2) 及ビ (3) ヨリ

$$g=\pm 2ab, \quad f=-(a^2+b^2), \quad c=a^2b^2$$

ヨツテ求ムル方程式ハ二ツノ圓

$$x^2+y^2+2\cos\omega xy\pm 2abx-(a^2+b^2)y+a^2b^2=0$$

ナリ。

2. 楕圓ノ焦點ヲ過ル弦ガ焦點ニテ分タルヽ二ツノ線分ノ逆數ノ和ハ一定ナルコトヲ證セヨ。

(第十章問題解義 9 参照)

3. 圓錐曲線上ノ二定點ヲ通ル動圓ガ圓錐曲線ヲ更ニ切ル二點ヲ

結ビ付クル直線ハ一定ノ方向ヲ有スルコトヲ證セヨ。

[解] 二ツノ定點ヲ結ビ付クル直線ヲ x 軸トシ其一ツノ點ヲ原點トシ二次曲線ノ方程式ヲ

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy=0 \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

トス。今一ツノ定點ヲ $(x', 0)$ トスレバ (1) ガ此點ヲ通過スル爲ニハ

$$g=-\frac{ax'}{2}$$

ナラザルベカラズ。故ニ (1) ヲ次ノ如ク書クベシ。

$$ax^2+2hxy+by^2-ax'x+2fy=0 \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

次ニ二定點ヲ過ル圓ノ中心ハ此定點ヲ結ブ線分ノ垂直二等分線上ニアルヲ以テ其方程式ヲ

$$\left(x-\frac{x'}{2}\right)^2+\left(y-\lambda\right)^2=\lambda^2+\frac{x'^2}{4}$$

即チ

$$x^2-x'x+y^2-2\lambda y=0 \quad \cdots\cdots\cdots(3)$$

トナスコトヲ得。玆ニ λ ハ任意ノ常數ナリトス。

サテ (3) ト (2) トノ交點ヲ過ル二次曲面ノ方程式ハ一般ニ

$$ax^2+2hxy+by^2-ax'x+2fy+k\{x^2-x'x+y^2-2\lambda y\}=0$$

即チ

$$x\{(a+kx-x'(a+k)\}+by^2+2hxy+2fy+ky^2-2\lambda ky=0 \quad \cdots\cdots(4)$$

コレガ x 軸ト他ノ二ツノ交點ヲ結ビ付クル直線トヲ表ハス爲メニハ y ナル因數ヲ有スルヤウニ k ヲ選バザルベカラズ。即チ

$$x\{(a+k)x-x'(a+k\}=0$$

ヲ滿足スルヤウニ k ヲ選ベバヨシ。ヨツテ

$$k=-a$$

從ツテ (4) ハ

$$y[(b-a)y+2hx+2f+2f+2\lambda a]=0$$

故ニ圓ガ二次曲線ト交ル他ノ二點ヲ通ル直線ノ方程式ハ

$$(b-a)y+2hx+2\lambda a=0$$

コノ直線ハ λ ノ値ノ如何ニ關セズ其方向係數ガ $-\dfrac{2h}{(b-a)}$ ニシテ一定ナリ。

東大工學部

2. 三角形ノ底邊ノ長サ a ト他ノ二邊ノ長サノ和 d トヲ與ヘテ之ニ內接スル圓ノ中心ノ軌跡ヲ求メヨ。

[解] 底邊ヲ x 軸, 其垂直二等分線ヲ y 軸ト假定シ第三ノ頂點ヲ (x', y') トスレバ三角形ノ二邊ノ方程式ハ夫々

$$y\left(x'+\frac{a}{2}\right)-xy'-\frac{a}{2}y'=0 \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

$$y\left(x'-\frac{a}{2}\right)-xy'+\frac{a}{2}y'=0 \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

而シテ二邊ノ和ガ d ナルヲ以テ

$$\sqrt{\left(x'-\frac{a}{2}\right)^2+y'^2}+\sqrt{\left(x'+\frac{a}{2}\right)^2+y'^2}=d \quad \cdots\cdots(3)$$

ナル關係アリ。サテ求ムル內心ノ一ツノ位置ヲ (x, y) トシ各邊ニ至ル距離相等シト置ケバ

$$-\frac{y\left(x'+\frac{a}{2}\right)-xy'-\frac{a}{2}y'}{\sqrt{\left(x'+\frac{a}{2}\right)^2+y'^2}}=y \quad \cdots\cdots\cdots(4)$$

$$\frac{y\left(x'-\frac{a}{2}\right)-xy'+\frac{a}{2}y'}{\sqrt{\left(x'-\frac{a}{2}\right)^2+y'^2}}=y \quad \cdots\cdots\cdots(5)$$

故ニ求ムル軌跡ノ方程式ハ (3), (4) 及ビ 5) ヨリ x', y' ヲ消去セン二 (4), (5) ヨリ

$$x'=\frac{a+d\,[(2x+a)^2-4y^2]}{4a(2x+a)}-\frac{a}{2},$$

$$y'=\frac{y(a+d)}{a}$$

コレ等ヲ (3) ヨリ得ル等式 $4d^2y'^2=(a^2-d^2)(4x'^2-d^2)$ ニ代入スレバ所要ノ軌跡ヲ得。

3. 次ノ曲線ヲ追跡セヨ。

$$y^2=x^2+x+1$$

[解] 書キカヘルト

$$x^2-y^2+x+1=0$$

故＝ $h^2-ab=1>0$

ヨツテ有心二次曲線ノ第二種ノモノナリ。中心ノ坐標ハ

$$\left.\begin{array}{l}2x+1=0\\-2y=0\end{array}\right\}$$

即チ點 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ ナリ。ソコデ軸ヲ平行＝移シテ原點ヲ中心＝置クト，

其變換式ハ

$$\left.\begin{array}{l}x=X-\frac{1}{2}\\y=Y\end{array}\right\}$$

ナルヲ以テ與ヘラレタル方程式ハ

$$x^2-y^2+\frac{3}{4}=0$$

即チ等邊双曲線

$$\frac{y^2}{\frac{3}{4}}-\frac{x^2}{\frac{3}{4}}=1$$

ヲ得。

京大工學部

1. Find the length of the part of the tangent to the ellipse.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

[解] 曲線ノ切線ノ部分トイフハ，二ツノ坐標軸ノ間＝挾マルヽ部分ナリ。ソコデ今曲線上ノ一點 (x', y') ＝於ケル切線ノ方程式ヲ求メン＝

$$\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}=1$$

ナルガ故＝ x 軸ヲ截ル點ハ $\left(\frac{a^2}{x'}, 0\right)$ ＝シテ y 軸ヲ截ル點ハ $\left(0, \frac{b^2}{y'}\right)$ ナリ。故＝求ムル長サハ此二點間ノ距離即チ

$$\sqrt{\frac{a^4}{x'^2}+\frac{b^4}{y'^2}}$$

ナリ。

九大工學部

1. Find the equation of normal to the parabola $y^2=4dx$ in term of its angular coefficient m, and hence prove that, from any point, there cannot be drawn more than three normals to a parabola.

[解] 拋物線ノ上ノ點 P ＝於ケル切線ノ方程式ハ

$$y=m'x+\frac{d}{m'} \quad \cdots\cdots(1)$$

玆＝ m' ガ切線ガ x 軸トナス角ノ正切ナリ。サテ (1) ト拋物線ノ方程式ヨリ，其切點ノ坐標ヲ求ムレバ

$$x'=\frac{d}{m'^2} \qquad y'=\frac{2d}{m'}$$

ヨツテ P ヲ過ル法線ガ x 軸トナス角ノ正切ヲ m トスレバ其方程式ハ

$$y-\frac{2d}{m'}=m\left(x-\frac{d}{m'^2}\right) \quad \cdots\cdots(2)$$

然ル＝法線ト切線トハ互＝垂直ナルヲ以テ

$$m'=-\frac{1}{m}$$

(2) ＝代入スレバ

$$y+2dm=m(x-dm^2)$$

整頓スレバ

$$y=mx-2dm-dm^3$$

コレ求ムル法線ノ方程式ナリ。而シテ之ハ m ＝關スル三次方程式ナルヲ以テ一點ヲ通リテ拋物線＝引ク法線ハ三本ヨリモ多クハ存在セズ。

東北帝大工學部

1. Find the condition that the line $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$ should touch the hyperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

[解] 直線ノ方程式ヨリ

$$y=n\left(1-\frac{x}{m}\right)$$

之ヲ双曲線ノ方程式＝代入シ x ガ等根ヲ有スベキ條件ヲ求ムレバ可ナリ。

大 正 十 四 年 度

東北帝大數學部第二次試驗

1. 圓 $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ ガ直線 $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$ ノ上ニ切リトル部分ヲ原點ニ於テ直角ニ對スベキ條件ヲ求ム。

［解］ 第四章問題解義 11 ト同ジ方針ニテ進マンニ圓ト直線トノ交點ヲ原點ニ結ブ二ツノ直線ノ方程式ハ

$$x^2+y^2+2gx\frac{x\cos\alpha+y\sin\alpha}{p}+2fy\frac{x\cos\alpha+y\sin\alpha}{p}$$
$$+c\frac{(x\cos\alpha+y\sin\alpha)^2}{p^2}=0,$$

即チ

$$(p^2+2fp\sin\alpha+c\sin^2\alpha)y^2+(2gp\sin\alpha+2fp\cos\alpha+2c\sin\alpha\cos\alpha)xy$$
$$+(p^2+2gp\cos\alpha+c\cos^2\alpha)x^2=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

サテ原點ヨリ出ヅル二ツノ直線ガ互ニ垂直ナル爲ニハ

$$(y-mx)=0,\quad \left(y+\frac{1}{m}x\right)=0$$

或ハ一緒ニシテ

$$y^2+\left(-m+\frac{1}{m}\right)xy-x^2=0$$

ノ如キ形ヲトラザルベカラズ。故ニ求ムル條件ハ (1) ト比較シテ

$$p^2+2fp\sin\alpha+c\sin^2\alpha=-(p^2+2gp\cos\alpha+c\cos^2\alpha)$$

或ハ

$$2p^2+c+2p(f\sin\alpha+g\cos\alpha)=0$$

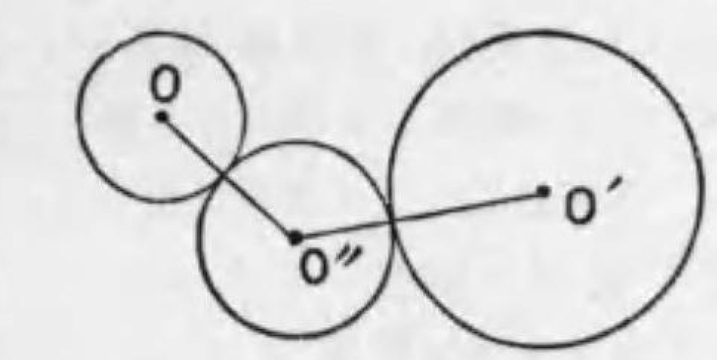
ナリ。

2. 與ヘラレタル二ツノ圓ニ切スル圓ノ中心ノ軌跡ハ與ヘラレタル二圓ノ中心ヲ焦點ニ持ツ如キ双曲線ナリ。

［解］ 與ヘラレタル二ツノ圓ヲ 0, 0′ トシ之等ニ切スル任意ノ圓ヲ 0″ トセヨ。然ル時ハ 0″ ハ軌跡ノ一點ナリ。

サテ三ツノ圓ノ半徑ヲ夫々 r, r', r'' トスレバ

$$00'=r+r''$$
$$0'0''=r'+r''$$



故ニ 0, 0′ ヨリ 0″ ニ至ル距離ノ差ハ一定ナリ。故ニ所要ノ軌跡ハ 0, 0′ ヲ焦點トスル双曲線ナリ。

3. 拋物線ノ任意ノ三切線ニテ作ラレタル三角形ノ垂心ハ準線上ニアリ。

(第八章問題解義 14 參照)

4. CP, CQ ヲ楕圓ノ互ニ直交スル半徑ノ長サトスル時ハ

$$\frac{1}{\mathrm{CP}^2}+\frac{1}{\mathrm{CQ}^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$$

ナルコトヲ證セヨ。

(第九章問題解義 8 參照)

東 北 帝 大 工 學 部

2. 直角軸 x, y ヲ以テ次式デ表ハサレタル圓ノ中心ノ位置ト半徑トヲ求メヨ。

$$x^2+y^2-6x+4y+4=0$$

［解］ 與ヘラレタル方程式ヲ書キカヘル時ハ

$$(x-3)^2+(y+2)^2=9$$

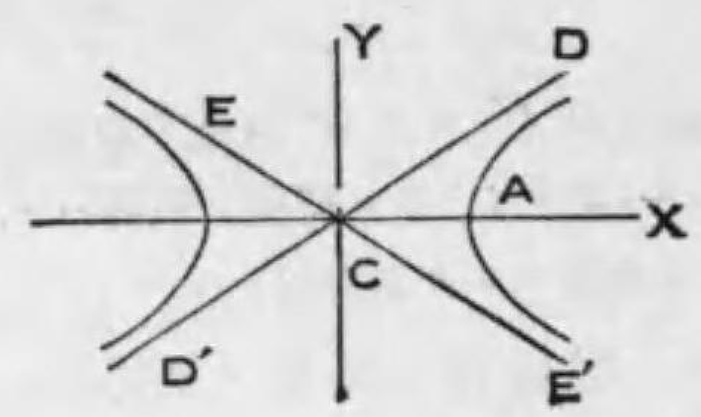
ヨツテ點 (3, −2) ヲ中心トシ 3 ヲ半徑トスル圓ナリ。

九 大 醫 學 部

1. (i) 原線ヲ通過シ x 軸ト 45° ノ角ヲナセル直線ノ方程式ヲ作レ。

(ii) 坐標軸ヲ漸近線トセル双曲線ノ方程式ヲ作レ。

[解] (i) ハ簡單ナルヲ以テ直チニ (ii) ノ解ヲナサン。



CX, CY ヲ舊軸，漸近線 ECE′, DCD′ ヲ夫々新軸ノ x 軸及ビ y 軸トス。今双曲線ノ上ノ任意ノ點ノ舊軸ニ關スル坐標ヲ X, Y トシ，新軸ニ關スル坐標ヲ x, y トス。

又角 ACD ヲ θ トスレバ角 ACE′ ハ $-\theta$ ナルヲ以テ變換式ハ斜交軸ノ公式ヲ用フレバ

$$\mathrm{X}=x\cos\theta+y\cos\theta$$
$$\mathrm{Y}=y\sin\theta-x\sin\theta$$

故ニ双曲線

$$\frac{\mathrm{X}^2}{a^2}-\frac{\mathrm{Y}^2}{b^2}=1$$

ニ代入スレバ

$$x^2(b^2\cos^2\theta-a^2\sin^2\theta)+y^2(b^2\cos^2\theta-a^2\sin^2\theta)$$
$$+2xy(b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta)=a^2b^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

然ルニ

$$\tan\theta=\frac{b}{a} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

即チ

$$a\sin\theta=b\cos\theta$$

ナルヲ以テ双曲線ノ方程式ハ

$$2(b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta)xy=a^2b^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

トナル。然ルニ (2) ヨリ

$$\sin^2\theta=\frac{b^2}{a^2+b^2}, \quad \cos^2\theta=\frac{a^2}{a^2+b^2}$$

ヨツテ (3) ハ

$$xy=\frac{a^2+b^2}{4}$$

トナル。コレ漸近線ヲ坐標軸トセル時ノ双曲線ノ方程式ナリ。

九大農學部

4. 直角坐標軸ニ於テ原點ヨリノ距離ハ 4 ニシテ x 軸トナス角度ガ 60° ナル如キ直線ノ方程式ヲ求メヨ。

答 $y-\sqrt{3}x=8.$

或ハ $\sqrt{3}x-y=8.$

東北帝大法文學部

1. 楕圓ヲ定義スルニ足ル其性質ノ一ヲ擧ゲ夫レヨリ楕圓ノ方程式ヲ導ケ。

(講義百七十四頁參照)

大正十五年度

東北帝大數學科(第二次)

1. 所設ノ拋物線ニ互ニ直交セル二ツノ切線ヲ引キタル時其交點ノ軌跡如何。

(第八章問題解義 52 參照)

2. 所設ノ楕圓ノ長軸上ノ定點ヨリ其楕圓ノ周上ノ任意ノ點ニ至ル線分ノ垂直二等分線ノ方程式ヲ求メ，コノ直線ノ包絡線ヲ求ムル用意ヲ爲セ。

[解] 所設ノ楕圓ノ方程式ヲ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

トシ長軸上ノ定點 $(x', 0)$ ヨリ其楕圓ノ任意ノ點 (x'', y'') ニ至ル線分ノ方程式ハ

$$y=\frac{y''}{x''-x'}(x-x') \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ニシテ其垂直二等分線ノ方程式ハ

$$y-\frac{y''}{2}=-\frac{x''-x'}{y''}\left(x-\frac{x'+x''}{2}\right)\;\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

但シ x'', y'' ノ間ニハ

$$\frac{x''^2}{a^2}+\frac{y''^2}{b^2}=1\;\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

ナル關係アリ。次下包絡線ヲ求ムルハ微分學ノ力ヲ籍ラザルベカラズ。故ニ玆ニハ省略セン。

3. 所設ノ楕圓ト焦點ヲ共有シ其楕圓ノ上ノ任意ノ點ヲ通過スル圓錐曲線ハ二ツアリ且ツ二ツニ限リテ而カモソノ點ニ於テ直交ス。之ヲ證セヨ。

[解] 楕圓ノ方程式ヲ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\;\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

トスレバ之ト焦點ヲ共有スル二次曲線ノ方程式ハ

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}=1\;\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

サテ此曲線ハ (1) ノ上ノ任意ノ一點 (x', y') ヲ通ズル爲ニハ

$$\frac{x'^2}{a^2+\lambda}+\frac{y'^2}{b^2+\lambda}=1\;\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

ガ成立スルヲ要ス。然ルニ此方程式ハ λ ニ就キテ二次方程式ナルヲ以テ (3) ヲ滿足スベキ λ ノ値ハ二ツニ限ル。從ツテ所要ノ同焦點曲線 (2) ハ二ツニ限ル。

次ニ

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1$$

$$\frac{x'^2}{a^2+\lambda}+\frac{y'^2}{b^2+\lambda}=1$$

ヲ邊々相減ズレバ

$$\frac{x'^2}{a^2(a^2+\lambda)}+\frac{y'^2}{b^2(b^2+\lambda)}=0\;\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

次ニ點 (x', y') ニ於ケル (1) 及ビ (2) ヘノ切線ノ方程式ハ

$$\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}=1\;\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

$$\frac{xx'}{(a^2+\lambda)}+\frac{yy'}{(b^2+\lambda)}=1\;\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

而シテ (4) ハ (5), (6) ナル二ツノ切線ハ互ニ直交スル條件ヲ示スモノナリ。ヨツテ證セラレタリ。

注 意 方程式 (3) ヲ吟味スルニ $a^2>b^2$ ナリトシ

$$b^2+\lambda=\lambda'$$

ト置カバ, $a^2+\lambda=a^2-b^2+b^2+\lambda=e^2a^2+\lambda'$ ナルヲ以テ

$$\lambda'^2-\lambda'(x'^2+y'^2-a^2e^2)-a^2e^2y'^2=0$$

トナル。ヨツテ λ' 一ツノ値ハ正ニシテ他ノ一ツノ値ハ負ナリ。故ニ與ヘラレタル楕圓 (1) ノ上ノ任意ノ點ヲ通ズル同焦點二次曲線ハ一ツハ楕圓ニシテ他ノ一ツハ双曲線ナリ。

4. 二次曲線ノ方程式ハ一般ニ

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

ノ形ニテ與ヘラレタル時其漸近線ヲ求メコレカラ直角双曲線ナル條件ヲ求メヨ。

[解] 双曲線ト漸近線トノ方程式ノ標準形ニツキテ考フルニ, 其差ハ常數ヲノミ異ニスルガ故ニ, 軸ノ變換ヲ行フモ矢張リ常數ヲ異ニスルノヨナリ。故ニ漸近線ノ方程式ヲ

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c+\lambda=0\;\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

トスベシ。然ル時ハ此方程式ハ二ツノ直線ヲ表ハサヾルベカラズ。故ニ

$$af^2+bg^2+(c+\lambda)h^2-2fgh-ab(c+\lambda)=0$$

從ツテ

$$\lambda=\frac{abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2}{h^2-ab}=\frac{\Delta}{h^2-ab}$$

ヨツテ漸近線ノ方程式ハ

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c+\frac{\Delta}{h^2-ab}=0\;\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ナリ。次ニコレヨリ與ヘラレタル方程式ハ直角双曲線ヲ表ハス爲ニハ, (2)

ナル方程式ニテ表ハサル、二ツノ漸近線ハ互ニ垂直ナルヲ要ス。ヨツテ (2) ハ

$$(y-mx+n)\left(y+\frac{1}{m}x+n'\right)=0$$

ノ如キ形ヲ有セザルベカラズ。而シテ之ハ x^2 ト y^2 トノ係數ノ和ハ零トナルヲ特長トナス。故ニ所要ノ條件ハ

$$a+b=0$$

ナリ。

東　北　帝　大　工　學　部

4. 坐標ノ原點カラ直線

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

ヘ引イタ垂線ノ長サ及ビ其方程式ヲ求メヨ。

答　垂線ノ長サハ $\dfrac{|ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 其方程式ハ

$$y=\frac{a}{b}x \quad \text{ナリ。}$$

千　葉　醫　大

1. 點 $P_1(x_1, y_1)$ カラ二點 $P_2(x_2, y_2)$ ト $P_3(x_3, y_3)$ トヲ結ブ直線ヘ下セル垂線及ビ三角形 $P_1P_2P_3$ ノ面積ヲ求メヨ。

答　$y-y_1=-\dfrac{x_2-x_3}{y_2-y_3}(x-x_1)$

又面積ハ

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

昭　和　二　年　度

東　大　工　學　部

1. 直角坐標ノ原點ヲ中心トスル半徑 a 及ビ b ナル二ツノ同心

圓アリ $(a<b)$ 中心ヲ通ル任意ノ直線ガ此等同心圓ト交ル點ニ於テ夫々坐標軸ニ平行ナル直線ヲ引キタル時此等直線ノ交點ノ軌跡ヲ求ム。

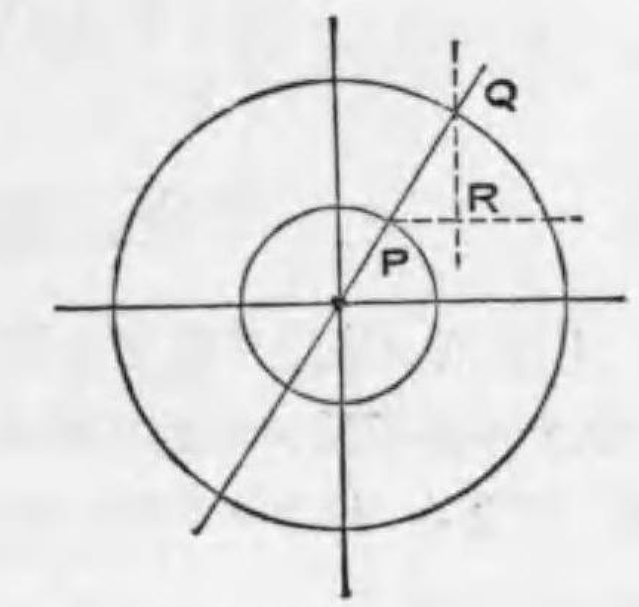
［解］ 二ツノ圓ノ方程式ヲ

$$x^2+y^2=a^2$$
$$x^2+y^2=b^2$$

ナリトシ中心ヲ通ル任意ノ直線ノ方程式ヲ

$$y=mx$$

ナリトスレバ二ツノ圓トノ交點ハ夫々次ノ如シ



$$P:\left(\frac{\pm a}{\sqrt{1+m^2}},\ \frac{\pm ma}{\sqrt{1+m^2}}\right)$$

$$Q:\left(\frac{\pm b}{\sqrt{1+m^2}},\ \frac{\pm bm}{\sqrt{1+m^2}}\right)$$

故ニ P ヲ通リ且ツ x 軸ニ平行ナル直線ハ

$$y=\pm\frac{ma}{\sqrt{1+m^2}} \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

ニシテ Q ヲ通リ且ツ y 軸ニ平行ナル直線ハ

$$x=\pm\frac{b}{\sqrt{1+m^2}} \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

(1), (2) ヨリ不定常數 m ヲ消去スレバ求ムル點 R ノ軌跡ヲ得。卽チ楕圓

$$a^2x^2+b^2y^2=a^2b^2 \quad \cdots\cdots\cdots(3)$$

ナリ。

注意　P ヲ通リ且ツ y 軸ニ平行ナル直線ト Q ヲ通リ且ツ x 軸ニ平行ナル直線トノ交點ノ軌跡モ同一ニシテ得ラル。

東　北　帝　大　工　學　部

2. 三ツノ直線 $x=0,\ y=0,\ y=c$ ニ切スル圓ノ方程式ヲ求ム。但

シ c ハ常數ナリトス。

[解] 中心ハ點 $\left(\frac{c}{2},\ \frac{c}{2}\right)$ 或ハ $\left(-\frac{c}{2},\ \frac{c}{2}\right)$ ニシテ且ツ其半徑ハ共ニ $\left|\frac{c}{2}\right|$ ナルヲ以テ求ムル方程式ハ

$$\left(x-\frac{c}{2}\right)^2+\left(y-\frac{c}{2}\right)^2=\frac{c^2}{4}$$

或ハ

$$\left(x+\frac{c}{2}\right)^2+\left(y-\frac{c}{2}\right)^2=\frac{c^2}{4}$$

ナリ。

京大醫學部

3. 三角形ノ底邊ヲ固定シ其一端ヨリ對邊ノ中點ニ至ル距離ガ一定ナル時頂點ノ軌跡ヲ求ム。

[解] 底邊ヲ BC トシ其長サヲ $2a$ トシ原點ヲ C トス。

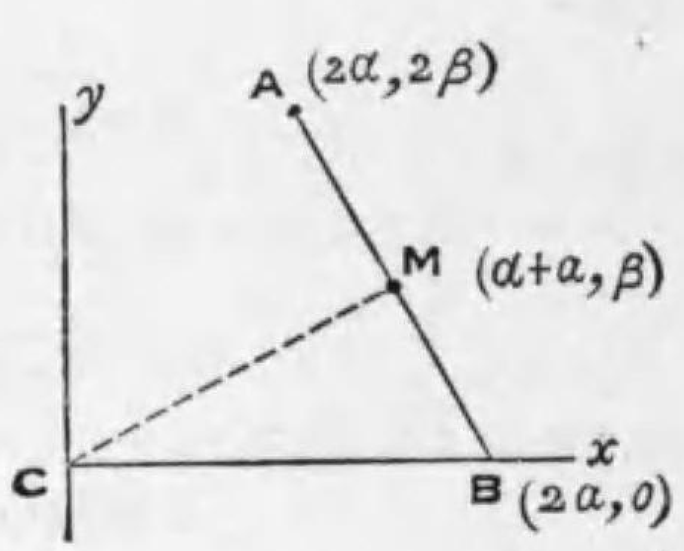
今頂點ノ坐標ヲ

$x=2\alpha$ ....(1)

$y=2\beta$ ....(2)

トスレバ AB ノ中點 M ハ $(\alpha+a,\ \beta)$ ナルヲ以テ CM ノ長サヲ k トスレバ

$(\alpha+a)^2+\beta^2=k^2$ ...(3)



(1), (2) 及ビ (3) ヨリ不定常數 α, β ヲ消去スレバ求ムル軌跡ヲ得。即チ

$$\left(\frac{x}{2}+a\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2=k^2$$

或ハ

$$(x+2a)^2+y^2=4k^2$$

即チ中心ガ $(-2a,\ 0)$ ニシテ半徑ガ $2k$ ナル圓周ナリ。

長崎醫大

1. 三角形ノ三中線ハ同一點ヲ通ルコトヲ解析幾何學的ニ之ヲ説明セヨ。

(第一章問題解義六參照)

京大醫學部 (第二次入學試驗)

2. 拋物線ノ焦點ヲ通ル弦ノ極ト焦點トヲ結ベル直線ハソノ弦ニ垂直ナルコトヲ證セヨ。

(第八章問題解義十一參照)

昭和三年度

東大理科

2. $\frac{x^2}{1+k}+\frac{y^2}{1-k}=1$ ハ k ニ種々ノ値ヲ與フル時如何ナル曲線ヲ表ハスカ同一ノ直角坐標軸ヲ用ヒテ之ヲ畫ケ。

(第九章公式 16 及ビ第十章公式 21 參照)

東大農科 (農業土木學專修, 水産學科)

1. 二ツノ圓ノ交點ヲ過ル直線ノ方程式ヲ求メヨ。

(第六章公式 (5) 參照)

京大農科

3. 拋物線 $y^2=4dx$ ノ焦點ヨリ法線ヘ引ケル垂線ノ足ノ軌跡ハ $y^2=d(x-d)$ ナルコトヲ證セヨ。

[解] 拋物線上ノ點 $(x',\ y')$ ニ於ケル法線ノ方程式ハ

$$y-y'=-\frac{y'}{2d}(x-x') \text{ ....(1)}$$

ナルヲ以テ焦點 $(d,\ 0)$ ヨリ之ニ下ス垂線ノ方程式ハ

$$y=\frac{2d}{y'}(x-d) \text{ ....(2)}$$

垂線ノ足ノ坐標ハ (1), (2) ヲ同時ニ滿足スベク且ツ x' ト y' トノ間ニハ

$$y'^2=4dx' \text{ ....(3)}$$

ナル關係アルヲ以テ所要ノ軌跡ハ (1), (2) 及ビ (3) ヨリ $x',\ y'$ ヲ消去シタルモノ卽チ

$$y^4-2dy^2(x-d)+xy^2(x-d)-d(x-d)^3=0$$

$$\{y^2-d(x-d)\}\{y^2+(x-d)^2\}=0$$

然ルニ上ノ左邊ノ第二項ハ零トナルコトナシ。ヨツテ所要ノ軌跡ハ

$$y^2-d(x-d)=0$$

ナリトス

附 錄 ii

中等教員檢定試驗問題集

注 意 解析幾何學ノ試驗ハ第一回明治十八年ヨリ初メシト雖モ茲ニハ大正元年度ヨリ記述セリ。

第 二 十 六 回 (大正元年)

1. 五ツノ點ノ直角坐標ヲ $(2,\ -5),\ (0,\ 9),\ (0,\ -1)\ (16,\ -3),\ \left(-\frac{1}{4},\ \frac{11}{8}\right)$ トシ之等ノ點ヲ過ル二次曲線ノ方程式ヲ求メ且ツ之ヲ標準ノ形ニ直セ。

[解] 第一第二ノ點ノ連結線ノ方程式ハ

$$7x+y-9=0$$

第二第三, 第三第四, 第四第一ノ點ヲ結ビ付ケル直線ノ方程式ハ夫々

$$x=0,\qquad x+8y+8=0,\qquad x-7y-37=0$$

故ニ初メノ四ツノ點ヲ過ル二次曲線ノ方程式ハ

$$a(7x+y-9)(x+8y+8)+bx(x-7y-37)=0$$

コノ二次曲線ヲシテ第五ノ點 $\left(-\frac{1}{4},\ \frac{11}{8}\right)$ ヲ過ラシムル爲ニハ

$$15a=b$$

ナルヲ要ス。故ニ五ツノ點ヲ過ル二次曲線ノ方程式ハ

$$(7x+y-9)(x+8y+8)+15x(x-7y-37)=0$$

簡單ニスレバ

$$11x^2-24xy+4y^2-254x-32y-36=0$$

然ルニ此曲線ハ

$$h^2-ab=144-44>0$$

ナルヲ以テ有心二次曲線ノ第二種ノモノナリ。中心ノ方程式ハ

$$11x-12y-127=0$$

$$3x-y+4=0$$

ヨツテ中心ガ點 $(-7,\ -17)$ ニアリ。故ニ坐標軸ヲ平行ニ移動シテ原點ヲ中心ニ置クトキハ其變換式ハ

$$\left.\begin{aligned}x&=X-7\\ y&=Y-17\end{aligned}\right\}$$

ナルヲ以テ方程式ハ

$$11x^2-24xy+4y^2+1125=0$$

次ニ軸ヲ

$$\tan 2\theta=\frac{-24}{11-4}$$

ニ適スル角 θ ダケ廻轉スル時ハ

$$a'x^2+b'y^2+1125=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

トナル。但シ

$$a+b=a'+b'=11+4=15$$
$$ab-h^2=a'b'-h'^2=a'b'=-100$$

故ニ $a',\ b'$ ノ値ハ

$$t^2-15t-100=0$$

ヲ解キテ得ラルベシ。即チ $t=-5$ 或ハ 20

然ルニ $h<0$ ナル場合ナルガ故ニ $a'=-5,\ b'=20$ 從ツテ (1) ハ

$$-5x^2+20y^2+1125=0$$

或ハ變形シテ

$$\frac{x^2}{15^2}-\frac{y^2}{\left(\frac{15}{2}\right)^2}=1$$

即チ双曲線ナリ。(第十一章公式 (7) 參照)

2. 四邊形 ABCD ノ各邊 AB, BC, CD, DA ノ上ニ夫々 P, Q, R, S ノ四ツノ點ヲ取ル時ハ若シ三ツノ直線 PS, BD, QR ガ一點ニ於テ相交レバ他ノ三ツノ直線 PQ, AC, RS モ亦一點ニ交ルコトヲ證明セヨ。

(第三章問題解義七參照)

3. 三角形 ABC ノ內接圓ガ BC, CA, AB ニ切スル點ヲ夫々 D, E, F トスル時ハ三ツノ直線 AD. BE, CF ハ同一ノ點ヲ過ルコトヲ證明セヨ。

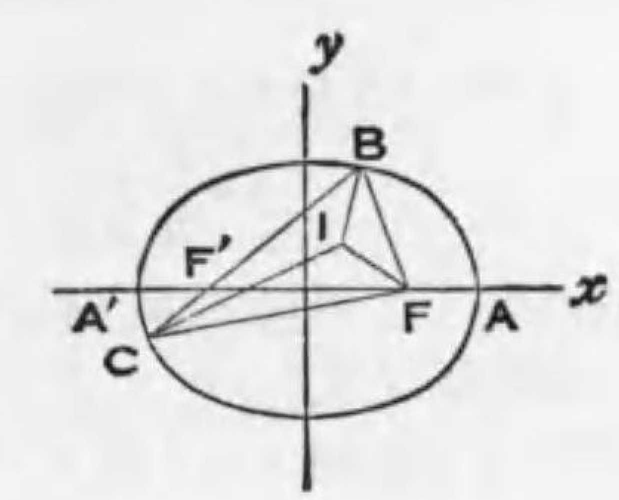
(第五章問題解義三十八參照)

4. 楕圓ノ一ツノ焦點ヲ頂點トシ他ノ焦點ヲ過ギル弦ヲ底邊トスル三角形ノ內切圓ノ中心ハ此弦ノ中點ヲ過リ長徑ニ平行ナル直線上ニアルコトヲ證セヨ。

[解] 楕圓ノ方程式ヲ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

トスレバ二ツノ焦點 F, F′ ハ $(ea,\ 0)$, $(-ea,\ 0)$ ナリ。今焦點 F ヲ頂點トシ F′ ヲ過ル弦 BC ヲ底邊トスル三角形ノ內切圓ノ中心ヲ I トスレバ BI, CI ハ法線トナル。(講義百八十九頁參照)



サテ B 及ビ C ノ離心角ヲ θ 及ビ φ ト假定スレバ, 二ツノ法線及ビ BC ノ方程式ハ次ノ如シ

$$\mathrm{BI}: ax\sec\theta-by\operatorname{cosec}\theta=a^2-b^2 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\mathrm{CI}: ax\sec\varphi-by\operatorname{cosec}\varphi=a^2-b^2 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\mathrm{BC}: \frac{x}{a}\cos\frac{\theta+\varphi}{2}+\frac{y}{b}\sin\frac{\theta+\varphi}{2}=\cos\frac{\theta-\varphi}{2} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

然ルニ BC ハ $\mathrm{F}'(-ea,\ 0)$ ヲ過ルベキニヨリ

$$\cos\frac{\theta+\varphi}{2}=-\frac{1}{e}\cos\frac{\theta-\varphi}{2} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

又 (1), (2) ヨリ x ヲ消去スレバ內心 I ノ x 坐標ヲ得ラル即チ

$$b\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}-\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\right)y=(a^2-b^2)(\cos\varphi-\cos\theta)$$

或ハ

$$b\cos\frac{\theta-\varphi}{2}y=-(a^2-b^2)\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\sin\theta\sin\varphi$$

卽チ

$$b\cos\frac{\theta-\varphi}{2}y=-(a^2-b^2)\sin\frac{\theta+\varphi}{2}$$

$$\left\{\cos^2\frac{\theta-\varphi}{2}-\cos^2\frac{\theta+\varphi}{2}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

(5) = (4) ヲ代入スレバ

$$b\cos\frac{\theta-\varphi}{2}y=-(a^2-b^2)\left(1-\frac{1}{e^2}\right)\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\cos^2\frac{\theta-\varphi}{2}$$

從ツテ

$$y=\frac{1}{2}(b\sin\theta+b\sin\varphi)$$

然ル= BC ノ中點ノ y 坐標ハ

$$y=\frac{1}{2}(b\sin\theta+b\sin\varphi)$$

故=內心 I ハ BC ノ中點ヲ過リ長徑 AA′ =平行ナル直線上=アリ。

5. 拋物線ノ焦點 F =於テ相互=直角=交ル二ツノ直線 AF, BF ガ拋物線ト交ル點ヲ A 及ビ B トス。A 及ビ B =於ケル切線ノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ。

[解] 焦點 F ヲ原點トシ, 其軸ヲ x 軸トシ, ソレ=垂直ナル直線ヲ y 軸トスレバ,

拋物線ノ方程式ハ

$$y^2=4p(x+p)$$

ナリ。今軌跡ノ一點ヲ $P(x', y')$ トスレバ直線 AB ハ P =關スル極線ナルヲ以テ

$$yy'=2p(x+x'+2p)$$

故=弦 AB ト拋物線トノ交點ヲ原點=結ビ付ケル直線 AF, BF ノ方程式ハ第四章問題解義十一=ヨリ

$$y^2-4px\frac{yy'-2px}{2p(x'+2p)}-4p^2\left\{\frac{yy'-2px}{2p(x'+2p)}\right\}^2=0$$

或ハ簡單=シテ

$$4p(x'+p)x^2-2x'y'xy+\{(x'+2p)^2-y'^2\}y^2=0$$

コレヨリ $\frac{y}{x}$ ノ二ツノ値ヲ得ベシ。然ル=二ツノ直線ハ直交スベキガ爲=ハ

$$\frac{4p(x'+p)}{(x'+2p)^2-y'^2}=-1$$

或ハ

$$4p(x'+p)+(x'+2p)^2-y'=0$$

卽チ

$$(x'+4p)^2-y'^2=8p^2$$

ヨツテ求ムル軌跡ハ x', y' ヲ流通坐標=直シタルモノ卽チ

$$(x+4p)^2-y^2=8p^2$$

コレ $(-4p, 0)$ ヲ中心トスル一ツノ双曲線ナリ。

注意 本題ハ巳=第八章問題解義 59 =於テ極式ヲ以テ解ケリ。

第二十七回 (大正二年)

1. 直交軸=關シ $x+y+c=0$ =テ表ハサレタル直線アリ。コレヲ他ノ直交軸=關シ $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ ナル方程式=テ表ハサントス。後ノ直交軸ヲ如何=トルベキカ。玆= c, α, β, γ ハ何レモ與ヘラレタル常數ナリ。

[解] 原點ヲ (x', y') =移シタル後軸ヲ θ ダケ廻轉スル時ノ變換式ハ元ノ x, y ノ代リ=夫々

$$x'+x\cos\theta-y\sin\theta$$

$$y'+x\sin\theta+y\cos\theta$$

ト置キタルモノナリ。故=方程式 $x+y+c=0$ ハ

$$(x'+x\cos\theta-y\sin\theta)+(y'+x\sin\theta+y\cos\theta)+c=0$$

卽チ

$$(\cos\theta+\sin\theta)x+(\cos\theta-\sin\theta)y+x'+y'+c=0$$

=變換セラル。而シテ之ハ

$$\alpha x+\beta y+\gamma=0$$

=一致スル爲=ハ

$$\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\alpha}=\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\beta}=\frac{x'+y'+c}{\gamma}$$

ナルコトヲ要ス。此條件式ヲ變形スレバ

$$\frac{2\cos\theta}{\alpha+\beta}=\frac{2\sin\theta}{\alpha-\beta} \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{2}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{(x'+y'+c)^2}{\gamma^2} \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

(1) ヨリ

$$\tan\theta=\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} \quad \cdots\cdots\cdots(3)$$

(2) ヨリ

$$x'+y'+c=\pm\sqrt{\frac{2\gamma^2}{\alpha^2+\beta^2}}$$

故ニ新原點ハ直線

$$x+y+c=\pm\sqrt{\frac{2\gamma^2}{\alpha^2+\beta^2}}$$

ノ上ノ任意ノ點ニ置キ次ニ軸ヲ (3) ニ適スル角 θ ダケ廻轉スレバ可ナリ。

2. 直交軸ニ關シーツノ双曲線及ビ直線ノ方程式ヲ夫々

$$3x^2-2xy-y^2+8x+10y+14=0$$

$$5x-y-2=0$$

トス。コノ直線ガ双曲線ト交ハル二點ニ於テ双曲線ニ切スル拋物線ノ焦點ノ坐標，通徑ノ長サ，及ビ軸ノ方程式ヲ求メヨ。

[解] 直線ガ双曲線ト交ル點ニ於テ双曲線ニ切ス二次曲線ノ方程式ハ

$$3x^2-2xy-y^2+8x+10y+14+\lambda(5x-y-2)^2=0 \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

即チ

$$(3+25\lambda)x^2-2(1+5\lambda)xy+(\lambda-1)y^2$$
$$+2(4-10\lambda)x+2(5+2\lambda)y+14+4\lambda=0$$

ナリ。コレガ拋物線ナル爲ニハ

$$h^2-ab=(1+5\lambda)^2-(3+25\lambda)(\lambda-1)=0$$

即チ

$$\lambda=-\frac{1}{8}$$

ナラザルベカラズ。故ニ拋物線ノ方程式ハ結局

$$x^2+6xy+9y^2-84x-76y-108=0$$

トナル。故ニ軸ノ方程式ハ

$$\frac{(x+3y-42)^2-(3x+9y-38)^2}{1-9}$$
$$=\frac{(x+3y-42)(3x+9y-38)}{3}$$

ニシテ整頓スレバ

$$5x+15y-78=0$$

トナル。又焦點ノ坐標ハ

$$\frac{(x+3y-42)^2-(3x+9y-38)^2}{1-9}=\frac{(x+3y-42)(3x+9y-38)}{3}$$
$$=x^2+6xy+9y^2-84x-76y-108$$

ヲ解キテ得ラル。即チ

$$x=-\frac{171}{55} \qquad y=\frac{343}{55}$$

次ニ通徑ノ長サヲ求メンニ軸ノ方程式ハ

$$5x+15y-78=0$$

ナルガ故ニ拋物線ノ方程式ヲ次ノ如ク變ズ。即チ

$$\left(\frac{5x+15y-78}{\sqrt{5^2+15^2}}\right)^2=\frac{\sqrt{1320^2+440^2}}{5^2+15^2}\,\frac{1320x-440y+8784}{\sqrt{1320^2+440^2}}$$

故ニ通徑ノ長サハ

$$\frac{\sqrt{1320^2+440^2}}{5^2+15^2}=\frac{44\sqrt{10}}{25}$$

ナリ。

注 意 方程式 (1) ノヨツテ來ル理由ヲ一般的ニ說明セン。

第十二章五頁ニヨルト二次曲線 $s=0$ ト二ツノ直線 $u=0,\ v=0$ トノ四ツノ交點ヲ過ル二次曲線ノ方程式ハ

$$s=\lambda uv \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

ナリ。サテ $u=0$ ト $v=0$ トノ二ツノ直線ガ次第ニ近ヅクモノト考フレバ四ツノ交點ハ二ツ宛次第ニ接近スベシ。故ニ $u=0,\ v=0$ ガ相重ル時ハ (2) ハ

$$s=\lambda u^2 \quad \cdots\cdots\cdots(3)$$

トナリ而カモ $s=0$ ト $u=0$ トノ交點ノ各ニ於テ夫々相會スル二點ヲ共有スト考フルヲ得。故ニ (3) ハ $s=0$ ト $u=0$ トノ交點ニ於テ $s=0$ ニ切スル二次曲線ヲ表ハス。

尙焦點ノ坐標ノ求メ方ノ原理ハ第十三章ノ最後ノ部分ニ詳記セリ。

3. 一點 $\mathrm{P}(a,\ b)$ ト此點ヨリ拋物線 $y^2=4px$ ニ引ケル二ツノ切線ノ切點トヲ頂點トスル三角形ノ面積ヲ求メヨ。

[解] 點 $P(a, b)$ ヨリ引ケル切線ノ切點ヲ (x', y') トスレバ其點ニ於ケル切線ノ方程式ハ

$$yy'=2p(x+x')$$

而シテ此切線ハ點 (a, b) ヲ過ルベキニヨリ

$$by'=2p(a+x') \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又點 (x', y') ハ拋物線ノ上ニアルヲ以テ

$$y'^2=4px' \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1), (2) ヨリ x', y' ヲ求ムレバ

$$x'=\frac{1}{2p}(b^2-2pa\pm b\sqrt{b^2-4pa})$$

$$y'=b\pm\sqrt{b^2-4pa}$$

故ニ求ムル三角形ノ面積ハ

$$\Delta=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{1}{2p}(b^2-2pa+b\sqrt{b^2-4pa}) & b+\sqrt{b^2-4pa} & 1 \\ \frac{1}{2p}(b^2-2pa-b\sqrt{b^2-4pa}) & b-\sqrt{b^2-4pa} & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix}$$

ナル値ノ絶對値ナリ。

4. 直交軸ニ關シ一ツノ楕圓ノ方程式ヲ

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

トス。コノ楕圓ノ切線ノ二次曲線

$$(b^2+\lambda)x^2+(a^2+\lambda)y^2=(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)$$

ニ就テノ極ノ軌跡ハ圓トナル様ニ λ ヲ定メヨ。

[解] 與ヘラレタル第一ノ楕圓ノ切線ノ一ツヲ

$$y=mx+\sqrt{m^2a^2+b^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

トシ，此切線ノ第二ノ楕圓ニ關スル極ヲ (x', y') ト假定スレバ其極線ノ方程式ハ

$$(b^2+\lambda)xx'+(a^2+\lambda)yy'=(a^2+\lambda)(b^2+\lambda) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(2) ハ (1) ト一致スル爲ニハ

$$m=-\frac{(b^2+\lambda)x'}{(a^2+\lambda)y'} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$\sqrt{m^2a^2+b^2}=\frac{b^2+\lambda}{y'} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

(3) 及ビ (4) ヨリ m ヲ消去スレバ

$$\frac{a^2(b^2+\lambda)^2x'^2}{(a^2+\lambda)^2y'^2}+b^2=\left(\frac{b^2+\lambda}{y'}\right)^2$$

分母ヲ拂ヒ整頓スレバ，

$$a^2(b^2+\lambda)^2x'^2+b^2(a^2+\lambda)^2y'^2=(a^2+\lambda)^2(b^2+\lambda)^2$$

ヨツテ求ムル極ノ軌跡ハ

$$a^2(b^2+\lambda)^2x^2+b^2(a^2+\lambda)^2y^2=(a^2+\lambda)^2(b^2+\lambda)^2$$

ナリ。而シテ此ハ圓ヲ表ハス爲ニハ

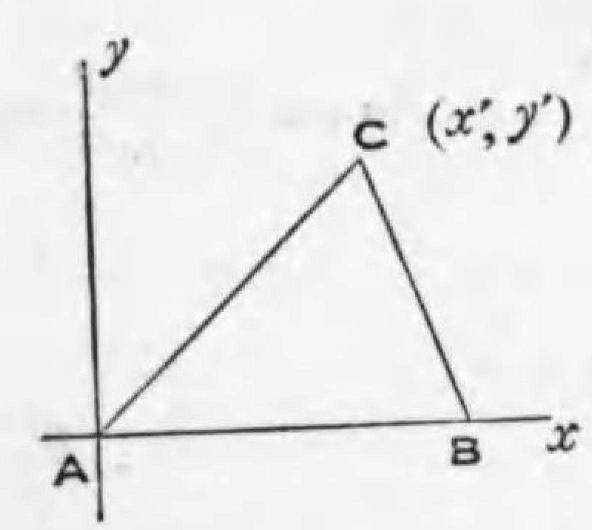
$$a^2(b^2+\lambda)^2=b^2(a^2+\lambda)^2$$

コレヨリ

$$\lambda=ab \quad 或ハ \quad \lambda=-ab$$

ナリ。

5. 等邊双曲線ハ其任意ノ極三角形ノ内心及ビ傍心ヲ過ギルコトヲ證明セヨ。



[解] 等邊双曲線ノ極三角形ノ一ツヲ ABC トシ AB ヲ x 軸，A ヨリ之ニ垂直ニ引キタルモノヲ y 軸トシ，双曲線ノ方程式ヲ

$$x^2+2hxy-y^2+2gx+2fy+c=0$$

トス。今 C ヲ點 (x', y') トスレバ，其極線 AB ノ方程式ハ

$$xx'+h(xy'+x'y)-yy'+g(x+x')+f(y+y')+c=0$$

簡單ニスレバ

$$(x'+hy'+g)x+(hx'-y'+f)y+(gx'+fy'+c)=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

然ルニコレハ $y=0$ ト一致セザルベカラズ。(AB ヲ x 軸ニトレルガ故)

從ツテ

$$\left.\begin{aligned} x'+hy'+g=0 \\ gx'+fy'+c=0 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

又 A(0, 0) ノ極線 BC ノ方程式ハ

$$gx+fy+c=0 \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (3)$$

AC ノ方程式ハ

$$yx'-xy'=0 \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (4)$$

サテ三角形ノ內心及ビ傍心ノ坐標ヲ點 (x, y) トスレバ夫等ノ點ヨリ AB, BC, CA ニ至ル距離ノ平方ハ夫々相等シク

$$y^2=\frac{(gx+fy+c)^2}{g^2+f^2}=\frac{(y'x-x'y)^2}{x'^2+y'^2}$$

ナリ。故ニ角 B ノ二ツノ二等分線ノ方程式ハ

$$y^2=\frac{(gx+fy+c)^2}{g^2+f^2}$$

ニシテ角 A ノ二ツノ二等分線ノ方程式ハ

$$y^2=\frac{(y'x-x'y)^2}{x'^2+y'^2}$$

故ニ之等ノ四ツノ交點卽チ內心及ビ傍心ヲ通ズル二次曲線ノ方程式ハ

$$(gx+fy+c)^2-(g^2+f^2)y^2+\lambda[(y'x-x'y)^2-(x'^2+y'^2)y^2]=0 \quad \dots\dots (5)$$

變形スレバ,

$$x^2+2\frac{gf-\lambda x'y'}{g^2+\lambda y'^2}xy-y^2+\frac{2gc}{g^2+\lambda y'^2}x$$
$$+\frac{2fc}{g^2+\lambda y'^2}y+\frac{c^2}{g^2+\lambda y'^2}=0 \quad \dots\dots (6)$$

今 λ ヲ

$$\frac{gf-\lambda x'y'}{g^2+\lambda y'^2}=h$$

ナル如クニトルモノトスレバ

$$g^2+\lambda y'^2=g^2+\frac{fg-g^2h}{\frac{x'}{y'}+h}$$

トナリ且ツ (2) ヨリ x', y' ヲ求メテ之ニ代入スレバ

$$g^2+\lambda y'^2=c$$

トナルヲ以テ (6) ハ

$$x^2+2hxy-y^2+2gx+2fy+c=0$$

トナル。故ニ內心及ビ傍心ハ初メ與ヘラレタル双曲線ノ上ニアルコトヲ知ル。

第二十八回 (大正三年)

1. 三角形 ABC ノ頂點 A, B, C ヨリ他ノ三角形 A′B′C′ ノ邊 B′C′, C′A′, A′B′ ニ下セル垂線ガ同一ノ點ヲ過ル時ハ A′, B′, C′ ヨリ BC, CA, AB ニ下セル垂線モ亦同一ノ點ヲ過ルコトヲ證明セヨ。

[解] 六ツノ頂點ヲ

$$A(x_1, y_1),\quad B(x_2, y_2),\quad C(x_3, y_3)$$
$$A'(x_1', y_1'),\quad B'(x_2', y_2'),\quad C'(x_3', y_3')$$

ナリトスレバ, A, B, C ヨリ B′C′, C′A′, A′E′ ニ下ス線垂ノ方程式ハ夫々

$$(x_2'-x_3')x+(y_2'-y_3')y-\{x_1(x_2'-x_3')+y_1(y_2'-y_3')\}=0$$
$$(x_3'-x_1')x+(y_3'-y_1')y-\{x_2(x_3'-x_1')+y_2(y_3'-y_1')\}=0$$
$$(x_1'-x_2')x+(y_1'-y_2')y-\{x_3(x_1'-x_2')+y_3(y_1'-y_2')\}=0$$

之等ノ三ツノ直線ハ同一ノ點ヲ通ズルガ故ニ,

$$\begin{vmatrix} x_2'-x_3' & y_2'-y_3' & x_1(x_2'-x_3')+y_1(y_2'-y_3') \\ x_3'-x_1' & y_3'-y_1' & x_2(x_3'-x_1')+y_2(y_3'-y_1') \\ x_1'-x_2' & y_1'-y_2' & x_3(x_1'-x_2')+y_3(y_1'-h_2') \end{vmatrix}=0$$

各行ヲ加フルト

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \Sigma x_1(x_2'-x_3')+\Sigma y_1(y_2'-y_3') \\ x_3'-x_1' & y_3'-y_1' & x_2(x_3'-x_1')+y_2(y_3'-y_1') \\ x_1'-x_2' & y_1'-y_2' & x_3(x_1'-x_2')+y_3(y_1'-y_2') \end{vmatrix}=0$$

卽チ

$$\{\Sigma x_1(x_2'-x_3')+\Sigma y_1(y_2'-y_3')\}\begin{vmatrix} x_3'-x_1' & y_3'-y_1' \\ x_1'-x_2' & y_1'-y_2' \end{vmatrix}=0$$

然ルニ上ノ最後ノ行列式ハ B, C ヨリ相交ル直線 C′A′, A′B′ ニ下セル垂線ノ方程式ノ x, y ノ係數ヨリ成ル行列式ナルヲ以テ零ナラズ。(何トナレバ此等ノ垂線ハ相交ルヲ以テナリ。) 故ニ

$$\Sigma x_1(x_2'-x_3')+\Sigma y_1(y_2'-y_3')=0 \quad \dots\dots\dots\dots (1)$$

同樣ニ A′, B′, C′ ヨリ BC, CA, AB ニ下ス乘線ガ同一點ヲ過ル爲ノ條件ハ

$$\Sigma x_1'(x_2-x_2)+\Sigma y_1'(y_2-y_3)=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ナルコトナリ。然ルニ (1) モ (2) モ實ハ全ク同一ナリ。ヨツテ證セラル。

2. 一點ヲ過ル二ツノ直線ト他ノ二ツノ定直線トノ四ツノ交點ガ同一ノ圓ノ上ニアル時其圓ノ中心ノ軌跡ヲ求ム。

[解] 一ツノ定點ヲ原點ニトリコノ點ヲ過ル二ツノ直線ヲ

$$y=px, \qquad y=qx$$

トシ，他ノ二ツノ定直線ヲ

$$y=mx+n \qquad y=m'x+n'$$

ナリトス。玆ニ m, n, m', n' ハ定數ナルモ p, q ハ變數ナリ。

サテ之等ノ四ツノ直線ノ交點ヲ過ル二次曲線ノ方程式ハ

$$(y-mx-n)(y-m'x-n')-\lambda(y-px)(y-qx)=0$$

即チ

$$(mm'-\lambda pq)x^2-\{m+m'-\lambda(p+q)\}xy+(1-\lambda)y^2$$
$$+(mn'+m'n)x-(n+n')y+nn'=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

(1) ガ圓ヲ表ハス爲ニハ，x^2 ト y^2 ノ係數ガ相等シク且ツ xy ノ係數ガ零トナルコトヲ要ス。即チ

$$\left.\begin{aligned} mm'-\lambda pq&=1-\lambda \\ m+m'-\lambda(p+q)&=0 \end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

次ニ圓ノ中心ノ坐標ヲ求ムルニハ

$$\left.\begin{aligned} 2(mm'-\lambda pq)x-\{m+m'-\lambda(p+q)\}y+mn'+m'n&=0 \\ -\{m+m'-\lambda(p+q)\}x+2(1-\lambda)y-(n+n')&=0 \end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(3)$$

(3) ニ (2) ヲ代入スレバ

$$2(1-\lambda)x+mn'+m'n=0$$
$$2(1-\lambda)y-(n+n')=0$$

コレヨリ不定係數 λ ヲ消去スル時ハ

$$(n+n')x+(mn'+m'n)y=0$$

コレ求ムル中心ノ軌跡ニシテ定點（原點）ヲ過ル直線ナリ。

3. 直角軸ニ關シテ表ハサレタル二對ノ直線

$$\left.\begin{aligned} x+y-1&=0 \\ 12x-9y+5&=0 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x-2y&=0 \\ 18x+3y+2&=0 \end{aligned}\right\}$$

ニ夫々平行ナル二對ノ共軛徑ヲ有スル二次曲線ノ一ツノ軸ノ全長ガ 2 ナル時他ノ軸ノ長サヲ求メヨ。

[解] 二次曲線ノ中心ヲ原點トスルト其方程式ハ一般ニ

$$ax^2+2hxy+by^2=1 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

サテ x 軸ト角 θ ヲナス弦ノ方程式ハ

$$\frac{x-x'}{\cos\theta}=\frac{y-y'}{\sin\theta}=r$$

ニテ與ヘラルルガ故ニ (x', y') ガ弦ノ中點ナルベキ爲ニハ

$$(ax'+hy')+(hx'+by')\tan\theta=0$$

故ニソノ弦ヲ二等分スル徑ノ方程式ハ

$$(ax+hy)+(hx+by)\tan\theta=0$$

然ルニ此直線ガ x 軸トナス角ヲ θ' トスレバ

$$\tan\theta'=-\frac{a+h\tan\theta}{h+b\tan\theta}$$

故ニ
$$b\tan\theta\tan\theta'+h(\tan\theta+\tan\theta')+a=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

然ルニ此方程式ハ θ ト θ' トニ就テ對稱ナル形ヲ有スルヲ以テ x 軸ト θ' ナル角ヲナス弦ハ又 x 軸ト θ ナル角ヲナス徑ニヨリテ二等分セラル。故ニ二ツノ直線 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$ ガ (1) ノ共軛徑ニ平行ナル爲ニハ (2) ニヨリテ

$$bmm'+h(m+m')+a=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

故ニ二直線

$$x+y-1=0 \qquad 12x-9y+5=0$$

ガ (1) ノ共軛徑ニ平行ナル爲ニハ

$$-\frac{4}{3}b+\frac{h}{3}+a=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

同樣ニ他ノ二直線

$$x-2y=0 \qquad 18x+3y+2=0$$

ガ (1) ノ共軛徑ニ平行ナル爲ニハ

$$-3b-\frac{11h}{2}+a=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

(4), (5) ヨリ

$$\frac{h}{a}=-\frac{1}{5},\qquad \frac{b}{a}=\frac{7}{10}$$

コノ値ヲ (1) ニ代入スレバ,

$$x^2-\frac{2}{5}xy+\frac{7}{10}y^2=\frac{1}{a}$$

コレヨリ標準形ニ直セバ楕圓

$$\frac{x^2}{\frac{5}{3a}}+\frac{y^2}{\frac{10}{11a}}=1$$

故ニ x 軸ニ對應スル軸ノ全長ヲ 2 トスレバ

$$\frac{5}{3a}=1$$

ナルヲ以テ他ノ軸ノ全長ハ $\frac{2\sqrt{66}}{11}$ トナリ。y 軸ニ對應スル軸ノ全長ヲ 2 トスレバ

$$\frac{10}{11a}=1$$

ナルヲ以テ他ノ軸ノ全長ハ $\frac{\sqrt{66}}{3}$ トナル。

4. 二個ノ同焦點二次曲線ノ各ニ就キテ互ニ共軛ナル二ツノ直線ハ互ニ直交スルコトヲ證明セヨ。

［解］ 楕圓又ハ双曲線ノ場合ハ同一ノ方程式ニテ研究スルコトヲ得ベケレバ先ヅ之ヲ解決シ然ル後拋物線ノ場合ニ及ブベシ

(i) 楕圓及ビ双曲線ナル時,

コノ場合ニハ二ツノ曲線ノ共有軸ヲ坐標軸ニトル時ハ

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}=1 \quad\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda'}+\frac{y^2}{b^2+\lambda'}=1 \quad\cdots\cdots(2)$$

サテ (1), (2) ニ就キ互ニ共軛ナル直線ノ方程式ヲ

$$lx+my+n=0 \quad\cdots\cdots(3)$$

$$l'x+m'y+n'=0 \quad\cdots\cdots(4)$$

トスレバ (1) ニ關スル (3) ノ極ハ

$$x'=-\frac{l(a^2+\lambda)}{n}\qquad y'=-\frac{m(b^2+\lambda)}{n}$$

假定ニヨリテ (3) ト (4) トハ互ニ共軛ナルヲ以テ (4) ハコノ極ヲ通過スルヲ要ス。故ニ

$$ll'(a^2+\lambda)+mm'(b^2+\lambda)-nn'=0 \quad\cdots\cdots(5)$$

同様ニ (3) ト (4) トハ曲線 (2) ニ關シテ共軛ナル爲ニハ

$$ll'(a^2+\lambda')+mm'(b^2+\lambda')-nn'=0 \quad\cdots\cdots(6)$$

(5) ト (6) トヲ邊々相減ズレバ

$$(ll'+mm')(\lambda-\lambda')=0$$

然ルニ (1) ト (2) トハ同一ノモノナラザルヲ以テ $\lambda \neq \lambda'$ 從ツテ

$$ll'+mm'=0$$

コレ直線 (3) ト (4) トハ互ニ直交ナルコトヲ示スモノナリ。

(ii) 拋物線ノ場合

焦點ヲ原點トシ拋物線ノ軸ヲ x 軸トシ, 焦點ヲ通ジテ之レニ垂直ナル直線ヲ y 軸トスレバ二ツノ同焦點拋物線ノ方程式ハ

$$y^2=4\lambda(x+\lambda)$$

$$y^2=4\lambda'(x+\lambda')$$

ナリ。故ニ二ツノ直線

$$lx+my+n=0$$

$$l'x+m'y+n'=0$$

ガコレ等ニ關シテ互ニ共軛ナル直線ナリトスレバ, 上ト同ジヤウニスレバ夫等ノ條件ハ

$$ln'+l'n-2(ll'+mm')\lambda=0 \quad\cdots\cdots(7)$$

$$ln'+l'n-2(ll'+mm')\lambda'=0 \quad\cdots\cdots(8)$$

(7) ト (8) トヲ邊々相減ズル時ハ

$$(ll'+mm')(\lambda-\lambda')=0$$

故ニ

$$ll'+mm'=0$$

從ツテ二ツノ直線ガ互ニ直交ス。

5. 二個ノ双曲線ガ二ツノ漸近線ヲ共有スル時一方ノ双曲線上ニ

アル任意ノ點ノ他ノ双曲線ニ關スル極線ハ一定ノ双曲線ニ切スルコトヲ證明セヨ。

［解］漸近線ヲ坐標軸トスル時ノ二ツノ双曲線ノ方程式ヲ夫々

$$xy=k \qquad xy=k'$$

トス。今初メノ双曲線ノ上ノ任意ノ點ヲ (x', y') トスレバ後ノ双曲線ニ關スル極線ノ方程式ハ

$$xy'+x'y=2k' \quad \cdots\cdots(1)$$

ナリ。然ルニ此直線ハ同ジ漸近線ヲ共有スル他ノ定双曲線

$$xy=\frac{k'^2}{k} \quad \cdots\cdots(2)$$

ニ切ス。何トナレバ (1) ガ (2) ト交ル點ノ x 坐標ヲ求メンニ，其方程式ハ

$$y'x^2-2k'x+\frac{k'^2}{k}x'=0$$

而シテ此判別式ハ

$$k'^2-\frac{k'^2}{k}x'y' \quad \cdots\cdots(3)$$

ニシテ，シカモ點 (x', y') ハ初メノ双曲線ノ上ニアルヲ以テ

$$x'y'=k$$

從ツテ判別式 (3) ハ零トナル。換言スレバ (1) ト (2) トハ相重ル二點ニテ交ル。卽チ (1) ハ (2) ノ切線ナリ。

第二十九回（大正四年）

1. 一點ニ於テ相交ル三ツノ與ヘラレタル直線ノ各ノ上ニ頂點ヲ有スル三角形 ABC ノ邊 BC, CA ガ夫々二ツノ定點 P 及ビ Q ヲ過ギル時ハ邊 AB モ亦一定點 R ヲ過ギルコトヲ證明セヨ。

（第三章問題解義十一參照）

2. 直交軸ニ關シテ與ヘラレタル點 (1, 1) ヲ過ギ點 (3, 2) ヲ中心トシ二直線

$$5x^2+6xy-3y^2=0$$

ニ夫々平行ナル漸近線ヲ有スル双曲線及ビ之ニ共軛ナル双曲線ノ方程式ヲ求ム。

［解］軸ヲ平行ニ移シテ原點ヲ (3, 2) ニ置ク時ハ，點 (1, 1) ハ (−2, −1) トナル。故ニ問題ハ原點ヲ中心トシ $5x^2+6xy-3y^2=0$ ヲ漸近線トスル双曲線ノ中，(−2, −1) ヲ過ルモノヲ求ムルコトナリ。サテ求メントスル双曲線ノ方程式ハ漸近線ノ方程式トタダ常數ノミヲ異ニスルガ故ニ

$$5x^2+6xy-3y^2=c$$

ト置クベシ。次ニ點 (−2, −1) ヲ過ラシムル爲ニハ $c=29$ ナルヲ要ス。故ニ新軸ニ關シテノ方程式ハ

$$5x^2+6xy-3y^2=29$$

ニシテ其共軛双曲線ノ方程式ハ

$$5x^2+6xy-3y^2=-29$$

之等ヲ元ノ軸ニ戻ス時ハ夫々

$$5x^2+6xy-3y^2-42x-6y+40=0$$

$$5x^2+6xy-3y^2-42x-6y+98=0$$

トナル。

3. 直交軸ニ關シ次ノ方程式

$$x^2+y^2-2y=0,$$

$$x^2-xy+y^2-2y=0$$

ニヨリテ表ハサレタル二ツノ曲線ノ交點ヲ求メ且ツ同一ノ坐標軸ヲトリテ兩曲線ノ圖ヲ畫ケ。

［解］二ツノ曲線ノ方程式ヲ聯立セシメテ其交點ノ坐標ヲ得。卽チ

$$\left.\begin{matrix}x=0\\y=0\end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix}x=0\\y=0\end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix}x=0\\y=0\end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix}x=0\\y=2\end{matrix}\right\}$$

卽チ原點ニテハ三重ノ交リ方ヲナス。サテ初メノ方程式ヲ書キカヘルト

$$x^2+(y-1)^2=1$$

ナルヲ以テ中心ガ (0, 1) ニシテ半徑ガ 1 ナル圓ナリ。

次ニ第二ノ曲線ハ

$h^2-ab=-\frac{3}{4}$ ナルヲ以テ有心曲線ノ第一種ノモノナリ。中心ノ方程式ハ

$$\left.\begin{array}{l}2x-y=0\\-x+2y-2=0\end{array}\right\}$$

ナルヲ以テ點 $\left(\frac{2}{3},\ \frac{4}{3}\right)$ ハ中心ナリ。故ニ軸ヲ平行ニ移シテ原點ヲ中心ニ置クト，

$$x^2-xy+y^2=\frac{4}{3}$$

トナル。次ニ軸ヲ

$$\tan 2\theta=\frac{-1}{1-1}$$

ニ適スルヤウナル角 $\theta=-45^\circ$ ダケ廻轉スレバ其變換式ハ

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y)\qquad y=\frac{1}{\sqrt{2}}(-X+Y)$$

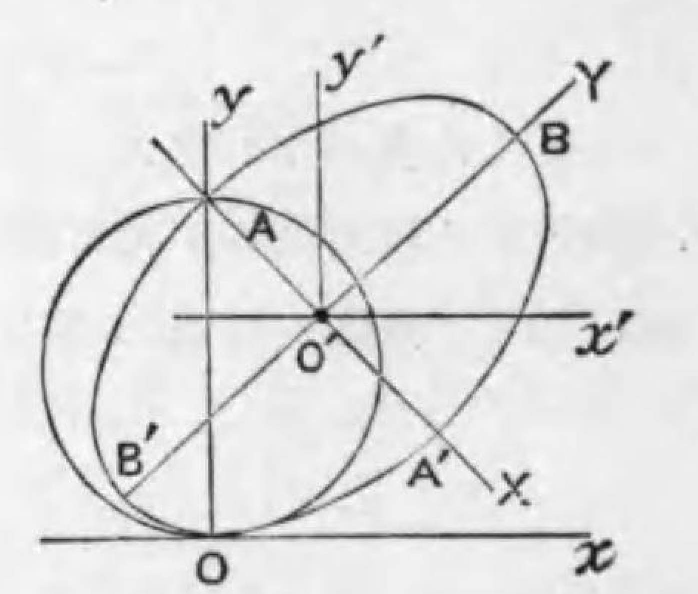
ナルヲ以テ，代入スレバ

$$\frac{3}{2}X^2+\frac{1}{2}Y^2=\frac{4}{3}$$

或ハ

$$\frac{X^2}{\frac{8}{9}}+\frac{Y^2}{\frac{8}{3}}=1$$

即チ楕圓ニシテ半軸ハ夫々 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$\frac{2\sqrt{6}}{3}$ ナリ。而シテ一ツノ軸ノ端 A ハ X, Y 軸ニ關シテハ點 $\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3},\ 0\right)$ ナレドモ之ヲ最初ノ坐標軸ニ直ス時ハ (0, 2) トナルガ故ニ A 點ハ二ツノ曲線ノ交點ナリ。



注 意 $\tan 2\theta=\frac{-1}{1-1}$ ニ適スル角ヲ 45° トスルモ差支ヘナシ。カクスル時ハ圖中ノ Y 軸ト X 軸トガ交換セラルルモ方程式モ又

$$\frac{X^2}{\frac{8}{3}}+\frac{Y^2}{\frac{8}{9}}=1$$

トナリテ圖ニ描クト少シモ變ルコトナシ。

4\. 一點 P ヨリ與ヘラレタル拋物線ニ引キタル三ツノ法線ノ足ヲ頂點トスル三角形ノ垂心ガ元ノ拋物線ノ上ニアルベキ P ノ軌跡ヲ求メヨ。

［解］ 拋物線ノ方程式ヲ $y^2=px$ トスレバ其上ノ一點 $(x_1,\ y_1)$ ニ於ケル法線ノ方程式ハ

$$y-y_1=-\frac{2y_1}{p}(x-x_1)$$

サテ P ヲ $(\alpha,\ \beta)$ ナリトスレバ，法線ガ此點ヲ過ル爲ニハ

$$\beta-y_1=-\frac{2y_1}{p}(\alpha-x_1)\ \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又 $$y_1^2=px_1$$

ナル關係アルヲ以テ (1) ヨリ三ツノ法線ノ足ノ y 坐標ハ方程式

$$2y^3+(p^2-2p\alpha)y-p^2\beta=0$$

ノ三ツノ根ナルヲ知ル。サテ此根ヲ y_1, y_2, y_3 トスレバ三ツノ法線ノ足 A, B, C ノ坐標ハ

$$A\left(\frac{y_1^2}{p},\ y_1\right)\qquad B\left(\frac{y_2^2}{p},\ y_2\right)\qquad C\left(\frac{y_3^2}{p},\ y_3\right)$$

但シ

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma y_1=0\\[4pt]\Sigma y_2y_3=\dfrac{p^2-2p\alpha}{2}\\[4pt]y_1y_2y_3=\dfrac{1}{2}p^2\beta\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

今 △ABC ノ垂心ヲ $H(x,\ y)$ トスレバ $AH\perp BC$ ナルヲ以テ AH ノ方程式ハ

$$y-y_1=-\frac{\frac{y_2^2}{p}-\frac{y_3^2}{p}}{y_2-y_3}\left(x-\frac{y_1^2}{p}\right)\ \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

分母ヲ拂ヒ整頓スレバ

$$p(y_2+y_3)x+p^2y=y_1^2(y_2+y_3)+p^2y_1\ \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

同樣ニ HB ノ方程式ハ

$$p(y_3+y_1)x+p^2y=y_2^2(y_3+y_1)+p^2y_2\ \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

(4) ト (5) トヨリ

$$x=-\frac{y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1+p^2}{p} \quad \cdots\cdots(6)$$

$$y=\frac{p^2(y_1+y_2+y_3)+(y_2+y_3)(y_3+y_1)(y_1+y_2)}{p^2} \quad \cdots\cdots(7)$$

(6) ト (7) トヲ (2) ヲ代入スレバ

$$x=\frac{2\alpha-3p}{2} \qquad y=-\frac{1}{2}\beta$$

然ルニ垂心ガ抛物線ノ上ニアル爲ニハ

$$\frac{\beta^2}{4}=\frac{p}{2}(2\alpha-3p)$$

ヨツテ求ムル軌跡ハ α, β ヲ流通坐標ニ直シタルモノ即チ

$$y^2=4p\left(x-\frac{3}{2}p\right)$$

ニシテ一ツノ抛物線ナリ。

5. 二ツノ與ヘラレタル同焦點有心二次曲線ニ關シ任意ノ一ツノ直線ノ二ツノ極點間ノ距離ト中心ヨリコノ直線ニ至ル距離トノ積ハ一定ナルコトヲ證セヨ。

[解] 二ツノ同焦點有心二次曲線ノ焦點ヲ結ビ附ケル直線ヲ x 軸トシ中心ヲ過リ之ニ垂直ナル直線ヲ y 軸トスレバ其方程式ハ夫々

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}=1 \quad \cdots\cdots(1)$$

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda'}+\frac{y^2}{b^2+\lambda'}=1 \quad \cdots\cdots(2)$$

トスルコトヲ得。玆ニ λ 及ビ λ' 楕圓ニアリテハ正ノ數又ハ $-b^2$ ヨリモ大ナル負數ニシテ ($a>b$ ナル時) 双曲線ニアリテハ $-a^2$ ト $-b^2$ トノ間ニアル負數ナリトス。(講義二百十一頁及ビ二百七十一頁參照) 何レニシテモ二次曲線ガ與ヘラレタルガ故ニ λ 及ビ λ' ノ値ハ一定ナリ。

今任意ノ直線ノ方程式ヲ

$$lx+my=1 \quad \cdots\cdots(3)$$

トスレバ (1) ニ關シテ (3) ヲ極線トスルガ如キ點即チ極ハ $\{(a^2+\lambda)l,\ (b^2+\lambda)m\}$ ニシテ (2) ニ關シテハ點 $\{(a^2+\lambda')l,\ (b^2+\lambda')m\}$ ナリ。故ニ之等ノ二點間ノ距離ハ

$$\sqrt{\{(a^2+\lambda)l-(a^2+\lambda')l\}^2+\{(b^2+\lambda)m-(b^2+\lambda')m\}^2}$$
$$=|(\lambda-\lambda')\sqrt{l^2+m^2}|$$

ナリ。又中心即チ原點ヨリ直線 (3) ニ至ル距離ハ $\dfrac{1}{\sqrt{l^2+m^2}}$ ナルヲ以テ夫等ノ積ハ $|\lambda-\lambda'|$ ナリ。ヨツテ一定ナリ。

第 三 十 回 (大正五年)

1. 一定點ヲ過ギリテ一定圓ト直交スル圓ハ他ノ一定點ヲ過ギルコトヲ證明セヨ。

(第六章問題解義十五參照)

2. 與ヘラレタル長サノ通徑ヲ有スル抛物線ガ一定ノ他ノ抛物線ト同一圓周上ニアル四ツノ點ニ於テ相交ハル時コノ圓ノ中心ノ軌跡ヲ求ム。

[解] 一定ノ抛物線ノ方程式ヲ

$$y^2=4px \quad \cdots\cdots(1)$$

トシ，任意ノ抛物線ノ方程式ヲ

$$x^2+2hxy+h^2y^2+2gx+2fy+c=0 \quad \cdots\cdots(2)$$

トス。(h^2-ab ニ相當スルモノハ零トナルコトニ注意スベシ。) 然ル時コノ抛物線ノ通徑ヲ l トスレバ

$$l=\frac{f-hg}{(1+h^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \cdots\cdots(3)$$

ナリ。サテ (1) ト (2) トノ交點ヲ過ル二次曲線ノ方程式ハ

$$x^2+2hxy+h^2y^2+2gx+2fy+c+\lambda(y^2-4px)=0 \quad \cdots\cdots(4)$$

コノ曲線ガ圓ヲ表ハス爲ニハ x^2 ト y^2 トノ係數ガ相等シク且ツ xy ノ係數ガ零ナルコトヲ要ス。(第五章一頁注意參照) 即チ

$$1=h^2+\lambda$$
$$h=0$$

ヨツテ　$h=0$　$\lambda=1$　從ツテ (3) ヨリ　$l=f$

故ニ (4) ハ次ノ如クナル

$$x^2+y^2+x(2g-4p)+2ly+c=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

此圓ノ中心ノ坐標ヲ定ムル方程式ハ

$$x+g-2p=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

$$y+l=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

玆ニ g ハ不定ナルヲ以テ (6) ハ確定セズト雖モ (7) ヨリ $y+l=0$ ヲ得ルガ故ニ求ムル軌跡ハ $y=-l$ ナリ。

3. 楕圓上ノ任意ノ一點 P ト焦點 F 及ビ F′ トヲ結ビ付クル直線ガ再ビ楕圓ト交ル點ヲ夫々 M, M′ トスレバ

$$\frac{\mathrm{PF}}{\mathrm{MF}}+\frac{\mathrm{PF'}}{\mathrm{M'F'}}$$

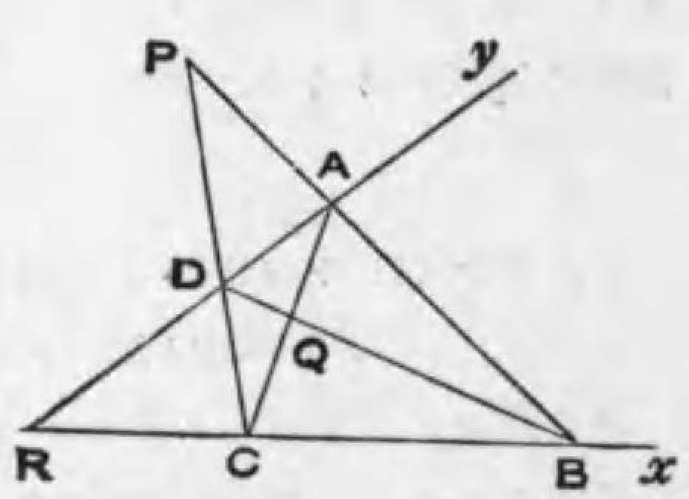
ハ不易ナルコトヲ證明セヨ。

(第九章問題解義九參照)

4. 二次曲線ニ内接スル四邊形 ABCD ニ於テ AB, CD ノ交點ヲ P トシ AC, BD ノ交點ヲ Q トシ AD, BC ノ交點ヲ R トスレバ PQ ハ R ノ極線ナルコトヲ證セヨ。

[解] BC ヲ x 軸, AD ヲ y 軸, R ヲ原點トシ A, B, C, D ヲ夫々點 $(0, b')$, $(a', 0)$, $(a, 0)$, $(0, b)$ トスレバ四邊形 ABCD ニ外接スル二次曲線ノ方程式ハ

$$\left(\frac{x}{a'}+\frac{y}{b}-1\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b'}-1\right)$$
$$-\lambda xy=0$$



即チ

$$\frac{x^2}{aa'}+xy\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{a'b'}-\lambda\right)$$
$$+\frac{y^2}{bb'}-\left(\frac{x}{a}+\frac{x}{a'}\right)-\left(\frac{y}{b}\right.$$
$$\left.+\frac{y}{b'}\right)+1=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

但シ λ ハ任意ノ數ナリトス。

然ル時ハ原點ノ此二次曲線ニ關スル極線ノ方程式ハ第十二章公式 (7) ニヨリテ

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}\right)x+\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{b'}\right)y-2=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

サテ AB, CD ノ方程式ハ夫々

$$\frac{x}{a'}+\frac{y}{b'}-1=0$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1=0$$

ナルヲ以テ

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{x}{a'}\right)+\left(\frac{y}{b}+\frac{y}{b'}\right)-2=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

ハ P 點ヲ過ル一ツノ直線ヲ表ハス。同様ニ AC, BD ノ方程式ハ夫々

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{a}+\frac{y}{b'}-1=0\\ \frac{x}{a'}+\frac{y}{b}-1=0\end{aligned}\right\}$$

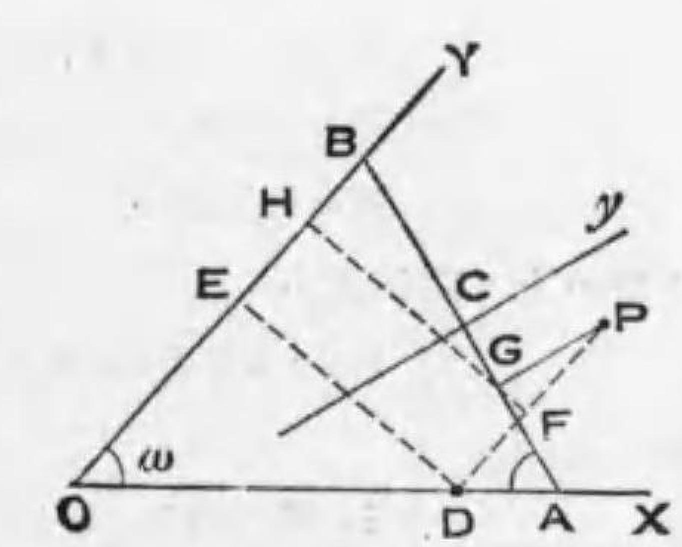
ナルヲ以テ

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{x}{a'}\right)+\left(\frac{y}{b}+\frac{y}{b'}\right)-2=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

ハ Q 點ヲ過ル一ツノ直線ヲ表ハス。而シテ (3) ト (4) トハ全ク同一ナルヲ次テ直線 PQ ノ方程式ナリトイフヲ得ベク且ツ (2) ト全々同一ナルヲ以テ PQ ハ二次曲線ニ關シテ R ノ極線ナリ。

5. 或紙片ノ二定點ガ夫々一平面上ノ相交ル二直線ヲ動キ且ツ此紙片ノ他ノ一點ガコノ平面上ノアル直線上ヲ動ク時ハ此點ハ紙片上一定ノ圓周上ニアルコトヲ證明セヨ。

[解] 平面上ノ相交ル二ツノ直線ヲ OX, OY トシ其ナス角ヲ ω トス。紙ノ上ノ二定點ヲ A, B トシ A ハ OX 上ヲ B ハ OY 上ヲ動キ且ツ定長 AB ノ長サヲ $2a$ トス。又紙ノ上ノ他ノ一ツノ點ヲ P トシ其坐標ヲ X, Y トス。今 AB ヲ x 軸トシ其垂直二等分線ヲ y 軸トシタル時 P ノ坐標ヲ x, y トスルトキ X, Y, x, y ノ間ニ如何ナル關係



ガアルカヲ研究セントス。ソレニハ P ヨリ OY ニ平行ニ PD ヲ引キ次ニ P ヨリ AB ニ垂線 PG ヲ引ク。D, G ヲ過リテ OY ニ垂線 DE, GHF ヲ作ル時ハ

$$\mathrm{DE}=\mathrm{GH}+\mathrm{GF}$$

然ルニ

$$\mathrm{DE}=\mathrm{X}\sin\omega$$

又二ツノ直角三角形 BGH 及ビ FPG ニ於テ

$$\mathrm{GH}=(a+x)\sin\hat{\mathrm{B}}=(a+x)\sin(\omega+\mathrm{A})$$

$$\mathrm{GF}=y\cos\mathrm{F\hat{G}P}=-y\cos(\omega+\mathrm{A})$$

ナルヲ以テ

$$\mathrm{X}\sin\omega=(a+x)\sin(\omega+\mathrm{A})-y\cos(\omega+\mathrm{A}) \quad\cdots\cdots(1)$$

同樣ニ

$$\mathrm{Y}\sin\omega=(a-x)\sin\mathrm{A}+y\cos\mathrm{A} \quad\cdots\cdots(2)$$

ナル關係アリ。

次ニ平面上ニアル直線ノ方程式ヲ

$$\mathrm{Y}=m\mathrm{X}+b \quad\cdots\cdots(3)$$

トスレバ P ハ此上ニアルヲ以テ (3) ニ (1) 及ビ (2) ヲ代入スレバ

$$(a-x)\sin\mathrm{A}+y\cos\mathrm{A}=m\{(a+x)\sin(\omega+\mathrm{A})$$
$$-y\cos(\omega+\mathrm{A})\}+b\sin\omega$$

或ハ

$$\{a-x-m(a+x)\cos\omega-my\sin\omega\}\sin\mathrm{A}$$
$$+\{y-m(a+x)\sin\omega+my\cos\omega\}\cos\mathrm{A}-b\sin\omega=0$$

今

$$\mathrm{L}=a-x-m(a+x)\cos\omega-my\sin\omega$$
$$\mathrm{M}=y-m(a+x)\sin\omega+my\cos\omega$$
$$\mathrm{N}=-b\sin\omega$$

ト置ク時ハ上ノ關係式ハ

$$\mathrm{L}\sin\mathrm{A}+\mathrm{M}\cos\mathrm{A}+\mathrm{N}=0$$

變形スレバ

$$(\mathrm{N}-\mathrm{M})\tan^2\frac{\mathrm{A}}{2}+2\mathrm{L}\tan\frac{\mathrm{A}}{2}+(\mathrm{M}+\mathrm{N})=0$$

此式ハ AB ノ位置ノ如何ニ關セズ成立セザルベカラズ。換言スレバ角 A

ノ大小ノ如何ニ關セズ成立セザルベカラズ。ソレガ爲ニハ

$$\mathrm{N}-\mathrm{M}=0 \qquad \mathrm{L}=0 \qquad \mathrm{M}+\mathrm{N}=0$$

或ハ

$$\mathrm{L}=0 \qquad \mathrm{M}=0 \qquad \mathrm{N}=0$$

故ニ

$$\left.\begin{aligned}&a-x-m(a+x)\cos\omega-my\sin\omega=0\\&y-m(a+x)\sin\omega+my\cos\omega=0\\&b=0\end{aligned}\right\}$$

之等ヨリ不定常數 m ヲ消去スレバ

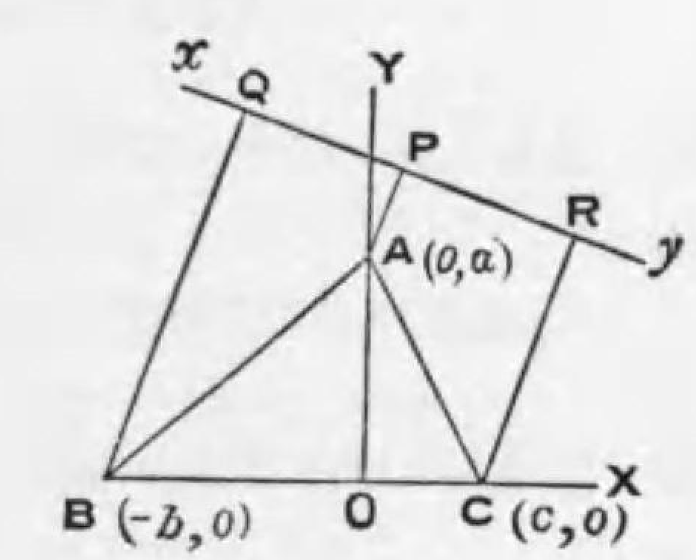
$$x^2+y^2+2ay\cot\omega-a^2=0 \quad\cdots\cdots(4)$$

コレ紙片上ノ二ツノ直交軸 x, y ニ關シテ P ノ軌跡ヲ表ハスモノニシテ一ツノ圓ナリ。ヨツテ證明セラレタリ。

$\boxed{\text{注 意}}$ A, B ガ OX, OY ノ上ヲ動クヲ以テ線分 AB 及ビ其垂直二等分線ノ位置ガ變化ス。故ニ (4) ガ定圓ト稱スベカラザルガ如ク考ヘラルルト雖モ實ハ然ラザルナリ。何トナレバ夫等ノ位置ハ如何ニモ變化スルト雖モソハ與ヘラレタル平面ニノミ關係スルモノニシテ紙片上ニテハソレ等ノ相互ノ位置ハ確定セリ。從ツテ (4) ハ紙片上ニテ或定圓ヲ表ハストイフテ可ナリ。

第三十一回 (大正六年)

1. 與ヘラレタル三角形 ABC ノ各頂點ヲ過リテ相互ニ平行ナル三ツノ直線 AP, BQ, CR ヲ引キ一ツノ定直線 xy ト夫々 P, Q, R ニ於テ交ラシム。P, Q, R ヨリ夫々 BC, CA, AB ニ下シタル垂線ガ同一ナル點ヲ過ルニハ AP, BQ, CR ヲ如何ニ引クベキカ。



[解] BC ヲ x 軸ニ A ヨリ BC ニ垂線 AO ヲ引キ之ヲ y 軸トス。今 AO, BO, CO ノ長サヲ夫々 a, b, c トシ定直線 xy ノ方程式ヲ

$$y=mx+n \quad\cdots\cdots(1)$$

トス又 AP, BQ, CR ノ方向係數ヲ m' トスレバ

$$\text{AP}: \quad y-a=m'x \quad \cdots\cdots(2)$$

$$\text{BQ}: \quad y=m'(x+b) \quad \cdots\cdots(3)$$

$$\text{CR}: \quad y=m'(x-c) \quad \cdots\cdots(4)$$

故＝ P ハ $\left(\dfrac{a-n}{m-m'}, \dfrac{am-m'n}{m-m'}\right)$ Q ハ $\left(\dfrac{bm'-n}{m-m'}, \dfrac{m'(bm-n)}{m-m'}\right)$ R ハ $\left(\dfrac{-(m'c+n)}{m-m'}, \dfrac{-m'(mc+n)}{m-m'}\right)$ ナリ。

次＝ BC, CA, AB ノ方程式ヲ求ムル＝

$$\text{BC}: \quad y=0$$

$$\text{CA}: \quad \frac{x}{c}+\frac{y}{a}=1$$

$$\text{AB}: \quad \frac{x}{-b}+\frac{y}{a}=1$$

故＝ P, Q, R ヨリ BC, CA, AB ＝下セル垂線ノ方程式ハ夫々

$$x=\frac{a-n}{m-m'}$$

$$y-\frac{m'(bm-n)}{m-m'}=\frac{c}{a}\left(x-\frac{bm'-n}{m-m'}\right)$$

$$y+\frac{m'(mc+n)}{m-m'}=\frac{-b}{a}\left(x+\frac{m'c+n}{m-m'}\right)$$

而シテ之等ハ一點＝於テ會スル爲＝ハ

$$\begin{vmatrix} 1 & & -\dfrac{a-n}{m-m'} \\ \dfrac{c}{a} & -1 & \dfrac{m'(bm-n)}{m-m'}-\dfrac{c(bm'-n)}{a(m-m')} \\ \dfrac{-b}{a} & -1 & \dfrac{-m'(mc+n)}{m-m'}-\dfrac{b(m'c+n)}{a(m-m')} \end{vmatrix}=0$$

即チ

$$\begin{vmatrix} m-m' & 0 & -(a-n) \\ c(m-m') & -a(m-m') & am'(bm-n)-c(bm'-n) \\ -b(m-m') & -a(m-m') & -am'(mc+n)-b(m'c+n) \end{vmatrix}=0$$

或ハ

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -(a-n) \\ c & -1 & am'(bm-n)-c(bm'-n) \\ -b & -1 & -am'(mc+n)-b(m'c+n) \end{vmatrix}=0$$

第二列ヨリ第三列ヲ減ズレバ

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -(a-n) \\ b+c & 0 & (b+c)(amm'+n) \\ -b & -1 & -am'(mc+n)-b(m'c+n) \end{vmatrix}=0$$

即チ

$$\begin{vmatrix} 1 & -(a-n) \\ b+c & (b+c)(amm'+n) \end{vmatrix}=0$$

或ハ

$$\begin{vmatrix} 1 & -(a-n) \\ 1 & amm'+n \end{vmatrix}=amm'+n+(a-n)=0$$

故＝

$$a(mm'+1)=0$$

$a \neq 0$ ナルヲ以テ $mm'+1=0$ 從ツテ $mm'=-1$ ヨツテ AP, BQ, CR ヲ xy ＝垂直＝引ケバ可ナリ。

2. 相切スル定圓ト定直線トノ各＝切シ且ツ互＝相切スル二ツノ圓ノ切點ノ軌跡ヲ求メヨ。

(第六章問題解義三十參照)

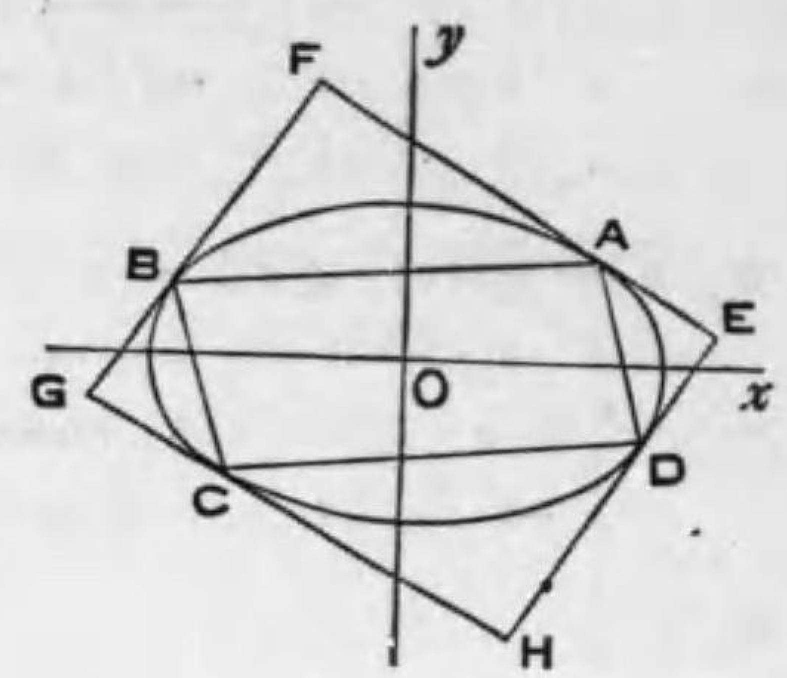
3. 任意ノ一點ヨリ拋物線＝引ケル三ツノ法線ノ足ト曲線ノ頂點トハ同一圓周上＝アルコトヲ證セヨ。

(大正四年度文檢問題四及ビ第五章問題六及ビ七參照)

4. 與ヘラレタル楕圓＝外接スル任意ノ矩形ノ四ツノ切點ヲ頂點トスル平行四邊形ノ周ハ定長ナルコトヲ證セヨ。

[解] EFGH ヲ外切セル矩形ナリトシ ABCD ハ切點ヲ結ブ平行四邊形ナリトス。今楕圓ノ方程式ヲ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



トス。又 A 及ビ B ノ坐標ヲ夫々

A: $(a\cos(\theta+\varphi),\ b\sin(\theta+\varphi))$

B: $(a\cos(\theta-\varphi),\ b\sin(\theta-\varphi))$

ニテ表ハスト（カクノ如キ角 θ, φ ヲ定ムルコトヲ得）

C: $(-a\cos(\theta+\varphi),\ -b\sin(\theta+\varphi))$

D: $(-a\cos(\theta-\varphi),\ -b\sin(\theta-\varphi))$

トナルベシ。故ニ A, B ニ於ケル切線ノ方程式ハ

$$\frac{x}{a}\cos(\theta+\varphi)+\frac{y}{b}\sin(\theta+\varphi)=1$$

$$\frac{x}{a}\cos(\theta-\varphi)+\frac{y}{b}\sin(\theta-\varphi)=1$$

ナリ。然ルニ假定ニヨリテ之等ハ互ニ直交ナルガ故ニ

$$\frac{\cos(\theta+\varphi)\cos(\theta-\varphi)}{a^2}+\frac{\sin(\theta+\varphi)\sin(\theta-\varphi)}{b^2}=0$$

ナル條件アルベシ。分母ヲ拂ヒ且ツ $\cos(\theta+\varphi)\cos(\theta-\varphi)=\cos^2\theta-\sin^2\varphi$, $\sin(\theta+\varphi)\sin(\theta-\varphi)=\sin^2\theta-\sin^2\varphi$ ナルコトニ注意スレバ,

$$a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta=(a^2+b^2)\sin^2\varphi \quad \cdots\cdots(1)$$

サテ AB ノ長サヲ求メンニ

$$AB=\sqrt{a^2[\cos(\theta+\varphi)-\cos(\theta-\varphi)]^2+b^2[\sin(\theta+\varphi)-\sin\theta(-\varphi)]}$$
$$=\sqrt{4a^2\sin^2\theta\sin^2\varphi+4b^2\cos^2\theta\sin^2\varphi}$$

茲ニ於テ (1) ヲ代入スレバ

$$AB=2\sin^2\varphi\sqrt{a^2+b^2}$$

同樣ニ

$$BC=2\cos^2\varphi\sqrt{a^2+b^2}$$

ヨツテ

$$AB+BC=2\sqrt{a^2+b^2}$$

従ツテ平行四邊形 ABCD ノ周ハ $4\sqrt{a^2+b^2}$ ニシテ定長ナリ。

5. 直交軸ニ關シテ與ヘラレタル四點 $(a, 0), (-a, 0), (0, b), (0, -b)$ ヲ過ル任意ノ二次曲線ト交リテ總テノ交點ニ於テ直交スル二次曲線ノ方程式ヲ求メヨ。

[解] 四ツノ點ヲ過ル二次曲線ノ方程式ヲ

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2-1+\lambda\left\{\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^2-1\right\}=0 \quad \cdots\cdots(1)$$

トス。但シ λ ヲ任意ノ數ナリトス。

(1) ヲ少シク變形スレバ

$$\frac{x^2}{a^2}+2\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\frac{xy}{ab}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

ヨリテ

$$\frac{1-\lambda}{1+\lambda}=k$$

ト置ク時ハ, (1) ハ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{2k}{ab}xy+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

或ハ

$$S=b^2x^2+2kabxy+a^2y^2-a^2b^2=0 \quad \cdots\cdots(2)$$

トナル。

サテ所要ノ二次曲線ノ方程式ヲ

$$Ax^2+2Hxy+By^2+2Gx+2Fy-1=0 \quad \cdots\cdots(3)$$

トスレバ (2) ト (3) トハ直交スル爲ニハ

$$\frac{Ax+Hy+G}{Hx+By+F}\cdot\frac{b^2x+kaby}{kabx+a^2y}=-1$$

分母ヲ拂ヒ整頓スレバ

$$S'=(Ab^2+Hkab)x^2+[H(a^2+b^2)+(A+B)kab]xy$$
$$+(Ba^2+Hkab)y^2+(Gb^2+Fkab)x+(Fa^2+Gkab)y=0 \quad \cdots\cdots(4)$$

サテ (2) ト (3) ガ交ル凡テノ點ニ於テ直交スル爲ニハ (3) ハ (2) ト (4) トニヨリテ同時ニ滿足セザルベカラズ。故ニ (3) ハ

$$pS+S'=0$$

ノ形トナラザルベカラズ。ヨツテ係數ヲ比較スレバ

$$\frac{(\mathrm{A}+p)b^2+\mathrm{H}kab}{\mathrm{A}}=\frac{(a^2+b^2)\mathrm{H}+kab(\mathrm{A}+\mathrm{B})+2pkab}{2\mathrm{H}}$$

$$=\frac{\mathrm{B}a^2+\mathrm{H}kab+pa^2}{\mathrm{B}}=\frac{\mathrm{G}b^2+\mathrm{F}kab+2p\mathrm{G}}{2\mathrm{G}}=\frac{\mathrm{F}a^2+\mathrm{G}kab+2p\mathrm{F}}{2\mathrm{F}}$$

$$=\frac{pa^2b^2}{1} \quad \cdots\cdots\cdots(5)$$

ヨツテ先ヅ

$$\frac{\mathrm{G}b^2+\mathrm{F}kab+2p\mathrm{G}}{2\mathrm{G}}=\frac{\mathrm{E}a^2+\mathrm{G}kab+2p\mathrm{F}}{2\mathrm{F}}$$

ヨリ

$$(\mathrm{F}^2-\mathrm{G}^2)kab-\mathrm{FG}(a^2-b^2)=0 \quad \cdots\cdots\cdots(6)$$

然ルニ k ハ任意ノ數ナルヲ以テ (6) ガ成立スル爲ニハ

$$\mathrm{F}^2=\mathrm{G}^2 \qquad \mathrm{EG}=0$$

$$\therefore \quad \mathrm{F}=\mathrm{G}=0$$

次ニ

$$\frac{\mathrm{A}b^2+\mathrm{H}kab+pb^2}{\mathrm{A}}=pa^2b^2$$

ヨリ

$$\mathrm{A}=\frac{\mathrm{H}ka+pb}{b(pa^2-1)}$$

同樣ニ

$$\mathrm{B}=\frac{\mathrm{H}kb+pa}{a(pb^2-1)}$$

從ツテ

$$\frac{(a^2+b^2)\mathrm{H}+(\mathrm{A}+\mathrm{B})kab+2pkab}{2\mathrm{H}}=pa^2b^2$$

ニ上ノ値ヲ代入スレバ

$$\mathrm{H}=\frac{p^2kab}{p^2a^2b^2-p(a^2+b^2)+1-k^2}$$

從ツテ

$$\mathrm{A}=\frac{p(pb^2+k^2-1)}{p^2a^2b^2-p(a^2+b^2)+1-k^2}$$

$$\mathrm{B}=\frac{p(pa^2+k^2-1)}{p^2a^2b^2-p(a^2+b^2)+1-k^2}$$

ヨツテ所要ノ二次曲線ハ結局

$$p(pb^2+k^2-1)x^2+2p^2kabxy+p(pa^2+k^2-1)y^2$$
$$=p^2a^2b^2-p(a^2+b^2)+1-k^2$$

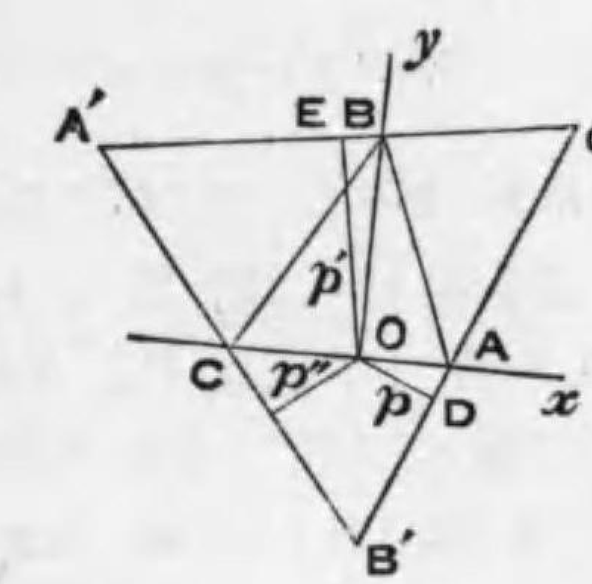
トナル。

注　意　上ノ解ニ於ケル k ト p トハ任意ノ數ナリ。故ニ題意ニ適スル二次曲線ハ無限ニアルト知ルベシ。

第三十二回 (大正七年)

1. 與ヘラレタル三角形ニ外接スル正三角形ノ重心ノ軌跡ヲ求メヨ。

[解] 與ヘラレタル三角形ヲ ABC トシ底邊 CA ヲ x 軸, B ヨリ底邊ニ至ル垂直線 BO ヲ y 軸トシ足 O ヲ原點トス。今三ツノ頂點 A, B, C ヲ點 $(a, 0)$, $(0, b)$, $(-c, 0)$ トシ外接正三角形ヲ A′B′C′ トス。



今 O ヨリ正三角形ノ三邊ニ垂線 OD, OE, OF ヲ引キ優角 AOD ヲ α トスレバ B′C′ ノ方程式ハ

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

又角 DOE ハ 120° ナルヲ以テ C′A′ ノ方程式ハ

$$x\cos(\alpha+120^\circ)+y\sin(\alpha+120^\circ)=p' \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

同樣ニ A′B′ ノ方程式ハ

$$x\cos(\alpha+120^\circ)+y\sin(\alpha-120^\circ)=p'' \quad \cdots\cdots\cdots(3)$$

然ルニ

$$p=a\cos\alpha$$
$$p'=b\cos(\alpha+30^\circ)$$
$$p''=c\cos(\alpha+60^\circ)$$

ナル關係アリ。

サテ C′ ヨリ A′B′ ニ至ル垂線ハ C′ ノ二等分線ナルヲ以テ其方程式ハ (1) ヨリ (2) ヲ減ズルコトニヨリテ得ラル。卽チ

$$x\{\cos\alpha-\cos(\alpha+120^\circ)\}+y\{\sin\alpha-\sin(\alpha+120^\circ)\}$$
$$=a\cos\alpha-b\cos(\alpha+30^\circ)$$

簡單ニスレバ

$$(\sqrt{3}x+3y-b)\sin\alpha+(3x-\sqrt{3}y-2a+\sqrt{3}b)\cos\alpha=0 \text{ ......(4)}$$

同樣ニシテ B′ ヨリ A′C′ ニ至ル垂線ノ方程式ハ

$$(-\sqrt{3}x+3y-\sqrt{3}c)\sin\alpha+(3x+\sqrt{3}y-2a+c)\cos\alpha=0 \text{ ...(5)}$$

然ルニ正三角形ノ重心ノ坐標ハ (4) 及ビ (5) ヲ同時ニ滿足スベキガ故ニ之等ヨリ不定ノ數 α ヲ消去スレバ求ムル軌跡ヲ得ベシ。卽チ

$$\frac{\sqrt{3}x+3y-b}{-\sqrt{3}x+3y-\sqrt{3}c}=\frac{3x-\sqrt{3}y-2a+\sqrt{3}b}{3x+\sqrt{3}y-2a+c}$$

分母ヲ拂ヒ整頓スレバ,

$$3(x^2+y^2)-2(a-c)x-2by+\frac{ab+bc-\sqrt{3}ac}{\sqrt{3}}=0$$

故ニ所要ノ軌跡ハ一ツノ圓ナリ。

2. 拋物線上ノ二點 P, Q ト頂點トヲ通ル圓ガ曲線ノ軸ト交ハル點ヲ A トシ直線 PQ ガ軸ト交ル點ヲ B トス。PQ ノ垂直二等分線ハ AB ノ中點ヲ通ルコトヲ證明セヨ。

〔解〕 拋物線ノ軸ヲ x 軸, 頂點ニ於テ之ニ垂直ナル直線ヲ軸トスル時ノ方程式ヲ

$$y^2=4px$$

ナリトス。今 P, Q, ヲ點 (x_1, y_1), (x_2, y_2) トシ O, P, Q ヲ通ル圓ノ方程式ヲ

$$x^2+y^2+2gx+2fy=0 \text{ ....(1)}$$

ト假定ス。(常數項ナキコトニ注意セヨ) 然ル時ハ A 點ノ x 坐標ハ (1) ヨリ直チニ $-2g$ ヲ得。

サテ (1) ガ P, Q ヲ通ルベキガ故ニ

$$x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1=0 \text{ ....(2)}$$
$$x_2^2+y_2^2+2gx_2+2fy_2=0 \text{ ....(3)}$$

f ヲ消去スレバ

$$x_1^2y_2-x_2^2y_1+y_1^2y_2-y_2^2y_1+2g(x_1y_2-x_2y_1)=0 \text{ ....(4)}$$

ニシテ且ツ

$$y_1^2=4px_1, \quad y_2^2=4px_2 \text{ ....(5)}$$

ナル關係アルガ故ニ (4), (5) ヨリ x_1, x_2 ヲ消去スレバ

$$\frac{y_1^4y_2-y_2^4y_1}{16p^2}+y_1^2y_2-y_2^2y_1+2g\frac{y_1^2y_2-y_2^2y_1}{4p}=0,$$

此兩邊ヲ $y_1y_2(y_1-y_2)$ ニテ除スレバ

$$\frac{y_1^2+y_1y_2+y_2^2}{16p^2}+1+\frac{g}{2p}=0$$

或ハ

$$\frac{4p(x_1+x_2)+y_1y_2}{16p^2}+1+\frac{g}{2p}=0$$

ヨツテ A 點ノ x 坐標卽チ $-2g$ ハ

$$-2g=2\left(2p+\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{y_1y_2}{8p}\right) \text{ ....(6)}$$

トナル。サテ直線 PQ ノ方程式ハ

$$(y_1+y_2)y-4px-y_1y_2=0$$

ナルヲ以テ B 點ノ x 坐標ハ $\dfrac{-y_1y_2}{4p}$ ナリ。故ニ線分 AB ノ中點ノ x 坐標ハ

$$2p+\frac{x_1+x_2}{2} \text{ ....(7)}$$

ナリ。最後ニ線分 PQ ノ垂直二等分線ノ方程式ハ

$$y-\frac{y_1+y_2}{2}=-\frac{x_1-x_2}{y_1-y_2}\left(x-\frac{x_1+x_2}{2}\right) \text{ ....(8)}$$

然ルニ

$$y_1^2-y_2^2=4p(x_1-x_2)$$

ナル關係アルヲ以テ

$$\frac{x_1-x_2}{y_1-y_2}=\frac{y_1+y_2}{4p}$$

故ニ (8) ハ

$$y-\frac{y_1+y_2}{2}=-\frac{y_1+y_2}{4p}\left(x-\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

ヨツテ此直線ハ拋物線ノ軸ヲ截ル點ノ x 坐標ハ $2p+\dfrac{x_1+x_2}{2}$ トナリテ

(7) ト一致ス。故ニ證明セラレタリ。

3. 直交軸ニ關シテ與ヘラレタル六點 $(a, 0)$, $(0, a)$, $(b, 0)$, $(0, b)$, (a, b), (b, a) ハ一ツノ楕圓ノ上ニアルコトヲ證明シ此楕圓ノ兩軸ノ方程式及ビ其長サヲ求メヨ。

[解] 先ヅ初メノ五ツノ點ヲ過ル二次曲線ノ方程式ハ

$$x^2+xy+y^2-(a+b)x-(a+b)y+ab=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

而シテ此曲線ハ第六ノ點 (b, a) ヲ過ルコト明カナリ。

サテ (1) ハ

$$h^2-ab=\left(\frac{1}{2}\right)^2-1<0$$

ナルヲ以テ楕圓ナリ。中心ハ方程式

$$2x+y-(a+b)=0$$
$$x+2y-(a+b)=0$$

ヨリ得ラルベク卽チ點 $\left(\frac{a+b}{3}, \frac{a+b}{3}\right)$ ナリ。ソコデ坐標軸ヲ平行ニ動カシテ原點ヲ中心ニ置ク時ハ

$$x^2+xy+y^2-\frac{a^2+b^2-ab}{3}=0,$$

ココニ於テ

$$\tan 2\theta=\frac{2h}{a-b}=\frac{1}{1-1}=\infty$$

ニ適スル最小正角 45° ダケ廻轉スレバ

$$\frac{x^2}{\frac{2(a^2+b^2-ab)}{9}}+\frac{y^2}{\frac{2(a^2+b^2-ab)}{3}}=1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

故ニ二ツノ軸ノ長サハ夫々

$$\frac{2\sqrt{2(a^2+b^2-ab)}}{3} \qquad \frac{2\sqrt{6(a^2+b^2-ab)}}{3}$$

ナリ。次ニ軸ノ方程式ヲ求メンニ (1) ニ關スル長軸，短軸ノ方程式 $y=0$, $x=0$ ハ，軸ヲ 45° ダケ負ノ方向ニ戻スト夫々 $x+y=0$, $x-y=0$ トナル。ソコデ原點ヲ更ニ元ノ所ニ戻スト

$$x+y=\frac{2}{3}(a+b) \qquad x-y=0$$

トナル。

4. 双曲線ノ兩枝線ニ切スル任意ノ圓ヲ焦點ヨリ見込ム角ハ一定ナルコトヲ證明セヨ。

[解] 双曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ノ兩枝ニ切スル圓ノ中心ガ y 軸上ニアルヲ以テ其方程式ヲ

$$x^2+(y-\lambda)^2=r^2$$

トス。然ル時ハ $r^2=\frac{a^2(a^2+b^2+\lambda^2)}{a^2+b^2}=\frac{a^2(e^2a^2+\lambda^2)}{a^2+b^2}$ トナル。(切スル條件ヨリ)

今一ツノ焦點ヲ $F(ea, 0)$ トシ圓ノ中心ヲ C, F ヨリ其圓ヘノ切線ノ切點ヲ T トスレバ

$$FC^2=e^2a^2+\lambda^2$$

ナルガ故ニ

$$\sin \widehat{CFT}=\frac{CT}{CF}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

ヨツテ $\widehat{CFT}$ ハ一定ナリ。而シテ F ヨリ此圓ヲ見込ム角ハ $\widehat{CFT}$ ノ二倍ナリ。故ニ證明セラレタリ。

5. 斜交軸ニ關シテ二ツノ同焦點二次曲線ノ方程式ガ

$$x^2+y^2=\frac{a^2+b^2}{2} \qquad xy=\frac{a^2-b^2}{4}$$

ナルトキ其焦點ノ坐標ヲ求メヨ。

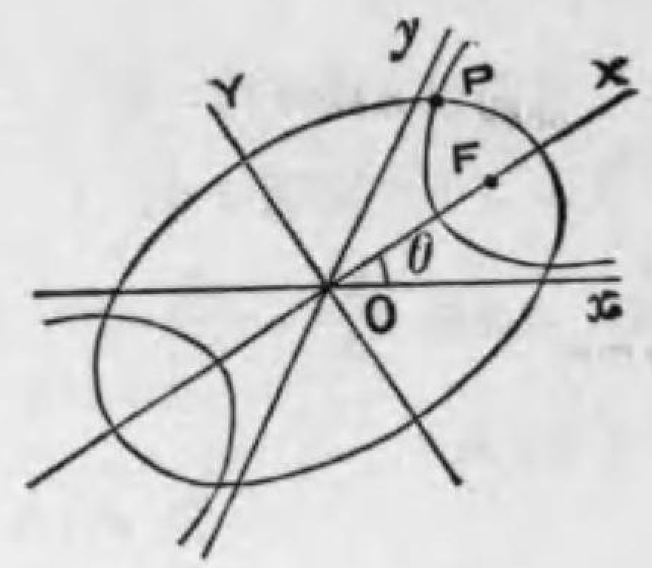
[解] 與ヘラレタル二ツノ曲線ハ夫々楕圓，双曲線ニシテ且ツ後者ハ漸近線ヲ軸トスルガ故ニ焦點 F, F′ ハ坐標軸ノ二等分線上ニアルベシ。故ニ坐標軸 Ox, Oy ノナス角ヲ 2θ トシ交角ノ二等分線ヲ新坐標軸 OX, OY トシ二ツノ曲線ノ共通點 P ノ新舊坐標ヲ夫々 (X, Y), (x, y) トスレバ，

$$X=(x+y)\cos\theta$$
$$Y=(y-x)\sin\theta$$

故＝

$$x+y=\frac{X}{\cos\theta}$$

$$y-x=\frac{Y}{\sin\theta}$$



ヨツテ

$$2(x^2+y^2)=\frac{X^2}{\cos^2\theta}+\frac{Y^2}{\sin^2\theta}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$4xy=\frac{X^2}{\cos^2\theta}-\frac{Y^2}{\sin^2\theta}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

然ルニ

$$x^2+y^2=\frac{a^2+b^2}{2}\qquad xy=\frac{a^2-b^2}{4}$$

ナルヲ以テ (1) ヨリ楕圓

$$\frac{X^2}{\cos^2\theta(a^2+b^2)}+\frac{Y^2}{\sin^2\theta(a^2+b^2)}=1\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

ヲ得ベク，(2) ヨリ双曲線

$$\frac{X^2}{\cos^2\theta(a^2-b^2)}-\frac{Y^2}{\sin^2\theta(a^2-b^2)}=1\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

ヲ得ベシ。サテ原點ヨリ焦點マデノ距離ノ公式 e^2a^2 ヲ用フレバ (3) ヨリ $(a^2+b^2)(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$ ヲ得ベク，(4) ヨリハ $(a^2-b^2)(\cos^2\theta+\sin^2\theta)$ ヲ得ベシ。而シテ同焦點ナルヲ以テ之等ハ相等シ。卽チ

$$OF^2=(a^2+b^2)(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=(a^2-b^2)(\cos^2\theta+\sin^2\theta)$$

從ツテ

$$OF^2=a^2-b^2,$$

$$\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\qquad\sin\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

玆ニ於テ F ノ舊坐標軸ニ關スル坐標ヲ求メンニ假リニ (x', y') トスレバ

$$OF=(x'+y')\cos\theta\qquad x'=y'$$

ナルヲ以テ

$$x'=y'=\frac{\sqrt{a^4-b^4}}{2a}$$

同樣ニ F′ ノ坐標ハ $x''=y''=-\frac{\sqrt{a^4-b^4}}{2a}$

ナリ。

第三十三回 (大正八年度)

1. 直交軸ニ關シテ方程式

$$16x^2-24xy+9y^2-44x-42y+49=0$$

ニテ表ハサレタル拋物線ノ軸ノ方程式頂點ニ於ケル切線ノ方程式及ビ焦點ノ坐標ヲ求メヨ。

[解] λ ヲ未定常數トシテ原式ヲ變形スレバ

$$(4x-3y+\lambda)^2=(44+8\lambda)x+(42-6\lambda)y+\lambda^2-49$$

而シテ二ツノ直線

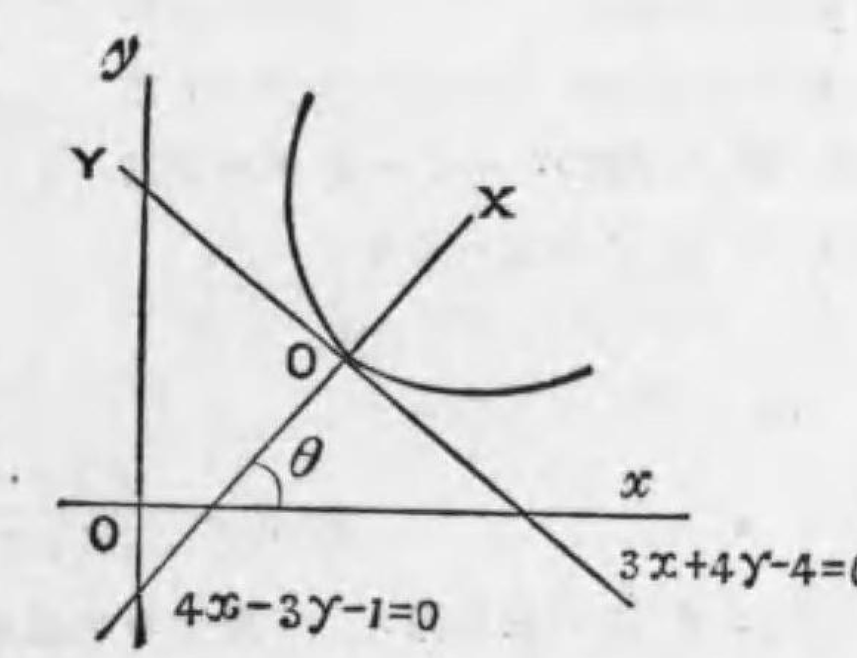
$$4x-3y+\lambda=0\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$(44+8\lambda)x+(42-6\lambda)y+\lambda^2-49=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ガ直交スル爲ニハ $\lambda=-1$ ナルヲ要ス。然ル時 (1) ヲ新ラシキ x 軸，(2) ヲ新ラシキ y 軸ニトラバ其方程式ハ

$y^2=12x$ (第十一章8頁參照)

トナル。而シテ (1) ト (2) トハ夫々コノ軸及ビ頂點ニ於ケル切線ノ方程式ナリ。



次ニ焦點ノ坐標ヲ求メンニ，新坐標軸ノ X 軸ノ x 軸トナス角ノ正切ハ $\frac{4}{3}$ ナルヲ以テ

$$\sin\theta=\frac{4}{5}\quad\cos\theta=\frac{3}{5}$$

サテ新坐標軸ニ關スル焦點ノ坐標ハ (3, 0) ナルヲ以テコノ點ノ舊坐標軸ニ

關スル坐標ヲ x, y トスレバ變換式

$$x=X\cos\theta-Y\sin\theta+\frac{16}{25}$$

$$y=X\sin\theta+Y\cos\theta+\frac{13}{25}$$

ヨリ

$$x=3\times\frac{3}{5}+\frac{16}{25}=\frac{61}{25}$$

$$y=3\times\frac{4}{5}+\frac{13}{25}=\frac{73}{25}$$

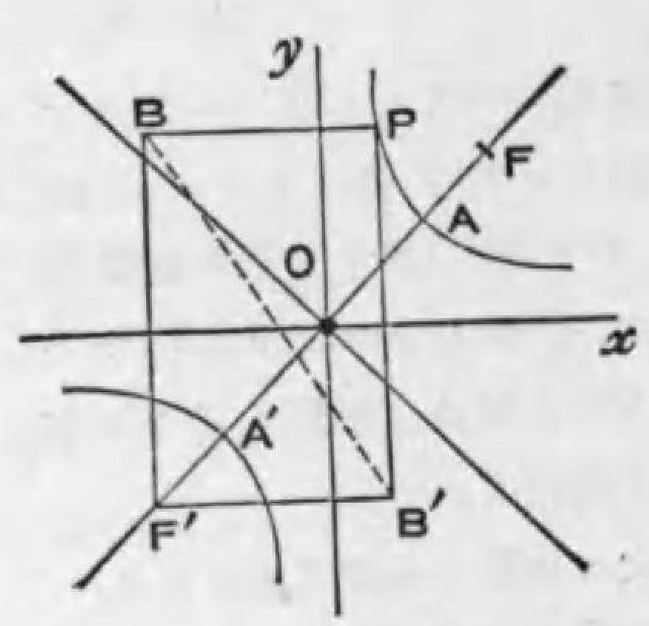
即チ點 $\left(\frac{61}{25}, \frac{73}{25}\right)$ ナリ。玆ニ $\left(\frac{16}{25}, \frac{13}{25}\right)$ ハ二ツノ直線 (1), (2) ノ交點ナリトス。

2. 等邊双曲線上ノ任意ノ一點及ビ一ツノ焦點ヨリ夫々二ツノ漸近線ニ平行ニ引キタル四ツノ矩形ノ一ツノ對角線ハ一定圓ニ切スルコトヲ證セヨ。

[解] 等邊双曲線ノ漸近線ヲ坐標軸ニトリタル時 (直交軸トナルコトニ注意スベシ) ノ方程式ヲ

$$xy=\frac{a^2}{2}$$

ナリトス。今コノ上ノ一點ヲ P(x', y') トシ焦點ヲ F′ トシ題意ニ適スルヤウニ矩形 PBF′B′ ヲ作ルト焦點 F′ ノ坐標ハ $-a$, $-a$ ナルヲ以テ B, B′ ノ坐標ハ夫々



$(-a, y')$ $(x', -a)$

故ニ BB′ ノ方程式ハ

$$y-y'=\frac{y'+a}{-(x'+a)}(x+a) \quad \cdots\cdots(1)$$

而シテ P ハ双曲線ノ上ノ點ナルヲ以テ

$$x'y'=\frac{a^2}{2} \quad \cdots\cdots(2)$$

(2) ヲ (1) ニ代入スレバ

$$2yx'^2+a\{2(x+y)+a\}x'+a^2x=0 \quad \cdots\cdots(3)$$

而シテ此直線ハ x' ノ値ノ如何ニ關セバ點 $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\right)$ ヨリノ距離ハ $\frac{a}{2}$ ナリ。故ニ對角線ハ常ニ一ツノ定圓

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}$$

ニ切スルヲ知ル。

注意 直線 (3) ハ如何ナル圓ニ切スルカ一寸分リ兼ルベシ。然レドモ直線 (3) ノ包絡線ヲ求ムレバ直チニ (微分學ニテ)

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}$$

ナルコトヲ知ラン。

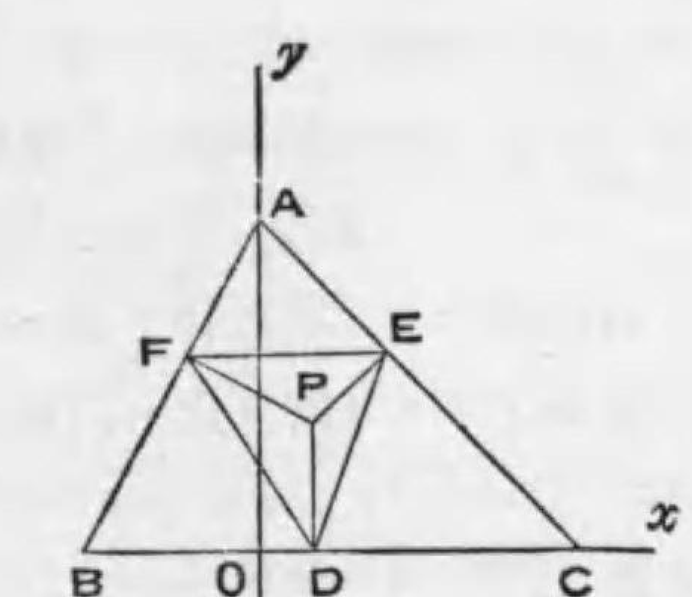
3. 一點 P ヨリ與ヘラレタル三角形ノ三邊ニ夫々下セル垂線ノ足ヲ頂點トスル三角形ノ面積ガ一定ノ値ヲ有スル時 P ノ軌跡如何。

[解] 與ヘラレタル三角形ヲ ABC トシ BC ヲ x 軸トシ A ヨリ BC ヘ垂線ヲ引キ之ヲ y 軸トス。

今 A, B, C ヲ夫々點

$(0, a)$ $(-b, 0)$ $(c, 0)$

トシ軌跡ノ一點 P ヲ (x', y') トスレバ



BC: $y=0$

CA: $\frac{x}{c}+\frac{y}{a}=1$

AB: $-\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$

PD: $x=x'$

PE: $y-y'=\frac{c}{a}(x-x')$

$$\text{PF}:\quad y-y'=-\frac{b}{a}(x-x')$$

故＝ D, E, F ノ坐標ハ此等ノ方程式ノ組ヨリ得ラル。即チ

$$\text{D}:\quad x=x' \qquad y=0$$

$$\text{E}:\quad x=\frac{c(cx'-ay'+a^2)}{a^2+c^2} \qquad y=\frac{a(ay'-cx'+c^2)}{a^2+c^2}$$

$$\text{F}:\quad x=\frac{b(bx'+ay'-a^2)}{a^2+b^2} \qquad y=\frac{a(ay'+bx'+b^2)}{a^2+b^2}$$

ヨツテ三角形 DEF ノ面積ハ

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x' & 0 & 1 \\ \dfrac{c(cx'-ay'+a^2)}{a^2+c^2} & \dfrac{a(ay'-cx'+c^2)}{a^2+c^2} & 1 \\ \dfrac{b(bx'+ay'-a^2)}{a^2+b^2} & \dfrac{a(ay'+bx'+b^2)}{a^2+b^2} & 1 \end{vmatrix}$$

コレヲ一定面積 S^2 ＝等シト置キ, x', y' ヲ流通坐標＝化シ且ツ左邊ヲ展開スレバ

$$x^2+y^2+(b-c)x+\frac{bc-a^2}{a}y-bc+\frac{2(a^2+b^2)(a^2+c^2)}{a^3(b+c)}S^2=0$$

コレ求ムル軌跡ノ方程式＝シテ一ツノ圓ヲ表ハス。

4. x, y ハ直交軸＝關スル坐標ナルトキ方程式

$$\sqrt{2y-2x}=\sqrt{x+y}+\sqrt{2-x}$$

ハ如何ナル二次曲線ヲ表ハスカ, 又 $\sqrt{}$ ハ正ノ平方根ヲ表ハスモノトスル時＝之＝該當スル曲線ノ部分如何。

[解]
$$\sqrt{2y-2x}=\sqrt{x+y}+\sqrt{2-x} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

兩邊ヲ平方シタル後移項スレバ

$$y-2x-2=2\sqrt{x+y}\sqrt{2-x} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

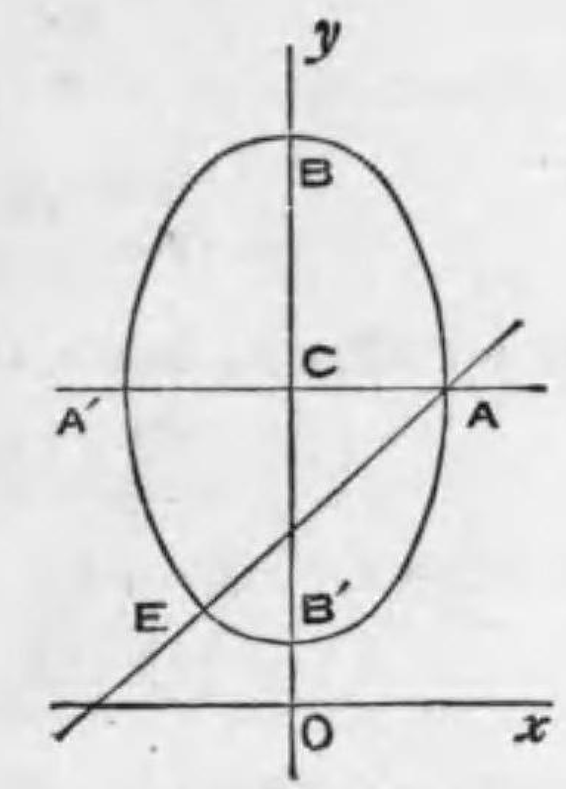
兩邊ヲ平方シ且ツ簡單＝スレバ

$$8x^2+y^2-12y+4=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

玆＝於テ坐標軸ヲ平行＝移シテ原點ヲ點 (0, 6) ＝置ケバ (3) ハ楕圓

$$\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{(4\sqrt{2})^2} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

トナル。



次＝問題ノ第二部分ヲ解セン＝ (2) ハ (1) ノ右邊ヲ移項シタルモノ＝

$$\sqrt{2y-2x}+\sqrt{x+y}+\sqrt{2-x}\cdots(4)$$

ヲ乘ジタルモノナリ。故＝若シ $\sqrt{}$ ヲ正ナリト假定スレバ, (4) ハ正＝シテ決シテ零トナラザルヲ以テ (1) ト (2) トハ同値ナリ。

然ル＝ (2) ＝於テ右邊ハ負トナラザルガ故＝

$$y-2x-2\geqq 0\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

故＝要件＝適スル部分ハ (5) ガ楕圓ト交ル部分 AE ヨリ上部＝アルモノ即チ弧 ABA′E ナリ。

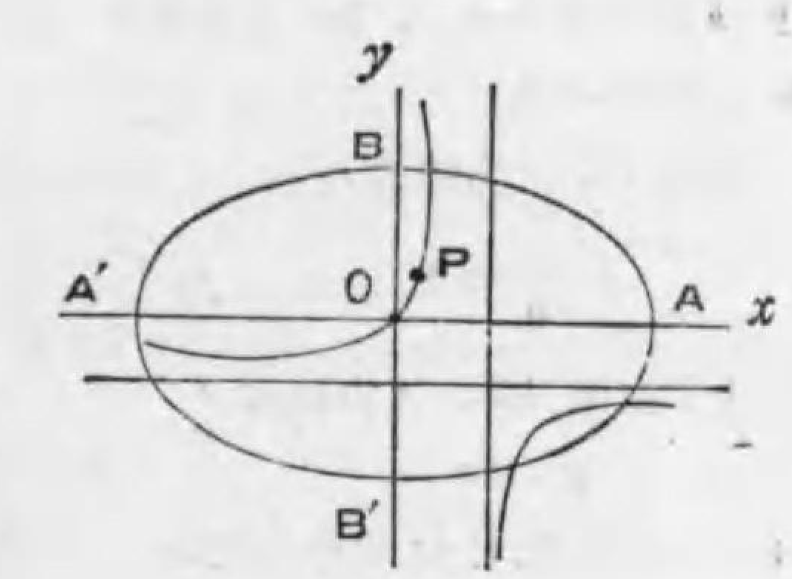
5. 楕圓上ノ四點＝於ケル法線ガ楕圓ノ何レノ軸ノ上＝モアラザル同一點ヲ通ルトキハ, 此等ノ四ツノ點ノ中二ツハ楕圓ノ軸ガ作ル同一象限＝アリテ他ノ二ツハ之＝隣レル各象限＝夫々一ツ宛アルコトヲ證明セヨ。

[解] 楕圓ノ方程式ヲ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

トスレバ其上ノ點 (x', y') ＝於ケル法線ノ方程式ハ

$$\frac{a^2x}{x'}-\frac{b^2y}{y'}=a^2-b^2 \quad\cdots\cdots(2)$$



今何レノ軸上＝モアラザル點ヲ P(c, d) トスレバ (2) ガ通ルベキ＝ヨリ

$$\frac{a^2c}{x'}-\frac{b^2d}{y'}=a^2-b^2 \quad\cdots\cdots(3)$$

故＝ P 點ヲ通ル法線ガ楕圓ト交ル點ハ (3) ノ x', y' ヲ流通坐標トセル方程式

$$\frac{a^2c}{x}-\frac{b^2d}{y}=a^2-b^2$$

或ハ

$$xy+\frac{b^2d}{a^2-b^2}x-\frac{a^2c}{a^2-b^2}y=0 \quad\cdots\cdots\cdots(4)$$

ト (1) トノ交點ナリ。然ルニ (4) ハ少シク書キ換ヘルト

$$\left(x-\frac{a^2c}{a^2-b^2}\right)\left(y+\frac{b^2d}{a^2-b^2}\right)=-\frac{a^2b^2cd}{(a^2-b^2)^2} \quad\cdots\cdots\cdots(5)$$

トナルヲ以テ二ツノ軸ニ平行ナル直線

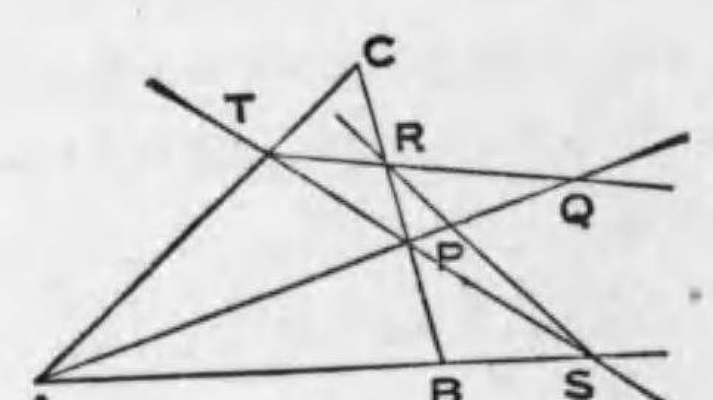
$$x=\frac{a^2c}{a^2-b^2}, \qquad y=-\frac{b^2d}{a^2-b^2}$$

ヲ漸近線トスル双曲線ナリ。然ルニ點 P ハ第一象限ニアル時ハ (5) ノ右邊ハ負ナルガ故ニ第一，第三象限ニ各一ツ宛ノ法線ノ足アリ，第四象限ニ二ツノ足アルナリ。 ヨツテ點 P ハ第一象限ニアル時ハ證明セラレタリ。 又 P ハ他ノ象限ニアルモ同様ノ方法ニテ解決セラルベシ。

第三十四回 (大正九年)

1. 三角形 ABC ノ頂點 A ヲ過ル直線上ノ二定點ヲ PQ トス，直線 BC 上ニ任意ニ一點 R ヲ取リ直線 PR. AB ノ交點ヲ S 直線 QR. AC ノ交點ヲ T トスル時ハ直線 ST ハ他ノ一定點ヲ過ルコトヲ證セヨ。

［解］ AB. AC ヲ二ツノ軸ニトリ AB ノ長サヲ c, AC ノ長サヲ b トスレバ



直線 BC ノ方程式ハ

$$\frac{x}{c}+\frac{y}{b}=1 \quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

今定直線 APQ ノ方程式ヲ

$$y=mx$$

トシ，二點 P, Q ノ坐標ヲ夫々 $(x',\ mx')(x'',\ mx'')$ トシ R 點ノ坐標ヲ $(\alpha,\ \beta)$ ト假定スレバ PR ノ方程式

ハ

$$y-mx'=\frac{mx'-\beta}{x'-\alpha}(x-x') \quad\cdots\cdots\cdots(2)$$

S 點ノ坐標ハ (2) ニ $y=0$ ト入レテ得ラル。卽チ

$$\left(\frac{(m\alpha-\beta)x'}{mx'-\beta},\ 0\right)$$

同様ニ T 點ノ坐標ハ $\left(0,\ \frac{(\beta-\alpha m)x''}{mx''-\beta}\right)$

從ツテ直線 ST ノ方程式ハ

$$\frac{mx'-\beta}{(m\alpha-\beta)x'}x+\frac{mx''-\beta}{(\beta-m\alpha)x''}y=1$$

分母ヲ拂ヘバ

$$(mx'x''-\beta x'')x-(mx'x''-\beta x')y-(m\alpha-\beta)x'x''=0 \quad\cdots\cdots\cdots(3)$$

然ルニ R 點ハ BC ノ上ニアルガ故ニ (1) ヨリ

$$\frac{\alpha}{c}+\frac{\beta}{b}=1 \text{ 卽チ } \alpha=c\left(1-\frac{\beta}{b}\right)$$

ヨツテ (3) ハ

$$mx'x''(x-y-c)-\beta\left(x''x-x'y-x'x''-\frac{x'x''c}{b}\right)=0$$

ヨツテ ST ハ常ニ二ツノ定直線

$$x-y-c=0$$

$$x''x-x'y-x'x''-\frac{x'x''c}{b}=0$$

ノ交點ヲ過ル。

2. 直交軸ニ關シテ表ハシタル圓ノ方程式ニ於テ各係數ガ皆一ツノ變數 t ノ二次整數ナルトキハ t ノ値ノ如何ニ關ハラズ，コノ圓ハ一般ハ一定ノ圓ニ直交スルコトヲ證明セヨ。

［解］ 圓ノ方程式

$$a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0 \quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

ニ於テ

$$a=a_1t^2+a_2t+a_3$$

$$b=b_1t^2+b_2t+b_3$$

$$c=c_1t^2+c_2t+c_3$$

$$d=d_1t^2+d_2t+d_3$$

トセバ (1) ハ

$$(a_1t^2+b_1t+c_1)(x^2+y^2)+2(a_2t^2+b_2t+c_2)x+2(a_3t^2+b_3t+c_3)y$$
$$+a_4t^2+b_4t+c_4=0 \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

トナル。今コレ＝直交スル圓ノ方程式ヲ

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \quad \cdots\cdots\cdots(3)$$

ト假定スルトキハ (2) ト (3) トノ直交條件ハ

$$2g(a_2t^2+b_2t+c_2)+2f(a_3t^2+b_3t+c_3)-c(a_1t^2+b_1t+c_1)$$
$$-(a_4t^2+b_4t+c_4)=0 \quad \cdots\cdots\cdots(4)$$

コレガ t ノ値ノ如何＝關セズ成立スル爲＝ハ (4) ヲ t ＝關シテ整頓シタルトキノ係數ノ凡テガ零ナルヲ要ス。即チ

$$\left.\begin{array}{l} 2a_2g+2a_3f-a_1c=a_4 \\ 2b_2g+2b_3f-b_1c=b_4 \\ 2c_2g+2c_3f-c_1c=c_4 \end{array}\right\}$$

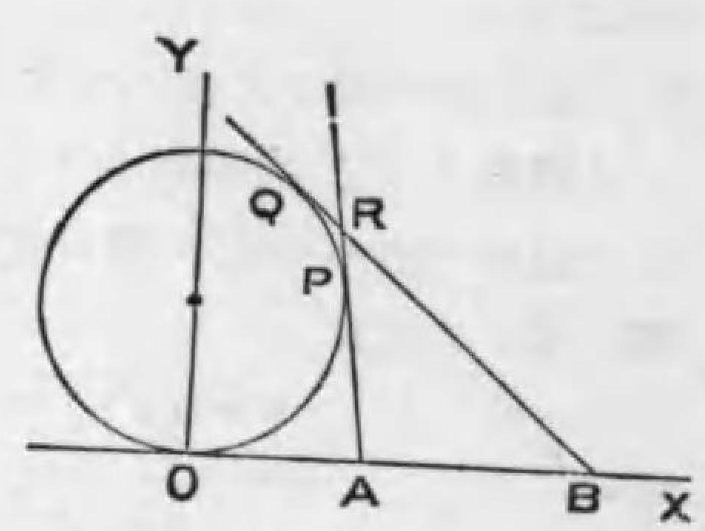
ナルコトヲ要ス。而シテ之等ノ方程式ヨリ一般＝ハ g, f, c ノ値ヲ一組ダケ定ムルコトヲ得從ツテ (3) ハ確定ス。換言スレバ (1) ハ t ノ如何＝關セズ (3) ト常＝直交ス。

3. 與ヘラレタル圓ノ一定切線上＝任意＝一定ノ長サノ線分 AB ヲトリ，A ヲ通過スル切線ト B ヲ通過スル切線トヲ作ルトキ，ソノ交點ノ軌跡ハ如何ナル直線カ。

［解］ 切線ヲ x 軸，切點ヲ通リ之＝垂直ナル半徑ヲ y 軸トスレバ圓ノ方程式ハ

$$x^2+y^2-2ry=0 \quad \cdots\cdots(1)$$

但シ r ハ圓ノ半徑ナリトス。サテ AB ノ長サヲ l トスル時二ツノ點 A, B ヨリ切線 AP, BQ ヲ引キ其交點ヲ $R(x', y')$ トス。然ル時ハ二ツノ切線 RA, RB ヲ示ス方程式ハ



$$(x'^2+y'^2-2ry')(x^2+y^2-2ry)$$
$$=\{xx'+yy'-r(y+y')\}^2 \quad \cdots\cdots(2)$$

ナリ。何トナレバ此方程式ハ點 $R(x', y')$ ヲ通ジ且ツ圓 $x^2+y^2-2ry=0$ トノ交點＝テハ

$$xx'+yy'-r(y+y')=0$$

即チ二ツノ切點 P, Q ヲ通ズ (切觸弦ナルガ故＝) ルヲ以テナリ。

ヨツテ A, B ノ x 坐標ハ (2) ＝ $y=0$ ト置キタル方程式

$$(y'-2r)x^2+2rx'x-r^2y'=0$$

ノ二ツノ根 x_1, x_2 $(x_2>x_1)$ ナリ。ヨツテ

$$x_1+x_2=-\frac{2rx'}{y'-2r} \qquad x_1x_2=\frac{-r^2y'}{y'-2r}$$

故＝

$$AB^2=l^2=(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$$
$$=\frac{4r^2x'^2+4r^2y'(y'-2r)}{(y'-2r)^2}$$

ヨツテ P ノ軌跡ハ x', y' ヲ流通坐標トセルモノ即チ

$$4r^2x^2+(4r^2-l^2)y^2+(4rl^2-8r^3)y-4l^2r^2=0$$

ヲ得。

サテ此式＝於テ $4r^2>l^2$ ナル時ハ x^2 ト y^2 トノ係數ハ共＝正ナルガ故＝軌跡ハ楕圓ナリ。又 $4r^2=l^2$ ナル時ハ拋物線＝シテ $4r^2<l^2$ ナル時ハ x^2 ノ係數ハ正＝シテ y^2 ノ係數ハ負ナルガ故＝双曲線ナリ。

4. 楕圓ノ內部＝アリテ且ツ短徑＝切スル圓ノ中＝テ最大ナル半徑ヲ索メヨ。

［解］ 楕圓ハ短徑＝關シテ對稱ナルヲ以テ其右側＝就キテ硏究スベシ。今楕圓ノ方程式ヲ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

ナリトス。然ル時長徑ノ上＝中心ヲ有スル圓ノ方程式ハ

$$x^2-2rx+y^2=0 \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

(2) ナル圓ハ (1) ノ內部＝アルガ爲＝ハ，x ガ 0 ヨリ a ＝至ル凡テノ x ＝對シテ (2) ノ y^2 ハ (1) ノ y^2 ヨリモ大ナルコトヲ得ズ。即チ

$$1-\frac{x^2}{a^2}\geqq 2rx-x^2$$

即チ

$$e^2x^2-2rx+b^2\geqq 0$$

ヨツテ

$$r^2-b^2e^2\geqq 0$$

ナルヲ要ス。故ニ

$$r\geqq bc$$

ヨツテ r ノ最大ハ bc ナリ。

注　意　圓ノ中心ガ長徑上ニアラザル時ハ最大ノ圓ヲ得ルコト能ハザルコトハ明カナリ。

注　意　本年度ヨリハ算術，代數，幾何ヲ單位トシ次ニ三角法，解析幾何學，微積分ヲ夫々單位トスル試驗法ハ之ヲ廢止シ。數學全體ヲ一科目トシテ試驗スルニ至リタリ。

第三十五回（大正十年度）

豫備試驗

10. 直交軸ニ關シテ與ヘラレタル方程式

$$ax+by+c=0 \quad\cdots\cdots(1)$$
$$a'x+b'y+c'=0 \quad\cdots\cdots(2)$$

ガ表ハス二ツノ直線ガ互ニ直交スル爲ノ條件ヲ求メヨ。

［解］(1), (2) ノ方向係數ハ夫々

$$m'=-\frac{a}{b} \qquad m''=-\frac{a'}{b'}$$

サテ二ツノ直線ノ交角ヲ θ トスレバ

$$\tan\theta=\frac{m'-m''}{1+m'm''}=\frac{a'b-ab'}{aa'+bb'}$$

然ルニ $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ ナル爲ニハ $\tan\theta$ ノ値ハ無限大ナルベク從ツテ求ムル條件ハ

$$aa'+bb'=0$$

第三十五回（大正十年度）

本試驗

9. 三點 $(0,0)$, $(0,a)$, (b,c) ヲ頂點トスル三角形ノ三ツノ中線ノ方程式ヲ作リ且ツ此三線ハ一點ニ於テ相會スルコトヲ證明セヨ。

［解］三角形ヲ A, B, C トシ其坐標ヲ夫々 $(0,0)$, $(0,a)$, (b,c) トシ邊 BC, CA, AB ノ中點ヲ夫々 D, E, F トスレバ，其坐標ハ

$$D:\left(\frac{b}{2},\ \frac{a+c}{2}\right) \qquad E:\left(\frac{b}{2},\ \frac{c}{2}\right) \qquad F:\left(0,\ \frac{a}{2}\right)$$

ナルヲ以テ中線 AD ノ方程式ハ

$$\frac{a+c}{2}x-\frac{b}{2}y=0 \quad 即チ \quad (a+c)x-by=0$$

BE ノ方程式ハ

$$y-a=\frac{\dfrac{c}{2}-a}{\dfrac{b}{2}}x \quad 即チ \quad (c-2a)x-by+ab=0$$

CF ノ方程式ハ

$$y-c=\frac{c-\dfrac{a}{2}}{b}(x-b) \quad 即チ \quad (a-2c)x+2by-ab=0$$

然ルニ之等ノ三ツノ方程式ヲ邊々相加フレバ恒等的ニ零トナル。ヨツテ AD, BE, CF ハ一點ニ會ス。

第三十六回（大正十一年）

本試驗

9. 直交軸ニ關シ定點 (a,b) ヨリ定直線

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$$

ニ至ル垂線ノ長サヲ求メヨ。

［解］定直線ニ平行ナル直線ノ方程式ハ

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p'$$

ニテ表ハスコトヲ得。此直線ガ定點 (a, b) ヲ通ズル爲ニハ

$$a\cos\alpha+b\sin\alpha=p'$$

故ニ求ムル距離ハ

$$p\sim p'=|\,p-(a\cos\alpha+b\sin\alpha)\,|$$

ナリ。

第三十七回（大正十一年）

豫備試驗

8. 直交軸ニ關シ直線

$$y=mx+b$$

ガ曲線

$$y^2=4dx$$

ノ法線ナル爲ニハ m, b, d ノ間ニ如何ナル關係アルコトヲ要スルカ。

［解］ 曲線 $y^2=4dx$ 上ノ一點 (x', y') ニ於ケル切線ノ方向係數ハ $\dfrac{2d}{y'}$ ナルヲ以テ，其點ニ於ケル法線ノ方程式ハ

$$y-y'=-\frac{y'}{2d}(x-x') \quad \text{......(1)}$$

然ルニ (x', y') ハ曲線上ノ點ナルガ故ニ $y'^2=4dx'$ ナル關係アリ。故ニ (1) ハ

$$y=-\frac{y'}{2d}x+\frac{y'^3}{8d^2}+y' \quad \text{......(2)}$$

(2) ハ直線 $y=mx+b$ ニ一致スル爲ニハ

$$m=-\frac{y'}{2d} \qquad b=\frac{y'^3}{8d^2}+y'$$

故ニ

$$b=-m^3d-2md$$

或ハ

$$m^3d+2md+b=0$$

コレ求ムル關係式ナリ。

第三十七回（大正十一年）

本試驗

9. 平面上ニ於ケル一點ノ極座標ヲ r, θ トスルトキ方程式

$$r^2-ar\cos 2\theta\sec\theta-2a^2=0$$

ハ如何ナル曲線ヲ表ハスカ。

［解］ 與ヘラレタル方程式ヲ少シク書キカフレバ

$$r^2-ar\cos\theta+ar\sin\theta\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-2a^2=0 \quad \text{......(1)}$$

然ルニ $r\cos\theta=x$ $r\sin\theta=y$ ナルガ故ニ

$$r^2=x^2+y^2 \qquad \frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{y}{x}$$

(1) ニ代入スレバ

$$x^2+y^2-ax+\frac{ay^2}{x}-2a^2=0$$

分母ヲ拂ヒ因數分解スレバ

$$(x+a)(x^2-2ax+y^2)=0$$

即チ

$$(x+a)\{(x-a)^2+y^2-a^2\}=0$$

ヨツテ y 軸ニ平行ナル直線ト $(a, 0)$ ニ中心ヲ有スル半徑 a ナル圓トヲ表ハス。

10. 與ヘラレタル拋物線ノ定直線ニヨリテ二等分サルヽ凡テノ弦ハ他ノ定マレル拋物線ニ切スルコトヲ證セヨ。

［解］ 定直線ニ平行ナル拋物線ノ切線ヲ y 軸ニ，其點ヲ通ル徑ヲ x 軸トスレバ定直線ノ方程式ハ

$$x=b \quad \text{......(1)}$$

ニシテ與ヘラレタル拋物線ノ方程式ハ

$$y^2=ax \quad \text{......(2)}$$

ニテ表ハスコトヲ得。サテ動弦ノ方程式ヲ

$$y=mx+n \quad \text{......(3)}$$

ト假定スレバ，(2) トノ交點ノ x 坐標ハ

$$(mx+n)^2=ax$$

或ハ

$$m^2x^2-(a-2mn)x+n^2=0$$

ノ根ナリ。サテ此方程式ノ二根ノ和ノ半分ハ弦ノ中點ノ x 坐標ニシテ而カモ假定ニヨリテ b ニ等シ。即チ

$$\frac{a-2mn}{2m^2}=b$$

ヨツテ $$n=\frac{a}{2m}-bm$$

コノ關係ヲ (3) ニ入ルレバ

$$2(x-b)m^2-2my+a=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

サテ此方程式ノ x, y ハ (3) ガ切スル曲線ノ切點ノ坐標ナリトスレバ (4) ノ m ノ二ツノ値ガ一致スベキナリ。故ニ切點ノ軌跡ハ

$$y^2=2a(x-b)$$

ニシテ定マレル拋物線ナリ。

第三十八回 (大正十一年)

豫備試驗

7. 直交軸ニ關シテ點 P ノ坐標ヲ (α, β) トスルトキ方程式

$$4x^2-4(\alpha+\beta)x+\alpha^2+\beta^2=0$$

ノ一ツノ根ハ 1 ヨリモ大ニシテ, 他ノ一ツハ 1 ヨリモ小ナルガ爲メニハ點 P ハ坐標面上ノ如何ナル範圍ニアルベキカ。

[解] x^2 ノ係數ハ正ナル方程式ニ於テ一根ハ 1 ヨリ大, 他ノ一根ハ 1 ヨリ小ナル爲メニ必要ニシテ充分ナル條件ハソノ左邊ニ $x=1$ ト置クトキノ値ガ負ナルコトナリ。

即チ $$4-4(\alpha+\beta)+\alpha^2+\beta^2<0$$

或ハ $$(\alpha-2)^2+(\beta-2)^2<2^2$$

コノ事ヲ解析幾何學ニテ説明スレバ點 (α, β) ハ中心ヲ (2, 2) トシ半徑ヲ 2 トスル圓ノ内部ニアラザルベカラザルコトヲ示ス。

第三十八回 (大正十二年)

本試驗

9. $S=(x+y)^2-1$, $S'=(x-y)^2-1$ ト置クトキ直角坐標ニ關シテ方程式 $S+\lambda S'=0$ ニヨリテ表ハサルヽ曲線ガ二組ノ直線 $S=0$, $S'=0$ ニ對スル關係ヲ説明シ且ツ λ ノ値ニ就キ此曲線ヲ分類セヨ。

[解] 曲線 $S+\lambda S'=0$ ノ上ノ點ノ坐標ハ $S=0$ ト $S'=0$ トヲ同時ニ滿足スル點ノ坐標ニヨツテ滿足セラルヽ故ニ, 曲點 $S+\lambda S'=0$ ハ $S=0$ ト $S'=0$ トノ交點ヲ過ル或ル曲線ニシテ, $S+\lambda S'=0$ ハ一般ニハ二次方程式ナルヲ以ツテ此ノ方程式ニテ表ハサルヽ曲線モ亦或ル二次曲線ナリ。

今 $S+\lambda S'=0$ ヲ書キカフレバ

$$(1+\lambda)x^2+2(1-\lambda)xy+(1+\lambda)y^2-(1+\lambda)=0$$

故ニ h^2-ab ヲ作ルト

$$(1-\lambda)^2-(1+\lambda)^2=-4\lambda$$

ヨツテ λ ノ値ノ如何ニヨツテ次ノ如ク分類セラル

1° $\lambda>0$ ナルトキ

(a) $\lambda\neq1$ ナルトキハ楕圓

(b) $\lambda=1$ ナルトキハ圓

2° $\lambda<0$ ナルトキ

(a) $\lambda\neq-1$ ナルトキハ双曲線

(b) $\lambda=-1$ ナルトキハ二直線

3° $\lambda=0$ ナルトキハ $S=0$ ニテ表ハサルヽ直線, 即チ $x+y-1=0$ $x+y+1=0$.

第三十九回 (大正十二年)

本試驗

9. 直交軸ニ關シ圓 $(x-a)^2+(y-b)^2=c^2$ ト直線 $bx+ay=2ab$ トノ交點ヲ原點ニ結ビ付クル二直線ノ方程式ヲ求メ, 且 $a^2+b^2=c^2$ ナルトキハ此ノ二ツノ直線ハ直交スルコトヲ證明セヨ。

[解] 直線ト圓トノ二組ノ交點ノ坐標ヲ求メ, 原點ト結ブ直線ノ方程式ヲ出スモ可ナルベシト雖モ計算ガ面倒ナルベシ, 故ニ玆ニハ他ノ方法ヲ採ルベシ

$(x-a)^2+(y+b)^2=c^2$ ノ兩邊ニ $4a^2b^2$ ヲ乘ズレバ

$$(2abx-2a^2b)^2+(2aby-2ab^2)^2=4a^2b^2c^2$$

之ニ $bx+ay=2ab$ ヲ代入スルト

$$\{2abx-a(bx+ay)\}^2+\{2aby-b(bx+ay)\}^2=c^2(bx+ay)^2$$

書キ直スト

$$(a^2+b^2-c^2)(b^2x^2+a^2y^2)=2ab(a^2+b^2+c^2)xy$$

之ハ圓ト直線トノ交點ヲ過ル曲線ニシテ且ツ原點ヲモ過ルコト明カナリ。故ニ求ムル二直線ノ方程式ナリトス。(x ト y トニ就キテ二次ノ對稱式ナルヲ以テ)

若シ $a^2+b^2=c^2$ ナルトキハ $xy=0$ トナリ，二ツノ軸ヲ表ハス。ヨツテ互ニ直交ス。

注意 本題ハ已ニ第四章解義 10 及ビ 11 ニヨツテ解決セラレタリ。而シテ上ノ解モ本質的ニハ夫等ニ一致スルヲ見ルベシ。

10. 直交軸ニ關シ方程式

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

ニ於テ $a+b$ 及ビ $ab-h^2$ ハ座標軸ノ位置ニ關セズ恒ニ不變ナルコトヲ證セヨ。

[解] (講義第十章二百九十三頁參照)

第 四 十 回 (大正十三年)

本試驗

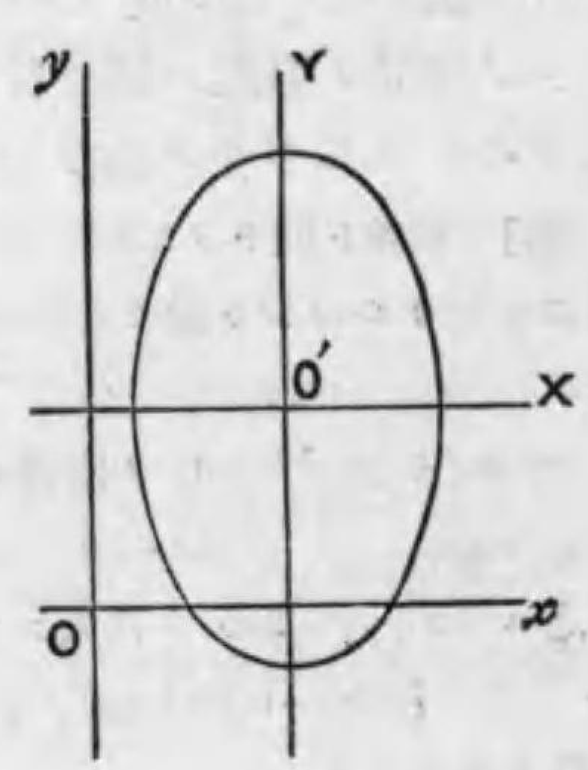
7. 直交軸ニ關シ

$$xy=(x+y-1)^2$$

ノ表ハス曲線ヲ畫ケ。

[解] 與ヘラレタル方程式ヲ書キ直スト

$$x^2+xy+y^2-2x-2y+1=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$



茲ニ $h^2-ab=\frac{1}{4}-1<0$ ナルガ故ニ有心曲線ノ第一種ナリ。

中心ノ坐標ハ $\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$ ナルガ故ニ坐標軸ヲ平行ニ移動シテ，原點ヲ中心ニ置クト

$$x^2+xy+y^2-\frac{1}{3}=0 \cdots\cdots(2)$$

次ニ軸ヲ

$$\tan 2\theta=\frac{2h}{a-b}=\infty$$

ニ適スル θ 卽チ四十五度ダケ廻轉スレバ所要ノ方程式

$$\frac{x^2}{\frac{2}{9}}+\frac{y^2}{\frac{2}{3}}=1$$

卽チ上圖ノ如キ楕圓ナリ。

第 四 十 二 回 (大正十四年)

豫備試驗

7. 直交軸ニ關シ二ツノ楕圓

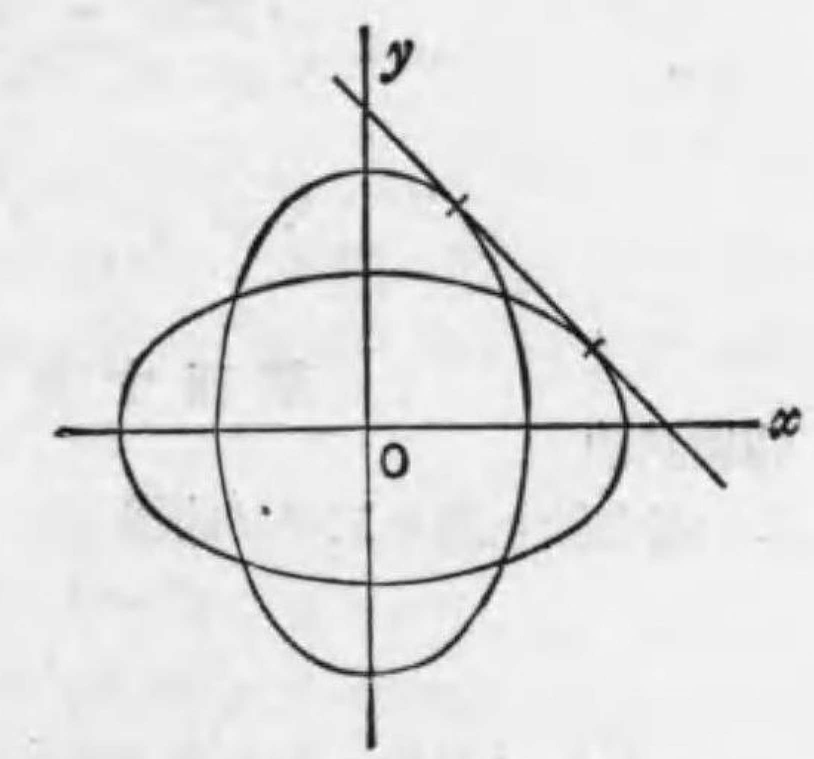
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{x^2}{c^2}+\frac{y^2}{d^2}=1$$

ノ共通切線ノ方程式ヲ求メヨ。但シ $0<c<a,\ 0<b<d$ ナリトス。

[解] 共通切線ノ方程式ヲ

$$y=mx+n \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$



トスレバ (1) ガ楕圓

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

ノ切線ナルガ爲ニハ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(mx+n)^2}{b^2}=1$$

卽チ

$$x^2(b^2+a^2m^2)+2mna^2x+a^2n^2-a^2b^2=0$$

ガ x ニ就キテ等根ナラザルベカラズ。從ツテ

$$m^2n^2a^4-(b^2+a^2m^2)(a^2n^2-a^2b^2)=0$$

或ハ簡單ニシテ

$$a^2m^2-n^2+b^2=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

同様ニ (1) ガ楕圓

$$\frac{x^2}{c^2}+\frac{y^2}{d^2}=1$$

ノ切線ナル爲ニハ

$$c^2m^2-n^2+d^2=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(2), (3) ヨリ

$$m^2=\frac{d^2-b^2}{a^2-c^2} \qquad n^2=\frac{a^2d^2-b^2c^2}{a^2-c^2}$$

然ルニ假定ニヨリテ　$a>c>0,\ \ d>b>0$
ナルヲ以テ m^2 及ビ n^2 ハ共ニ正ノ數ナリ。故ニ m, n ハ共ニ實數ニシテ其値ハ

$$m=\pm\sqrt{\frac{d^2-b^2}{a^2-c^2}} \qquad n=\pm\sqrt{\frac{a^2d^2-b^2c^2}{a^2-c^2}}$$

從ツテ求ムル切線ノ方程式ハ次ノ四ツナリ。

$$y=\sqrt{\frac{d^2-b^2}{a^2-c^2}}x+\sqrt{\frac{a^2d^2-b^2c^2}{a^2-c^2}}$$

$$y=\sqrt{\frac{d^2-b^2}{a^2-c^2}}x-\sqrt{\frac{a^2d^2-b^2c^2}{a^2-c^2}}$$

$$y=-\sqrt{\frac{d^2-b^2}{a^2-c^2}}x+\sqrt{\frac{a^2d^2-b^2c^2}{a^2-c^2}}$$

$$y=-\sqrt{\frac{d^2-b^2}{a^2-c^2}}x-\sqrt{\frac{a^2d^2-b^2c^2}{a^2-c^2}}$$

第四十三回（大正十四年）

豫備試驗

7.　直交軸ニ關シ二ツノ曲線

$$y^2=ax$$

$$2x^2+y^2=b^2$$

ハ a, b ノ如何ニ拘ハラズ恒ニ直交スルコトヲ證明セヨ。

［解］二ツノ曲線ノ交點ノ坐標ヲ x', y' トスレバ

$$\left.\begin{aligned} x'&=\frac{-a+\sqrt{a^2+8b^2}}{4} \\ y'^2&=\frac{-a^2+a\sqrt{a^2+8b^2}}{4} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

但シ $a>0$ ナリトス。サテ此點ニ於ケル切線ノ方程式ハ夫々

$$yy'-\frac{a}{2}\,x+x')=0, \qquad 2xx'+yy'=b^2$$

夫等ノ方向係數ヲ m', m'' トスレバ

$$m'=\frac{-2x'}{y'} \qquad m''=\frac{a}{2y'}$$

然ルニ　$$m'm''=\frac{-2ax'}{2y'^2}=-\frac{ax'}{y'^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(2) ニ (1) ヲ代入スレバ

$$m'm''=-1$$

ヨツテ二ツノ切線ハ互ニ直交ス。從ツテ二ツノ曲線ハ直交ス。

$\boxed{\text{注　意}}$　上ニハ $a>0$ ナリト假定セリ，$a<0$ ナル時モ結論ニハ變ルコトナシ。

第四十三回（大正十四年）

本試驗

9.　原點ヲ相似ノ中心トシ曲線

$$ax^2+by^2=c \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ト相似ニシテ且ツ相似ノ位置ニアル曲線ノ方程式ノ一般ノ形ヲ求メ，且兩曲線ノ對應點ニ於ケル切線ハ平行ナルコトヲ證明セヨ。

［解］原點ガ相似ノ中心ナルヲ以テ與ヘラレタル曲線上ノ任意ノ一點 (x', y') ニ對應スル相似ノ曲線上ノ點ヲ (x'', y'') トスレバ，

$$x'=\frac{x''}{k} \qquad y'=\frac{y''}{k} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ノ關係アリ。然ルニ (x', y') ハ與ヘラレタル曲線上ニアルヲ以テ

$$ax'^2+by'^2=c$$

ヨツテ x'', y'' ノ間ニハ

$$ax''^2+by''^2=k^2c$$

從ツテ求ムル曲線ノ方程式ハ

$$ax^2+by^2=k^2c \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

次ニ點 (x', y') ヲ過ル (1) ノ切線ノ方程式ハ

$$axx'+byy'=c$$

ナルヲ以テ其方向係數ハ $m'=-\frac{ax'}{by'}$ 同樣ニ (x', y') ニ對應スル點 (x'', y'') ヲ過ル (3) ノ切線ノ方程式ハ

$$axx''+byy''=k^2c$$

故ニ

$$m''=-\frac{ax''}{by''}$$

然ルニ (2) ニヨリテ

$$m'=m''$$

ナルヲ知ル。故ニ二ツノ對應切線ハ互ニ平行ナリ。

第四十四回 (大正十五年)

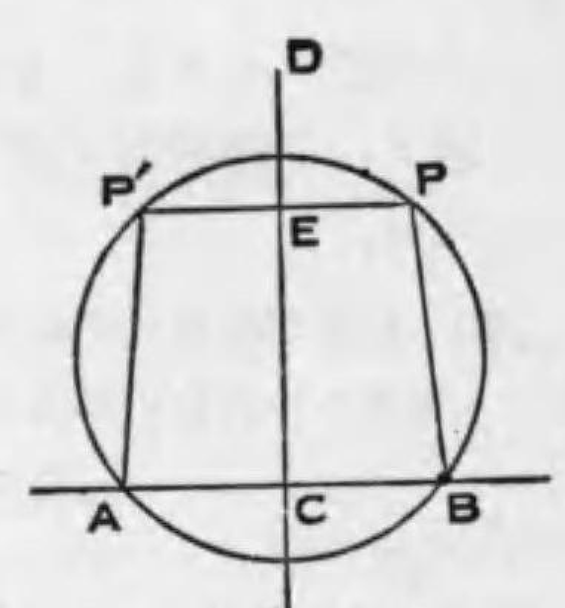
豫備試驗

7. 長サ及位置ノ與ヘラレタル線分ヲ弦トスル任意ノ圓弧ヲ三等分スル各ノ點ハ夫々一定ノ双曲線上ニアルコトヲ證明シ，且此ノ双曲線ノ離心率ヲ索メヨ。

[解] AB ヲ弦トスル圓ノ弧 ABPP′ ノ三等分點ヲ P, P′ トシ PP′ ト AB ノ垂直二等分線 CD トノ交點ヲ E トスレバ,

$$2EP=PB$$

ナル關係アリ。故ニ P ハ CD ヲ準線, B ヲ焦點トスル離心率 2 ナル双曲線ノ上ニアリ。



同樣ニ P′ ハ CD ヲ準線トシ A ヲ焦點トスル離心率 2 ナル双曲線ノ上ニアルナリ。

注意 P ノ屬スル双曲線ト P′ ノ屬スル双曲線トハ同一ノモノニアラズ。何トナレバ P′B : P′E ハ 2:1 ニアラズ又 PA : PE モ 2:1 ニアラザレバナリ。

第四十五回 (大正十五年)

豫備試驗

7. 直交軸ニ關シ二ツノ圓錐曲線

$$a_1x^2+b_1y^2=1$$

及ビ

$$a_2x^2+b_2y^2=1$$

ガ直交スル時ハ

$$\frac{1}{a_1}-\frac{1}{b_1}=\frac{1}{a_2}-\frac{1}{b_2}$$

ナルコトヲ證セヨ。

[解] 交點ヲ (x', y') トスレバ其點ニ於ケル切線ノ方向係數ハ夫々

$$m'=-\frac{a_1x'}{b_1y'} \qquad m''=-\frac{a_2x'}{b_2y'}$$

故ニ此二ツノ曲線ガ直交スルガ爲ニハ

$$m'm''=-1$$

即チ

$$a_1a_2x'^2+b_1b_2y'^2=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

然ルニ交點 x', y' ハ

$$\left.\begin{aligned} x_1{}^2&=\frac{b_2-b_1}{a_1b_2-a_2b_1} \\ y'^2&=\frac{a_1-a_2}{a_1b_2-a_2b_1} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

(1) ニ (2) ヲ代入スレバ所要ノ結果ヲ得。

第四十五回 (大正十五年)

本試驗

10. 直交軸ニ關シ二次曲線ノ方程式

$$5x^2+4xy+2y^2+22x+4y+28=0$$

ヲ標準形ニ直シ且此ノ曲線ヲ畫ケ。

[解] $h^2-ab=4-10<0$

ヨツテ有心曲線ノ第一種ノモノナリ。中心ノ坐標ハ

$$10x+4y+22=0$$

$$4x+4y+4=0$$

ヨリ $(-3,\ 2)$ ヲ得。ソコデ軸ヲ平行ニ移動シテ原點ヲ $(-3,\ 2)$ ニ移ス時ハ其變換式ハ

$$\left.\begin{aligned} x&=\mathrm{X}-3 \\ y&=\mathrm{Y}+2 \end{aligned}\right\}$$

ナルヲ以テ

$$5\mathrm{X}^2+4\mathrm{XY}+2\mathrm{Y}^2=1$$

トナル。次ニ軸ヲ

$$\tan 2\theta=\frac{4}{5-2}$$

ニ適スルガ如ク廻轉スレバ

$$a'x^2+b'y^2=1$$

ノ形トナル。但シ

$$a'+b'=a+b=7$$

$$a'b'=ab-h^2=6$$

ニシテ且ツ h ハ正ナルガ故ニ $a'=6,\ b'=1,$

從ツテ求ムル標準形ハ

$$6x^2+y^2=1$$

ニシテ楕圓ナリ。(作圖ハ之ヲ省ク)

第四十六回 (昭和二年)

本試驗

9. 拋物線ノ頂點ヨリ引ケル互ニ直交スル二直線ガ曲線ト交ル點ヲ夫々 P 及 Q トスレバ弦, PQ ハ軸上ノ一定點ヲ過ルコトヲ證明セヨ。

[解] 拋物線ノ軸ヲ x 軸トシ頂點ヨリ之ニ垂線ヲ立テ、之ヲ y 軸トスル時ハ其方程式ハ

$$y^2=4px$$

ナリ。今頂點ヲ過ル互ニ直交スル二ツノ直線ノ方程式ヲ

$$y=mx,\ \ldots\ldots\ldots\ldots(1) \qquad y=-\frac{1}{m}x\ \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

トスレバ (1) ト曲線トノ交點 P ノ坐標ハ

$$x=\frac{4p}{m^2} \qquad y=\frac{4p}{m}$$

ニシテ (2) ト曲線トノ交點 Q ノ坐標ハ

$$x=4pm^2 \qquad y=-4pm$$

ナリ。故ニ直線 PQ ノ方程式ハ

$$y-\frac{4p}{m}=\frac{\dfrac{4p}{m}+4pm}{\dfrac{4p}{m^2}-4pm^2}\left(x-\frac{4p}{m^2}\right)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

サテ此直線ハ拋物線ノ軸ト交ル點ノ y 坐標ハ零ニシテ x 坐標ハ (1) ニ $y=0$ ト置ケバヨシ。即チ $x=4p$, 故ニ PQ ガ軸ト交ル點ハ $(4p,\ 0)$ ニシテコレハ m ノ値ノ如何ニ關セズ一定ナリ。

受驗參考 平面解析幾何學問題詳解

定價金參圓五拾錢

昭和四年五月二十七日初版印刷
昭和四年五月三十日初版發行

著作者　山崎榮作

發行兼印刷者　大日本圖書株式會社
代表者 專務取締役　杉山常次郎

東京市京橋區銀座一丁目二十二番地
發行所　大日本圖書株式會社
振替口座東京二一九番

終