初中學生文庫

平面三角法問題解法指導

編者　匡文濤

中華書局編印

民國二十五年六月發行
民國三十年一月四版

初中學生文庫 平面三角法問題解法指導（全一冊）

◎ 實價國幣四角

（郵運匯費另加）

編者 匡文濤

發行者 中華書局有限公司 代表人 路錫三

印刷者 上海澳門路 美商永寧有限公司

總發行處 昆明 中華書局發行所

分發行處 各埠 中華書局

（九九〇四）

平面三角法問題解法指導

目　次

1.　摘要第一……………………………………………………1—3

三角函數之關係……………………………………4—12

問題1—16

2.　摘要第二………………………………………………—13

三角和差之三角函數…………………………14—17

問題17—23

特別角之三角函數……………………………17—27

問題24—40

3.　摘要第三………………………………………………—28

三角方程式之消去法……………………………29

問題41—42

三角反函數…………………………………………29—35

問題43—50

三角函數值之極限……………………………35—39

問題51—60

4. 摘要第四 ……………………………………40—41
三角形之性質及解法……………………42—69
問題61—100

平面三角法問題解法指導

摘要第一

1. 三角函數即 $\sin A$, $\cos A$, $\tan A$, $\cot A$, $\sec A$, $\operatorname{cosec} A$, $\operatorname{vers} A$, $\operatorname{covers} A$.

2. 三角函數相互之關係.

(1) $\sin A = 1/\operatorname{cosec} A$, $\cos A = 1/\sec A$, $\tan A = 1/\cot A$.

(2) $\tan A = \sin A/\cos A$, $\cot A = \cos A/\sin A$.

(3) $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$, $\tan^2 A + 1 = \sec^2 A$,

$\cot^2 A + 1 = \operatorname{cosec}^2 A$.

3. 負角之三角函數之公式.

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$,

$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$, $\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$,

$\sec(-\alpha) = \sec\alpha$, $\operatorname{cosec}(-\alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha$.

4. 餘角之公式.

$\sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$, $\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$,

$\tan\alpha = \cot(90^\circ - \alpha)$, $\cot\alpha = \tan(90^\circ - \alpha)$,

$\sec\alpha = \operatorname{cosec}(90^\circ - \alpha)$, $\operatorname{cosec}\alpha = \sec(90^\circ - \alpha)$.

5. 負角之餘角.

$-\sin\alpha = \cos(90^\circ + \alpha)$, $\cos\alpha = \sin(90^\circ + \alpha)$,

$-\tan\alpha=\cot(90^\circ+\alpha)$, $-\cot\alpha=\tan(90^\circ+\alpha)$,

$\sec\alpha=\operatorname{cosec}(90^\circ+\alpha)$, $-\operatorname{cosec}\alpha=\sec(90^\circ+\alpha)$.

6. 補角之公式.

$\sin\alpha=\sin(180^\circ-\alpha)$, $-\cos\alpha=\cos(180^\circ-\alpha)$,

$-\tan\alpha=\tan(180^\circ-\alpha)$, $-\cot\alpha=\cot(180^\circ-\alpha)$,

$-\sec\alpha=\sec(180^\circ-\alpha)$, $\operatorname{cosec}\alpha=\operatorname{cosec}(180^\circ-\alpha)$.

7. 負角之補角.

$-\sin\alpha=\sin(180^\circ+\alpha)$, $-\cos\alpha=\cos(180^\circ+\alpha)$,

$\tan\alpha=\tan(180^\circ+\alpha)$, $\cot\alpha=\cot(180^\circ+\alpha)$,

$-\sec\alpha=\sec(180^\circ+\alpha)$, $-\operatorname{cosec}\alpha=\operatorname{cosec}(180^\circ+\alpha)$.

8. 弧度法之公式.

$\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\cos\alpha$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\sin\alpha$,

$\tan\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\cot\alpha$, $\cot\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\tan\alpha$,

$\sec\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\operatorname{cosec}\alpha$, $\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\sec\alpha$.

9. 周期.

$\sin\{n\pi+(-1)^n\alpha\}=\sin\alpha$, $\cos\{2n\pi\pm\alpha\}=\cos\alpha$,

$\tan(n\pi+\alpha)=\tan\alpha$, $\cot(n\pi+\alpha)=\cot\alpha$,

$\sec\{2n\pi\pm\alpha\}=\sec\alpha$,

$\operatorname{cosec}\{n\pi+(-1)^n\alpha\}=\operatorname{cosec}\alpha$.

10. 和及差角之三角函數之公式.

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta,$

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta,$

$\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta},$

$\cot(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\cot\alpha\cot\beta\mp1}{\cot\beta\pm\cot\alpha}.$

11. 和差及積之正餘弦.

$\sin\theta+\sin\phi=2\sin\dfrac{\theta+\phi}{2}\cos\dfrac{\theta-\phi}{2},$

$\cos\theta+\cos\phi=2\cos\dfrac{\theta+\phi}{2}\cos\dfrac{\theta-\phi}{2},$

$\sin\theta-\sin\phi=2\sin\dfrac{\theta-\phi}{2}\cos\dfrac{\theta+\phi}{2},$

$\cos\theta-\cos\phi=-2\sin\dfrac{\theta+\phi}{2}\sin\dfrac{\theta-\phi}{2}.$

12. 二倍角之三角函數之公式.

$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,$

$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha,$

$\tan2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}.$

13. 三倍角之三角函數之公式.

$\sin3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha,$

$\cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha,$

$\tan3\alpha=\dfrac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}.$

三角函數之關係

1. 設 $vers\alpha=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$，則

$sin\alpha+cos\alpha+tan\alpha+cot\alpha+sec\alpha+cosec\alpha$ 之值如何？

【解】 $\because cos\alpha=1-vers\alpha=1-\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$,

$$sec\alpha=\frac{1}{cos\alpha}=\sqrt{2},$$

$$sin\alpha=\sqrt{1-cos^2\alpha}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$cosec\alpha=\frac{1}{sin\alpha}=\sqrt{2},$$

$$tan\alpha=\frac{sin\alpha}{cos\alpha}=1=cot\alpha.$$

$\therefore$ 原式 $=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+1+1+\sqrt{2}+\sqrt{2}=3\sqrt{2}+2.$

2. 試以 $vers\alpha$ 之項，表示其他三角函數.

【解】 $cos\alpha=1-vers\alpha,$

$$sin\alpha=\sqrt{1-(1-vers\alpha)^2}$$

$$=\sqrt{2vers\alpha-vers^2\alpha},$$

$$tan\alpha=\frac{\sqrt{2vers\alpha-vers^2\alpha}}{1-vers\alpha},$$

$$cot\alpha=\frac{1-vers\alpha}{\sqrt{2vers\alpha-vers^2\alpha}},$$

$$sec\alpha=\frac{1}{1-vers\alpha},$$

$$cosec\alpha=\frac{1}{\sqrt{2vers\alpha-vers^2\alpha}}.$$

3. 設 $\frac{\cos^3\theta}{\cos\alpha}+\frac{\sin^3\theta}{\sin\alpha}=1$, 則

$$\left(\frac{\cos\alpha}{\cos\theta}-\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}\right)\left(\frac{\cos\alpha}{\cos\theta}+\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}+1\right)=0,$$

試證之.

【證】 第一式之 1, 順次以

$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha$, 及 $\cos^2\theta+\sin^2\theta$ 代之,

得 $\frac{\cos^3\theta-\cos^3\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sin^3\alpha-\sin^3\theta}{\sin\alpha}$

及 $\frac{\cos^2\theta(\cos\theta-\cos\alpha)}{\cos\alpha}=\frac{\sin^2\theta(\sin\alpha-\sin\theta)}{\sin\alpha}$.

由除法得

$$\frac{\cos^2\theta+\cos\theta\cos\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\theta}=\frac{\sin^2\alpha+\sin\alpha\sin\theta+\sin^2\theta}{\sin^2\theta},$$

$$\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\theta}-\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\theta}+\frac{\cos\alpha}{\cos\theta}-\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}=0,$$

$$\therefore\left(\frac{\cos\alpha}{\cos\theta}-\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}\right)\left(\frac{\cos\alpha}{\cos\theta}+\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}+1\right)=0.$$

4. 試求下列各角在何象限內:

$370°$, $420°$, $\frac{7}{3}\pi$, $-40°$, $-100°$, $-365°$, $-750°$, $-\frac{5}{2}\pi$.

$\because$ $370°=360°+10°$, $\therefore$ 在第一象限內.

∵　$420°=360°+60°$,　　∴　在第一象限內.

∵　$\frac{7}{3}\pi=2\pi+\frac{1}{3}\pi$,　　∴　在第一象限內.

而　$-40°$　$-365°$　$-750°$ 均在第四象限內.

$-100°$ 則在第三象限內,

$-\frac{5}{2}\pi$ 在第三第四兩象限之間.

5.　$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta.$

【證】　$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$

$=(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)$

$=\sin^2\alpha\cos^2\beta-\cos^2\alpha\sin^2\beta$

$=\sin^2\alpha(1-\sin^2\beta)-(1-\sin^2\alpha)\sin^2\beta$

$=\sin^2\alpha-\sin^2\beta.$

6.　$\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta.$

【證】　$\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$

$=(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$

$=\cos^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta$

$=\cos^2\alpha(1-\sin^2\beta)-(1-\cos^2\alpha)\sin^2\beta$

$=\cos^2\alpha-\sin^2\beta.$

7.　$\sin^2(\alpha+\beta)-\sin^2(\alpha-\beta)=\sin2\alpha\sin2\beta.$

【證】　$\sin^2(\alpha+\beta)-\sin^2(\alpha-\beta)$

$=(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)^2-(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)^2$

$=4\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta$

$=\sin2\alpha\sin2\beta.$

8. $\cos^2(\alpha+\beta)-\sin^2(\alpha-\beta)=\cos 2\alpha\cos 2\beta.$

【證】 $\cos^2(\alpha+\beta)-\sin^2(\alpha-\beta)$

$$=\frac{1+\cos 2(\alpha+\beta)}{2}-\frac{1-\cos 2(\alpha-\beta)}{2}$$

$$=\frac{\cos 2(\alpha+\beta)+\cos 2(\alpha-\beta)}{2}$$

$$=\frac{1}{2}(\cos 2\alpha\cos 2\beta-\sin 2\alpha\sin 2\beta+\cos 2\alpha\cos 2\beta$$

$$+\sin 2\alpha\sin 2\beta)$$

$$=\cos 2\alpha\cos 2\beta.$$

9. $\cos 5\alpha=16\cos^5\alpha-20\cos^3\alpha+5\cos\alpha.$

【證】 $\cos 5\alpha=\cos(4\alpha+\alpha)$

$$=\cos 4\alpha\cos\alpha-\sin 4\alpha\sin\alpha$$

$$=(2\cos^2 2\alpha-1)\cos\alpha-2\sin 2\alpha\cos 2\alpha\sin\alpha$$

$$=\{2(2\cos^2\alpha-1)^2-1\}\cos\alpha$$

$$-4\sin^2\alpha\cos\alpha(2\cos^2\alpha-1)$$

$$=(8\cos^4\alpha-8\cos^2\alpha+1)\cos\alpha$$

$$-4(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha(2\cos^2\alpha-1)$$

$$=16\cos^5\alpha-20\cos^3\alpha+5\cos\alpha.$$

10. $\sin 5\alpha+\cos 5\alpha=(\sin\alpha+\cos\alpha)(2\cos 4\alpha+2\sin 2\alpha-1).$

【證】 $\sin 5\alpha+\cos 5\alpha=\cos(4\alpha+\alpha)+\sin(4\alpha+\alpha)$

$$=\cos 4\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)-\sin 4\alpha(\sin\alpha-\cos\alpha)$$

$$=\cos4\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)$$
$$-2\sin2\alpha(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)(\sin\alpha-\cos\alpha)$$
$$=(\sin\alpha+\cos\alpha)\{\cos4\alpha+2\sin2\alpha(\sin\alpha-\cos\alpha)^2\}$$
$$=(\sin\alpha+\cos\alpha)\{\cos4\alpha+2\sin2\alpha(1-\sin2\alpha)\}$$
$$=(\sin\alpha+\cos\alpha)(2\cos4\alpha+2\sin2\alpha-1).$$

11. $8(\cos^8\alpha-\sin^8\alpha)=\cos6\alpha+7\cos2\alpha.$

【證】 $8(\cos^8\alpha-\sin^8\alpha)=8\{(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)^2$
$$-2\cos^2\alpha\sin^2\alpha\}\times(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$$
$$=8(1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha)\cos2\alpha$$
$$=2(4-2\sin^2 2\alpha)\cos2\alpha$$
$$=2(3+\cos4\alpha)\cos2\alpha$$
$$=6\cos2\alpha+2\cos4\alpha\cos2\alpha$$
$$=6\cos2\alpha+\cos6\alpha+\cos2\alpha$$
$$=\cos6\alpha+7\cos2\alpha$$

12. $64(\cos^8\alpha+\sin^8\alpha)=\cos8\alpha+28\cos4\alpha+35.$

【證】 $64(\cos^8\alpha+\sin^8\alpha)$
$$=64\{(\cos^4\alpha+\sin^4\alpha)^2-2\sin^4\alpha\cos^4\alpha\}$$
$$=64\{(1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha)^2-2\sin^4\alpha\cos^4\alpha\}$$
$$=8\{8(1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha)^2-\sin^4 2\alpha\}$$
$$=8(8-8\sin^2 2\alpha+\sin^4 2\alpha)$$
$$=8\{8-4(1-\cos4\alpha)+\sin^4 2\alpha\}$$
$$=32+32\cos4\alpha+2(1-\cos4\alpha)^2$$

$=34+28\cos4\alpha+2\cos^2 4\alpha$

$=35+28\cos4\alpha+(2\cos^2 4\alpha-1)$

$=35+28\cos4\alpha+\cos8\alpha.$

13. $\tan\alpha+2\tan2\alpha+4\tan4\alpha+8\cot8\alpha=\cot\alpha.$

【證】 原式之左端$=\tan\alpha+2\tan2\alpha+4\tan4\alpha+\dfrac{8}{\tan8\alpha}$

$=\tan\alpha+2\tan2\alpha+4\tan4\alpha+\dfrac{8(1-\tan^2 4\alpha)}{2\tan4\alpha}$

$=\tan\alpha+2\tan2\alpha+\dfrac{4}{\tan4\alpha}$

$=\tan\alpha+2\tan2\alpha+\dfrac{4(1-\tan^2 2\alpha)}{2\tan2\alpha}$

$=\tan\alpha+\dfrac{2}{\tan2\alpha}$

$=\tan\alpha+\dfrac{2(1-\tan^2\alpha)}{2\tan\alpha}$

$=\dfrac{1}{\tan\alpha}=\cot\alpha.$

14. $\dfrac{\tan\alpha}{\tan(\alpha-\beta)\tan(\alpha-\gamma)}$

$+\dfrac{\tan\beta}{\tan(\beta-\gamma)\tan(\beta-\alpha)}$

$+\dfrac{\tan\gamma}{\tan(\gamma-\alpha)\tan(\gamma-\beta)}=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma.$

【證】 $\because\dfrac{\tan\alpha}{\tan(\alpha-\beta)\tan(\alpha-\gamma)}$

$=\dfrac{\tan\alpha(1+\tan\alpha\tan\beta)(1+\tan\alpha\tan\gamma)}{(\tan\alpha-\tan\beta)(\tan\alpha-\tan\gamma)}$

$$=\frac{\tan\alpha(\tan\beta-\tan\gamma)+\tan^2\alpha(\tan^2\beta-\tan^2\gamma)+\tan^3\alpha\tan\beta\tan\gamma(\tan\beta-\tan\gamma)}{-(\tan\alpha-\tan\beta)(\tan\beta-\tan\gamma)(\tan\gamma-\tan\alpha)}$$

∴原式 $=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma\{\tan^2\alpha(\tan\beta-\tan\gamma)$

$+\tan^2\beta(\tan\gamma-\tan\alpha)+\tan^2\gamma(\tan\alpha-\tan\beta)\}$

$\div\{-(\tan\alpha-\tan\beta)(\tan\beta-\tan\gamma)(\tan\gamma-\tan\alpha)\}$

$=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma.$

15. $\sin\alpha=p\sin\beta,\cos\alpha=q\cos\beta$ 及 $\sin\alpha+\cos\alpha=r(\sin\beta+\cos\beta)$ 則

$(p-r)^2(1-q^2)+(q-r)^2(1-p^2)=0.$

【證】 $\because p^2\sin^2\beta+q^2\cos^2\beta=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,$

即 $p^2\tan^2\beta+q^2=1+\tan^2\beta,$

$\therefore \tan^2\beta=\dfrac{-(1-q^2)}{1-p^2}.$

又 $p\sin\beta+q\cos\beta=r(\sin\beta+\cos\beta),$

$\therefore \tan\beta = \dfrac{-(q-r)}{p-r}$,

$\therefore \dfrac{-(1-q^2)}{1-p^2} = \dfrac{(q-r)^2}{(p-r)^2}$,

$\therefore (p-r)^2(1-q^2)+(q-r)^2(1-p^2)=0$.

16. $\cos\theta+\cos\phi+\cos\psi+\cos\theta\cos\phi\cos\psi=0$, 則

$\operatorname{cosec}^2\theta+\operatorname{cosec}^2\phi+\operatorname{cosec}^2\psi\pm2\operatorname{cosec}\theta\operatorname{cosec}\phi\operatorname{cosec}\psi=1$.

【證】 令 $\cos\theta=x,\ \cos\phi=y,\ \cos\psi=z,$

$\sin\theta=m,\ \sin\phi=n,\ \sin\psi=p.$

則 $x+y+z=-xyz$,

$x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=x^2y^2z^2$,

卽 $(1-m^2)+(1-n^2)+(1-p^2)+2(xy+yz+zx)$

$=(1-m^2)(1-n^2)(1-p^2)$,

卽 $2(xy+yz+zx)=m^2n^2+n^2p^2$

$+p^2m^2-m^2n^2p^2-2$.

$\therefore 4\{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xyz(x+y+z)\}$

$=(m^2n^2+n^2p^2+p^2m^2-m^2n^2p^2-2)^2$,

卽 $4\{(1-m^2)(1-n^2)+(1-n^2)(1-p^2)$

$+(1-p^2)(1-m^2)-2x^2y^2z^2\}$

$=(m^2n^2+n^2p^2+p^2m^2-m^2n^2p^2-2)^2$,

卽 $4\{3-2(m^2+n^2+p^2)+m^2n^2+n^2p^2$

$+p^2m^2-2(1-m^2)(1-n^2)(1-p^2)\}$

$=(m^2n^2+n^2p^2+p^2m^2-m^2n^2p^2-2)^2$.

$\therefore m^2n^2+n^2p^2+p^2m^2-m^2n^2p^2=\pm 2mnp.$

由是$\frac{1}{p^2}+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}\pm\frac{2}{mnp}=1.$

$\therefore cosec^2\theta+cosec^2\phi+cosec^2\psi\pm 2cosec\theta\, cosec\phi\, cosec\psi=1.$

摘要第二

1. 三角和之三角函數之公式.

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\cos\gamma\cos\alpha$$
$$+\sin\gamma\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma,$$

$$\cos(\alpha+\beta+\gamma)=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$$
$$-\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha-\sin\gamma\sin\alpha\cos\beta,$$

$$\tan(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma-\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma}{1-\tan\alpha\tan\beta-\tan\beta\tan\gamma-\tan\gamma\tan\alpha}.$$

2. 特別角之三角函數之值.

(*a*) 45°之三角函數之值.

$$\sin45^\circ=\cos45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \tan45^\circ=\cot45^\circ=1,$$

$$\sec45^\circ=\operatorname{cosec}45^\circ=\sqrt{2}.$$

從此可求得135°, 225°及315°等之三角函數之值.

(*b*) 30°之三角函數之值.

$$\sin30^\circ=\frac{1}{2},\ \cos30^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{3},\ \tan30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

從此可求得60°, 120°, 150°, 210°, 240°, 300°等之三角函數之值.

三角和差之三角函數

17. $\sin(\beta+\gamma-\alpha)+\sin(\gamma+\alpha-\beta)$
$+\sin(\alpha+\beta-\gamma)-\sin(\alpha+\beta+\gamma)=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$

【解】 $\{\sin(\beta+\gamma-\alpha)+\sin(\gamma+\alpha-\beta)\}$
$-\{\sin(\alpha+\beta+\gamma)-\sin(\alpha+\beta-\gamma)\}$
$=2\sin\gamma\cos(\beta-\alpha)-2\cos(\alpha+\beta)\sin\gamma$
$=2\sin\gamma\{\cos(\beta-\alpha)-\cos(\alpha+\beta)\}$
$=4\sin\gamma\sin\beta\sin\alpha.$

18. $\sin(\alpha+\beta-2\gamma)\cos\beta-\sin(\alpha+\gamma-2\beta)\cos\gamma$
$=\sin(\beta-\gamma)\{\cos(\beta+\gamma-\alpha)+\cos(\gamma+\alpha-\beta)$
$+\cos(\alpha+\beta-\gamma)\}.$

【解】 原式左邊$=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+2\beta-2\gamma)+\sin(\alpha-2\gamma)\}$
$-\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+2\gamma-2\beta)+\sin(\alpha-2\beta)\}$
$=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+2\beta-2\gamma)-\sin(\alpha+2\gamma-2\beta)\}$
$+\frac{1}{2}\{\sin(\alpha-2\gamma)-\sin(\alpha-2\beta)\}$
$=\cos\alpha\sin(2\beta-2\gamma)+\cos(\alpha-\beta-\gamma)\sin(\beta-\gamma)$
$=\sin(\beta-\gamma)\{2\cos\alpha\cos(\beta-\gamma)+\cos(\alpha-\beta-\gamma)\}$
$=\sin(\beta-\gamma)\{\cos(\beta+\gamma-\alpha)+\cos(\gamma+\alpha-\beta)$
$+\cos(\alpha+\beta-\gamma)\}.$

19. $\cos(\alpha+\beta+\gamma)\cos(\alpha+\beta-\gamma)\cos(\beta+\gamma-\alpha)$

$\cos(\gamma+\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin(\alpha+\beta-\gamma)$

$\sin(\beta+\gamma-\alpha)\sin(\gamma+\alpha-\beta)=\cos2\alpha\cos2\beta\cos2\gamma.$

【解】 原式之左邊 $=\frac{1}{2}\{\cos2\gamma+\cos(2\alpha+2\beta)\}$

$\times\frac{1}{2}\{\cos2\gamma+\cos(2\alpha-2\beta)\}$

$-\frac{1}{2}\{\cos2\gamma-\cos(2\alpha+2\beta)\}$

$\times\frac{1}{2}\{\cos2\gamma-\cos(2\alpha-2\beta)\}$

$=\frac{1}{4}\{2\cos2\gamma\cos(2\alpha+2\beta)+2\cos2\gamma\cos(2\alpha-2\beta)\}$

$=\frac{1}{2}\cos2\gamma\{\cos(2\alpha+2\beta)+\cos(2\alpha-2\beta)\}$

$=\cos2\gamma\cos2\beta\cos2\alpha.$

20. $(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)\{\cos2\alpha+\cos2\beta+\cos2\gamma$

$-\cos(\beta+\gamma)-\cos(\gamma+\alpha)-\cos(\alpha+\beta)\}$

$-(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)\times\{\sin2\alpha+\sin2\beta+\sin2\gamma$

$-\sin(\beta+\gamma)-\sin(\gamma+\alpha)-\sin(\alpha+\beta)\}$

$=\cos3\alpha+\cos3\beta+\cos3\gamma-3\cos(\alpha+\beta+\gamma).$

【解】 令 $\cos\alpha=a,\ \cos\beta=b,\ \cos\gamma=c,\ \sin\alpha=x,$

$\sin\beta=y,\ \sin\gamma=z,$ 則 $a^2+x^2=b^2+y^2=c^2+z^2=1$

原式 $=(a+b+c)\{a^2-x^2+b^2-y^2+c^2-z^2$

$-(bc-yz)-(ca-zx)-(ab-xy)\}$

$-(x+y+z)\{2ax+2by+2cz-(yc+bz)$

$-(za+cx)-(xb+ay)\}$

$=(a+b+c)\{(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$

$-(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)\}$

$-(x+y+z)\{a(2x-y-z)+b(2y-z-x)$

$+c(2z-x-y)\}$

$=a^3+b^3+c^3-3abc-3a(x^2-yz)-3b(y^2-zx)$

$-3c(z^2-xy)$

$=a(a^2-3x^2)+b(b^2-3y^2)+c(c^2-3z^2)$

$-3(abc-ayz-bzx-cxy)$

$=(4a^3-3a)+(4b^3-3b)+(4c^3-3c)$

$-3(abc-ayz-bzx-cxy)$

$=\cos3\alpha+\cos3\beta+\cos3\gamma-3\cos(\alpha+\beta+\gamma)$

但 $a(a^2-3x^2)=a\{a^2-3(1-a^2)\}=4a^3-3a.$

21. $\sin6\alpha+\sin6\beta+\sin6\gamma=4\sin3\alpha\sin3\beta\sin3\gamma.$

但 $\alpha+\beta+\gamma=180°$

【解】 原式左端 $=2\sin(3\alpha+3\beta)\cos(3\alpha-3\beta)+\sin6\gamma$

$=2\sin(3\alpha+3\beta)\cos(3\alpha-3\beta)+2\sin3\gamma\cos3\gamma$

$=2\sin3\gamma\{\cos(3\alpha-3\beta)-\cos(3\alpha+3\beta)\}$

$=4\sin3\gamma\sin3\alpha\sin3\beta.$

22. $\sin^2\alpha\sin2\gamma+\sin^2\gamma\sin2\alpha$

$=\sin^2\beta\sin2\alpha+\sin^2\alpha\sin2\beta.$ 但 $\alpha+\beta+\gamma=18°$

【解】 $\sin^2\alpha\sin2\gamma+\sin^2\gamma\sin2a$

$=2\sin\alpha\sin\gamma(\sin\alpha\cos\gamma+\sin\gamma\cos\alpha)$

$=2\sin\alpha\sin\gamma\sin(\gamma+\alpha)$

$=2\sin\alpha\sin\gamma\sin\beta$

$=2\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)$

$=2\sin\alpha\sin\beta(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)$

$=\sin^2\alpha\sin2\beta+\sin^2\beta\sin2\alpha.$

23. $4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

$=\cos2(s-\alpha)+\cos2(s-\beta)+\cos2(s-\gamma)+\cos2s.$

但 $s=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)$

【解】 原式之左邊 $=4\sin(s-\alpha)\sin(s-\beta)\cos\gamma$

$=2\cos\gamma[\cos(\beta-\alpha)-\cos\gamma]$

$=\cos2(s-\alpha)+\cos2(s-\beta)-(\cos2\gamma+\cos0^\circ)$

$=\cos2(s-\alpha)+\cos2(s-\beta)+\cos(2s-2\gamma)+\cos2s$

$=\cos2(s-\alpha)+\cos2(s-\beta)+\cos2(s-\gamma)+\cos2s.$

特別角之三角函數

24. $\sin15^\circ=\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2}),$

$\cos15^\circ=\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2}),\ \tan15^\circ=2-\sqrt{3}.$

試證之.

【證】 $\because\ \cos30^\circ=1-2\sin^2 15^\circ$

$\therefore\ \sin15^\circ=\sqrt{\frac{1-\cos30^\circ}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}\sqrt{3}}{2}}$

$$=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

而 $\cos 15^\circ=\sqrt{\frac{1+\cos 30^\circ}{2}}$,

$$\tan 15^\circ=\frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}=\sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{1+\cos 30^\circ}}.$$

從此卽得其證.

✓**25.** $\sin^3\alpha+\sin^3(120^\circ+\alpha)+\sin^3(240^\circ+\alpha)$
$=-\frac{3}{4}\sin 3\alpha.$

【證】 原式左端 $=\sin^3\alpha+(\sin 120^\circ\cos\alpha+\cos 120^\circ\sin\alpha)^3$

$$+(\sin 240^\circ\cos\alpha+\cos 240^\circ\sin\alpha)^3$$

$$=\sin^3\alpha+(\frac{1}{2}\sqrt{3}\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha)^3$$

$$+(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha)^3$$

$$=\sin^3\alpha+\frac{1}{8}(-18\cos^2\alpha\sin\alpha-2\sin^3\alpha)$$

$$=\frac{3}{4}(4\sin^3\alpha-3\sin\alpha)$$

$$=-\frac{3}{4}\sin 3\alpha.$$

26. $\cos 20^\circ+\cos 100^\circ+\cos 140^\circ=0.$

【證】 原式左端 $=\cos 20^\circ+\cos(180^\circ-80^\circ)$

$+\cos(180^\circ-40^\circ)$

$=\cos 20^\circ-\cos 80^\circ-\cos 40^\circ$

$=2\sin 50^\circ\sin 30^\circ-\sin(90^\circ-40^\circ)$

$=\sin 50^\circ-\sin 50^\circ$

$=0.$

✓**27.** $\dfrac{1+\cot 60^\circ}{1-\cot 60^\circ}=\left(\dfrac{1+\cos 30^\circ}{1-\cos 30^\circ}\right)^{\frac{1}{2}}$

【證】 原式左端 $=\dfrac{\sin 60^\circ+\cos 60^\circ}{\sin 60^\circ-\cos 60^\circ}$

$$=\frac{\cos 30^\circ+\frac{1}{2}}{\cos 30^\circ-\frac{1}{2}}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{\cos^2 30^\circ+\cos 30^\circ+\frac{1}{4}}{\cos^2 30^\circ-\cos 30^\circ+\frac{1}{4}}\right)}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{\frac{3}{4}+\cos 30^\circ+\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}-\cos 30^\circ+\frac{1}{4}}\right)}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{1+\cos 30^\circ}{1-\cos 30^\circ}\right)}.$$

✓**28.** $\cos\dfrac{2\pi}{7}+\cos\dfrac{4\pi}{7}+\cos\dfrac{6\pi}{7}=-\dfrac{1}{2}.$

【證】 原式左邊$=2\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}$

$$=\cos\frac{4\pi}{7}\left(2\cos\frac{2\pi}{7}+1\right)$$

$$=\cos\frac{4\pi}{7}\left(3-4\sin^2\frac{\pi}{7}\right)$$

$$=\frac{\cos\frac{4\pi}{7}\left(3\sin\frac{\pi}{7}-4\sin^3\frac{\pi}{7}\right)}{\sin\frac{\pi}{7}}$$

$$=\frac{\cos\frac{4\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}$$

$$=\frac{\sin\pi-\sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}$$

$$=-\frac{1}{2}.$$

29. $\cos\frac{\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{9\pi}{13}$

及$\cos\frac{5\pi}{13}+\cos\frac{7\pi}{13}+\cos\frac{11\pi}{13}$之和為$\frac{1}{2}$,試證之.

【證】 令第一式$=x$,第二式$=y$,則

$$x+y=\cos\frac{\pi}{13}+\cos\frac{11\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{9\pi}{13}$$

$$+\cos\frac{5\pi}{13}+\cos\frac{7\pi}{13}$$

$$=2\cos\frac{6\pi}{13}\left(\cos\frac{5\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{\pi}{13}\right)$$

$$=2\cos\frac{6\pi}{13}\left\{\cos\frac{\pi}{13}\left(2\cos\frac{4\pi}{13}+1\right)\right\}$$

$$=\frac{2\cos\frac{6\pi}{13}\cos\frac{\pi}{13}\left(3\sin\frac{2\pi}{13}-4\sin^3\frac{2\pi}{13}\right)}{\sin\frac{2\pi}{13}}$$

$$=\frac{2\cos\frac{6\pi}{13}\cos\frac{\pi}{13}\sin\frac{6\pi}{13}}{\sin\frac{2\pi}{13}}=\frac{\sin\frac{12\pi}{13}\cos\frac{\pi}{13}}{\sin\frac{2\pi}{13}}$$

$$=\frac{\sin\left(\pi-\frac{\pi}{13}\right)\cos\frac{\pi}{13}}{\sin\frac{2\pi}{13}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{13}}{\sin\frac{2\pi}{13}}=\frac{1}{2}.$$

30. $\alpha+\beta+\gamma=90°$ 則 $\dfrac{\cos\alpha+\sin\gamma-\sin\beta}{\cos\beta+\sin\gamma-\sin\alpha}=\dfrac{1+\tan\frac{1}{2}\alpha}{1+\tan\frac{1}{2}\beta}$.

【證】 原式左端 $=\dfrac{\cos\alpha-\sin\beta+\cos(\alpha+\beta)}{\cos\beta-\sin\alpha+\cos(\alpha+\beta)}=\dfrac{\cos\alpha(1+\cos\beta)-\sin\beta(1+\sin\alpha)}{\cos\beta(1+\cos\alpha)-\sin\alpha(1+\sin\beta)}$

$$=\frac{2\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)\cos^2\frac{\beta}{2}-2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}{2\left(\cos^2\frac{\beta}{2}-\sin^2\frac{\beta}{2}\right)\cos^2\frac{\alpha}{2}-2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)\cos\frac{\beta}{2}\left\{\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)\right\}}{\left(\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2}\left\{\left(\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\beta}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\right)\right\}}$$

$$=\frac{1+\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan\frac{\beta}{2}}.$$

31. $2\sin\alpha=+\sqrt{(1+\sin 2\alpha)}-\sqrt{(1-\sin 2\alpha)}$，則 α 在何者之間?

【解】 $\because \sin\alpha+\cos\alpha=+\sqrt{(1+\sin 2\alpha)}$,

$\sin\alpha-\cos\alpha=-\sqrt{(1-\sin 2\alpha)}$,

$\therefore \sin\alpha<\cos\alpha$,

而 $\cos\alpha$ 爲正.

故 α 在 $-\frac{\pi}{4}$ 及 $\frac{\pi}{4}$ 之間,

即一般爲 $2n\pi+\pi\div 4$ 及 $2n\pi-\pi\div 4$ 之間.

32. $2\cos\alpha=-\sqrt{(1+\sin 2\alpha)}-\sqrt{(1-\sin 2\alpha)}$,

則 α 在何者之間?

【解】 $\because \sin\alpha+\cos\alpha=-\sqrt{(1+\sin 2\alpha)}$,

$\sin\alpha-\cos\alpha=+\sqrt{(1-\sin 2\alpha)}$,

故 $\cos\alpha>\sin\alpha$,

而 $\cos\alpha$ 爲負

故 α 在 $\frac{3\pi}{4}$ 與 $\frac{5\pi}{4}$ 之間,

即一般在 $2n\pi+\frac{3\pi}{4}$ 與 $2n\pi+\frac{5\pi}{4}$ 之間.

✓ **33.** $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$, 試求 θ 之值.

【解】 $\because \sin\theta\cos\frac{\pi}{4}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}$,

即 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$,

$\therefore \theta+\frac{\pi}{4}=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$,

卽 $\theta=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}$,

n 爲偶數 $(2m)$,

則 $\theta=2m\pi+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}=2m\pi-\frac{\pi}{12}$,

n 爲奇數,

則 $\theta=(2m+1)\pi-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}=2m\pi+\frac{7\pi}{12}$.

✓ **34.** $\sin\theta+\sin2\theta+\sin3\theta=0$, 試求 θ 之值.

【解】 $\because \sin\theta+2\sin\theta\cos\theta+3\sin\theta-4\sin^3\theta=0$,

$\therefore \sin\theta=0$, 或 $\cos\theta=0$, 或 $\cos\theta=-\frac{1}{2}$,

$\therefore \theta=\frac{n\pi}{2}$ 或 $2n\pi\pm\frac{2\pi}{3}$.

✓**35.** $\tan\theta+\tan2\theta=\tan3\theta$. 試解之.

【解】 變原式爲

$$\frac{\sin3\theta}{\cos\theta\cos2\theta}=\frac{\sin3\theta}{\cos3\theta},$$

$\therefore \sin3\theta=0$ 或 $\cos\theta\cos2\theta=\cos3\theta$.

再變此二式中之第二式爲

$\cos3\theta+\cos\theta=2\cos3\theta$,

$\therefore \cos3\theta=\cos\theta$ 卽 $4\cos^3\theta-3\cos\theta=\cos\theta$,

而 $\cos\theta=0$ 或 ±1.

$\therefore \theta=\frac{n\pi}{3}$ 或 $\frac{n\pi}{2}$ 或 $n\pi$.

36. $\sin\alpha+\sin(\theta-\alpha)+\sin(2\theta+\alpha)$
$=\sin(\theta+\alpha)+\sin(2\theta-\alpha)$. 試解之.

【解】 變原式爲

$$\sin\alpha+2\sin\frac{3\theta}{2}\cos\frac{\theta+2\alpha}{2}=2\sin\frac{3\theta}{2}\cos\frac{\theta-2\alpha}{2}.$$

卽 $4\sin\frac{3\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\alpha=\sin\alpha,$

卽 $2\cos^2\theta-\cos\theta=\frac{1}{2},$

$\therefore\ \theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{5}$ 或 $2n\pi\pm\frac{3\pi}{5}$

37. $\cos^2\theta-\cos^2\alpha=2\cos^3\theta(\cos\theta-\cos\alpha)$
$-2\sin^3\theta(\sin\theta-\sin\alpha).$

試解其方程式.

【解】 $\because\ 2(\cos^2\theta-\cos^2\alpha)$

$=(3\cos\theta+\cos3\theta)(\cos\theta-\cos\alpha)$
$-(3\sin\theta-\sin3\theta)(\sin\theta-\sin\alpha),$

$\therefore\ \cos2\theta-\cos(3\theta-\alpha)-3\cos(\theta+\alpha)$
$=3\sin^2\theta-\cos^2\theta-2\cos^2\alpha,$

卽 $\cos2\theta-\cos(3\theta-\alpha)-3\cos(\theta+\alpha)$
$=-2\cos2\theta-\cos2\alpha,$

$\therefore\ 3\cos2\theta-3\cos(\theta+\alpha)-\cos(3\theta-\alpha)+\cos2\alpha=0,$

$\therefore\ 4\sin\frac{3\theta+\alpha}{2}\sin^3\frac{\alpha-\theta}{2}=0.$

$\therefore\ \theta=\frac{2n\pi}{3}-\frac{\alpha}{3}$ 或 $\alpha-\theta=2n\pi.$

38. $7346\times7^{\sec x}+7^{1+\sec x}-7010$

$\times 7^{2\sec x}-7^{3+2\sec x}+3\times 7^{2+3\sec x}=147.$

【解】 $\because 7346\times 7^{\sec x}+7\times 7^{\sec x}-7010\times 7^{2\sec x}$

$-343\times 7^{2\sec x}+147\times 7^{3\sec x}=147,$

$\therefore (7^{\sec x}-1)\{147(7^{2\sec x}+7^{\sec x}+1)$

$-7353\times 7^{\sec x}\}=0.$

$\therefore 7^{\sec x}=1,$ 或 $147\times 7^{2\sec x}$

$-7206\times 7^{\sec x}+147=0,$

即 $7^{\sec x}=49,$ 或 $\frac{1}{49},$

由是 $7^{\sec x}=7^{0}$ 或 7^{2} 或 7^{-2}

$\therefore x=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$

或 $2n\pi\pm\frac{2\pi}{3}.$

39. 試解下之聯立方程式:

$\cos(\theta+3\phi)=\sin(2\theta+2\phi)$

$\sin(3\theta+\phi)=\cos(2\theta+2\phi).$

【解】 $\because \theta+3\phi=2n\pi\pm\left(\frac{\pi}{2}-2\theta-2\phi\right),$

$\therefore 3\theta+5\phi=2n\pi+\frac{\pi}{2}\ (1),$

或 $-\theta+\phi=2n\pi-\frac{\pi}{2}\ (2).$

又 $3\theta+\phi=2m\pi+\left(\frac{\pi}{2}-2\theta-2\phi\right)$

或 $(2m+1)\pi-\left(\frac{\pi}{2}-2\theta-2\phi\right),$

$\therefore 5\theta+3\phi=2m\pi+\frac{\pi}{2}$ (3),

或 $\theta-\phi=2m\pi+\frac{\pi}{2}$ (4).

從 (1), (3) 得 $\theta=(5m-3n)\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{16}$,

$\phi=(5n-3m)\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{16}$,

從 (1), (4) 得 $\phi=(n-3m)\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{8}$,

$\theta=(n+5m)\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{8}$.

✓ **40.** 有 $tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)+tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$
$=\left(\frac{8\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$. 試求適合於 θ 之最小值.

【解】 變原式為

$$\frac{sin\frac{\pi}{2}}{cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}=\left(\frac{8\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{2}},$$

即 $$\frac{1}{sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)}=\left(\frac{8\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$sin\left(\frac{\pi}{2}+2\theta\right)=\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$\therefore cos2\theta=cos\frac{\pi}{8}$, 即 $\theta=\frac{\pi}{16}$.

摘要第三

1. 消去法之意義,與代數同,亦從若干聯立方程式以消去其未知量也.

2. 反函數之方程式,即三角方程式含有反函數或求其反函數也.

例 $\sin^{-1}x=a$, 解答 $x=\sin a$.

$\sin\theta=a$, 解答 $\theta=\sin^{-1}a$.

前式含有反函數,後式求其反函數也.

3. 極限. 以某值代式內之變數爲 $\frac{0}{0}$,又變原式,以某值代之,得某有限值時,則此有限值曰其式之極限,以 lim 記之.

例 $\frac{x^2-1}{x-1}$,其 $x=1$,

則 $\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{0}{0}$,化原式爲

$\frac{x^2-1}{x-1}=x+1$, 令 $x=1$, 則得 2.

故 $\frac{x^2-1}{x-1}$ 之極限記之爲

$$\lim_{x=1}\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)=2.$$

三角方程式之消去法

41. 有 $\tan\theta+\sin\theta=a$, $\tan\theta-\sin\theta=b$, 試消去其 θ.

【解】 從原二式得

$$\tan\theta=\frac{1}{2}(a+b),\ \sin\theta=\frac{1}{2}(a-b),$$

$$\therefore \cos\theta=\sin\theta/\tan\theta=(a-b)/(a+b),$$

$$\therefore \sin^2\theta+\cos^2\theta=\frac{(a-b)^2}{4}+\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}=1,$$

即 $(a^2-b^2)^2=16ab$.

42. 有 $a\sin\theta+b\cos\theta=c$, $a\operatorname{cosec}\theta+b\sec\theta=c$, 試消去其 θ.

【解】 $\because a\sin\theta+b\cos\theta=c$,

$$a\cos\theta+b\sin\theta=c\sin\theta\cos\theta,$$

兩式各平方之,相加得

$$a^2+b^2+4ab\sin\theta\cos\theta=c^2(1+\sin^2\theta\cos^2\theta) \quad (1)$$

兩式各節相乘得

$$(a^2+b^2)\sin\theta\cos\theta+ab=c^2\sin\theta\cos\theta \quad (2)$$

從(1),(2)消去 $\sin\theta\cos\theta$ 之項,則

$$(a^2+b^2-c^2)^3-4a^2b^2(a^2+b^2-c^2)=a^2b^2c^2.$$

三角反函數

43. 試證下之恆同式.

$$\sin^{-1}x=\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}=\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\cot^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}=\sec^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\operatorname{cosec}^{-1}\frac{1}{x}.$$

【證】 令 $\sin^{-1}x=a$, 則 $\sin a=x$.

又 $\cos a=\sqrt{1-\sin^2 a}=\sqrt{1-x^2}$,

$\therefore a=\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$,

由是 $\sin^{-1}x=\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$.

又 $\tan a=\dfrac{\sin a}{\sqrt{1-\sin^2 a}}=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$,

$\therefore a=\tan^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$,

由是 $\sin^{-1}x=\tan^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

又 $\cot a=\dfrac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$,

$\therefore a=\cot^{-1}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$,

由是 $\sin^{-1}x=\cot^{-1}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

又 $\sec a=\dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 a}}=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

$\therefore a=\sec^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

由是 $\sin^{-1}x=\sec^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

又 $cosec\,\alpha=\dfrac{1}{sin\,a}=\dfrac{1}{x}$,

$\therefore a=cosec^{-1}\dfrac{1}{x}$.

由是 $sin^{-1}x=cosec^{-1}\dfrac{1}{x}$.

44. 試證下式.

$$\frac{a^3}{2}cosec^2\left(\frac{1}{2}tan^{-1}\frac{a}{b}\right)+\frac{b^3}{2}sec^2\left(\frac{1}{2}tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$$
$$=(a+b)(a^2+b^2).$$

【證】 令 $\dfrac{a}{b}=tan2x,\ \dfrac{b}{a}=tan2y$,

則 $\dfrac{a^3}{2}cosec^2x+\dfrac{b^3}{2}sec^2y=\dfrac{a^3}{1-cos2x}+\dfrac{b^3}{1+cos2y}$

$$=\frac{a^3\sqrt{(1+tan^2 2x)}}{\sqrt{(1+tan^2 2x)}-1}+\frac{b^3\sqrt{(1+tan^2 2y)}}{\sqrt{(1+tan^2 2y)}+1}$$

$$=\frac{a^3\sqrt{(a^2+b^2)}}{\sqrt{(a^2+b^2)}-b}+\frac{b^3\sqrt{(a^2+b^2)}}{\sqrt{(a^2+b^2)}+a}$$

$$=\frac{(a^3+b^3)(a^2+b^2)+(a^4-b^4)\sqrt{a^2+b^2}}{(a^2+b^2)+(a-b)\sqrt{a^2+b^2}-ab}$$

$$=(a^2+b^2)(a+b).$$

45. $tan^{-1}a+tan^{-1}b+tan^{-1}c=\dfrac{\pi}{4}$, 則

$$\frac{1+a}{1-a}+\frac{1+b}{1-b}+\frac{1+c}{1-c}=\frac{(1+a)(1+b)(1+c)}{(1-a)(1-b)(1-c)}.$$

試證之.

【證】 令 $tan^{-1}a=\alpha,\ tan^{-1}b=\beta,\ tan^{-1}c=\gamma$, 則

$$\frac{1+a}{1-a}=\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right),$$

$$\frac{1+b}{1-b}=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right),\quad \frac{1+c}{1-c}=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\gamma\right).$$

依題意 $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{4}$,

$$\therefore \left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)+\left(\frac{\pi}{4}+\gamma\right)=\pi,$$

$$\therefore \tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\tan\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)+\tan\left(\frac{\pi}{4}+\gamma\right)$$

$$=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\tan\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)\tan\left(\frac{\pi}{4}+\gamma\right),$$

即 $\frac{1+a}{1-a}+\frac{1+b}{1-b}+\frac{1+c}{1-c}=\frac{(1+a)(1+b)(1+c)}{(1-a)(1-b)(1-c)}$.

46. $\sin^{-1}\frac{x}{a}+\sin^{-1}\frac{y}{b}=\sin^{-1}\frac{c^2}{ab}$, 則

$b^2x^2+2(a^2b^2-c^4)^{\frac{1}{2}}xy+a^2y^2=c^4$,試證之.

【證】 令 $\sin^{-1}\frac{x}{a}=\alpha$, $\sin^{-1}\frac{y}{b}=\beta$, $\sin^{-1}\frac{c^2}{ab}=\gamma$,

則 $\frac{x}{a}=\sin\alpha$, $\frac{y}{b}=\sin\beta$, $\frac{c^2}{ab}=\sin\gamma$,

$\therefore \alpha+\beta=\gamma$, 即 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\gamma$,

即 $\cos\alpha\cos\beta=\cos\gamma+\sin\alpha\sin\beta$,

兩邊平方之,則

$$(1-\sin^2\alpha)(1-\sin^2\beta)$$

$$=\cos^2\gamma+2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma+\sin^2\alpha\sin^2\beta,$$

$\therefore \sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2\gamma+2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma=0,$

即 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{c^4}{a^2b^2}+\frac{2xy}{ab}\sqrt{\left(1-\frac{c^4}{a^2b^2}\right)}=0.$

$\therefore b^2x^2+2(a^2b^2c^4)^{\frac{1}{2}}xy+a^2y^2=c^4.$

47. 設 $\tan^3\theta=\tan(\theta-\alpha)$,則

$\theta=\frac{\sin^{-1}(3\sin\alpha)+\alpha}{4}$ 試證之.

【證】 從原式得

$$\frac{\sin^3\theta}{\cos^3\theta}=\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\cos(\theta-\alpha)},\ 即\ \frac{3\sin\theta-\sin3\theta}{3\cos\theta+\cos3\theta}=\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\cos(\theta-\alpha)},$$

去分母,則

$$3\{\sin\theta\cos(\theta-\alpha)-\cos\theta\sin(\theta-\alpha)\}$$
$$=\sin3\theta\cos(\theta-\alpha)+\cos3\theta\sin(\theta-\alpha),$$

即 $3\sin\alpha=\sin(4\theta-\alpha)$.

$\therefore \theta=\frac{\sin^{-1}(3\sin\alpha)+\alpha}{4}.$

48. $\tan^{-1}\frac{1}{x}+\tan^{-1}\frac{1}{a^2-x+1}=\tan^{-1}\frac{1}{a-1}.$

試解之.

【解】 令 $\frac{1}{x}=\tan\alpha,\ \frac{1}{a^2-x+1}=\tan\beta,\ \frac{1}{a-1}=\tan\gamma$, 則

$$\tan(\alpha+\beta)=\tan\gamma,\ 即\ \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\tan\gamma.$$

以此代用上之各值而簡單之,則

$$x^2-x(a^2+1)-a(a^2-a+1)=0.$$

$\therefore x=a$, 或 a^2-a+1.

49. $3\tan^{-1}\frac{1}{2+\sqrt{3}}-\tan^{-1}\frac{1}{x}=\tan^{-1}\frac{1}{3}$.試解之.

【解】 令 $\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}=\tan\frac{a}{3}$,

$$則\ \tan\alpha=\frac{3\tan\frac{a}{3}-\tan^3\frac{a}{3}}{1-3\tan^2\frac{a}{3}}=1.$$

又 $\frac{1}{x}=\tan\theta$, $\frac{1}{3}=\tan\beta$,

$\therefore \alpha-\theta=\beta$,

即 $\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)$,

即 $\frac{1}{x}=\left(1-\frac{1}{3}\right)\Big/\left(1+\frac{1}{3}\right)$

$\therefore x=2$.

50. 設 c 為正整數,則 $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\tan^{-1}c$ 無正整數之解答,同時 $\cot^{-1}x+\cot^{-1}y=\cot^{-1}c$,則有 $1+c^2$ 整除個數之正整解答,試證之.

【證】 從第一式得

$\tan(\tan^{-1}x+\tan^{-1}y)=c$ 即 $(x+y)/(1-xy)=c$,

即 $x=(c-y)/(1+cy)$.

題言 c 為正整數,則令 y 為正整數,

其 $c-y$ 比 cy 小,故 x 當為分數,故如題言.

又 $cot(cot^{-1}x+cot^{-1}y)=c$ 即 $\frac{xy-1}{x+y}=c$,

即 $x=c+\frac{1+c^2}{y-c}$

故 x 爲正整數,其個數當等於$1+c^2$之整除數之個數.

三角函數值之極限

51. 試求 $cosec\theta-cot\theta$ 之極限.

【解】 $\because cosec\theta-cot\theta=\frac{1-cos\theta}{sin\theta}=\sqrt{\frac{1-cos\theta}{1+cos\theta}}$,

$\therefore$ 令 $\theta=\frac{\pi}{2}$,則

$$\lim_{\theta=\frac{\pi}{2}}(cosec\theta-cot\theta)=\sqrt{\frac{1-0}{1+0}}=1.$$

52. 設 θ 爲甚小之弧度,則

$3\theta=2(sin2\theta-sin\theta)+tan2\theta-tan\theta$ (略近值).

【證】 $\because 2\theta<sin\theta+tan\theta,\ \theta>sin\theta$

$\therefore 3\theta=2sin\theta+tan\theta$ (略近值)

同樣 $6\theta=2sin2\theta+tan2\theta$ (略近值)

由是 $3\theta=2(sin2\theta-sin\theta)+tan2\theta-tan\theta$ (略近值).

53. 設 $cos\theta/\theta+\theta/cos\theta$ 有最小之正數值,則 $\theta=\sqrt{3}-1$, 試證之.

【證】 $\because \frac{cos\theta}{\theta}+\frac{\theta}{cos\theta}=2+\left(\sqrt{\frac{cos\theta}{\theta}}-\sqrt{\frac{\theta}{cos\theta}}\right)^2$,

$\therefore \dfrac{\cos\theta}{\theta}+\dfrac{\theta}{\cos\theta}=2$ 爲其最小之值,

即 $\theta=\cos\theta$,

即 $\theta=1-\dfrac{\theta^2}{2}$,

$\therefore \theta=\sqrt{3}-1$.

54. 試求 $\sin 1'$ 及 $\cos 1'$ 之略近值至小數八位止.

【解】 $\because 1'$ 之弧度 $=\dfrac{3.1416}{180\times 60}=0.00029088$,

$\theta>\sin\theta>\theta-\dfrac{\theta^3}{4}$,

而 $\dfrac{\theta^3}{4}$ 至小數十一位爲 0,

$\therefore \sin 1'=\theta=0.00029088$.

又 $\cos 1'=1-\dfrac{1}{2}(0.0002909)^2$

$=0.99999995$.

55. 設 $\cot\theta=\theta$, 則 θ 殆等於 $49°18'$.

【解】 從 $\cot\theta=\theta$,

得 $\theta\tan\theta=1$.

但 $\dfrac{\pi}{4}=.7854$, $\cot 45°=1$,

$\therefore \theta=\dfrac{\pi}{4}+\delta$, $\left(\dfrac{\pi}{4}+\delta\right)\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\delta\right)=1$,

$$\left(\frac{\pi}{4}+\delta\right)\left((1+tan\delta\right)=1-tan\delta,$$

即 $(.7854+\delta)(1+\delta)=1-\delta.$

由 δ 之二次式得 $\delta=.0751.$

$\therefore \theta=.7854+.0751$

$=.8605$

$=\frac{.8605}{3.1416}\times 180^\circ$

$=49^\circ 18'.$

56. 已知 $log_{10}2=.301030,$

$log_{10}3=.477121,$

試求 $log_{10}(.0020736)^{\frac{1}{3}}.$

【解】 $log_{10}(.0020736)^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}log_{10}(3^4\times 2^8\div 10^7)$

$=\frac{1}{3}(4log_{10}3+8log_{10}2-7)$

$=\frac{1}{3}(4\times.477121+8\times.301030-7)$

$=\frac{1}{3}(-3+.316724)$

$=\bar{1}.105575.$

57. 有 $\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$,其 n 增至無限,則其極限如何?

【解】 $\left(\frac{n-1}{n}\right)^n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$

$$=1-n\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}\left(\frac{1}{n}\right)^2$$

$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{\underline{|3}}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\cdots\cdot$$

$$=1-1+\frac{1}{\underline{|2}}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

$$-\frac{1}{\underline{|3}}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots\cdot$$

故 $n=\infty$,

則 $lin_{n=\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=1-1+\frac{1}{\underline{|2}}-\frac{1}{\underline{|3}}+\frac{1}{\underline{|4}}\cdots\cdots\cdot$

$$=e^{-1}.$$

58. 設 $\cos\alpha=.4996532$

$1'$ 之差$=.0002519$,

試不用表以求 α.

【解】 $\because \cos 60^\circ=\frac{1}{2}$,

$\therefore \cos 60^\circ-\cos\alpha=.0003468$,

$\therefore \frac{3468}{2519}\times 1'=1'22''.6$,

$\therefore \alpha=60^\circ 1'22''.6$.

59. 試用 $L\sin 17^\circ 1'=9.4663483$,

$L\sin 17^\circ=9.4659353$, 以求 $L\sin 17^\circ 0'12''$.

【解】 $\because 1'$ 之差$=9.4663483-9.4659353$

$=.0004130$,

$$\frac{12}{60}\times .0004130=.0000826$$

$$\therefore \mathrm{L}sin17°0'12''=9.4659353+.0000826$$

$$=9.4660179$$

60. 試從 $\mathrm{L}tan37°19'=9.8821007$, $1'$之差 $=.0002621$ 與 $\mathrm{L}tan\alpha=9.8823059$ 以求 α.

【解】 $\because 9.8823059-9.8821007=.0002052,$

$$\therefore \frac{2052}{2621}\times 60''=47'',$$

$$\therefore \mathrm{L}tan\alpha=\mathrm{L}tan(37°19'+47'')$$

$$=9.8823059.$$

$$\therefore \alpha=37°19'47''.$$

摘 要 第 四

1. $\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}.$

2. $$\left.\begin{aligned}2bc\cos A&=b^2+c^2-a^2\\2ca\cos B&=c^2+a^2-b^2\\2ab\cos C&=a^2+b^2-c^2\end{aligned}\right\}$$

3. $$\left.\begin{aligned}\sin\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\\\cos\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}\\\tan\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}\end{aligned}\right\}$$

但 $a+b+c=2s.$

4. $\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}.$

5. $a=(b-c)\sec\tan^{-1}\left(\frac{2\sin\frac{A}{2}}{b-c}\sqrt{bc}\right).$

6. $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

但S爲面積.

7. 外切圓之半徑爲R,則

$$2R=\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C},\ S=\frac{abc}{4R}.$$

8. 內切圓之半徑爲 r,則

$$r=(s-a)\tan\frac{A}{2}=(s-b)\tan\frac{B}{2}=(s-c)\tan\frac{C}{2},$$

$$S=rs.$$

9. 傍切圓之半徑爲r_1, r_2, r_3,則

$$r_1=s\tan\frac{A}{2},\ r_2=s\tan\frac{B}{2},\ r_3=s\tan\frac{C}{2},$$

$$S=(s-a)r_1=(s-b)r_2=(s-c)r_3.$$

三角形之性質及解法

61. $c\cos(A-B)=a\cos A+b\cos B$. 試證之.

【證】 $c\cos(A-B)=\frac{a\sin C}{\sin A}\cos(A-B)$

$$=\frac{a}{\sin A}\sin(A+B)\cos(A-B)$$

$$=\frac{a}{\sin A}(\sin A\cos B+\cos A\sin B)$$

$$(\cos A\cos B+\sin A\sin B)$$

$$=\frac{a}{\sin A}\{\sin A\cos A(\cos^2 B+\sin^2 B)$$

$$+\sin B\cos B(\cos^2 A+\sin^2 A)\}$$

$$=\frac{a}{\sin A}(\sin A\cos A+\sin B\cos B)$$

$$=a\cos A+\frac{a}{\sin A}(\sin B\cos B)$$

$$=a\cos A+\frac{b}{\sin B}(\sin B\cos B)$$

$$=a\cos A+b\cos B.$$

62. $\frac{\cos A}{b}-\frac{\cos B}{a}=\frac{\cos C}{c}\left(\frac{\sin B}{\sin A}-\frac{\sin A}{\sin B}\right)$.

試證之.

【證】 $\frac{\cos A}{b}-\frac{\cos B}{a}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2b^2c}-\frac{c^2+a^2-b^2}{2a^2c}$

$$=\frac{a^2(b^2+c^2-a^2)-b^2(c^2+a^2-b^2)}{2a^2b^2c}$$

$$=\frac{-(a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{2a^2b^2c}$$

$$=\frac{-(a^2-b^2)2ab\cos C}{2a^2b^2c}$$

$$=\left(\frac{b}{a}-\frac{a}{b}\right)\frac{\cos C}{c}$$

$$=(\cos C/c)(\sin B/\sin A-\sin A/\sin B).$$

63. $(a^2-b^2)\cot C+(b^2-c^2)\cot A+(c^2-a^2)\cot B=0.$

試證之.

【證】 令 $a/\sin A=b/\sin B=c/\sin C=k$,則

原式 $=k^2\{(\sin^2 A-\sin^2 B)\cot C$

$+(\sin^2 B-\sin^2 C)\cot A+(\sin^2 C-\sin^2 A)\cot B\}$

$$=k^2\left\{\sin(A+B)\sin(A-B)\frac{\cos C}{\sin C}\right.$$

$$+\sin(B+C)\sin(B-C)\frac{\cos A}{\sin A}$$

$$\left.+\sin(C+A)\sin(C-A)\frac{\cos B}{\sin B}\right\}$$

$$=-k^2\{\cos(A+B)\sin(A-B)$$

$$+\cos(B+C)\sin(B-C)+\cos(C+A)\sin(C-A)\}$$

$$=-k^2(\sin 2A-\sin 2B+\sin 2B-\sin 2C$$

$$+\sin 2C-\sin 2A)\div 2=0.$$

64. $a^{\frac{1}{2}}(b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}})\cos A+b^{\frac{1}{2}}(c^{\frac{3}{2}}+a^{\frac{3}{2}})\cos B$

$+c^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}})\cos C$

$=a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}+c^{\frac{1}{2}})$, 試證之.

【證】 設代用公式於原式左邊,則

$$\frac{a^{\frac{1}{2}}(b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}})(b^2+c^2-a^2)}{2bc}+\frac{b^{\frac{1}{2}}(c^{\frac{3}{2}}+a^{\frac{3}{2}})(c^2+a^2-b^2)}{2ca}$$

$$+\frac{c^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}})(a^2+b^2-c^2)}{2ab}$$

$$=\frac{1}{2abc}\{a^{\frac{3}{2}}(b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}})(b^2+c^2-a^2)+b^{\frac{3}{2}}(c^{\frac{3}{2}}+a^{\frac{3}{2}})$$

$$(c^2+a^2-b^2)+c^{\frac{3}{2}}(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}})(a^2+b^2-c^2)\}$$

$$=\frac{1}{2abc}\{a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{3}{2}}(b^2+c^2-a^2+c^2+a^2-b^2)$$

$$+b^{\frac{3}{2}}c^{\frac{3}{2}}(c^2+a^2-b^2+a^2+b^2-c^2)+c^{\frac{3}{2}}a^{\frac{3}{2}}(b^2+c^2$$

$$-a^2+a^2+b^2-c^2)\}$$

$$=\frac{1}{2abc}\{2a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{3}{2}}c^2+2b^{\frac{3}{2}}c^{\frac{3}{2}}a^2+2c^{\frac{3}{2}}a^{\frac{3}{2}}b^2\}$$

$$=a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}(c^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}).$$

65. $$\frac{bc}{(b-a)(c-a)}\tan^2\frac{B}{2}\tan^2\frac{C}{2}$$

$$+\frac{ca}{(c-b)(a-b)}\tan^2\frac{C}{2}\tan^2\frac{A}{2}$$

$$+\frac{ab}{(a-c)(b-c)}\tan^2\frac{A}{2}\tan^2\frac{B}{2}$$

$=1$. 試證之.

【證】 $\because \frac{bc}{(b-a)(c-a)}\tan^2\frac{B}{2}\tan^2\frac{C}{2}$

$$=\frac{bc}{(b-a)(c-a)}\times\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}\times\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}$$

$$=\frac{bc(s-a)^2}{s^2(b-a)(c-a)}.$$

$$\therefore \text{原式}=\frac{bc(s-a)^2}{s^2(b-a)(c-a)}+\frac{ca(s-b)^2}{s^2(c-b)(a-b)}-\frac{ab(s-c)^2}{s^2(a-c)(b-c)}$$

$$=-\frac{bc(s-a)^2}{s^2(a-b)(c-a)}-\frac{ca(s-b)^2}{s^2(b-c)(a-b)}-\frac{ab(s-c)^2}{s^2(c-a)(b-c)}$$

$$=-\frac{bc(b-c)(s-a)^2}{s^2(a-b)(b-c)(c-a)}-\frac{ca(c-a)(s-b)^2}{s^2(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$-\frac{ab(a-b)(s-c)^2}{s^2(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$=\{s^2[(bc^2-b^2c)+(ca^2-c^2a)+(ab^2-a^2b)]$$

$$+2abcs[(b-c)+(c-a)+(a-b)]$$

$$-abc[(ab-ca)+(bc-ab)+(ca-bc)]\}$$

$$\div[s^2(a-b)(b-c)(c-a)]$$

$$=s^2[(bc^2-b^2c)+(ca^2-c^2a)+(ab^2-a^2b)]$$

$$\div[s^2(a-b](b-c)(c-a)]$$

$$=1$$

66. $\dfrac{a^2 sin(B-C)}{sinB+sinC}+\dfrac{b^2 sin(C-A)}{sinC+sinA}$

$+\dfrac{c^2 sin(A-B)}{sinA+sinB}=0$, 試證之.

【證】 令 $a/sinA=b/sinB=c/sinC=K$ 則

$$\frac{a^2 sin(B-C)}{sinB+sinC}=\frac{K^2 sin^2 A sin(B-C)}{2sin\frac{1}{2}(B+C)\,cos\frac{1}{2}(B-C)}$$

$$=\frac{K^2 \sin^2 A \sin\frac{1}{2}(B-C)}{\cos\frac{1}{2}A}$$

$$=2K^2 \sin A \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2}$$

$$=K^2 \sin A\left(\cos\frac{A-B+C}{2}-\cos\frac{A+B-C}{2}\right)$$

$$=K^2 \sin A\{\cos(90°-B)-\cos(90°-C)\}$$

$$=K^2 \sin A(\sin B-\sin C)$$

∴原式 $=K^2\{\sin A(\sin B-\sin C)+\sin B(\sin C-\sin A)$

$+\sin C(\sin A-\sin B)\}=K^2\{0\}=0.$

67. $(b^2-c^2)\cot^2\frac{A}{2}+(c^2-a^2)\cot^2\frac{B}{2}$

$+(a^2-b^2)\cot\frac{\cot^2}{2}+2s^3(a-b)(b-c)(c-a)/S^2=0.$

試證之.

【證】 $\because (b^2-c^2)\cot^2\frac{A}{2}=(b^2-c^2)\times\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)},$

$$=\frac{(b^2-c^2)s^2(s-a)^2}{S^2},$$

$$(c^2-a^2)\cot^2\frac{B}{2}=\frac{(c^2-a^2)s^2(s-b)^2}{S^2},$$

$$(a^2-b^2)\cot\frac{\cot^2}{2}=\frac{(a^2-b^2)s^2(s-c)^2}{S^2},$$

∴原式左邊 $=s^2[(b^2-c^2)(s-a)^2+(c^2-a^2)(s-b)^2+(a^2-b^2)$

$(s-c^2)]\div S^2+2s^3(a-b)(b-c)(c-a)\div S^2$

$=s^2\{s^2[(b^2-c^2)+(c^2-a^2)+(a^2-b^2)]-2s[a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)\ \ c(a^2-b^2)]+[a^2(b^2-c^2)+b^2(c^2-a^2)+c^2(a^2-b^2)]\}\div S^2$

$+2s^3(a-b)(b-c)(c-a)\div S^2$

$=-2s^3(ab^2-c^2a+bc^2-a^2b+ca^2-b^2c)\div S^2$

$+2s^3(a-b)(b-c)(c-a)\div S^2$

$=0.$

68. 三邊爲 $m, n, \sqrt{m^2+mn+n^2}$，則其最大角爲 120°. 試證之.

【證】 $\because \cos A=\dfrac{m^2+n^2-(m^2+mn+n^2)}{2mn}=-\dfrac{1}{2}$,

$\therefore \cos(180^\circ-A)=\dfrac{1}{2}$,

$\therefore 180^\circ-A=60^\circ$,

即 $A=120^\circ$.

69. 三邊爲 x^2+x+1, x^2-1, $2x+1$，則其最大角爲 120°. 試證之.

【證】 $\because \cos A=\dfrac{(x^2-1)^2+(2x+1)^2-(x^2+x+1)^2}{2(x^2-1)(2x+1)}$

$=\dfrac{-(2x+1)(x^2-1)}{2(x^2-1)(2x+1)}=-\dfrac{1}{2}$,

$\therefore \cos(180°-A)=\frac{1}{2}$,

$\therefore 180°-A=60°$,

即 $A=120°$.

70. 三角形之周邊等於 $2c\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$ $\sec\frac{A+B}{2}$.試證之.

【證】 $a+b+c=\frac{c\sin A}{\sin C}+\frac{c\sin B}{\sin C}+c$

$$=\frac{c}{\sin C}(\sin A+\sin B+\sin C)$$

$$=\frac{c}{\sin(A+B)}4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{A+B}{2}$$

$$=\frac{2c\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}=2c\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sec\frac{A+B}{2}.$$

71. 設三邊爲 $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}$, $\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$, $\frac{z}{x}+\frac{x}{y}$, 則 $S=\sqrt{\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)}$.試證之.

【證】 $\because s=\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$, $s-a=\frac{z}{x}$,

$s-b=\frac{x}{y}$, $s-c=\frac{y}{z}$,

$$\therefore S=\sqrt{\left\{\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)\frac{z}{x}\times\frac{x}{y}\times\frac{y}{z}\right\}}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)}.$$

72. 已知三角形之三邊爲$m+n, m-n,$ $\sqrt{2(m^2+n^2)}$,其一角之正弦爲$\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$,試求其他之二角.

【解】 $\because \cos A=\frac{(m+n)^2+(m-n)^2-2(m^2+n^2)}{2(m+n)(m-n)}=0,$

$\therefore A=90°.$

又 $\sin B=\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1),$

$\therefore B=18°.$

而 $C=180°-A-B,$

$\therefore C=180°-90°-18°$

$=72°.$

73. 設a, b, c爲等差級數,則 $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{1}{3}$.試證之.

【證】 $$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\left\{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}\times\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}\right\}}$$

$$=\frac{c+a-b}{a+b+c}=\frac{b}{3b}=\frac{1}{3}.$$

74. 設a^2, b^2, c^2成等差級數,則

$\cot A, \cot B, \cot C$ 亦成等差級數.試證之.

【證】 $\because 2b^2=a^2+c^2,$

$\therefore 2\sin^2 B=\sin^2 A+\sin^2 C,$

而 $\sin^2 B+\sin B\sin(C+A)=\sin A\sin(B+C)$

$+\sin C\sin(A+B),$

$\sin^2 B+\sin B\sin C\cos A+\sin B\cos C\sin A$

$=\sin A\sin B\cos C+\sin A\cos B\sin C$

$+\sin C\sin A\cos B+\sin C\cos A\sin B,$

即 $\sin^2 B=2\sin A\sin C\cos B.$

$\therefore \frac{\sin(A+C)}{\sin A\sin C}=2\cot B,$

即 $\cot A+\cot C=2\cot B.$

75. 已知 $C=90°, b=355, c=923$, 試求其餘各項.

【解】 由公式

$a=\sqrt{c^2-b^2}=\sqrt{(c+b)(c-b)}$

$=\sqrt{(923+355)(923-355)}$

$=\sqrt{1278\times 568}$

$=\sqrt{(71\times 18\times 71\times 8)}$

$=\sqrt{71^2\times 144}=71\times 12=852.$

又 $\cos A=\frac{b}{c}=\frac{355}{923}=\frac{5}{13}=.384615$

$=\cos 67°23'$ (從表)

$\therefore \quad A=67°23'$

由是 $B=90°-67°23'$

$=22°37'$

76. 已知 $C=90°$, $a=3\sqrt{7}$, $b=\sqrt{21}$, 試求其餘三項.

【解】 $\because c=\sqrt{a^2+b^2}$,

$\therefore c=\sqrt{\{(3\sqrt{7})^2+(\sqrt{21})^2\}}$

$=\sqrt{(63+21)}=2\sqrt{21}.$

又 $tanA=\dfrac{a}{b}=\dfrac{3\sqrt{7}}{\sqrt{21}}=\sqrt{3}=tan60°$,

$\therefore A=60°.$

$\therefore B=90°-60°=30°$

77. 已知 $C=90°, a=29.37, b=37.29$, 試用對數計算,以求其餘各項.

【解】 $log tan A=10+log a-log b$

$=10+1.46790-1.57159$

$=9.89631$

$=log tan 38°13'$

$\therefore A=38°13'$

$B=90°-A=51°47'.$

又從 $log c=10+log a-log sin A$,

得 $c=47.47.$

✓78. 設 $a:b:c=4:7:9$,則 A, B, C 之值如何?

【解】 令 $a/4=b/7=c/9=K$,

則 $a=4K$, $b=7K$, $c=9K$.

從公式得 $2bc\cos A=b^2+c^2-a^2$,

即 $2(7K)(9K)\cos A=(7K)^2+(9K)^2-(4K)^2$.

$$\therefore \cos A=\frac{7^2+9^2-4^2}{2\times7\times9}=\frac{114}{2\times7\times9}=\frac{19}{21}$$

$$=.904762$$

$$=\cos 25°13'.$$

由是 $A=25°13'$.

同樣 $B=48°12'$

$C=106°35'$

✓79. 有 $c:a-b=9:2$, $C=60°$,試求 A, B.

【解】 $$\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$$

$$=\frac{a-b}{\sin A-\sin B}$$

$$=\frac{a-b}{2\cos\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)},$$

即 $$\sin\frac{1}{2}(A-B)=\frac{a-b}{c}\times\frac{\sin C}{2\cos(90°-\frac{1}{2}C)}$$

$$=\frac{a-b}{c}\cos\frac{C}{2}=\frac{2}{9}\cos 30°$$

$$=.192450=\sin 11°6'.$$

由是 $A=71°6'$

$B=48°54'$.

✓80. 三角形之三角成等差級數,其最大邊與最小邊之比,若5:4;試求各角之大.

【解】 令最大角 $=A$,最小角 $=C$.

依題意 $B=\frac{1}{2}(A+C)$,

即 $B=\frac{1}{2}(180°-B)$,

$\therefore B=60°$.

又 $a:c=5:4$,

$\therefore \frac{a-c}{a+c}=\frac{5-4}{5+4}=\frac{1}{9}$,

$$\tan\frac{1}{2}(A-C)=\frac{a-c}{a+c}\cot\frac{B}{2}=\frac{1}{9}\cot 30°$$

$$=\frac{1.732051}{9}=.192450$$

$$=\tan 10°54'.$$

$\therefore \frac{1}{2}(A-C)=10°54'$.

又 $\frac{1}{2}(A+C)=\frac{1}{2}(180°-B)=60°$.

由是 $A=70°54'$,

$C=49°6'$.

✓81. 三角形之一角為 60°，其夾邊之比為 5:3，則其他之二角為 $tan^{-1}\frac{3}{7}\sqrt{3}$ 及 $tan^{-1}5\sqrt{3}$.試證之.

【證】 $\because tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}cot\frac{A}{2}$

$$=\frac{5-3}{5+3}cot30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4},$$

$\therefore tan\frac{1}{2}\{180^\circ-(60^\circ+C)-C\}=\frac{1}{4}\sqrt{3},$

即 $tan(60^\circ-C)=\frac{1}{4}\sqrt{3},$

即 $\frac{tan60^\circ-tanC}{1+tan60^\circ tanC}=\frac{\sqrt{3}}{4},$

$\frac{\sqrt{3}-tanC}{1+tanC\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{4}.$

從此 $tanC=\frac{3\sqrt{3}}{7},$

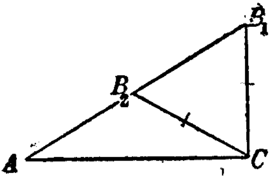
又 $tan\frac{1}{2}\{B-(180^\circ-60^\circ-B)\}=\frac{1}{4}\sqrt{3},$

從此 $tanB=5\sqrt{3}.$

$\therefore C=tan^{-1}\frac{3\sqrt{3}}{7},\ B=tan^{-1}5\sqrt{3}.$

82. 設$\triangle AB_1C$為$\triangle AB_2C$之 n 倍，而B_1 在AB_2之延綫內，$B_1C=B_2C$，則

$\frac{a}{b}=\frac{1}{2na}\sqrt{4n^2b^2\sin^2A-n(n+1)^2(a^2-b^2)}$. 試證之.



【證】 題言 $S_1=nS_2$, $\therefore c_1=nc_2$,

又 $B_1C=B_2C=a$,

依幾何定理,知

$$b^2-a^2=\left(\frac{c_1+c_2}{2}\right)^2-\left(\frac{c_1-c_2}{2}\right)^2,$$

$$=c_1c_2=nc_2^{\,2}.$$

$$\therefore \cos B_2=\frac{c_2^{\,2}+a^2-b^2}{2c_2a}=\frac{(1-n)c_2}{2a},$$

$$1-\sin^2B_2=1-\left(\frac{b}{a}\times\sin A\right)^2=\frac{(1-n)^2(b^2-a^2)}{4na^2},$$

$$\text{而}\left(\frac{b}{a}\right)^2\times\sin^2A=-\frac{(n^2+1)(b^2-a^2)+2n(a^2+b^2)}{4na^2},$$

$$=\frac{(n+1)^2(a^2-b^2)+4nb^2}{4na^2},$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2=\left(\frac{b}{a}\right)^2\sin^2A-\frac{(n+1)^2(a^2-b^2)}{4na^2},$$

$$\therefore \frac{b}{a}=\frac{1}{2na}\sqrt{4n^2b^2\sin^2A-n(n+1)^2(a^2-b^2)},$$

83. 有 $a=55$, $A=41°13'$, $B=71°19'$;

以求 b 及 c.

【解】 $\because \log b=\log 55+\log\sin 71°19'$

$$-\log\sin 41°13'$$

$=1.74036+9.97646-9.81882$

$=1.89800=log79.$

$\therefore b=79,$

同樣得 $c=77.$

84. 有 $b=643, c=872, C=52°10'$, 求 B.

【解】 $\because logsinB=log643+logsin52°10'-log872$

$=2.80821+9.8975-2.94052$

$=9.76519$

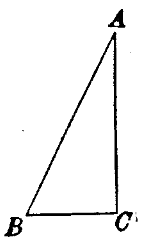
$=logsin35°37',$

$\therefore B=35°37'$或$144°23'.$

但 $b<c,$

$\therefore B<C$, 只有一值.$35°37'$合題.

85. 塔高 150 尺,其影 75 尺.求太陽之高度.



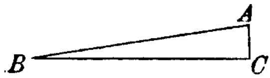
【解】 令塔頂爲 A, 底爲 C, 影爲 CB,

則 $AC=150, BC=75, \angle ACB=\angle R,$

$\therefore cot ABC=\frac{BC}{AC}=.5=cot63°26'$(高度).

86. 某海濱測高山 12370 尺,得仰角 $8°22'$;問此海濱與該山頂之水平距離若干?

【解】 令山頂爲A,測者之地點爲B,



水平距離爲BC,

則 $AC=12370$,

$\angle ABC=8°22'$,

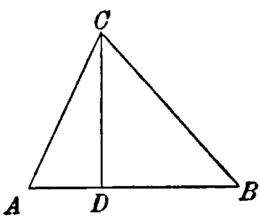
$BC=AC\cot ABC$

$=12370\cot 8°22'$

$=84114$(尺)

87. 在風船之正反對,取地上相距400碼之二點A, B,測得風船之高度64°15′及48°20′,試求風船之高.

【解】 令C爲風船,D爲風船直下之點,



依題意D在直線AB之中間,

而$CD\perp AB$,故CD爲風船之高,

而$AB=400$, $\angle A=64°15'$, $\angle B=48°20'$,

$\therefore AD=CD\cot A$, $BD=CD\cot B$,

$$\therefore AB=AD+BD=CD(\cot A+\cot B)$$

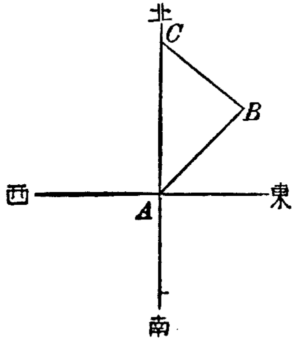
$$=\frac{CD\sin(A+B)}{\sin A\sin B},$$

$$\therefore CD=\frac{AB\sin A\sin B}{\sin(A+B)}$$

$$=\frac{400\sin 64°15'\sin 48°20'}{\sin 112°35'}$$

$=291$ 碼.

88. 有甲乙兩船同時同地出發,甲向北東行,每時 $7\frac{1}{2}$ 浬,乙向正北行,每時 10 浬,問船行 1 時 30 分之後,二船相離若干浬?



【解】 令 A 爲出發點, B, C 爲甲,乙之位置,

則 $AB=7\frac{1}{2}$ 浬 $\times 1\frac{1}{2}=\frac{45}{4}$(浬)

$AC=10$ 浬 $\times 1\frac{1}{2}=15$(浬)

又北東,由北而東 45°,

$\therefore \angle BAC=45°$.

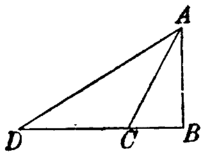
$\therefore \overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2AB\times AC\cos BAC$

$=\left(\frac{45}{4}\right)^2+15^2-2\left(\frac{45}{4}\right)\times 15\cos 45°$.

$\therefore BC=10.6$(浬).

89. 從河岸望對岸之木,得仰角 60°; 退後河岸 40 尺,再望前木,得仰角 30°, 間木之高及河之闊.

【解】 令 AB 爲木高, BC 爲河闊,



BC引長線上之一點爲D.

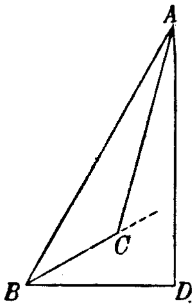
而 $\angle ACB=60^\circ$, $\angle ADB=30^\circ$, $CD=40$,

則 $\angle CAD=60^\circ-30^\circ=30^\circ$.

$\therefore AC=CD=40$.

由是 $AB=20\sqrt{3}$ (尺).

$BC=20$ (尺).



✓ **90.** 自山麓B測得山頂A之仰角爲60°, 自B上行1哩至C, 再測之,得 $\angle BCA=135^\circ$. 問山高若干碼? 但BC與水平面成角30°.

【解】 從B引水平線與A之直下線, 相會於D,

則 $\angle CBD=30^\circ$, $\angle ABD=60^\circ-30^\circ=30^\circ$,

$\angle ACB=135^\circ$.

$\therefore \angle BAC=15^\circ$.

$$\therefore AB=\frac{BC\sin 135^\circ}{\sin 15^\circ},$$

$$即\ AB=\frac{1}{\sqrt{2}}\div\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\sqrt{3}+1,$$

$$AD=AB\sin 60^\circ$$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt{3}+3)$$

$\therefore$ 山高 $=\frac{1}{2}(\sqrt{3}+3)$ 哩.

$=880(3+\sqrt{3})$ 碼.

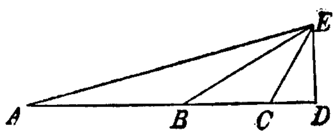
✓91. 初測立木之仰角得 θ 度,向此進行 a 尺,再測仰角得 2θ;又進行 b 尺,測得仰角 4θ,則自三測點中第二點至立木之距離爲 $a^2/(2h)$. 試證之. 2 但 h 爲立木之高.

【證】 令立木DE之底爲D,

三測處順次爲A, B, C

則 $AB=a$, $BC=b$.

又令 $BD=x$, $DE=h$,



則 $\dfrac{DE}{AD}=\dfrac{h}{x+a}=tan\theta$,

$\dfrac{DE}{BD}=\dfrac{h}{x}=tan2\theta$.

故 $\dfrac{h}{x}=\dfrac{2tan\theta}{1-tan^2\theta}=2\left(\dfrac{h}{x+a}\right)\Big/\left\{1-\left(\dfrac{h}{x+a}\right)^2\right\}$,

$a^2-x^2=h^2$.

又從 $\dfrac{DE}{CD}=\dfrac{h}{x-b}=tan4\theta=\dfrac{2tan2\theta}{1-tan^2 2\theta}$,

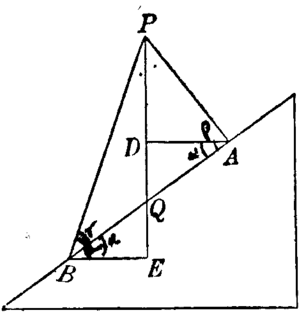
$=2\left(\dfrac{h}{x}\right)\Big/\left\{1-\left(\dfrac{h}{x}\right)^2\right\}$,得 $2hx-x^2=h^2$.

$\therefore 2hx-x^2=a^2-x^2$.

$\therefore x=a^2/(2h)$.

92. 山道中間有塔 PQ. 從此山道上取正反對之二點 A, B, 測得距塔底 Q 爲 a, b 尺,又測得其向塔之角度爲 β 及 γ. 設塔高爲 h,山道之傾度爲 α,則 $a+b=h(\cot\beta+\cot\gamma)\cos\alpha$,及 $2\sin\alpha=(\cot\gamma-\cot\beta)\cos\alpha+(a-b)/h$. 試證之.

【證】 自 A, B 向塔引水平線 AD, BE.



則 $\angle QAD=\angle QBE=\alpha$, $\angle PAD=\angle PAQ-\angle QAD=\beta-\alpha$, $\angle PBE=\angle PBQ+\angle QBE=\gamma+\alpha$.

$\therefore \angle APQ=90^\circ-\angle PAD=90^\circ-(\beta-\alpha)$,

$\angle BPQ=90^\circ-\angle PBE=90^\circ-(\gamma+\alpha)$.

$$\therefore AQ=\frac{PQ\sin APQ}{\sin PAQ}, \text{即 } a=\frac{h\cos(\beta-\alpha)}{\sin\beta},$$

$$BQ=\frac{PQ\sin BPQ}{\sin PBQ}, \text{即 } b=\frac{h\cos(\gamma+\alpha)}{\sin\gamma}.$$

$$\therefore a+b=h\left\{\frac{\cos(\beta-\alpha)}{\sin\beta}+\frac{\cos(\gamma+\alpha)}{\sin\gamma}\right\},$$

$$a-b=h\left\{\frac{\cos(\beta-\alpha)}{\sin\beta}-\frac{\cos(\gamma+\alpha)}{\sin\gamma}\right\}.$$

從此卽得證明題式.

93. 有船行到 A 處,初望見山頂 S,由此向山之方向進行,到 B 處,測 S 之仰角爲 α 度,而地球之中心爲 O,OS 截地球表面之點爲 C,弧 AC$=a$,弧 BC$=b$,則地球之半徑及山高殆等於 $\frac{a^2-b^2}{2b}\cot\alpha$, $\frac{a^2b\tan\alpha}{a^2-b^2}$.

【證】 令 AS 爲 A 點之切線,BE 爲 B 點之切線,

則 $\angle SBE=\alpha$.

又令地球半徑爲 R,山高爲 x,從直角三角形 SOA 得

$$OA=OS\cos AOC, \text{即 } R=(R+x)\cos\frac{a}{R}$$

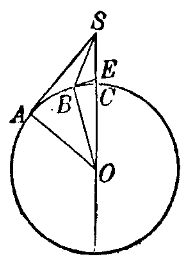
$$=(R+x)\left(1-\frac{a^2}{2R^2}\right), \quad \therefore R+x=\frac{2R^3}{2R^2-a^2}.$$

又 $\angle OBS=\frac{\pi}{2}+\alpha$, $\angle BSO=\pi-(\angle OBS+\angle BOC)$

$$=\pi-\left(\frac{\pi}{2}+\alpha+\frac{b}{R}\right)=\frac{\pi}{2}-\left(\alpha+\frac{b}{R}\right),$$

$$\therefore \frac{OS}{OB}=\frac{\sin OBS}{\sin BSO}$$

$$=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\Big/\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\frac{b}{R}\right),$$



即 $$\frac{R+x}{R}=\frac{\cos\alpha}{\cos\left(\alpha+\frac{b}{R}\right)}$$

$$=\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\frac{b}{R}-\sin\alpha\sin\frac{b}{R}}$$

$$\therefore \frac{2R^3}{2R^2-a^2}=\frac{R\cos\alpha}{\cos\alpha\left(1-\frac{b^2}{2R^2}\right)-\sin\alpha\left(\frac{b}{R}-\frac{b^3}{6R^3}\right)},$$

簡之得

$R=\frac{(a^2-b^2)\cot\alpha}{2b}+\frac{b^2}{6R}$,因 b 與 R 之比甚小,

故省略 $\frac{b^2}{6R}$ 而得 $R=\frac{(a^2-b^2)\cot\alpha}{2b}$,

$$x=R\left(\frac{2R^2}{2R^2-a^2}-1\right)=\frac{2a^2b^2}{(a^2-b^2)^2\cot^2\alpha-2a^2b^2}\times R$$

$$=\frac{2a^2b^2\tan^2\alpha}{(a^2-b^2)^2-2a^2b^2\tan^2\alpha}\times R$$

$$\fallingdotseq\frac{2a^2b^2\tan^2\alpha}{(a^2-b^2)^2}\times R$$

$$=\frac{a^2b\tan\alpha}{a^2-b^2}.$$

94. 設 s_1, s_2, s_3 爲 $(s-a), (s-b), (s-c)$,

則 $r=\sqrt{\frac{s_1s_2s_3}{s}}$, $r_1=\sqrt{\frac{ss_2s_3}{s_1}}$,

$r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1=s^2$, $s=\sqrt{rr_1r_2r_3}$,試證之.

【證】 $r=\frac{S}{s}=\frac{1}{s}\sqrt{ss_1s_2s_3}=\sqrt{\frac{s_1s_2s_3}{s}}$.

$$r_1=\frac{S}{s_1}=\frac{1}{s_1}\sqrt{s_1ss_2s_3}=\sqrt{\frac{ss_2s_3}{s_1}}.$$

$$r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1=\frac{S^2}{s_1s_2}+\frac{S^2}{s_2s_3}+\frac{S^2}{s_3s_1}$$

$$=\frac{S^2(s_1+s_2+s_3)}{s_1s_2s_3}$$

$$=s(s-a+s-b+s-c)$$

$$=s^2.$$

$$S=\sqrt{ss_1s_2s_3}=\sqrt{\left(\frac{S}{r}\times\frac{S}{r_1}\times\frac{S}{r_2}\times\frac{S}{r_3}\right)}$$

$$=\frac{S^2}{\sqrt{rr_1r_2r_3}}.$$

$$=\sqrt{rr_1r_2r_3}.$$

95. $3\sqrt{\frac{r_1r_2r_3}{r}}-\sqrt{\frac{rr_2r_3}{r_1}}-\sqrt{\frac{r_1rr_3}{r_2}}-\sqrt{\frac{r_1r_2r}{r_3}}$
$=2s.$

【證】 原式之左邊 $=\left(\frac{3}{r}-\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_3}\right)$

$$\sqrt{rr_1r_2r_3}$$

$$=\left(\frac{3}{r}-\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_3}\right)S$$

$$=\frac{3S}{r}-\frac{S}{r_1}-\frac{S}{r_2}-\frac{S}{r_3}$$

$$=3s-s_1-s_2-s_3$$

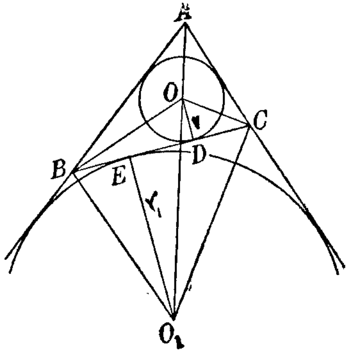
$$=3s-(s-a)-(s-b)-(s-c)$$

$$=a+b+c=2s.$$

96. $r\left(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)=r_1\left(\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)=a.$

【證】 三角形爲ABC,其內切圓及傍切圓之中心爲

O及O_1,其切圓周BC之點爲D及E,



則 $BD=OD\cot DBO$

$=r\cot\frac{1}{2}B,$

$CD=r\cot\frac{1}{2}C,$

$BE=O_1E\cot EBO_1$

$=\gamma_1\cot\frac{1}{2}(180°-B)$

$=r_1\tan\frac{1}{2}B,$

$CE=r_1\tan\frac{1}{2}C,$

而 $r(\cot\frac{1}{2}B+\cot\frac{1}{2}C)=BD+CD=BC=a,$

$r_1(\tan\frac{1}{2}B+\tan\frac{1}{2}C)=BE+CE=BC=a,$

故題云云

√97. 自三角形之各角頂向a,b,c引垂線h_1,h_2,h_3,則$\frac{1}{S}=$

$$\sqrt{\left\{\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}\right)\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}-\frac{1}{h_3}\right)\left(\frac{1}{h_1}-\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}\right)\left(\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}-\frac{1}{h_1}\right)\right\}}$$

試證之.

【證】 $\because a=\frac{2S}{h_1}, b=\frac{2S}{h_2}, c=\frac{2S}{h_3}$,

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{\{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)\}},$$

以前式a, b, c之值代入後式而變化之,則

$$S=S^2\sqrt{\left\{\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}\right)\left(\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}-\frac{1}{h_1}\right)\left(\frac{1}{h_3}+\frac{1}{h_1}-\frac{1}{h_2}\right)\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}-\frac{1}{h_3}\right)\right\}}.$$

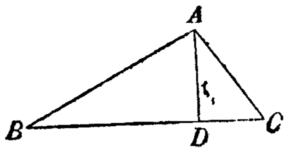
從此卽能證明原式.

98. $h_1=\frac{b^2sin2C+c^2sin2B}{2a}$. 試證之.

【證】 從A作BC或BC延線之垂綫,交於D,

則$S=\triangle ABD\pm\triangle ACD$.

但$S=\frac{1}{2}h_1a$,

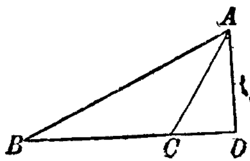


則$\triangle ABD=\frac{1}{2}h_1BD$

$$=\frac{1}{2}csinB\times BD$$

$$=\frac{1}{4}c^2sin2B,$$

同樣$\triangle ACD=\pm\frac{1}{4}b^2sin2C$.

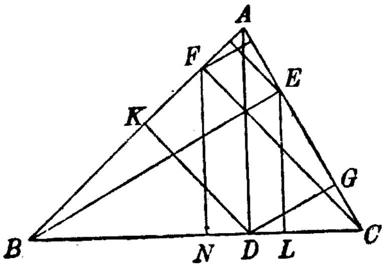


由是$2h_1a=c^2sin2B+b^2sin2C$.

$$\therefore h_1=\frac{b^2sin2C+c^2sin2B}{2a}.$$

99. 從△ABC之三垂綫足D,E,F,引各二鄰邊之垂線之六足,同在一圓周上,則其圓之半徑爲$R(\cos^2A\cos^2B\cos^2C+\sin^2A\sin^2B\sin^2C)^{\frac{1}{2}}$.試證之.

【證】 從D引DG⊥AC, DK⊥AB,從E及F引



EL⊥BC, FN⊥BC,

則 $BN=BF\cos B=a\cos^2 B$,

$BK=BD\cos B=c\cos^2 B$.

又 $\overline{KN}^2=\overline{BN}^2+\overline{BK}^2-2BN.BK\cos B$

$=\cos^4 B(a^2+c^2-2ac\cos B)=b^2\cos^4 B$,

∴ $KN=b\cos^2 B$, 由是 $BN:KN:BK=a:b:c$.

∴ △BNK∽△BCA,而 ∠BNK=C.

同樣△CGL,△AGK亦與△ABC相似,而

∠CGL=A, ∠AGK=B, ∴ ∠LGK=180°−A−B=C,

由是∠LGK=∠BNK, 由幾何學知N,L,G,K同在一圓周上.同樣從E, F引AB, AC之垂線之足亦在其圓周上.

∠NKG=180°−∠BKN−∠AKG=180°−A−C=B,

$CN=a-BN=a-BF\cos B=a-a\cos^2 B=a\sin^2 B$,

$CG=b\cos^2 C$,

則 $\overline{NG}^2=\overline{CN}^2+\overline{CG}^2-2CN.CG\cos C=a^2\sin^4 B+b^2\cos^4 C-2ab\sin^2 B\cos^3 C$

$=4R^2\sin^2 B(\sin^2 A\sin^2 B+\cos^4 C-2\sin A\sin B\cos^3 C)$

$=4R^2\sin^2 B\{\sin^2 A\sin^2 B+\cos^3 C[-\cos(A+B)-2\sin A\sin B]\}$

$=4R^2\sin^2 B\{\sin^2 A\sin^2 B-\cos^3 C\cos(A-B)\}$

$=4R^2\sin^2 B\{\sin^2 A\sin^2 B+\cos^2 C\cos(A+B)\cos(A-B)\}$

$=4R^2\sin^2 B\{\sin^2 A\sin^2 B+\cos^2 A\cos^2 B\cos^2 C-\sin^2 A\sin^2 B\cos^2 C\}$

$=4R^2\sin^2 B(\sin^2 A\sin^2 B\sin^2 C+\cos^2 A\cos^2 B\cos^2 C).$

令所求之圓之半徑為 x，則 $\triangle NKG$ 之外切圓之半徑為 x.

由是 $2x=\dfrac{NG}{\sin NKG}=\dfrac{NG}{\sin B}$

$=2R(\sin^2 A\sin^2 B\sin^2 C+\cos^2 A\cos^2 B\cos^2 C)^{\frac{1}{2}}.$

100. $\dfrac{\triangle BOC}{\triangle BO_1C}+\dfrac{\triangle COA}{\triangle CO_2A}+\dfrac{\triangle AOB}{\triangle AO_3B}=1.$

試證之.

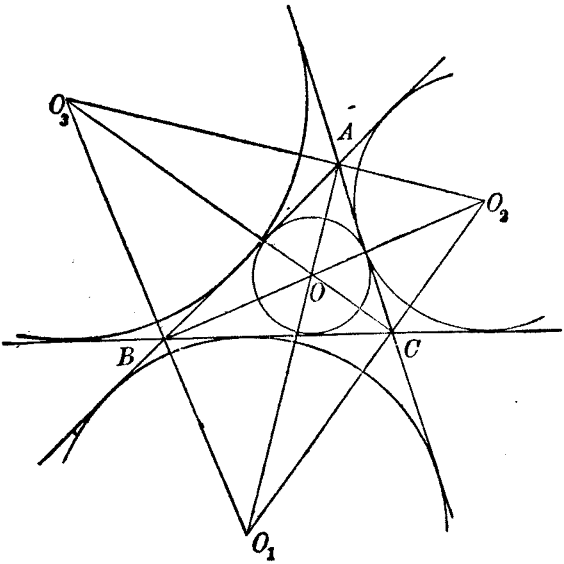
【證】 $\because \dfrac{\triangle BOC}{\triangle BO_1C}=\dfrac{r}{r_1}=\dfrac{s_1 r}{S}$,

$\dfrac{\triangle COA}{\triangle CO_2A}=\dfrac{s_3 r}{S}$,

$$\frac{\triangle AOB}{\triangle AO_3B}=\frac{s_3r}{S},$$

$$\therefore \frac{\triangle BOC}{\triangle BO_1C}+\frac{\triangle COA}{\triangle CO_2A}+\frac{\triangle AOB}{\triangle AO_3B}$$

$$=\frac{r(s_1+s_2+s_3)}{S}=\frac{rs}{S}=\frac{S}{S}=1.$$



（完）