贈閱

第一卷

第八期

第八期目錄

秘訣的披露

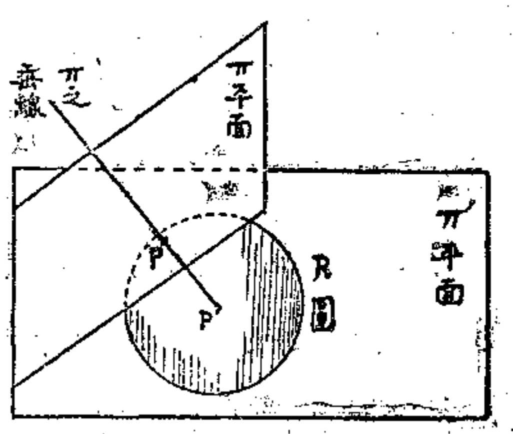
湯璪眞

在算學月刊第六期上面曾經登過這麼一個題目：好幾個題和一個秘訣．現在這個秘訣該當披露了．

秘訣：簡單一句話，凡遇到這種題，都用一種所謂擴大射影的原則來做．

甚麼叫作擴大射影呢？卽是說，將平常初等幾何學所說沒有大小的那種點（以下均呼爲那種點），利用一種方法變成我所說有大小的這種點（以下均呼爲這種點），其方法說明於下：

先講平面幾何罷．所謂那種點可假設在同一平面 π 上，過那種點的任一 P 點作垂綫，交另一平面 π' 於 P'，然後以此 P' 爲中心，以垂線之長 $(r=PP')$ 爲半徑，作一球交 π' 平面於一圓 R．這個 R 圓，即是我所說有大小的這種點．



利用這個方法，可使平面 π 上的一點 P，一變而成平面 π' 上的一點 R（或 R 圓），也就是無大小的那種點一變而成有大小的這種點．這種變法，叫作擴大射影．擴大的意思，自這方面講就是無大小變爲有大小，自另一方面講，可以說是平常射影的擴

大．因爲平常射影有點變到點的，也有點變到線的，此刻是將點變到圓，前兩者都包括在內．

無大小的那種點在 π 平面上成種種形狀，研究起來便得到許多的定理．經過擴大射影的變法之後，可知有大小的這種點在 π' 平面上也成種種形狀，對照一看，便得到許多類似的定理．

看罷！第一，那種點成直線（除 $\pi\pi'$ 兩面交線外）的形狀時，這種點成切於兩直線的一羣圓．第二，那種點當中兩點的距離等於這種點當中兩對應點的公切線之長（外公切或內公切，其取法看這两點在上述交線的同側或異側而定）．第三，平面 π 上兩直線平行時，π' 上所得之四切線中每二線互相平行．第四，那種點成圓的形狀時，這種點成切於兩圓的一羣圓．這算是四個原則，其證明大概還不很難，所以從略．

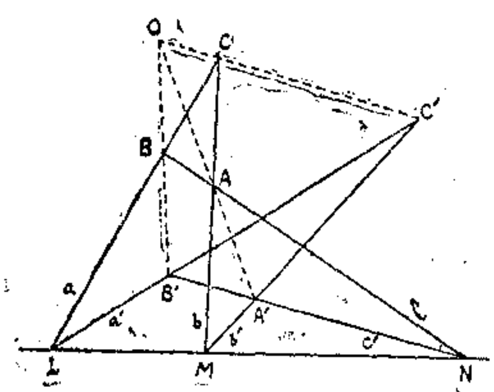
根據以上四個原則（有時也須推廣一點），自然知道我所提出的好幾個題都是對的．不但那幾個題是對的，而且可以儘量的對照平常幾何學的定理寫出這種點的定理，於是成爲一種新的幾何學．（我以前在北平師範大學某季刊上，名之爲自然幾何學，名這種點爲自然點）．

現在把 Desargues 定理的對應定理寫出於下：

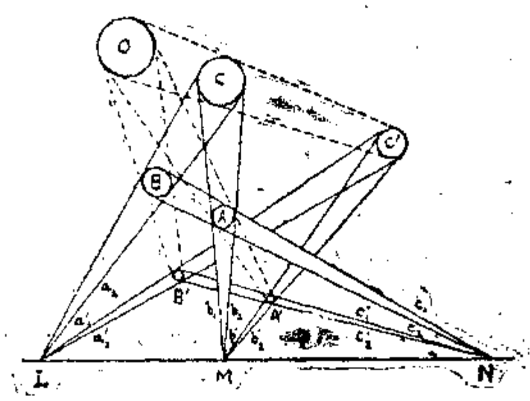
Desargues 定理	對應定理
（可作爲在 π 平面上想）．	（可作爲在 π' 平面上想）．
設三共線點 L, M, N. 過 L 作兩直綫 a, a', 過 M 作兩線 b, b',	設三共線點 L, M, N. 過 L 作四直線 a_1, a_2, a'_1, a'_2, 過 M 作四

過 N 作两直線 c, c' 則 a b 與 a' b', b c 與 b' c', c a 與 c' a' 之連結綫必交於一點 O.

右方之對應定理，還不過寫出一特例而已（因爲右方之 L, M, N 一般爲圓）. 又本定理之逆定理，自然亦有其對應定理，或全部寫出，或僅寫出其特例，均無不可. 現在把他留作讀者諸君的一個練習.



直線 b_1, b_2, b_1', b_2', 過 N 作四直線 c_1, c_2, c_1', c_2', 又設 a_1, a_2, b_1, b_2 切於同一圓 C'; a_1', a_2', b_1, b_2', 切於同一圓 C'; b_1, b_2, c_1, c_2, 切於同一圓 A; b_1', b_2', c_1', c_2' 切於同一圓 A'; 則 c_1, c_2, a_1, a_2, 必切於同一圓 B; c_1', c_2', a_1', a_2', 必切於同一圓 B' 又 A, A' 二圓 B, B 二圓, C, C' 二圓之公切綫凡十二, 其中必有六線切於同一圓 O.



這個定理可以推廣到空間，同樣他的對應定理也可推廣（但各圓仍同在 π' 平面上，不然則各圓卽應變爲球）.

上說稍嫌簡略，但是秘訣已經披露完了，其餘便不多寫.

關於三十六點圓之更正

李　思　源

上期登載"三十六點圓"一文，定理後節稍有錯誤，亟應改正，并向讀者抱歉．

定理．圓內接四邊形 ABCD 各邊之中點為 E,F,G,H，其對角線 AC，BD 之中點為 R,S；圓心為 O，自 R,S 各向其他對角線作垂線，設其交點為 L：則各四邊形 EFSO，FGRO，GHOS，HEOR，EFLR，FGLS，GHRL，HESL 中各三角形之九點圓心，與各四點形 OABC，OBCD，OCDA，ODAB 之重心，共三十六點，同在一圓周上．

〔證〕本定理前段證明，已詳上期，茲僅証其後半（即更正之部分）如次：

設 O，G，N 為 ΔABC 之外心，重心及九點圓心，則此三點共線且 $ON=\frac{3}{2}OG$（參看上期"調和四心線"篇）．

令設 G' 為 OABC 之重心，則 G' 必在 OG 上，且 $OG':G'G=3:1$（參看本刊第五期傅仲嘉先生信中 1·2 節），故知 $OG'=\frac{3}{4}OG$．

由是 $OG'=\frac{1}{2}ON$，而 G' 為 ON 之中點．令 J 為 OL 之中點，故 $JG'=\frac{1}{2}LN$，而 LN 為 ΔABC 九點圓之半徑，依上所述，等於 O 圓半徑之半，因之 JG' 等於 O 圓半徑之四分之一，而 G' 在前段証明中所云之圓周上．同理 OBCD，OCDA，ODAB 之重心亦然．

故此三十六點共在一圓周上．　　　　（証明）

（自上期證明中刪去"最後………"以下一段，補入本段，即成完璧）

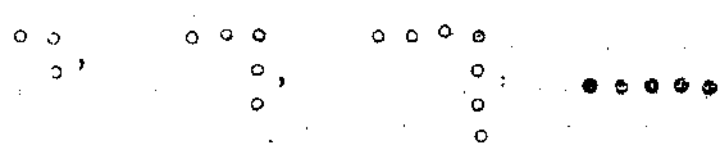
平面數同線形數

王雍紹

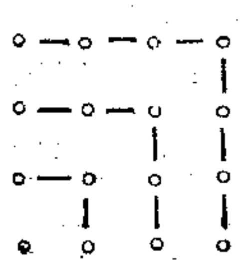
I. 普通自然數都能排成幾何中的各種圖形，整數間相互的關係有時不用證明，就可判定它們的確實性．古時很多算學家，常用這個方法考查整數性質，因而發現新的性質不少．希臘大算家學畢達哥拉斯 (Pythagoras) 相信算術的事實必有其相對的幾何意義，反之，幾何的事實亦必有其相對的算術意義．於是根據他所發明後人稱為"畢氏定理"的事實，從事研究其在算術上的意義．他分整數為偶數同奇數兩種，假定用一小圈"○"代1，每一個奇數概能排成如ㄱ之形，謂之 gnomon．例如

3,　　5,　　7,　　⋯⋯

可排成



形，因之可推出(參看下圖)



$1+3=2^2$;

$1+3+5=3^2$;

$1+3+5+7=4^2$;

$\cdots\cdots\cdots\cdots$;

$1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=n^2$,

一個奇數間的奇異性質．再由

$$1+3+5+7+\cdots+(2n-1)+(2n+1)=(n+1)^2,$$

即 $$n^2+(2n+1)=(n+1)^2,$$

即 $$(n+1)^2-n^2=(2n+1),$$

便可認任何奇數爲二平方數的差了！這不是研究整數性質的奇巧而又有興趣的一個方法麼？

本文所討論的是平面數同線形數，平面同綫形幾個字，當然是同幾何圖形有關的名詞．任何整數當做一長度看待，即認爲在一度空間時，這個整數稱做線形數．同樣，若整數可以當做一長度同一闊度看待時，這個整數自然就是我們所說的平面數．不過將整數排成幾何圖形的方法不同，隨之所謂平面數線形數也就不能不有些許的不同．

柏拉圖（Plato）分所有整數做二類，第一類是能夠分成二相同數相乘的整數，此數幾何形是正方形，故叫做正方形數；第二類是居正方形數中間的數，不能表爲同數之積，但能表爲少乘多或者多乘少的一切數．這些少乘多或者多乘少中的少同多，常可包入較長同較短的邊中，使它們恰成一長方形，故叫做長方形數．歐幾里得（Euclid）在他有名的幾何原理中，曾列舉綫形數同平面數的定義，承認用邊的長度表整數的大小．所以柏拉圖同歐幾里得將整數排成幾何圖形的基本法則完全一致，都是用相當於一個數的長度的邊來表示這一個數．但是算學家 Iamblichus 曾經說過，古時把一個整數分成許多單位，并不像我們現在用數字符號來表示它．這明明告訴我們不必定用某種定長

綫段,只須把一個數分成許多單位,或者用一小圈代一單位,排成各種幾何圖形,就可以表示那一個整數的大小. 依柏拉圖的觀點,照這種排法,任何質數僅爲一度. 例如 3 同 5 在柏拉圖的排法中,是兩個長方形數,但用圈的表示法,却不然了.

用綫段長度同用小圈表示整數,相異的地方,此處可以看得出來. 實際用小圈可以表示整數成正方形同長方形以外的各種幾何圖形. 例如 3 可以表爲三角形, 5 可以表爲五邊形,前者名曰三角形數,後者名曰五邊形數,均是平面數. 以下專就能用小圈表示的幾種特別線形數同平面數,說一說它們的重要的性質.

II. 上面說到任何質數用小圈表示,依柏拉圖的觀念,只能排成一直綫,不能排成正方形或長方形,所以 Thymaridas 稱質數做線形數. 關於這些特別的線形數(即質數)的性質,經過了多少大算學家的研究,我們所知道的很多. 大概現在已知確實無訛的質數性質,約有下列數端:

(1) 質數有無窮個. 此定理爲歐幾里得所發明,證明簡單. 命 $a, b, c, \cdots\cdots k$ 爲質數,則 $abc\cdots\cdots(k+1)$ 必定爲質數或者不是質數. 若是質數時,我們便在已知質數外另得一新質數 $abc\cdots\cdots(k+1)$; 若不是質數時,必爲某質數 p 所除盡,且 p 不是已知質數 $a, b, c, \cdots\cdots, k$ 裡面的一個,豈不又得一新的質數麼?這樣說來,質數當然有無窮個了.

(2) Eratosthenes (27?—194 B.C.) 發明一個選取質數的方法. 把整數依自然次序寫出,順次取去 2,3,5,7,11,13,……

的倍數，結果剩下的便都是質數。

(3) P. L. Chebichev 証明“Bertrand定理”，即若有一整數 $n>3$，至少有一個質數介於 n 同 $2n-2$ 的中間。Bertrand 曾經假定此定理眞確，再用它證明在置換羣理論中的一個定理。

(4) 常能決定一定個連續整數，在其中沒有一個質數存在。例如欲在 1,000,000,000 個連續整數中不使有任何質數存在，這樣的 1,000,000,000 個連續整數可以如下法決定。命 P 爲從 1 到 1,000,000,000 時內中所有質數同比 1,000,000,000 稍大的一個質數的乘積，a 取從 2 到 1,000,000,001 的數值，則所有數 $P+a$ 都不是質數。

(5) 數學家 Dirichlet 又證明一個關於質數的定理，若 a b 互爲質數，則算術級數 $a+nb\ (n=0,1,2,3,\cdots\cdots)$ 含無窮個質數。

另外還有很多的性質，雖然曾經古人說過，但大半是根據經驗所得出來的結果，證明早已失傳，因而我們現在尚不能判定它們的確實性。如果把已知的性質同這些不可證明的性質比較一下，就知道我們對於質數的性質，所知的仍然是有限得很！下面所舉幾條，不過是就比較更重要而且有興味的稍加叙述而已：

(2) 有名的數學家 Fermat 自始至終相信 $2^{2^n}+1$ 是一個質數，不過他自己不能嚴密地證明它的眞確性。以後 Euler 算出 $n=5$ 時，$2^{2}+1=4,294,967,297=6,700,417\times641$，找出它

的錯誤來了．至於能夠表示比某一定數小的所有質數的公式，據現在所知道的，仍然沒有發現．可以表示所有質數的公式，當然更談不到了．在 1912 年，E.Landau 提出用現在關於整數智識尙不能證明的四個問題：

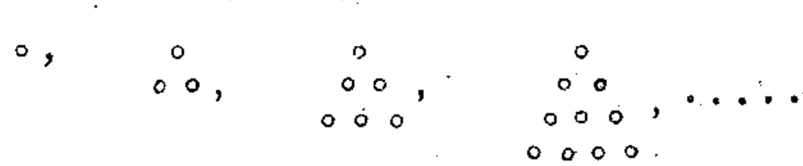
(2) n 取整數値時，n^2+1 表示無窮個質數否？

(3) 對於大於 2 的偶數 m，常有 $m=p+p'$ 的二質數 p 同 p' 存在否？

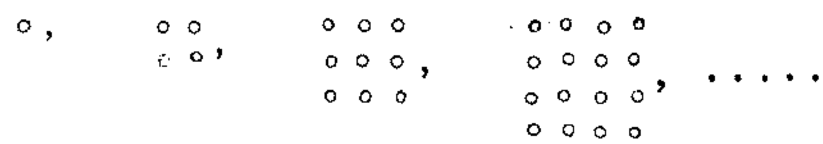
(4) 像 $5-3=2$，$13-11=2$，$19=17=2$，$31-29=2$ 一樣，能夠滿足 $2=p-p'$ 的二質數 p 同 p' 常有無窮個存在否？

(5) n 為正整數時，在 n^2 同 $(n+1)^2$ 間，常至少有一個質數存在否？

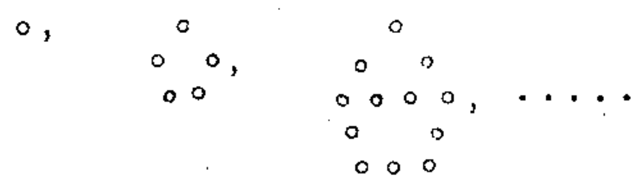
III Iamblichus 也分平面數為二類：第一類是成 $n(n+1)$，形狀即 $1\cdot2, 2\cdot3, 3\cdot4, \cdots\cdots$ 的數，這些數全是連續個偶數的總和；第二類是成 $n(n+m), m\nless 2$ 形狀的數．我們不問這二類數的區別若何，只就用小圈代 1 而能排成在二度空間中的幾何圖形的數，特別是能排成三角形的數來討論．任意一個整數，依照它能排成三角形，正方形，五邊形，多邊形，便稱它做三角形數，正方形數，五邊形數同多邊形數．普通自然數中，1, 3, 6, 10，等等都成



三角形，所以是三角形數；1, 4, 9, 16，等等都成



正方形,所以是正方形數;又 1, 5, 12, 等等都成



五邊形,所以是五邊形數;其餘依此類推.由這些幾何圖形,很容易知道三角形數乃是自然數 1+2+3+4+……的總和;正方形數乃是連續個奇數 1+3+5+7+……的總和;五邊形數乃是 1+4+7+10+……的總和.關於組成三角形數,正方形數,五邊形數以及多邊形數的方法,Nicomachus 說由普通自然數適當的和求出,即是說依自然數順序連續各個的和是三角形數,從 1 起每隔一個數的連續各個總和是正方形數,從 1 起每隔二個數的連續各個總和是五邊形數,推至從 1 起每隔 n−2 個數的連續各個總和是 n 多邊形數.Fermat 在 1637 (?)年寄給 Pater Mersennes 的信中,有一個關於多邊形數的定理,這個定理說,任何數或是一三角形數,或二個或三個三角形數的和;或是一正方形數,或二個,三個或四個正方形數的和;或爲一五邊形數,或二個,三個,四個或五個五邊形數的和;以後類推.不過他本人沒有把他的證明留給我們,現在我們也就暫時無法判定它的眞確程度了.

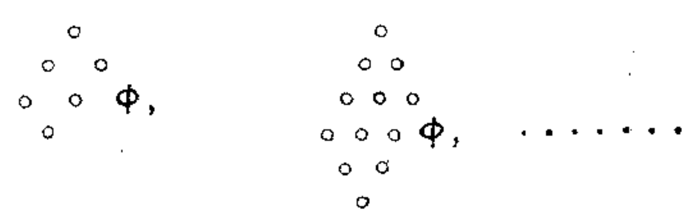
談到三角形數,根據算術級數求和法,知道它們一般形狀是

$$1+2+3+4+\cdots\cdots+n=n(n+1)/2,$$

若 $n=1,2,3,4,5,6,7,8,9,10$, 所得出的三角形數有 1,3,6,10,15,21,28,36,45,55 十個. 這些個三角形數中, $1+3=2^2$, $3+6=3^2$, $6+10=4^2$, $10+15=5^2$, $15+21=6^2$, $21+28=7^2$, $28+36=8^2$, $36+45=9^2$, $45+55=10^2$, 每二個相鄰數的和盡是一平方數. 實則任何相鄰三角形數的和

$$\frac{n(n+1)}{2}+\frac{(n+1)(n+2)}{2}=(n+1)^2$$

爲一平方數,乃易明瞭的事實,此時如又從上面用小圈表方形數方法着想更易知爲顯然的事實. 因之我們可以說:『任何兩個連續三角形數的和是一個平方數,反之,任何一個平方數都可表做連續二個三角形數的和』. 又從圖形



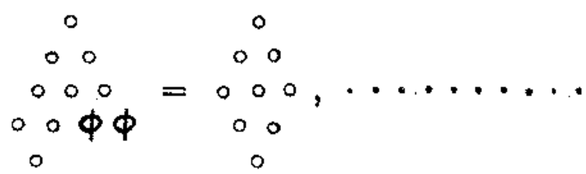
着想,或竟從

$$\frac{n(n+1)}{2}+\frac{(n+2)(n+3)}{2}-1=2\times\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

觀察,另可以得出一個關於三角形數的定理:『連續三個三角形數,首尾二個之和減一恰是中間一個的二倍』. 同理,『連續四個三角形數,首尾二個的和減二,與中間二個的和相等』,由

$$\frac{n(n+1)}{2}+\frac{(n+3)(n+4)}{2}-2=\frac{(n+1)(n+2)}{2}+\frac{(n+2)(n+3)}{2}$$

或



又可以證明之. 照這樣推想下去,請想一想,我們能否得出能夠包括這些結果的一個普遍定理? 三角形數的特別性質，讀者們願意考查時,或者還能夠有很多的新奇結果發現.

現在再談一談屬於三角形數中的完全數. 任意一個整數,它的所有各個因數的和,除它自身外,恰能同它自已相等時,這個數叫做完全數. 在三角形數中, 6 同 28 兩個,

$$6=1+2+3;$$

$$28=1+2+4+7+14,$$

便是兩個很好的例. 古來很多的算學家早就注意到完全數. 歐幾里得并且證明成 $2^{n-1}(2^n-1)$ 形, (2^n-1是質數)的數都是完全數.

具這樣形狀的完全數,因 $2^{n-1}(2^n-1)=2^n(2^n-1)/2$, 完全屬於三角形數內. 已知的完全數俱爲偶數，奇數的完全數從未找出一個,同時也沒有人證明過奇數可以成功一個完全數,所以我們現在說一切已知完全數都是三角形數, 決沒有一些錯誤. 已知的完全數的末位基數不是 6 便是 28, 用 9 除時剩餘都是 1, 這兩個關於完全數的性質,早已證明了的. 最小十個完全數是

$2(2^2-1)=6;$

$2^2(2^3-1)=28;$

$2^4(2^5-1)=496$;

$2^6(2^7-1)=8128$;

$2^{12}(2^{13}-1)=33550336$;

$2^{16}(2^{17}-1)=8589869056$;

$2^{18}(2^{19}-1)=137438691328$;

$2^{30}(2^{31}-1)=2305843008139952128$;

$2^{50}(2^{51}-1)=2658455991569831744654692615953842176$;

$2^{88}(2^{89}-1)$.

近來美國算學家 Dickson 曾經覓出一百多個完全數，在這一百多個完全數中最大的一個排成一三角形時，它的面積之大，不是很可以值得我們驚訝的嗎？

此外正方形數，五邊形數，以及多邊形數，可以同三角形數一樣地研究其性質，爲節省篇幅計，暫不再述.

Dickson 說過，數的理論，不像其餘的智識，概念或方法在某一時期被過度稱誦，在另一時期竟或輕忽不理，而是與過去的眞正藝術一樣，古時的定理即在現在常常仍然是新鮮的. 我們就把這個話來當做本文的結束.

三角方程式中之一重要問題

拱　　斗

題　文　已知兩角之和或差，及此兩角同種類三角函數之和，差，積，或商，求此兩角.

本題乃平面三角法中常引用之一問題，頗關重要，初學者所不可不注意也. 惟未叙本文之先，有二補題，似應一論及之. 蓋此等之補題，在解本問題時，嘗有借助之處.

補題一　試解下列之方程式

(1) $$a\sin x+b\cos x=c$$

此處 x 爲未知之角，而 a,b,c，爲正或負任意之已知數也.

A. 先假定 a,b,c 皆爲正.

方程式(1)之兩邊，以 b 除之，得

(2) $$\frac{a}{b}\sin x+\cos x=\frac{c}{b}.$$

令(3) $$\tan\Phi=\frac{b}{a}.$$

此處 ϕ 常得假定其爲銳角.

於(2)中將 $\frac{a}{b}$ 以 $\cot\phi$ 即 $\frac{\cos\Phi}{\sin\Phi}$ 代之，則得

(4) $$\frac{\cos\Phi}{\sin\Phi}\sin x+\cos x=\frac{c}{b}.$$

消去分母 $\sin\phi$，即

(5) $$\sin(x+\Phi)=\frac{c}{b}\sin\Phi.$$

由(5)求以$\frac{c}{b}\sin\phi$爲正弦之銳角α,故

(6)　　$x=n\times360^\circ+\alpha-\phi,$

(7)　　$x=n\times360^\circ+180^\circ-\alpha-\phi.$

討論: 爲方程式(5)能決定一角α,則a,b,c之間,不可不有一關係式存在.但以$\sin\alpha$平方之值,至大不過等於1,故不可不有

$$\sin^2\phi\geqq\frac{b^2}{c^2}.$$

而　$$\sin^2\phi=\frac{\tan^2\phi}{1+\tan^2\phi}=\frac{b^2}{a^2+b^2},\qquad(由3)$$

故　$$\frac{b^2}{a^2+b^2}\geqq\frac{b^2}{c^2},$$

即(8)　$$c^2\geqq a^2+b^2.$$

若所求之角x爲任意之角,則此關係式(8),即必須而且完全之條件也,苟欲求之角x,限定爲正且須小於180°之時,則x當取如何之值,宜探討之。

此時,於(6)及(7)中,先不可不令n等於0.

由(7)則角x爲$180^\circ-\alpha-\phi$.因α及ϕ皆爲銳角,故即所求之角也.

由(6)則角x爲$\alpha-\phi$. 如置符號於不論,則此角常小於90°.然欲其爲正,則不可不

$$\alpha>\phi,$$

即　$$\sin\alpha>\sin\phi.$$

然將$\sin\alpha$以由方程式(5)所得之值易之,則得

$$\frac{c}{b}\sin\phi > \sin\phi,$$

即(9) $c>b$。

是故,不等式(8)及(9)同時滿足之時,方程式(1)有二解;c 小於 b 之時,則唯有一解。

B. a,b,c 不皆爲正之時.

此時之解法及討論,均與A相同,閱者自試之可也.

注意: 若不爲(3)之置換,而令

$$\tan\phi=\frac{a}{b}$$

亦無不可,不過方程式變爲下形耳.

(10) $$\cos(\alpha-\phi)=\frac{c}{b}\cos\phi$$

補題二 解二次方程式.

設二次方程式爲下列一般之形

(1) $$ax^2+bx+c=0,$$

在方程式爲數字方程式時,恆得假定 a 爲正. 如有虛根,則 $b^2-4ac<0$,暫不具論.

第一: 若 $b^2-4ac>0$, 及 $c>0$.

令方程式(1)之二根爲 x' 及 x'',而 x' 爲其最小者,即得

(2) $$x'=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-\frac{b}{2a}\left(1+\sqrt{1-\frac{4ac}{b^2}}\right).$$

假定(3) $$\sin^2\phi=\frac{4ac}{b^2},$$

因 b^2 大於 $4ac$,故此假定恆能存立.

將(3)代入(2)中，則得

$$(4)\qquad x'=\frac{-b}{2a}(1+\cos\phi)=-\frac{b}{a}\cos^2\frac{\phi}{2}.$$

同樣，得

$$(5)\qquad x''=-\frac{b}{a}\sin^2\frac{\phi}{2}.$$

第二：若 $b^2-4ac>0$，及 $c<0$.

於前式中變 c 爲負 c，然後置

$$(6)\qquad \tan^2\phi=\frac{4ac}{b^2},$$

倣上之運算得

$$(7)\qquad x'=-\frac{b}{a}\frac{\cos^2\frac{\phi}{2}}{\cos\phi},$$

$$(8)\qquad x''=\frac{b}{a}\frac{\sin^2\frac{\phi}{2}}{\cos\phi}.$$

本　文　因兩角同種類三角函數有正弦，餘弦，正切，餘切，正割，餘割，故分爲六種狀態，而順次論之.

I. 已知兩角之和或差，及其正弦之和，差，積，或商，求此兩角.

甲. 已知兩角之和，及其正弦之和之時：

設已知之二和各各爲 a 及 m，未知之二角爲 x 及 y，則

(1) $x+y=a$, (2) $\sin x+\sin y=m$.

將方程式(2)之左邊，以積之二倍之公式易之，且將方程式(1)代入，則爲

$$2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{x-y}{2}=m,$$

即(3)
$$\cos\frac{x-y}{2}=\frac{m}{2\sin\frac{a}{2}}.$$

令以$\frac{m}{2\sin\frac{a}{2}}$爲餘弦之任意一角爲 α，則得

$$\frac{x+y}{2}=\frac{a}{2},\qquad \frac{x-y}{2}=n\times360^\circ\pm\alpha.$$

故
$$\begin{cases} x=\frac{a}{2}+n\times360^\circ\pm\alpha \\ y=\frac{a}{2}-n\times360^\circ\pm\alpha \end{cases}$$

乙． 已知兩角之差及其正弦之和，或兩角之和及其正弦之差，或兩角之差及其正弦之差時：

已知之和或差若恆以 a 及 m 表示之，則依原方程式爲屬於上述三者中之何種狀態，而方程式(3)得分別以次之各方程式易之，

(5)
$$\sin\frac{x+y}{2}=\frac{m}{2\cos\frac{a}{2}},$$

(6)
$$\sin\frac{x-y}{2}=\frac{m}{2\cos\frac{a}{2}}.$$

(7)
$$\cos\frac{x+y}{2}=\frac{m}{2\sin\frac{a}{2}}$$

由此以求 x,y 之值，倣(甲)爲之，誠非難事，讀者自試之可也．

丙. 已知兩角之和或差,及其正弦之積時:

两角之和爲已知時,設此已知之和與積爲 a 及 m,則解次之方程組可也,

(8) $x+y=a$, (9) $\sin x\sin y=m$.

由三角變形法方程式(9)可易之如次:

$$\cos(x-y)-\cos a=2m,$$

卽(9') $\cos(x-y)=2m+\cos a$.

然由(8)式兩角之和 a 既爲已知,復由(9')式其差自易算出,故 x,y 不難解矣.

若兩角之差爲已知,則由下列之方程式(10),其和得以察知也,

(10) $\cos(x+y)=\cos a-2m$.

丁. 兩角之和或差及其正弦之比已知之時:

若兩角之和爲已知,則有次之二方程式

(11) $x+y=a$, (12) $\frac{\sin x}{\sin y}=m$.

將(12)式之兩邊加1或減1,則得

(12') $\frac{\sin x+\sin y}{\sin y}=m+1$,

(12'') $\frac{\sin x-\sin y}{\sin y}=m-1$.

以(12')除(12'')得

$$\frac{\sin x-\sin y}{\sin x+\sin y}=\frac{m-1}{m+1}.$$

然 $$\frac{\sin x-\sin y}{\sin x+\sin y}=\frac{2\cos\frac{a}{2}\sin\frac{x-y}{2}}{2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{x-y}{2}}=\cot\frac{a}{2}\tan\frac{x-y}{2},$$

卽 $$\cot\frac{a}{2}\tan\frac{x-y}{2}=\frac{m-1}{m+1},$$

故得次式

(12) $$\tan\frac{x-y}{2}=\frac{m-1}{m-1}\tan\frac{a}{2}.$$

今若將以$\frac{m-1}{m+1}\tan\frac{a}{2}$爲正切之任一角，用 α 表之，則得

$$\frac{x+y}{2}=n\times180^\circ+\alpha.$$

由是 $$\begin{cases} x=\frac{a}{2}+n\times180^\circ+\alpha, \\ y=\frac{a}{2}-n\times180^\circ-\alpha. \end{cases}$$

II. 已知兩角之和或差，及其餘弦之和，差，積，或商，求此兩角.

將 x 與 y 分別以 $90-x'$ 及 $90-y'$ 置換，則可化爲 I 而解之. 然若不借 I 之助，直接解之亦無不可，惟斯時之論法與 I 完全類似，故不復贅.

III. 已知兩角之和或差，及其正切之和，差，積，或商，求此兩角.

甲. 兩角之和及其正切之和已知之時：

(1) $x+y=a,$　　(2) $\tan x+\tan y=m,$

由(2)得 $$\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}=m,$$

亦卽 $$\frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)+\cos(x-y)}=\frac{m}{2}.$$

今以(1)代入其中,而依 $\cos(x-y)$ 而解之,則得次之方程式

(3) $$\cos(x-y)=\frac{2}{m}\sin a-\cos a.$$

夫 a 旣爲已知,則 $x-y$ 亦自易求矣.

乙. 兩角之差及其正切之和已知之時:

今作與甲類似之計算,得次之方程式

(4) $$2\sin(x+y)-m\cos(x+y)=m\cos a,$$

於是本問題歸於解同角之正弦及餘弦之一次方程式,即補題一是已.

丙. 兩角之差或和及其正切之差已知之時:

設兩角之和或差爲 a,其正切之差爲 m,則爲求與公式(3),(4)同樣之公式,變 y 爲 $-y$ 足矣. 於是得方程式如次

(5) $$\cos(x+y)=\frac{2}{m}\sin a-\cos a,$$

(6) $$2\sin(x-y)-m\cos(x-y)=m\cos a.$$

丁. 兩角之和或差及其正切之積已知之時:

例如設 (7) $x+y=a$, (8) $\tan x\tan y=m.$

此第二方程式,順次以

$$\frac{\sin x\sin y}{\cos x\cos y}=\frac{m}{1},$$

$$\frac{\cos x\cos y+\sin x\sin y}{\cos x\cos y-\sin x\sin y}=\frac{1+m}{1-m},$$

$$\frac{\cos(x-y)}{\cos(x+y)}=\frac{1+m}{1-m},$$

易之，復於其末式以(7)代入之，得

(9) $$\cos(x-y)=\frac{1+m}{1-m}\cos a.$$

自此以後，計算甚易，茲從略而諉諸閱者.

如非兩角之和而爲其差已知之時，則在(9)式中，將 y 以 $-y$, m 以 $-m$ 易之，而得下式甚明，

(10) $$\cos(x+y)=\frac{1-m}{1+m}\cos a.$$

戊. 兩角之和或差及其正切之商已知之時:

先論兩角之和爲已知時，則有次之方程式.

(11) $$x+y=a,$$ (12) $$\frac{\tan x}{\tan y}=m.$$

此時方程式(12)得順次變形如下:

$$\frac{\sin x\cos y}{\cos x\sin y}=\frac{m}{1},$$

$$\frac{\sin(x-y)}{\sin(x+y)}=\frac{m-1}{m+1},$$

(13) $$\sin(x-y)=\frac{m-1}{m+1}\sin a.$$

由(13)本問題不難解也.

若於公式(13)中，易 y 作 $-y$, m 作 $-m$, 則如前之所述而得適合於兩角之差爲已知時之式如次

(14) $$\sin(x+y)=\frac{m+1}{m-1}\sin a.$$

Ⅳ. 已知兩角之和或差及其餘切之和，差，積，或商，求此兩角.

依由正弦可推移於餘弦之例,則正切自亦可推移於餘弦也.或倣前述之方法,亦得直接解之.

V. 已知两角之和或差,及其正割之和,差,積,或商,求此两角.

甲. 两角之和及其正割之和已知之時:

即(1) $x+y=a$, (2) $\sec x+\sec y=m$.

此第二方程式得逐步變形如下:

$$\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\cos y}=m,$$

$$\frac{\cos x+\cos y}{\cos x\cos y}=m,$$

$$\frac{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{x-y}{2}}{\cos a+\cos(x-y)}=\frac{m}{2}$$

$$\frac{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{x-y}{2}}{\cos^2\frac{x-y}{2}-\sin^2\frac{a}{2}}=m,$$

$$(3)\qquad m\cos^2\frac{x-y}{2}-2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{x-y}{2}-m\sin^2\frac{a}{2}=0$$

[此變形之計算,即將 $\cos x+\cos y$ 以餘弦之積之二倍,積 $\cos x\cos y$ 以餘弦之半和,$\cos a$ 以 $1-2\sin^2\frac{a}{2}$, $\cos(x-y)$以$2\cos^2\frac{x-y}{2}-1$置換得來也.]

今命方程式(3)之二根爲 z' 及 z'', 復令

$$\tan\varphi=m\tan\frac{a}{2},$$

則得(5)　$z'=\pm\sin\frac{a}{2}\cot\frac{\phi}{2}$,　$z''=\mp\sin\frac{a}{2}\tan\frac{\phi}{2}$.

上式之符號依補題二所云者而定.

乙. 兩角之和及其正割之差,或兩角之差及其正割之和或差已知之時:

在方程式(2)及(3)中,分別以 $180^0+y'$, $-y'$, 及 $180-y'$ 置換之. 則無論其情狀之若何,恆得歸於(甲)而解之. 何則,因如此變易之後,其結果常爲一"已知二角之和及其正割之和求二此角之問題",故也.

丙. 两角之和或差及其正割之積或商已知之時:

因二方程式　$\sec x\sec y=m$,　$\frac{\sec x}{\sec y}=m$,

各各得以　$\cos x\cos y=\frac{1}{m}$,　$\frac{\cos x}{\cos y}=\frac{1}{m}$,

置換之,此問題前已論及之矣.

Ⅵ. 已知两角之和或差,及其餘割之和,差,積或商,求此兩角.

夫餘弦餘切之問題既已解決,則由正割推移于餘割,Ⅵ之解法自生,或如Ⅴ直接解之亦可.

韋　　他

(*Vieta 1540—1603 A. D.*)

瘦　　桐

學過代數學的朋友們，假如數典不忘祖的話，應該如何紀念這位開山老祖十六世紀的大算學家—韋他！我們知道在十六世紀以前的代數學，都是一種記述的體裁，不容易有長足的進展，和正我國古代的算書一樣，不知創用符號的便利．到了韋他才另闢新天地，一變而爲現行的符號代數學（Spmbolic Algebra.）．

歷史告訴我們，任何革命運動，決不是一二人所能創造，自有時代的背景而是勢之所必至，"改良代數"，十六世紀時已成爲普遍的要求，在韋他以前，就有不少的算學者像Stifel, Bombelli等都曾努力幹過這勾當，韋他恰巧生得其時，登高一呼，天下景從，如是創造符號代數學的榮譽，遂被他襲取，眞可謂時代的幸運兒了！

韋他關於代數的著述甚多，就中以 In Artem Analyticam Isagoge 一部，可說是最早的符號代數學，這書裡有兩個最值得注意的特徵，第一就是採用 B, C, D 等父音字母代表已知量，A, E, I, 等母音字母代表未知量，並且同時在一個問題裡可引用幾個未知量．第二就是創造表示 x^2, x^3, x^4…… 的符號，而顯出各乘冪間的關係，實開近世代數學記法的前驅．

韋他是法國人．1540 年生於 Kochelle 近傍的 Fontenary,

1603 年 12 月 13 日死於巴黎．幼受律師的教育，學成後充巴黎法院的律師，復充 Brittany 州議會的代議士，後於 1580 年得Rohan 侯爵之援引，任巴黎國會的 master of requests. 平生事業多半從事於公務．氏爲天主教徒君權神聖之信仰者，但酷好算學，晚年致力尤殷，嘗發奮忘食，數夜不寐．氏除却代數外，對於三角幾何，亦饒研究，曾發明 Sin n θ 之展開式等．

相傳某次有個從荷蘭派遣到法國來的公使，爲誇耀其國人的才能，特向法王 Henry Ⅳ說:『臣同國之人有名 Adrian Romanus 者，(氏爲 Sin(A+B)普通範式之證明者，1561——1925.)曾設一幾何問題，徵解於天下，未聞法國算學家有能解之者．』法王因召韋他入宮，授以此題，氏不數分鐘，將牠化爲一中心角爲 $\frac{2\pi}{45}$ 所對之弦能滿足的 45 次方程式，用鉛筆立得二解，至是，韋他反難Romanus．提出一題:『作一圓與已知三定圓相切』．Romanus 想了許久用圓錐幾何學到可求解，而用歐氏幾何，總解不出．臨了氏遂將歐氏幾何的解法告訴了他．Romanus 欽佩無已，親到法國來拜訪他，後來彼此竟訂爲莫逆之交．

從此法王 HenryⅣ，對於氏益加尊敬，會法人正與西班牙人交鬨，西人用一種暗號，秘密通信，其暗號約有 600 個，定時變換．王奪獲其書即以示氏，氏潛心研究，竟破其訣，在兩年爭戰裡，法人頗受其利．西班牙王 Philip Ⅱ自以爲他的信號是無人通曉的，居然被人窺破，以爲係法人使用惡魔所致．憤而訴於教皇 Pope說:『法人使用惡魔，違反基督教義．』眞是可笑極了!

初等算學教授法(續)

DAVID EUGENE SMITH 原著

道 彌 譯 述

9. 同根方程式　若學生於方程式之根之必需核算及尋常演算中客根 extraneous root 之引入尚未敎到，則其能得到一解答，只不過從公理而來耳。敎本中對於此點，甚少論及，玆加以簡單之說明，似對於敎師不無小補。

方程式之解法固然以著名之公理爲基礎，然同此公理亦可以引起學生之困難。

例如，設　$x=a.$

乘以x，則　$x^2=ax.$

減 a^2，　$x^2-a^2=ax-a^2.$

析因式，　$(x+a)(x-a)=a(x-a).$

但 $x=a$，　$\therefore 2a(x-a)=a(x-a).$

除以 $x-a$，得　$2a=a,$

由是得　$2=1.$

此處各步驟之推演，皆應用通常之公理，然而結果不通。

學生往往過於注重似眞而實誤之證明。但法國代數學家白唐 J. Bertrand 有言：“常識之眞確性，決不可忽視；徒引用公理而不顧及常識，猶之庸醫不察病原司拘泥成方。”

學生之此種偏向，與白氏論調，引起次之問題：即公理之應用，究應有何限制是也。欲答斯問，須先知同根方程式之定義。今有兩方程式於此，若其任一式所有之各根，亦爲其他一式所有之各根，則此兩方程式謂之同根方程式。例如：$x+3=3x-1$ 及 $x+1=3(x-1)$，即爲同根方程式，因 $x=2$ 爲此兩方程式所同有之唯一根也。但 $x=3$ 及 $x^2=9$，則不得謂之同根，因 $x=-3$ 爲第二方程式之一根，而非

第一方程式之根也.

等量加等量,結果相等,此公理也. 但方程式相加所得之方程式,不能卽謂其與原方程式之任一式爲同根. 例如

若 $x=1$.

則 $x^2=1$.

相加 $x^2+x=2$.

解之 $x=1$ 或 -2.

但 -2 只爲 $x^2+x=2$ 之一根,旣非 $x=1$ 之一根,亦非 $x^2=1$ 之根,故方程式 $x^2+x=2$ 對於原二方程式均非同根.

等量乘以等量,結果相等,此亦一公理也. 然而不能卽謂結果所得之方程式與原式爲同根. 例如,若 $x-1=1$,乘以 $x+1$,則得 $x^2-1=x+1$. 但此式之根與 $x-1$ 不相同. 因 $x^2-1=x+1$ 有二根 2 及 -1,但 -1 非第一方程式之根,故此二方程非同根. 總之,凡整方程式乘以 x 之函數,必引入一個或多根之新根,謂之客根.

仿此,若 $x=5$,則 $x^2=25$, $x^3=125$, $x^4=625$, ….,但第二方程式有一根 -5,爲第一所無者;第三方程式有二根 $5(-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-3})$,爲第一所無者;第四方程式有三客根爲第一所無者.

復次,等量除等量之公理,亦須審愼用之. 例如 $x^3+2x^2-x=0$,若除以x,則得 $x^2+2x-1=0$,或 $x=-1\pm\sqrt{2}$. 此爲原方程式之根,但非其所有根之全體,蓋 $x=0$ 亦爲一根也. 總之,以 x 之函數,除方程式之兩端,則少去一個或多個之根.

在解根號方程式時,此種困難更甚. 通例根式之正負,以根式前之符號爲準如無符號,則概認爲加號. 如 $\sqrt{4}+\sqrt{9}$ 之值,爲 $2+3=5$,而非 $(\pm2)+(\pm3)=5, -1, 1$,或 -5 也. 此完全爲假定,初等算學書中均採用之,除非將±號寫明時,如 $\pm\sqrt{4}\pm\sqrt{9}=5, -1, 1\ -5$,學生萬勿自尋紛擾也. 按 4 之平方根,可爲 2 或 -2,此種規定,誠不甚合乎科學之原理,然已經大衆公認,自亦無大妨碍. 所以當解根號方程式 $\sqrt{x-1}=3$ 時,雖 $x-1$ 之平方根可正可負,但所求之根,乃欲其適合

方程式$+\sqrt{x-1}=3$，而非$-\sqrt{x-1}=3$也．此點既明，試觀下例：

設 $\sqrt{x-5}=1-\sqrt{x-2}$.

兩端平方之 $x-5=1+x-2-2\sqrt{x-2}$.

因得 $2\sqrt{x-2}=4$,

解之得 $x=6$.

但若於原式中以 6 代 x 而檢察之，則見

$$\sqrt{1}=1-\sqrt{4}.$$

或 $1=1-2$.

若以$\sqrt{1}$為 1 之正根，而非其負根，則 6 非此方程式之根，故謂之客根，而此方程式為不能解． 根號前之符號，若如此限制，則必有多數之方程式成為不能解，是雖為非科學的，然高等算學界人士，固已心許之矣．(註)．總之，公理之應用，每易引入通常所謂之客根，是乃顯然之事．

由此觀之，可見代數中普通所用之邏輯觀念，實有增重之必要． 大部份學習代數之學生，以為知"遷項得....，再平方，得....，又除之，得....，"等等，卽可躊躇滿意，而於其手續之合理與否，毫不加以思索．學生祇將"如何做法"說明，教師亦遂以為滿意．然此概屬次要之事，"為何如此做法，方為眞確？""是否此種演算，可以遊行？"實為至要且重大之問題．

10．聯立方程式及圖解 初等代數中應用圖解，往往有人反對，以為實無將解析幾何提前之必要．代數與幾何，吾人皆知其為分立之科學，其實就此兩科之歷史方面言之，其分立尙為時不久．原來算學之分門別類，僅名義之不同而非其間

(註)"C.Smith 之代數，及 Kelland 教授於大英百科全書中，雖皆曾主張$\sqrt{a}$有二值，但 Chrystal. Todhunter, Hall and Knight 及大多數之教本編輯者，仍認$\sqrt{a}$只有一值．" G.Heppel 在1885年二月號之Mathematical Gazette 中所云．

絕無關係,乃有人偏喜劃分界限,判若鴻溝,若而人者,設聆聞 Sophie Germain"代數為以式表出之幾何,幾何為用圖畫出之代數"之言,當無不掩耳而走者.引入圖解之方法甚易,尤以解聯立方程時借助於圖解之處不少.例如兩個二元一次方程式,通常皆為聯立,若以兩直線代表兩方程式,將此事實呈於眼前,當然比解析之證法,更易明白.並可見何以

$$2x+6y=5, \qquad 3x+9y=7.$$

不能有解.三個一次方程式,通常皆不能聯立,若以方程式之圖形見之,其理由更為清晰.今再以特例論之,如方程式

$$x+3y=6, \qquad 2x+8y=16, \qquad y-x=2,$$

為聯立,且可於此組中再加方程式

$$47x+13y=26, \qquad 15x+15y=30 \text{ 等等}$$

仍可為聯立.此中秘訣,待以圖形畫出一看,立即釋然矣.

兩個二次方程式,或一個二次一個一次方程式聯立時亦然.通常兩個二次聯立方程式之解法,不得不依賴於一個四次方程式,學生大半不明此理,若以圖形為助,便一目了然.學生於習畢二次方程式後,每自以為能解如下之一組方程式,

$$x^2+3xy+4y^2+5x+6y+7=0.$$

$$x^2+2xy-y^2-13x-17y-20=0.$$

且以不能解之為可怪.即如

$$x^2+y=7, \qquad x+y^2=11.$$

之解法,(有時僥倖可用二次方程式解法)彼等亦感困難.在解

$$x^2+2xy+y^2-5=0 \qquad x^2+3xy+2y^2-8=0.$$

有時可得其二根,有時又將客根連帶引入而得六根."最可怪者,許多學生對於化方程式以為由為二次方程,則譏為之,而對於所求之解答個數,事前卻毫無所知,甚且用錯誤的機械的方法,求得解答,自以為是而實則不然."(註)

(註)參看 Chrystal, Presidential address

解二元聯立方程式時，演算中所得之新方程式，須注意其圖形之意義，此在曾授以圖解之班次上，實為有價值的練習．其每次依法所得之新方程式所代表之圖形必過前二者之交點．例如，

由	$x^3+y^3=9$	(1)
及	$x+y=3$	(2)
由除法則	$x^2-xy+y^2=3$	(3)
由(2)平方	$x^2+2xy+y^2=9$	(4)
由減法及除法	$\therefore \quad xy=2$	(5)

方程式(3)代表一橢圓，過(1)及(2)圖形之交點，但無窮遠點在外．(4)代表兩平行直線，其中僅有一線過 (1)及(2)之交點，(5)為一雙曲線，過橢圓(3)及平行線(4)之交點．此題之解答，最後變為直線(2)及平行線$(x-y)^2=1$之交點．(註)

總而言之，如所求根之個數，虛根之成對，方程式聯立或矛盾的條件，凡此等理論上必然之困難，在應用圖形時，便自然清楚，毫不費事矣．

11.消元法 初等教本中恒將一次方程式之消元法分為數種：如(1)加法(2)減法 (3)比較法 (4)代入法等等．但為初學者實用起見，其有價值者只有兩種：其一為加法，減法為其特例；其二為代入法，比較法為其特例．因使 $x=y-2$ 及 $x=3y+4$相等，卽係以 x 之值代入而比較之也．故在教授時當以此二法為主而特加注意，其餘可作為其特例．且在學生練習不久之後卽告以代入法為加法之一特例，亦無所不可．

與此二法之存在有同等重要者為其用法．學生習用後，可知加法更便於採用者．代入法僅於係數為1時，及已求出一值而求他值時，較為方便耳．

兩方程式均為二次時，教者應使學生預知其不能用一次方程式之解法．比較有辦法者，乃在方程式中含有齊次函數及對稱函數之時，其方法此處不必具論．但

(註) Beman 教授在 Teacher's course in Algebra 上所用之題．

在方程式爲對稱時，有一重要之點，教本中常忽略之，即由對稱所具特性，根必相等也。例如

$$x^2+3xy+y^2-41=0, \qquad x^2+y^2+x+y-32=0.$$

由常法得 x 之四值，爲 $\frac{1}{6}(-19\pm\sqrt{329})$，5，及1。因原式對于 x及y 爲對稱，故不必再用代入或其他法，即知 y 之值，完全與 x 相同。至於 y 之何值與 x 之何值相當，當然尙未定出，但由兩方程式，恒可一望而知。

12. 解答釋義 臧倫倍嘗謂代數乃慷慨的科學，其所施常過於人之所求。敎師每於敎本中見應用問題之解答，旣不能用，又無意義，引爲可怪之事。其實此事並不奇怪，而且不難解釋。吾人恒可於問題中加以限制，使其結果在算學上爲正確，而在事實上爲不可能。例如，一人能於二秒鐘內向窗外看九次，若速度相同，問一秒鐘能看幾次。此答案爲 $4\frac{1}{2}$ 次，在算學上絲毫無誤，但實際上決不能看半次。又如五人分坐兩車，若車中所載人數相等，每車應有若干人？就算學方面言，答案甚易，但實際上每車須載相等人數，遂令此問題爲不可能矣。又如某級學生之人數，爲能適合方程式 $2x^2-33x-140=0$ 之數，則人數應爲若干？就此題之情形攷之，合理者祇爲 20 之一根，其他一根 $-\frac{7}{2}$ 爲無意義。又如父年五十三歲，子年二十八歲，幾年後父年爲子年之二倍？由方程式

$$53+x=2(28+x)$$

得 $x=-3$，於此吾人必須解釋此無意義之答案，如何爲"負三年後"？否則必改題義以避此結果。兩者必居其一而均可行。依負數之觀念"負三年後"可以解釋之爲"三年前"。或改題爲"幾年前父年爲子年之二倍"。當負數之了解不如今日時，代數敎本大都採用後法。

代數對于處置不可能性，有其特性獨具之方法，與其他科學不同。若代數之問題爲不可能，若其方程式爲不可解，代數可選取此解答而推廣其解釋之範圍，不須

疑遲而涉及其他問題也．因代數所用者，僅符號耳．此處選取"－3"之符號以代，自今以後之年數，卽引入負數之義，而推廣代數範圍之一法也．

負數之解釋，及含有文字方程式之問題之答案之討論，均爲有興趣有價值之論題，但教本中已有詳說，此處毋庸具論．

13。結論 本文中所述各節，不難擴充論之．如不盡根及分數指數，每有分章教授者，竊以爲非．他如分數之理論，二項式定理（一般指數）之証明，行列式之用法，除法開方法，零，無窮大，極限值等問題之完備解釋，在教授法中，均有其應占地位、惜本章爲程度所限，未能顧及耳． （完）

下期登載"數學教學實際問題"一文，爲作者高季可先生數十年來教學的心得的結晶．教師閱之，固可資爲借鏡，學生閱之，亦大足爲修學之一助．爰預爲介紹於此，讀者諸君當以先覩爲快也．

世 外 奇 談

（續）

A Square 原著 乙 閣 譯

14. 與一元世界王談二元世界

我想這位皇帝爺未免太夜郎自大了，坐井觀天，太無常識，決意爲他開一線眞理之光，把二元世界的情形告訴他. 於是乎問道：『請問陛下用什麼方法去分別你的子民的形狀和地位呢？在我踏入貴國境界之先，用我的視覺觀察出來你的子民有些是直綫，有些是點，而且有些直綫比較的長些——』說到這裏，他打斷我的話，說道：『你說的是不可能的事，你簡直活見鬼；因爲想要用視覺的能力去分別那是點，那是直綫，誰都知道是事實上所不可能的. 但是這些事實，即可用聽覺分辨，就以我的大小而論吧，用聽覺的方法，便能精確地斷定. 看我吧——我是一條直綫，一元世界內最長的一條，有六寸以上的空間——』

『是六寸以上的長度吧？』我大膽地提醒他.

『傻子，』他說，『空間就是長度. 你又打斷我的話頭，我不再說了』.

我於是乎深深的表示歉意，結果他繼續的說着，但是帶着輕蔑的口氣：『你既然不講道理，你就洗耳恭聽事實罷. 用我的兩種聲音，我能使我的太太們知道我的尺寸，她們此刻離開這兒六千里七十步二尺八寸，一個在北頭，一個在南頭，聽着，我叫她們.』

他喊了，好像鳥叫一般，接着洋洋得意的說道：『此刻我的太太們接受我的第一種聲音，緊跟着第二種聲音也到了. 這兩種聲音一前一後，中間隔着一個時間. 在這個時間內面，聲音可以傳過6.457寸的距離. 於是我的太太們稍爲推算，我的這頭比那頭離着她們遠6.457寸，便知道我的尺寸是6.457寸了. 不過你要明白，她們決不是每聽我一次聲音，便要計算一次的. 在我們結婚以前，她們早算好了，以後一

聽便知是我，不必再算．但是無論同時，要她們算，她們總可以算的．用同樣的方法，我可以聽出來任何男子的長短．』

我說：『假使一個男人把他的一種聲音裝做女人的聲音，或者故意做作，叫人家認爲兩種聲音不是出於一個人的，那便怎樣辦呢？這種弄假的行爲，是不是足以發生重大的不便利？爲制止這種弊端起見，你們有沒有方法命令鄰接的人們彼此互相摸摸？』這顯然是一個極其不通的問題，因爲摸摸是於事無濟的；不過我的意思是要叫國王生氣，結果十二分的成功．

他發抖地喊道！『甚麼！說明白點！』我答道：『摸，就是接觸，彼此挨貼的意思．』國王道：『如果你以爲『摸摸』，就是彼此相接不留隙地的意思，那麼你要知道，這種動作，在我的國度內是絕對禁止的，誰要犯法，便有被處死刑的可能．這個理由明顯得很．婦女們脆弱的身體，那能禁得起接觸，只怕十有九成要香消玉碎，國家法律對於她們當然是要保護的；不過只憑視覺，不能分出男女，所以法律上無論對男對女，一律規定不得任互相接近時，把彼此中間的空隙取消．

『况且聽覺官能，特別發達，所有要用觸覺去辨識的事情，改用聽覺，立時都很容易的辦了，而且結果更爲精細，那麼你所謂爲『摸』的那種不合乎法度，不出於自然，粗暴而笨拙的舉動，試問還有什麼用處？你所提出的那種假冒欺騙的危險，完全是杞人憂天，决沒有的事，因爲聲音是自然的稟賦，不能任意變更的．就令我有通過一切物質的本領，可以穿過我的老百姓們，一個一個的鑽透了幾百千萬之數，這樣用觸覺的方法把每人的大小都辨별出來，試問這種笨繁而且不精確的方法，應該耗費了多少時間和精力！現在我祇要傾聽片時，舉凡一元世界國度內面衆生種種情形，便都瞭如指掌．聽呀！請聽聽！』

這樣說着，他立卽停止發言作傾聽之狀，彷彿神爲之往．這時我也聽見一種吱吱唧唧的聲音，細微得很，好像有千千萬萬的小人國裏的草蟲兒在那裏叫着．

我說道：『是的，你的聽覺確乎用途很大，解决了許多困難．但是老實不客氣，你的生活，實在苦悶得可憐．除了一點之外，什麼都看不見！連直綫都無從想像，簡

直說吧，直綫是什麽，都不知道！又要看，又看不見，我們在二元世界所享受的一切風景，與你們是無綠的！與其看得這樣少，眞不如索性瞎了還痛快些！

『我承認我的聽官不如你，因爲一元世界內的音樂，在你們以爲津津有味的，在我聽起來，祇不過是吱吱喞喞而已．但是至少我要强些，能够看出來直綫和點的不同．這個我可以給你証明．我剛到貴國的時候，看見你正在跳舞，自左至右，再自右至左，在你的左面附近，有七男一女，右面有八男二女．是不是這樣？』

國王說道：『就人數和性別而言，確乎是對的，雖然我不懂『左』『右』二字的意思．但是我不承認你看見這些事實，因爲無論如何，直線是看不見的，如果看見直綫，豈不是看見人的內面嗎？那是决不可能的．大概你聽見人家這樣說過，便夢想看見過．我還要問你，『左』，『右』二字作什麽解．大概就是南北的意思吧？』

我答道：『不是的．在你所謂南北運動之外，另有一種運動，是我所說自右至左的．』

王．如果你願意，請將這種自右至左的動法做給我看看．

我．那辦不到，除非你能離開你的綫纔行．

王．離開我的線？你是否說離開這世界？離開空間？

我．是的．離開你的世界．離開你的空間．因爲你的空間不是眞正的空間．眞正的空間是一個平面；你的空間不過是一條直綫而已．

王．如果你不能親自表現出來這種自右至左的動法，那麽就請你用話解釋給我聽．

我．如果你不能分別那是你的左邊和那是你的右邊，我恐怕沒有法子能使你明白我的意思．不過像這樣簡單的分別，你一定不能不知道．

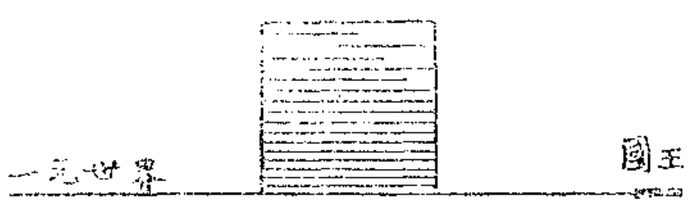
王．我一點都不懂．

我．那可完了！這怎樣辦呢？當你一直向前行動的時候，轉動你的眼睛，看看你的側面，會不會覺得還可以換一個方向前進？換句話說，除了總是在你的兩頭的方向來回行動而外，難道你永不覺得可以對着你側面的方向去活動嗎？

王．永遠不覺得，什麼叫側面？是內面嗎？一個人的內面如何能有方向？有誰人能對着他自已內面的方向去行動？

我．好了．話既說不清，只有拿事實來証明，我將慢慢地離開一元世界，向着我所要指示給你看的方向進行．

於是開始將我的身體移動．當我的身體還有一部分在他的世界內，他還可以看見的時候，國王他繼續的喊着：『我看見你，我看見你；你並沒有動』．最後我完全離開他的世界了，他發出最尖銳的聲音，叫道，『她不見了；她死了．』我答道：『我沒有死，不過離開了一元世界，離開了你所稱爲空間的那一條直線，來到眞的空間內面，一切的一切，都在我的目光中．現在我正看見你的線，你的側面——卽是你自已所說的內面；我又看見在你的南方及北方的男男女女，一共有幾個人，誰在前，誰在後，那個長，這個短，每二人中間的距離，我都可以說出來．』



我的身體離開一元世界的一剎那

這些事情一一的做完了，我洋洋得意地問道，『現在你到底相信了嗎？』隨卽重新走進一元世界，仍舊站在適纔的地位上．

但是那國王答道：『如果你是稍有一點意識的男子漢——其實從你只有一種聲音看起來，我敢決定你必是女人而非男子——你就應該要講道理．你要我相信在我的世界以外，另有直線的世界，在我日常習慣的運動以外，另有一種動的方向．於是我轉請你用話來說明，或者動給我看，到底新的世界在那裏，新的方向是怎樣的．而你呢，却站着不動，只是施行一種魔術，來去無踪，這就算是你的表演；要你說明新的世界，你却把那小孩們都知道的事實來塞責，什麼這方幾個，那方幾個，這個長，那個短的胡說一大頓．眞是愚妄無知，膽大已極！趁早認賠不是，還可原諒，

否則給我滾出去.』

他這種頑梗不靈的態度,桀驁不馴的語句,尤其是把我當作女人,由不得我不大爲憤怒,於是毫不客氣的回罵道,『昏昧無知的小人,你以爲自已了不得,其實你是最不完全,最無能力的東西. 你以爲能看,然而除了一點之外,什麽也看不見. 你自誇能推測世界上有直綫,可是我却能看見直線,並且還能推測到世界上有角度,三角形,正方形,五邊形,六邊形和圓形. 我也用不着多說,說一樁事就够令你丟臉. 你不過是一條綫罷了. 我是大名鼎鼎的正方形,比你不知大了多少倍. 爲了想要啟發你的愚蒙,我纔從二元世界來光臨於你,我雖然比你大了無窮倍,然而在二元世界的貴族當中,還算不了什麽,這樣比起來,你的渺小的程度,眞是不可思議了.』

聽了這一段話,那國王怪叫一聲,直衝上來,好像要把我戳穿一般,同時他的臣民之中,發出挑戰聲浪,越來越高. 後來幾乎可以比上十萬等腰隊伍的吶喊和一千多邊炮隊的砲聲. 那時我好像中了定身呪,既不能說,又不得動. 眼看着大禍臨頭,無法擺脫;聲浪來得更凶,國王也來得更近,一覺醒來,原來是早餐鈴響.

15. 不速之客自三元世界降臨

噩夢過去了,奇怪的事實又來到.

這天是我們紀元1999年的除夕. 雨聲淅瀝,到晚不停. 我和我妻對坐作伴,細想這一年來的經過,和新年的希望. 我的四個兒子和兩個無母的孫子都各自回房休息去了,祇剩下我的妻相伴着守歲.

我那時心中正凝想着從最幼的六邊形孫子口裏偶然說出來的幾句話. 這個孩子頭角崢嶸,異常聰明. 這天他的叔叔們和我,曾給他關於視覺認識法的許多練習,這是每天必有的功課. 我們在地上一面旋轉着,時而快,時而慢,一面問他關於我們的位置的問題. 他的答案甚爲滿意,我有心獎賞他,於是將算術在幾何方面的應用,稍稍的講給他聽.

我拿九個正方形,每邊長度都是一寸,拚起來成爲一個大正方形,每邊之長爲

三寸，是於告訴他，我們雖不能看見正方形的內面，然而要知道正方形內面所含方寸之數，只要把一邊的寸數平方起來就得；我說：『所以3^2或9所表示的，恰係每邊三寸之正方形內所含方寸之數.』

小六邊形想了一會兒，向我說道：『你曾經敎過我求一數的三乘方；我以為3^3在幾何上一定也有相當的意義，是什麼呢？』我答道，『什麼也不是，至少在幾何裏面沒有這種東西，因為幾何祗有兩個元度.』於是開始講給這孩子聽，一個點順着一定方向走過三寸距離，便做成一條三寸長的直線，可以用3表之；此三寸長之直線，向側面移動三寸的距離，便做成每邊三寸的一個正方形，可以用3^2表之.

我的孫子聽了這話，又回到剛纔提出的問題上面去了，他驟然對我說，『點移動三寸，做成三寸長的直線，用3表之；三寸長的直線，和自已平行再移動三寸，做成每邊三寸的正方，用3^2表之，那麼每邊三寸的正方，再和自已平行（但是我不知道是怎樣平行的）移動三寸，一定做成某一種東西（但是我不知道叫什麼），各方都是三寸，這個東西，一定可用3^3去代表.』

因為他打斷了我的話頭，我心中稍覺不快，我說，『睡去吧，少說無意識的話，纔能多記有意識的事.』

我的孫子慚愧的離開了，我坐在妻的身邊，把1999年的事廻想一番，計劃着2000年的一切，但是無論如何，我那孫子的話總總拋不開去. 這時快到夜半，砂漏子內面祗有幾粒砂子了. 從幻想中我站了起來，把砂漏子擺正一下，一壁說道，『這孩子是個傻子.』

猛然間我覺得房內有人進來，立時打了一個寒噤. 只聽得妻說道，『他不是傻子，你這樣侮慢自已的孫子，是有干誡條的.』但是我沒有注意她. 四面一望，並沒什麼；可是我確乎覺得有人進來了，一股冷氣令人戰慄. 我立即站起來. 妻說道，『什麼事？那裏來的風？你找什麼？我看沒有什麼』. 果然沒有什麼，我於是重新坐下，再大聲說道，『我說這孩子是個傻子，3^3在幾何上不能有任何意義』. 立刻來了一種聲音，清晰可聽，答道，『這孩子不是傻子，而且3^3顯然有幾何的意義』.

妻和我都聽見這話，雖然她並不懂得這話的意思，兩人同時跳將起來，向着聲音來的方向走過去．眞把我們嚇壞了，一個人正站在面前！乍一看好像是一個女人，側身向着我們；但是仔細端詳之下，兩頭很快的暗了下去，決不是個女的．我想大概是一個圓形，但是他的大小時時變動，據我的經驗，沒有一個圓形或者正多邊形能夠這樣的．

但是妻卻沒有我的經驗，而且不像我的頭腦冷靜，注意不到這種種特別情形．婦女們總是草率從事、生成不講理的妒嫉心，所以她立卽斷定來者是一個女人，從小門進來的．她喊道，『這人是怎樣進來的嗎？親愛的，你不是允許過我，說這房子沒有做氣窗嗎？』我說：『並沒有氣窗，但是你何以相信來客一定是女人？用我的視覺認識法——』她答道，『什麼視覺認識法，我可沒有功夫來聽你這一套，要我相信，非要摸摸不可．』

我恐怕惹惱了她，便說好，如果一定要摸，預先要介紹一下纔好』．她做出十二分和藹的態度，向來客走了過去，一面說道，『女士，允許我摸摸你，並且請你——』此時她忽然後退幾步，說道，『哦！這不是女的，一個角都沒有，連一點角的痕跡也沒有．難道我得罪了一位元老不成？』

那聲音答道：『說我是圓，也未嘗不可，而且比二元世界內的任何圓形都要完美些，不過說得更準確一點，我是許多圓形合而爲一的．』於是他更加溫柔地說道，『親愛的夫人，我有點事情要和尊夫細談，必須請你廻避；如果你肯賞光給我們幾分鐘的話——』但是我的妻對於這位尊客的請求，沒有聽見，她告訴這圓形，她的休息時間早已過了，對於剛纔的無禮行爲，反覆再三的表示歉意，然後回到她的寢室去．

我抬頭一望，砂漏子中最後一粒砂剛好落下來，於是乎新年便開始了．

問　題　欄

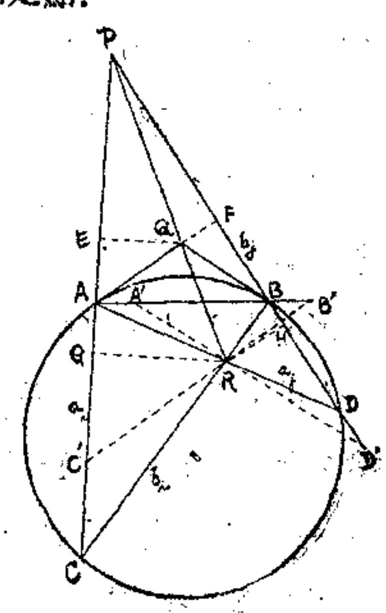
本欄之目的，在徵集關於中等算學範圍內之種種問題，不拘科目，不限難易，以供讀者之研究，藉收觀摩之效．凡本刊讀者，皆可提出問題，及解決本欄內所提出之問題．無論出題或解題，概依收到之先後，次第編號發表，而出題者及解題者之姓名及所在學校或住址，均隨題披露．數人同解一題，解法同時則擇尤發表，解法異時則分段刊登．來稿務祈繕寫清楚，姓名住址尤須明　．至解題時所用圖形，務請用黑色墨水精確作好，連帶寄下．

問　題　已　解　決　者

23．兩線束 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n$；$b_1, b_2, b_3, \cdots\cdots b_n$ 各通過兩定點 A，B，且 a_1, b_1；a_2, b_2；a_3, b_3；$\cdots\cdots$，$a_n b_n$ 交於通過 A，B 兩點之一定圓周上，則聯 $a_i b_j$ 與 $a_j b_i$ 之諸直線，皆通過一定點$(i, j=1, 2, 3\cdots\cdots, n$，但$i \neq j)$．

証（提出人武漢大學李思源）：

如圖，設 $a_i b_i$ 相交於C，$a_j b_j$ 相交於D，C，D在通過 A，B 之一定圓周上．再設 $a_i b_j$ 交於 P，$a_j b_i$ 交於 R．求證 PR 直線通過一個定點．



過 A，B 作圓之切線，設其交點爲爲Q，則Q爲一定點；吾人但證 R P 直線通過 Q 點可矣．

試先就極限情形察之，當 C，D 同時各趨近於 A，B 時，a_i 之極限爲 A Q，b_i 之極限爲 B A，a_j 之極限爲 A B，b_j 之極限爲 B Q，故 P 之極限爲 Q，R 之極限位置在 AB上，本題當然成立．

次設 C 不動而令 D 趨近於B．此際 $b_i a_i$ 仍各爲 AC，BC，a_j 之極限爲 AB，b_j

之極限爲BQ．故 P 之極限在 BQ 上，而 R 之極限爲 B，本題亦復成立．D 不動而 C 趨近於 A 之時亦然．

再就一般情形考之．聯結 PQ．自 Q 向 PA，PB 各作垂線 QE，QF，自 R 向 PA，PB 各作垂線 RG，RH．吾人若能證 RG : RH＝QE : QF，則 R 必在 PQ 上無疑．

過 R 作 AQ 之平行線，交 PC 於 C'，AB 於 B'．又過 R 作 BQ 之平行線，交 PD 於 D'，AB 於 A'．則因 AQB 爲等腰三角形，A'RB' 亦然，而 RA'＝RB'．

又$\angle RCC'=\angle QAB=\angle RB'B$，故 C，C'，B，B' 共圓．

同理$\angle RDD'=\angle RDB$之補角$=\angle QAB$之補角$=\angle RA'B'$之補角$=\angle RA'A$．故 A，A'，D，D' 共圓．

由是 $RA'\cdot RD'=RA\cdot RD=RB\cdot RC=RB'\cdot RC'$，因之$RC'=RD'$，

又 $\triangle AQE\backsim\triangle C'RG$， $\therefore\ RG:RC'=QE:QA$；

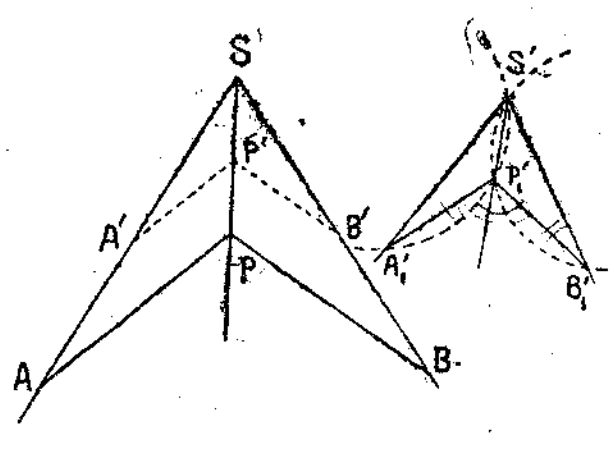
$\triangle BQF\backsim\triangle D'RH$ $\therefore\ RH:RD'=QF:QB$．

將此兩比例式相除，卽得$RG:RH=QE:QF$，而 R 在PQ上(證訖)．

24．求於已知角內一定點 P 作二直線交此角之兩邊於 A，B，使有 PA＝PB，且$\angle APB=$定角．

解(提出人武漢大學李思源)：

(解析) 設此圖已作．命已知角之頂點爲 S，則$\angle ASP$，$\angle BSP$ 及$\angle ASB$皆爲定角．



作$\angle A'_1P'_1B'_1=\angle APB$，令 $P'_1A'_1=P'_1B'_1$．以$P'_1A'_1$ 爲弦作一弧令其所含之角等於$\angle ASP$．再以 $P'_1B'_1$ 爲弦作一弧令其所含之角等於$\angle BSP$．設 S'爲此兩弧之第二交點．如是則圖

形 $S'-A'_1P'_1B'_1$ 與圖形 $S-APB$ 相似，因得作法如下：

（作圖） 如前作 $S'-A'_1P'_1B'_1$ 於 SA, SP, SB上裁取 $SA_1=S'A'_1$, $SP=S'P'_1$, $SB_1=S'B'_1$. 自 P 作 $PA \parallel P_1A_1$, $PB \parallel P_1B_1$, 則 PA, PB 卽為所求作之二直線.

（證） 從略.

25. 有一兩位之數，其數為其兩數字乘積之三倍，而其十位之數比個位之數少2,求此數(限用算術解答).

解（湖北省立師範汪必洞）:

依題意某數必為 3 之倍數,但又必須為兩位數,故其數不能大於 33.

又其十位數比個位數少 2, 故其十位數決不能為 3. 又若十位數為 1 時，則不合題,故其十位數必為 2, 卽某數為 24.

（編者按汪君原解不甚完備,故改正發表如上.）

提出之問題

提出者南京安徽中學章泰筌:

29. 試以式證明算術中之分數除法為何要將除數之分子分母顛倒乘被除數，並解釋之.

提出者武昌希理達女校鮑濟華:

30. 己知橢圓圖形,求其中心及二軸與焦點.

提出者四川萬縣中學黃維朝:

31. 梯形上下底之長為 a, b, 兩腰之長為 c, d, 對角線之長為 l, m, 試證

$$l^2+m^2=c^2+d^2+2ab.$$

國立北京大學本年度入學試驗算學試題

理學院

1, 設一直線交三角形 ABC 之邊 AB 於 D, BC 之延長線於 E, AC 於F.

若 AD=AF，則 BE : CE=BD : CF，試証明之．

（證） 依 Menelaus 定理之逆，若 D，E，F 在同一直線上，則

$$\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BE}{CE}\cdot\frac{CF}{AF}=-1.$$

今 AD=AF， 故 $BE\cdot CF=-DB\cdot CE=BD\cdot CE$．

即 $$BE : CE=BD : CF.$$

2， 三角形三中線之和比周邊小而比周邊之¾大，試證明之．

設 AD，BE，CF 為△ABC之三中線，求證

$$\tfrac{3}{4}(BC+CA+AB)<AD+BE+CF<BC+CA+AB.$$

（証） 先証此不等式之前半，其後半之証已見本刊第六期46頁．

設三中線之交點為 O，則因 $OA+OB>AB$，而 $OA=\tfrac{2}{3}AD$，$OB=\tfrac{2}{3}BE$，故得 $\tfrac{2}{3}(AD+BE)>AB$，即 $\tfrac{3}{2}AB<AD+BE$．

同理 $\tfrac{3}{2}BC<BE+CF$，$\tfrac{3}{2}CA<CF+AD$．將此三不等式相加後，以 2除之，即得所求之證．

3． 設正方體與有法四面體（regular tetrahedron）等積；已知四面體一稜之長為 a，求正方體一稜之長．

（解） 設 x 為正方體一稜之長，依題意

$$x^3=\tfrac{1}{3}\text{四面體之高}\times\text{其底}.$$

但四面體之高 $=\sqrt{a^2-\left(\frac{2}{3}a\sin 60^0\right)^2}=\sqrt{\frac{2}{3}}a$，其底 $=\tfrac{1}{2}a^2\sin 60^0=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

$$\therefore\ x^3=\frac{1}{6\sqrt{2}}a^3,\qquad\text{而}\quad x=a\sqrt[3]{\frac{1}{6\sqrt{2}}}=\cdot 435a$$

4． 若 $\cos B=\frac{\sin A}{2\sin C}$，則 △ABC 為等腰三角形，試證明之．

（証） 因 $\frac{\sin A}{\sin C}=\frac{a}{c}$，代入題設，得 $a=2c\cos B$．

但 $a=c\cos B+b\cos C$， 則必 $c\cos B=b\cos C$． 然 $c\sin B=b\sin C$，故

$\sin B:\cos B=\sin C:\cos C$，即 $\sin B\cos C-\cos B\sin C=\sin(B-C)=0$.

$\therefore$ $B=C$ 而 $\triangle ABC$ 爲等腰三角形.

5. 用 De Moivre 定理，求$(-1)^{1/3}$之三値.

（解） 因 $-1=\cos\pi+i\sin\pi$

$$\therefore\quad (-1)^{1/3}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

或 $$=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

或 $$=\cos\pi+i\sin\pi=-1.$$

6. 用行列式解下列聯立方程式：

$$x+2y+z=1,\qquad x+y+z=1,\qquad 3x+4y+2z=5.$$

若令 $z=0$，則此三方程式代表平面中三直線．求此三直線所作三角形之面積.

（解）

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1&2&1\\1&1&1\\5&4&2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&2&1\\1&1&1\\3&5&2\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}0&1&0\\1&1&1\\3&0&0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}0&1&0\\1&1&1\\1&0&0\end{vmatrix}}=\frac{3}{1}=3,$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&1\\3&5&2\end{vmatrix}}{1}=0,\qquad z=\frac{\begin{vmatrix}1&2&1\\1&1&1\\3&4&5\end{vmatrix}}{1}=\begin{vmatrix}1&2&0\\1&1&0\\3&4&2\end{vmatrix}=-2.$$

若令 $z=0$，則線之方程式爲

$$x+2y=1,\qquad x+y=1,\qquad 3x+4y=5.$$

此三線所成之三角形，其各頂點之坐標，可將上三式兩兩聯立解而得之，其答數爲 $(1,0)$，$(3,-1)$，$(-1,2)$．故此三角形之面積爲

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

7. 已知二圓通過直線 $x-y=0$ 與拋物線 $y^2-6x+5=0$ 之交點，而其半徑之長等於4. 試求其方程式.

（解） 直線與拋物線交點之坐標，爲(1,1)與(5,5). 設圓方程式爲

$$(x-h)^2+(y-k)^2=16.$$

令$(x,y)=(1,1)$ 得 $h^2+k^2-2h-2k-14=0$

令$(x,y)=(5,5)$ 得 $h^2+k^2-10h-10k+34=0$

解之得 $h=1,\ k=5$; 或 $h=5,\ k=1$.

故所求方程式爲 $(x-1)^2+(y-5)^2=16$

及 $(x-5)^2+(y-1)^2=16$

8. 設有本金 100元，年利5%，每年計算複利一次. 問若干年後，可得本利和1050 元？($\log 14=1.14613$, $\log 15=1.17609$, $\log 16=1.20412$.)

（解） 設 x 爲所求之年數，則依複利公式

$$1050=100\times(1.05)^x$$

即 $$10.5=(1.05)^x$$

兩邊取對數， $\log 10.5 = x\log 1.05$，而 $x=\dfrac{\log 10.5}{\log 1.05}$

今 $\log 1.05=\log\dfrac{21}{2}= \log\dfrac{14\times 15}{2\times 10}=\log 14+\log 15-\dfrac{1}{4}\log 16-\log 10$

$$=1.14613+1.17609-0.30103-1=1.02119.$$

$\therefore\ \log 1.05=0.02119$，而 $x=48$ 年强.

9. 用移轉坐標方法，求下列圓錐曲線

$$5x^2-6xy+5y^2-4x-4y-4=0$$

之標準式(normal form). 畫此圓錐曲線，並表明新舊坐標系.

（解） 因 $\tan 2\theta = B/(C-A)=\infty$，故 $\theta=45^0$．令 $x=\dfrac{x'-y'}{\sqrt{2}}, y=\dfrac{x'+y'}{\sqrt{2}}$

入化簡之得 $$x'^2+4y'^2-2\sqrt{2}\,x'-2=0.$$

完成平方，得 $$(x'-\sqrt{2})^2+4y'=4.$$

令$X=x'-\sqrt{2}$，$Y=y'$，則所求之標準式為$\dfrac{X^2}{4}+\dfrac{Y^2}{1}=1$.

故原式之圖形為橢圓，中心在(1,1)處，長徑為 4，短徑為 2，而長徑之方向與 x 軸成 45^0之角．（圖從略）

10．今有 A,B 二點，其極坐標為$(1,0^0)$，$(1,180^0)$．任一點 P 與 A,B之距離之積等於 1．求證 P 之軌跡之極方程式為

$$r^2=2\cos 2\theta.$$

（証） 設 P之極坐標為(r,θ)．依題意

$$(r^2+1-2r\cos\theta)(r^2+1-2r\cos\overline{\theta-180^0})=1$$

卽 $$(r^2+1)^2-(2r\cos\theta)^2=1,$$

$$r^4+2r^2-4r^2\cos^2\theta=0.$$

以 r^2 除之而移項， $$r^2=2(2\cos^2\theta-1)=2\cos 2\theta.$$

北平廠甸師大附中算學叢刻社原文書目

簡稱	書名及著者名	定價
	A. 代數	
代角	Bocher–Introduction to Higher Algebra	4.0 元
代亢	Dickson–Elementary Theory of Equations	2.5 元
代氐	Dickson–First Course in the Theory of Equations	2.5 元
代房	Dickson–Modern Algebraic Theories	2.0 元
代心	Mathewson–Elementary Theory of Finite Groups	2.5 元
代尾	Miller–Blichfeldt–Dickson – Finite Groups	4.0 元
代箕	Reid–Theory of Algebraic Numbers	5.0 元
代斗	Turnbull–Theory of Determinants, Matrices and Invariants	3.5 元
	B. 幾何	
幾角	Bell–Coordinate Geometry of Three Dimensions	3.0 元
幾亢	Carslaw–Non Euclidean Geometry and Trigonometry	2.0 元
幾氐	Eisenhart – Differential Geometry	5.0 元
幾房	Graustein – Introduction to Higher Geometry	4.5 元
幾心	Hudson–Ruler and Gompasses	1.6 元
幾尾	Johnson–Modern Geometry	2.5 元
幾箕	Klein (Translated by Beman and Smith)–Famous Problems in Elementary Geometry	0.6 元
	C. 解析	
解角	Dedekind(Translated by Beman)–Continuity and Irrational Numbers	0.2 元
解亢	Fort – Infinite Series	4.0 元
解氐	Goursat(Translated by Hedrick)–Mathematical Analysis, Vol. I	5.0 元
解房	Goursat(Translated by Hedrick and Dunkel)–Mathematical Analysis Vol. II, Part I, Functions of a Complex Variable	3.5 元
解心	Goursat(Translated by Hedrick and Dunkel)–Mathematical Analysis Vol. II, Part II. Differential Equations	4.0 元
解尾	Murray – Differential Equations	2.0 元
解箕	Osgood–Advanced Calculus	5.0 元
解斗	Peirce–A short Table of Integrals	1.6 元
解牛	Pierpont–Theory of Functions of Real Variables. Vol, I	5.0 元
解女	Pierpont–Theory of Functions of Real Variables. Vol. II	6.0 元
解虛	Pierpont–Functions of a Complex Variable	6.0 元
解危	Young–Sets of Points	5.0 元
	D. 雜著	
雜角	Young–Monograph on Modorn Mathematics	3.5 元