Камісарыят Асьветы Б. Р. С. Р.

А. КРУТАЛЕВІЧ

ЭЛЕМЭНТАРНАЯ АЛЬГЭБРА

ЧАСТКА ДРУГАЯ

ДЗЯРЖАЎНАЕ ВЫДАВЕЦТВА
МАСКВА—1924—ЛЕНІНГРАД

Функцыі і іх графічнае прадстаўленьне.

Азначэньне функцыі.

§ 1. Разьвязваючы якую-небудзь агульную альгэбрычную задачу, мы стараемся скласьці раўнаньне, якое злучала-б два стасоўныя дзеля гэтае задачы выразы; а потым прадстаўляем невядомы лік у форме альгэбрычнага выразу, які зьмяшчае вядомыя з задачы лікі. Адсюль вынікае, што адказ на кожную агульную задачу залежыць ад дадзеных у ёй агульных лікаў, а залежнасьць гэта выражаецца або ў раўнаньні, якое мы для гэтай задачы ўлажылі, або—ў разьвязку яго.

Так, скажам, у задачы:

купец купіў а кніжак за Ь *рублёў. Па колькі рублёў павінен ён прадаваць кожную кніжку, каб атрымаць с руб. зыску?*

—невядомая цана x аднэй кніжкі *залежыць* ад дадзеных у задачы агульных лікаў:

$$a, b, c$$

(ліку кніжак a, цаны куплі b, жаданага зыску c).

А залежнасьць невядомага ліку x ад агульных лікаў a, b, c выражаецца або ў раўнаньні:

$$ax = b + c,$$

або ў выразе:

$$x = \frac{b+c}{a}$$

Ведаючы значэньні агульных лікаў, можам знайсьці і невядомы лік.

Адсюль уласна вынікае нязьмернай вагі матэматычнае паняцьце—паняцьце *функцыі:*

Адзін агульны лік ёсьць функцыя другога агульнага ліку тады, калі пазнаньня таго другога ліку досыць дзеля пазнаньня гэтага першага.

Трэба пры гэтым памятаць, што сказ:

агульны лік А *ёсьць функцыя агульнага ліку* а, значыць зусім тое самае, што й сказ:

агульны лік А *залежыць ад агульнага ліку* а.

Так, напрыклад:

1. Купец скажа:

Зыск *залежыць* ад цаны, заплачанай за тавар, і ад цаны, атрыманай ад прадажы.

Рыс 1.

Мы скажам:

Зыск ёсьць *функцыя* цаны, заплачанай за тавар, і цаны, атрыманай ад прадажы.

2. Геомэтр скажа:

Даўжыня дугі акружыны *залежыць* ад даўжыні адказваючай ёй хорды й ад даўжыні радыусу,

а мы скажам, што

даўжыня дугі акружыны ёсьць *функцыя* даўжыні хорды і даўжыні радыусу гэтага кола.

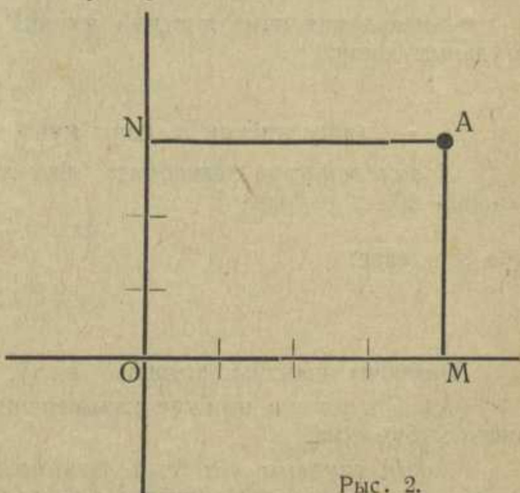
У альгэбры кожны выраз, а так сама разьвязак кожнага раўнаньня ёсьць функцыя агульных лікаў, якія там знаходзяцца.

Геомэтрычнае прадстаўленьне двух лікаў пры помачы пункту.

§ 2. Калі агульны лік A ёсьць функцыя агульнага ліку a, тады сувязь паміж імі можам уявіць сабе ў наступны спосаб.

Рысуем дзьве ўзаемна старчавыя лініі, якія называюцца *восямі* (рыс. 2), а ўласна: вось паземную і вось старчавую; пункт *x* перасячэньня абазначаем літарай O і называем *пачаткам.* Адлегласьць некаторага пункту A ад восі старчавой, г. ё. адцінак NA=OM, будзем называць *абсцысай* пункту A; адлегласьць пункту A ад паземнай восі, ці адцінак MA=ON, будзем называць *ардынатай* гэтага-ж пункту.

Адсюль бачым, што, маючы вядомыя: абсцысу (напр.=4) і ардынату (напр.=3) якога-небудзь пункту A, можам яго лёгка знайсьці. Дзеля гэтае мэты адкладваем на паземнай восі адцінак OM (=4), роўны дадзенай абсцысе, а на восі старчавой адкладваем адцінак ON (=3), роўны дадзенай ардынаце. Чацьвертая вяршыня A простакутніка OMAN, пабудаванага на старчавых баках OM і ON, і будзе шуканы пункт.



Рыс. 2.

Пабудова звычайна робіцца прасьцей: на паземнай восі адкладваем адцінак OM, роўны дадзенай абсцысе (4), пасьля чаго роўналежна да восі старчавой праводзім адцінак MA, роўны ардынаце (3).

Пры гэтым трэба памятаць, што:

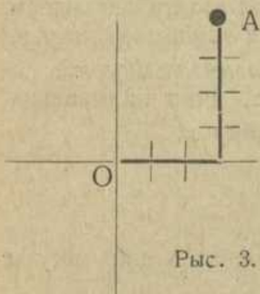
дадатныя абсцысы мераем управа ад старчавой восі;
адмоўныя абсцысы мераем улева ад старчавой восі;
дадатныя ардынаты мераем угару ад паземнае восі;
адмоўныя ардынаты мераем уніз ад паземнае восі.

Такім чынам, пункты:

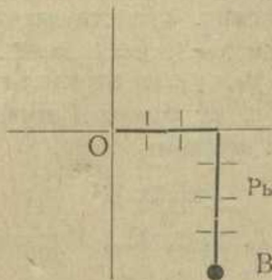
A (абсцыса 3, ардыната 4),
B (» 3, » —4),

C (абсцыса —3 ордыната —4),
D (» —3 » 4),
E (» 3 » 0),
F (» —3 » 0),
G (» 0 » 4),
H (» 0 » —4),

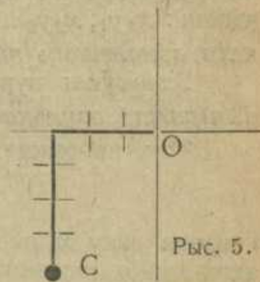
будуць (рыс. 3—10):



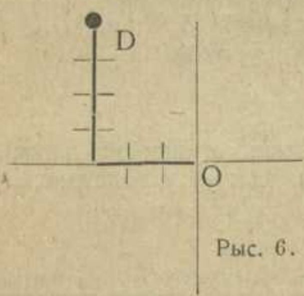
Рыс. 3.



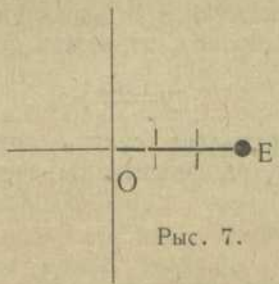
Рыс. 4.



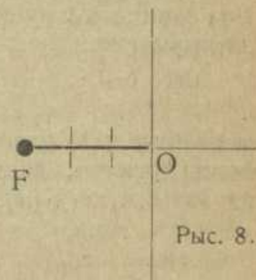
Рыс. 5.



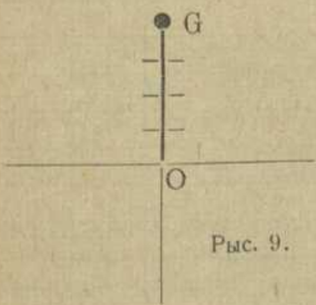
Рыс. 6.



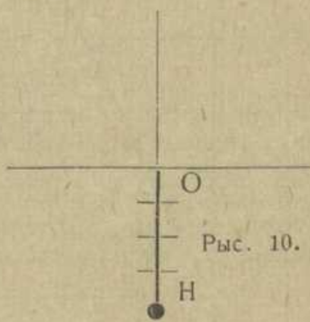
Рыс. 7.



Рыс. 8.



Рыс. 9.



Рыс. 10.

Пункт, які мае абсцысу=O і ордынату=O, азначае пачатак восяў.

Звычайна, дзеля абазначэньня, што пункт A мае абсцысу, роўную, напрыклад, 5, і ордынату, роўную 3, пішам: A (5,3).

З а д а ч ы.

Прыняўшы адцінак даўжынёй 10 сантым., як геомэтрычны вобраз адзінкі, знайсьці пункты, якія маюць наступныя абсцысы і ордынаты:

1.	1,2 ; 0,7	2.	—0,92; 1,36
3.	—1,73; 1,65	4.	0,27;—1,75
5.	1,53; 0	6.	0 ;—2,15
7.	$-1\frac{1}{2}$; $-2\frac{1}{5}$	8.	$2\frac{1}{2}$; $-1\frac{1}{5}$
9.	$-\frac{1}{4}$;—0,75	10.	0 ; $1\frac{2}{5}$

Графічнае прадстаўленьне сувязі між двома агульнымі лікамі.

Дыяграма функцыі $ax+b$.

§ 3. У мэтах графічнага прадстаўленьня сувязі паміж лікам x (абсцысай) і яго функцый—лікам y (ордынатай), будзем даваць ліку x вартасьці: 1, 2, 3.... і адмерываць на паземнай восі абсцысы: Ox_1, Ox_2, Ox_3...., якія геомэтрычна прадстаўляюць лікі: 1, 2, 3....; пасьля гэтага адкладзем адцінкі: x_1y_1, x_2y_2...., геомэтрычна прадстаўляючыя тыя *вартасьці ліку y, якія адказваюць значэньням $x=1$, $x=2$, $x=3$.... агульнага ліку x.*

Злучыўшы пункты y_1, y_2, y_3...., атрымаем лінію, якая называецца *дыяграмай агульнага ліку y, як функцыі* агульнага ліку x.

Так, напрыклад, маючы функцыю

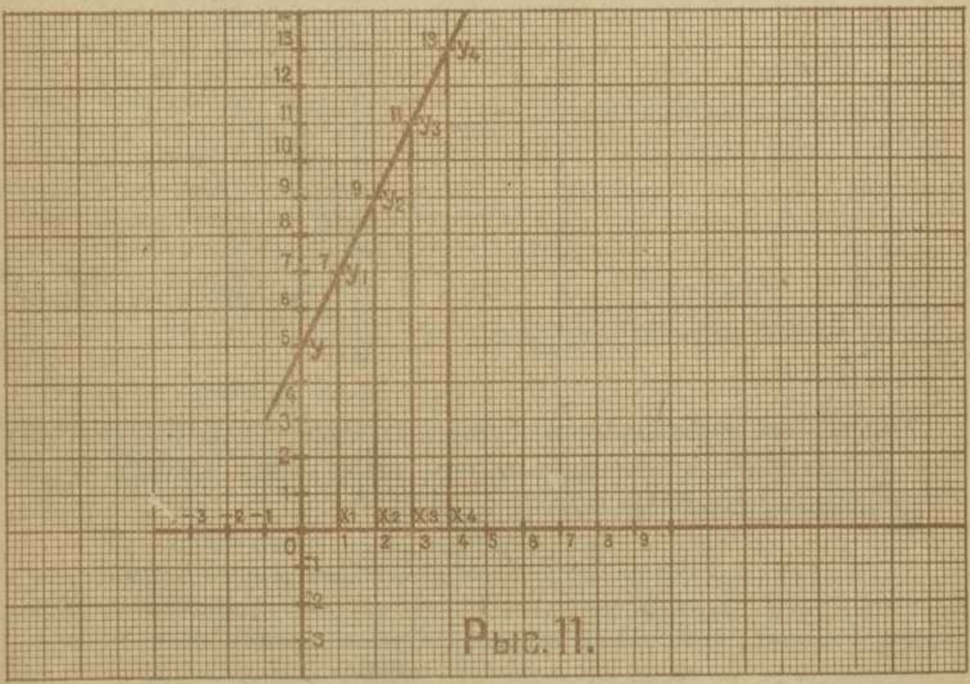
$$y=2x+5$$

і даючы ліку x вартасьці: 0, 1, 2, 3...., будзем атрымліваць для ліку y адпаведныя значэньні: 5, 7, 9, 11....

Адклаўшы цяпер, згодна вышэй апісанаму способу, абсцысы (0, 1, 2, 3....) і ад канцовага пункту кожнай з іх адпаведныя адцінкі (5, 7, 9, 11....) і злучыўшы канцы гэтых апошніх, атрымаем дыяграму функцыі

$$y=2x+5,$$

якая (рыс. 11) навочна паказвае сувязь паміж двома агульнымі лікамі, інакш кажучы, паказвае, як зьмяняецца функцыя (лік y) у залежнасьці ад другога ліку (x).



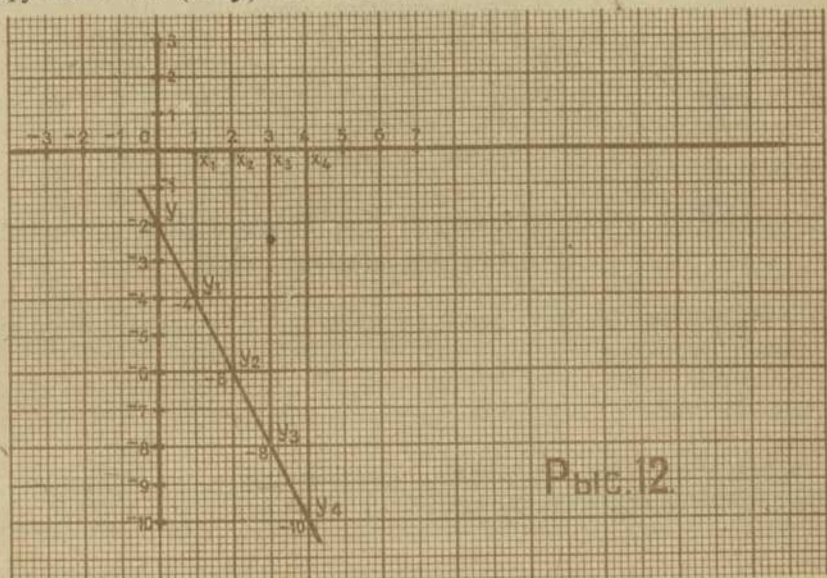
Рыс. 11.

У даным прыкладзе бачым, што лік x паступова павялічваецца кожны раз на 1 адзінку, функцыя-ж яго (лік y) кожны раз узрастае на 2 адзінкі.

Маючы функцыю

$$y=-2x-2$$

і нарысаваўшы яе дыяграму, заўважым (рыс. 12), што тутака ўжо залежнасьць паміж лікам y і лікам x будзе іншая, а ўласна: пры павялічэньні ліку x, функцыя яго (лік y) зьмяншаецца.



Рыс. 12

У тым і ў другім выпадку дыяграма функцыі зьяўляецца простай лініяй. Геомэтрычным шляхам можна давесьці, што, наогул, дыяграма функцыі віду:

$$ax+b,$$

дзе x—агульны лік (або, як кажуць, „зьменная велічыня“), а a і b—лікі вядомыя (або—„сталыя“)—*ёсьць простая лінія.*

Адсюль вынікае надта лёгкі спосаб рысаваньня дыяграмы такіх функцый: досыць ліку x надаць якія-небудзь два значэньні (напрыклад, 0 і 1), потым знайсьці адказваючыя ім значэньні функцыі, злучыць адпаведныя пункты простай лініяй і прадоўжыць яе ў абодва бакі. Лінія гэта й будзе шуканая дыяграма функцыі. (На практыцы, калі рысаваньне робіцца на клеткавай мілімэтравай паперы, правёўшы лінію, трэба зрабіць заўсёды праверку некалькіх пунктаў).

З а д а ч ы.

Прыняўшы 1 сантымэтр, як геомэтрычны вобраз адзінкі, нарысаваць дыяграмы функцый:

11. $y=2x-5$ 12. $y=-2x+5$
13. $y=-2x-5$ 14. $y=6x$
15. $y=-6x$ 16. $y=2x-2,\ y_1=2x-1,\ y_2=2x,\ y_3=2x+1$ (на адным рысунку ўсе)

17. $y=2x+5,\ y_1=\dfrac{x}{2}+5$
18. $y=-3x+5,\ y_1=-2x+5,\ y_2=-x+5,\ y_3=5,\ y_4=x+5$
19. $y-x=3$
(спачатку трэба выразіць y праз x)

20. $2x+y=3$ (так сама)

21. $x-2y=8$ (так сама)

Прыймаючы адцінак даўжынёй у 5 сант. за геомэтрычны вобраз адзінкі, нарысаваць дыяграмы наступных функцый:

22. $y=1{,}2x-2$; $y_1=1{,}2x-1{,}8$; $y_2=1{,}2x-1{,}6$,.... $y_{12}=1{,}2x+0{,}4$ (на адным рысунку).

23. $y=-x+1{,}2$; $y_1=-0{,}8x+1{,}2$; $y_2=-0{,}6x+1{,}2$; $y_3=-0{,}4x+1{,}2$; $y_4=-0{,}2x+1{,}2$; $y_5=1{,}2$; $y_6=0{,}2x+1{,}2$; $y_7=0{,}4x+1{,}2$; $y_8=0{,}6x+1{,}2$; $y_9=0{,}8x+1{,}2$; $y_{10}=x+1{,}2$.
(так сама: на адным рысунку ўсе функцыі).

Графічнае разьвязаньне сыстэмы двох раўнаньняў з дзьвёма невядомымі.

§ 4. Маючы сыстэму двох раўнаньняў з дзьвёма невядомымі, напрыклад:

$$2y-x=2 \quad \text{і} \quad y-2x=-5,$$

мы можам у кожным з іх лічыць невядомы лік y, як функцыю x; тады нашы раўнаньні прымуць выгляд:

$$y=\frac{1}{2}x+1 \qquad (1)$$
і
$$y=2x-5 \qquad (2)$$

З § 2 мы ведаем, што агульныя лікі заўсёды вызначаюць *адзін* пэўны пункт на роўніцы. З другога боку, роўнасьці (1) і (2), як функцыі, прадстаўленыя графічна, дадуць нам на рысунку *дзьве* простыя лініі. Але ў сыстэме адначасных раўнаньняў разьвязкі іх—адны і тыя самыя значэньні невядомых; значыцца, *пункт, якога абсцыса* (x) *і ордыната* (y) *ёсьць разьвязкі сыстэмы двох адначасных раўнаньняў,—зьяўляецца пунктам перасячэньня простых ліній, выражаных гэтымі раўнаньнямі.*

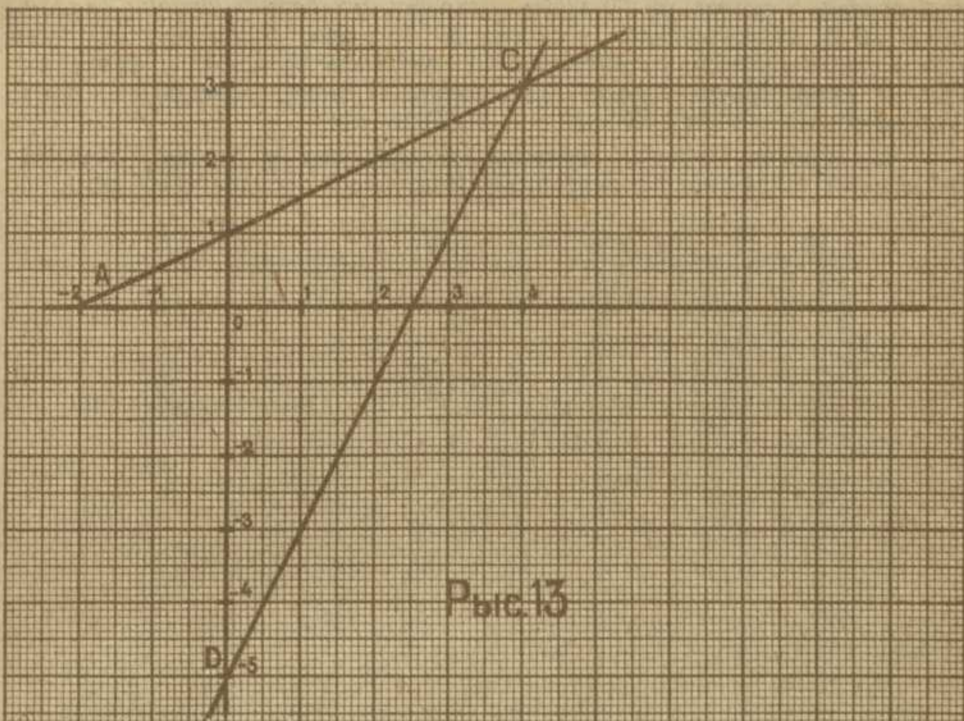
Адсюль вынікае вельмі лёгкі спосаб графічнага разьвязваньня сыстэмы двох адначасных раўнаньняў. Маючы, напрыклад, вышэй памянёную сыстэму:

$$2y-x=2 \quad \text{і} \quad y-2x=-5$$

выражаем адзін з невядомых лікаў (напр. y), як функцыю другога невядомага:

$$y=\frac{1}{2}x+1 \qquad (1)$$
і
$$y=2x-5, \qquad (2)$$

Потым рысуем простую лінію AC (рыс. 13), якая прадстаўляе раўнаньне (1) і простую DC, якая выражае функцыю (2). Перасячэньне гэтых дзьвёх простых дасьць нам пункт C, якога абсцыса ($x=4$) і ордыната ($y=3$) будуць разьвязкамі дадзеных раўнаньняў. І праўда, разьвязваючы сыстэму гэтых раўнаньняў пры помачы вылічэньняў, атрымаем тыя самыя разьвязкі, г. ё. $x=4$ і $y=3$.



Рыс. 13

Трэба зазначыць, што ўсе атрыманыя такім спосабам рэзультаты не заўсёды будуць дакладнымі, але на практыцы, у вагромнай большасьці выпадкаў, калі рысунак зроблен акуратна (на мілімэтравай паперы), разьвязаньне такое можа быць выстарчаючым.

З а д а ч ы.

Разьвязаць графічна наступныя сыстэмы раўнаньняў (геомэтрычны вобраз адзінкі$=$1 сантымэтру).

24. $x+y=5$; $x-y=1$
25. $2x+y=6$; $x-2y=8$
26. $y-2x=1$; $x-2y=4$
27. $2x+y=3$; $x-2y=4$
28. $2y-3x=12$; $2x+y=1$

Прыняўшы адцінак даўжынёй 5 сантым., як геомэтрычную адзінку, разьвязаць графічна наступныя сыстэмы раўнаньняў:

29. $4x+5y=5$; $6x-5y=10$
30. $4x-5y=9$; $6x-5y=10$
31. $2y+7x=-5$; $5y-5x=1$

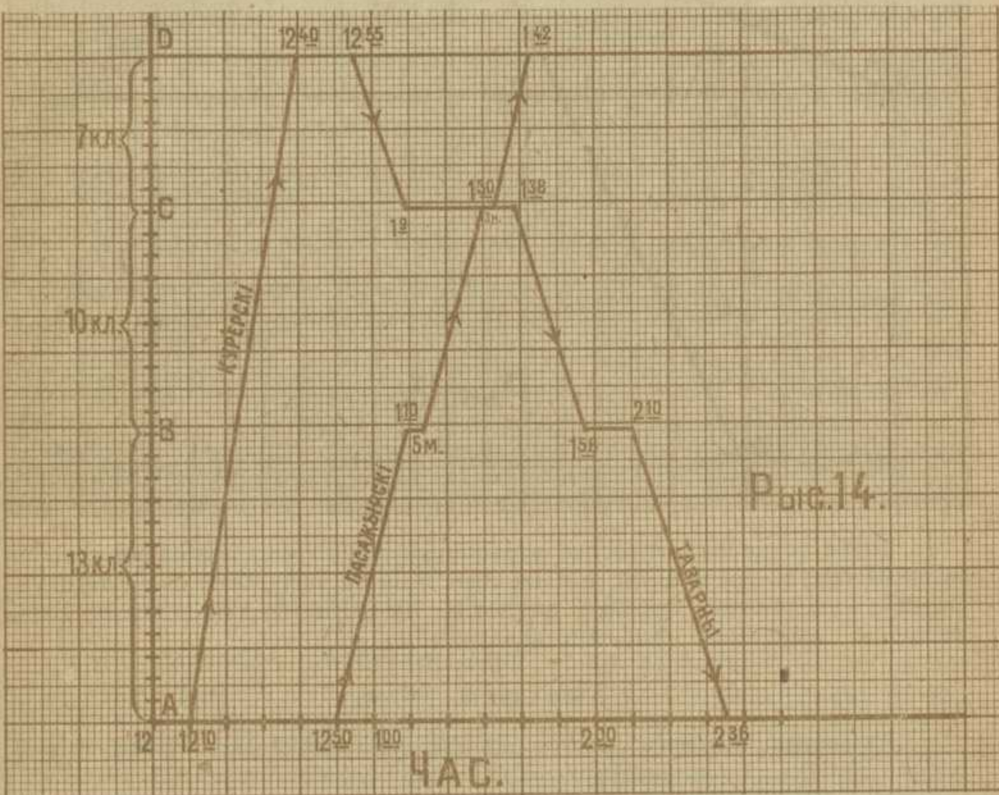
Г р а ф і к і.

§ 5. Асновы вышэй апісанага графічнага мэтоду знаходзяць сабе шырокае прыстасаваньне ня толькі ў матэматыцы, але і ў штодзённым жыцьці.

Цікавы прыклад такога прыстасаваньня бачым у так званых *графіках ходу цягнікоў* (паяздоў), якія дазваляюць лёгка й хутка азначыць месца спатканьняў і ход цягнікоў на пэўнай дыстанцыі, у розных кірунках і з living рознымі скорасьцямі, але па аднэй толькі лініі (галіне), з прычыны чаго цягнікі разыйсьціся могуць толькі на станцыях, дзе ёсьць дадатковыя бочныя лініі.

Далучаны рысунак (14-ты) прадстаўляе графікі ходу трох цягнікоў: *кур'ерскага*, з скорасьцю 60 кілём. у гадзіну, які йдзе ў кірунку са станцыі A да D, *пасажырскага*, з скорасьцю 40 кілём. у гадзіну, які йдзе у тым самым кірунку, і *таварнага*—з скорасьцю 30 кілём. у гадз., які йдзе ў супраціўным кірунку (са станцыі D да A). Адлегласьць паміж станцыямі: AB=13 кіл., BC=10 кіл. і CD=7 кіл.

Час (гадзіны і мінуты) звычайна адкладваюцца на паземнай восі, пачынаючы ад 12-ай гадз., а адлегласьці (кілёмэтры)—на старчавой восі.



Такім чынам, з рысунку адразу й навочна бачым, што:

1) *кур'ерскі* цягнік выяжджае са станцыі A a 12 гадз. 10 м. і, не затрымоўваючыся на станцыях B і C, прыходзіць на станцыю D a 12 г 40 м., зрабіўшы, значыцца, 30 кілём. у працягу 30 м.

2) *пасажырскі* цягнік выяжджае са станцыі A a 12 г. 50 м. і праз 20 мін. прыходзіць на станцыю B a 1 г. 10 мін., стаіць там 5 мінут (у гэты час *ордыната у не зьмяняецца*), потым выяжджае на станцыю C, прыходзіць туды a 1 г. 30 мін., стаіць 3 мінуты і, ўрэшце, a 1 г. 42 мін. прыяжджае на станцыю D.

3) З гэтай станцыі, 15 мінут пасьля прыходу кур'ерскага цягніка, выпусьцілі a 12 г. 55 м. *таварны* цягнік, які, прыехаўшы на станцыю C a 1 г. 9 м., павінен там *чакаць прыходу* пасажырскага цягніка са станцыі B і, толькі пасьля яго адходу, выяжджае a 1 г. 38 м. далей, і, затрымаўшыся 12 мінут на станцыі B, прыходзіць на станцыю A a 2 г. 36 м.

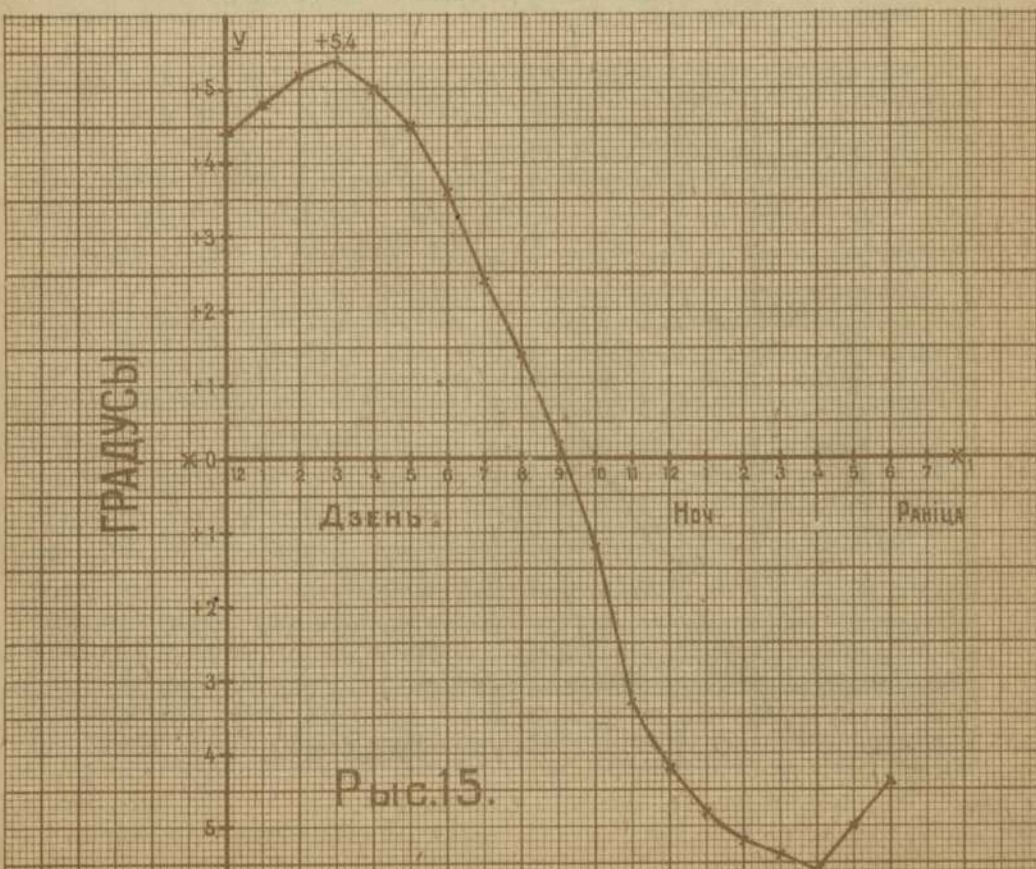
Цікава заўважыць, што, як бачым з рысунку,—*чым большая скорасьць цягніка, тым больш лінія графіку адхіляецца ад кірунку паземнай восі,* на якой мераем час.

Другім практычным прыстасаваньнем графічнага мэтоду зьяўляюцца *графікі тэмпэратуры.*

Хай, напрыклад, ад 12-ай гадзіны ў поўдзень да 6-ай гадз. раніцы наступнага дня мералі што-гадзіна тэмпэратуру, прычым заўважылі, што:

а гадз.	12	у поўдзень	тэмпэратура	была	+4,4
„	1	па поўдню	„	„	+4,8
„	2	„	„	„	+5,2
„	3	„	„	„	+5,4
„	4	„	„	„	+5,0
„	5	„	„	„	+4,5
„	6	„	„	„	+3,6
„	7	„	„	„	+2,4
„	8	веч.	„	„	+1,4
„	9	„	„	„	+0,2
„	10	„	„	„	—1,2
„	11	„	„	„	—3,3
„	12	уночы	„	„	—4,2
„	1	„	„	„	—4,8
„	2	„	„	„	—5,2
„	3	„	„	„	—5,4
„	4	„	„	„	—5,6
„	5	„	„	„	—5,0
„	6	„	„	„	—4,4

Каб нарысаваць графік тэмпэратуры на працягу гэтага часу, бярэм мілімэтравую паперу і рысуем восі xx_1 і yy_1 (рыс. 15). На восі xx_1 адмерваем гадзіны (пункт 0 азначае 12-ую гадз. у поўдзень, пункт 1—першую гадзіну і г. д.), а на восі yy_1—градусы тэмпэратуры (0 азначае 0 градусаў); дадатныя градусы адмерваем угару ад нуля, адмоўныя—ўніз).



Рыс. 15.

Потым ставім кропкі, якія адказваюць тэмпэратуры адпаведнага часу, і злучаем іх неперарыўнай лініяй, якая і будзе графікам тэмпэратуры за 19 гадзін.

З графіку гэтага бачым, што *найвышэйшая тэмпэратура*, ці *максімум*, была а 3-яй гадз. па поўдню, *найніжэйшая*, ці *мінімум*,—а 4 гадз. раніцы.

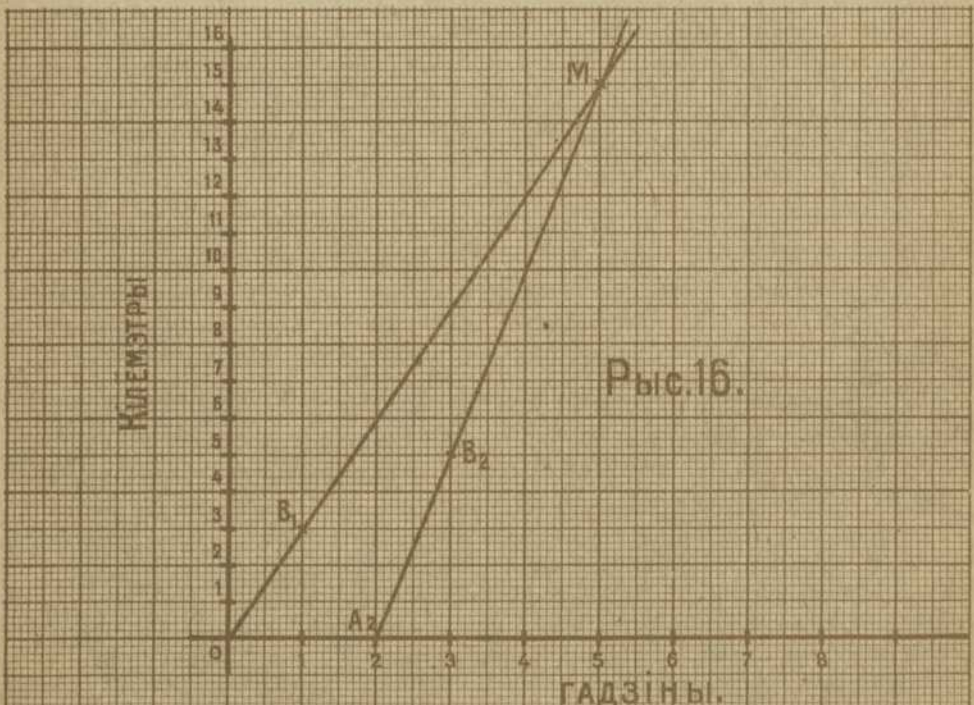
Калі-б мы мералі тэмпэратуру часьцей, скажам, што 15 мін., то атрыманая *крывая* была-б больш дакладнай. Аднак-жа і з данага графіку можам у прыбліжэньні азначыць тэмпэратуру ў той час, калі мы яе ня мералі; напрыклад, а гадз. 10 і 30 мін. тэмпэратура была —2,2.

На заканчэньне, трэба сказаць, што графічны мэтод у матэматыцы зьяўляецца ня толькі цікавай ілюстрацыяй і спосабам праверкі, але й служыць для беспасярэднага разьвязваньня шмат-якіх задач.

Возьмем дзеля прыкладу наступныя дзьве задачы.

1) Падарожны выбраўся з пэўнага месца а 12 гадз. у поўдзень і робіць у пэўным кірунку 3 кілёмэтры на гадзіну. Праз гадзіну пасьля яго выхаду, з гэтага-ж месца выходзіць другі падарожны ў тым самым кірунку з скорасьцю 5 кілём. на гадзіну; калі ён дагоніць першага і на якой адлегласьці ад месца выхаду?

У мэтах разьвязаньня гэтай задачы, пабудуем вядомую нам сыстэму восяў. (Рыс. 16).—Хай пункт O азначае поўдзень. Тады час будзем адкладваць на паземнай восі, а адлегласьці—на старчавой. Першы падарожны праходзіць 3 кіл., значыцца, лінія OB_1—будзе графік першага падарожнага; у такі самы спосаб знойдзем, што лінія A_2B_2—будзе графік другога падарожнага. Яны перасякаюцца ў пункце M, які адказвае 5 гадзінам і 15 кілёмэтрам. Сустрэча, значыцца, будзе ў 15 кілёмэтрах ад месца выхаду і праз 5 гадзін пасьля выхаду першага падарожнага.



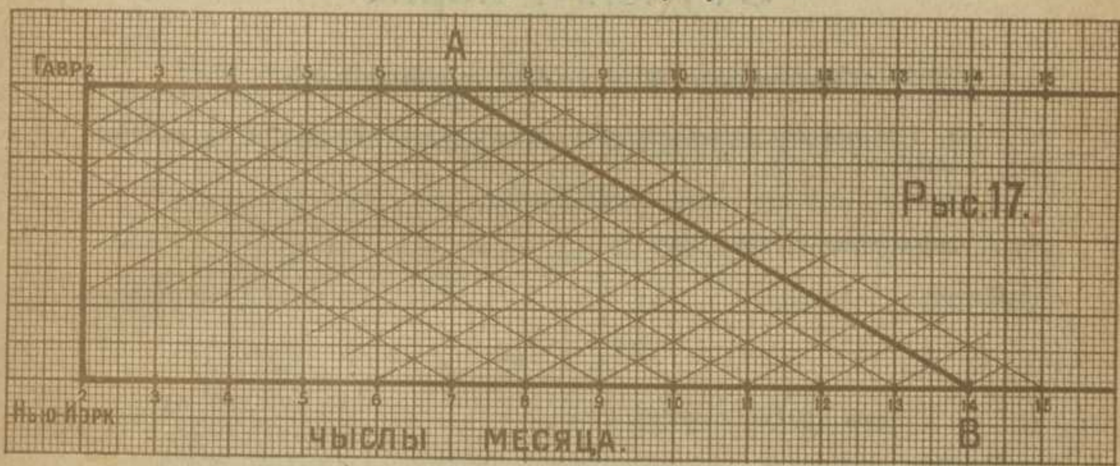
Рыс. 16.

2) Урэшце, яшчэ адна задача*), якую звычайным шляхам досыць трудна разьвязаць і пры разьвязваньні якой заўсёды робяць памылкі:

З Гавру (францускі порт) штодня роўна ў поўдзень выяжджае параход да Нью-Йорку, а з Нью-Йорку так сама штодня роўна ў поўдзень выяжджае параход гэтага самага таварыства да Гавру. Пераезд адбываецца роўна ў 7 дзён (усё роўна—у той, ці ў другі бок). Сколькі параходаў свайго таварыства, едучых з Нью-Йорку, спаткае ў дарозе параход, які выйдзе з Гавру сягоньня ў поўдзень?

На гэтае пытаньне, звычайна, адказваюць—*сем*, думаючы толькі аб параходах, якія павінны з сёньнешняга дня выйсьці ў дарогу, і забываючы аб тых параходах, якія ўжо знаходзяцца ў дарозе.

Разьвязак навочна прадстаўлен на рысунку 17-ым:



Калі, скажам, наш параход выйшаў з Гавру 7-га чысла, дык графік яго будзе AB. Як бачым, ён спаткае ў моры 13 параходаў, ды яшчэ той, які прыходзіць у Гавр у самы момант адходу, ды яшчэ той, які выходзіць з Нью-Йорку ў момант прыходу туды нашага параходу; усяго, значыцца, 15.

Графік паказвае, апрача гэтага, што сустрэчы будуць адбывацца штодня ў поўдзень і поўнач.

Задачы.

Знайсьці пры помачы графікаў разьвязкі наступных задач:

32. З дзьвёх станцый A і B, адлеглых адна ад другой на 60 кілёмэтраў, выйшлі насустрэч два цягнікі. Першы цягнік робіць $1/2$ кілёмэтра ў мінуту, а другі 1 кілёмэтр у мінуту. У сколькі мінут пасьля выхаду першага і ў якой адлегласьці ад A цягнікі спаткаюцца?

33. Сьлімак штодня ад 6-ай гадзіны раніцы да 6-ай гадз. веч. паўзе ўгару па дрэве і паднімаецца на 5 мэтраў, а за ноч, пакуль сьпіць, спускаецца на 2 мэтры. Пачаўшы паўзьці з раніцы нядзелі, калі (у які дзень) ён паднімецца на 9 мэтраў?

Даная ў гэтым аддзеле так званая „сыстэма координат“, дзякуючы якой мы можам графічна прадставіць кожную функцыйную залежнасьць між альгэбрычнымі лікамі, была адкрыта вядомым францускім матэматыкам *Рэнэ Дэкартам* (René Descartes, 1596—1650).

---

*) Францускага матэматыка Эд. Люка.

II.

Ступені і корні.

Падняцьце ў ступень адначленаў.

§ 6. *Ступеньню называем здабытак роўных сумножнікаў*, напрыклад, здабытак

$$2.2.2.2=16$$

ёсьць чацьвёртая ступень ліку 2;

здабытак:

$$\frac{1}{4}.\frac{1}{4}.\frac{1}{4}=\frac{1}{64}$$

ёсьць трэцяя ступень ліку $\frac{1}{4}$;

здабытак:

$$\overbrace{a.a.a.a.....a}^{n \text{ разоў}}=a^n$$

ёсьць n-ая ступень ліку a і г. д.

Дзеяньне, пры помачы якога атрымоўваем ступені, называецца *падняцьцем у ступень.*

З вядомых нам правілаў аб знаках пры множаньні вынікае, што:

1) *кожная ступень дадатнага ліку—ёсьць велічыня дадатная*, бо пры падняцьці ў ступень дадатнага ліку a ўсе сумножнікі будуць дадатныя;

2) *цотная ступень адмоўнага ліку ёсьць велічыня дадатная, а няцотная ступень адмоўнага ліку ёсьць велічыня адмоўная.*

І праўда, падносячы $-a$ у другую, трэцюю і г. д. ступені, будзем атрымліваць:

$$(-a).(-a)=a^2$$
$$(-a).(-a).(-a)=a^2.(-a)=-a^3$$
$$(-a).(-a).(-a).(-a)=-a^3.(-a)=a^4$$
$$(-a).(-a).(-a).(-a).(-a)=a^4.(-a)=-a^5 \text{ і г. д.}$$

Наогул, $(-a)^n$ пры n цотным ёсьць велічыня дадатная, а пры n няцотным—адмоўная.

§ 7. Калі хочам a^n падняць у новую ступень p, то трэба a^n паўтарыць сумножнікам p разоў, тады атрымаем:

$$\overbrace{a^n.a^n.a^n.......}^{p \text{ разоў}}=a^{\overbrace{n+n+n+....}^{p \text{ разоў}}}=a^{np},$$

адсюль вынікае, што

$$(a^n)^p=a^{np},$$

г. ё.:

Каб ступень падняць у новую ступень, трэба паказальнік данай ступені памножыць на паказальнік новай ступені, застасоўваючы пры гэтым правіла знакаў.

На гэтай падставе:

$$(a^2)^5=a^{10},$$
$$(-a^3)^4=a^{12},$$

$$\left(a^{-\frac{3}{4}}\right)^{16}=a^{-12}=\frac{1}{a^{12}}$$

Калі хочам падняць *здабытак* $3ab$ у 3-ю ступень,—паўтараем яго сумножнікам 3 разы; атрымаем:

$$(3ab)^3=3ab.3ab.3ab.=3.3.3.a.a.a.b.b.b=27a^3b^3.$$

Паносячы гэты самы здабытак у агульную ступень n, атрымаем:

$$(3ab)^n=\underbrace{3ab.3ab.3ab...}_{n\text{ разоў}}=\underbrace{3.3.3......}_{n\text{ разоў}}\underbrace{a.a.a......}_{n\text{ разоў}}\underbrace{b.b.b.......}_{n\text{ разоў}}=3^na^nb^n,$$

значыцца

$$(3ab)^n=3^na^nb^n$$

Адсюль вынікае:

Каб падняць у ступень здабытак, трэба падняць у ступень кожны сумножнік.

Злучыўшы вышэй дадзеныя два правілы, можам сказаць:

Каб падняць адначчлен у ступень, трэба падняць у гэтую ступень лікавы коэфіцыент, а паказальнікі паасобных літар памножыць на паказальнік ступені, у якую падносім адначчлен, застасоўваючы пры гэтым правіла знакаў.

На гэтай аснове:

$$(2a^3b^4)^5=32a^{15}b^{20}$$
$$(7a^5m^bx^3)^p=7^pa^{5p}m^{bp}x^{3p}.$$

Каб падняць у ступень дробавы выраз, трэба падняць у гэтую ступень лічнік і назоўнік дробу (бо, памнажаючы дробы, мы дзелім здабытак іх лічнікаў на здабытак іх назоўнікаў):

$$\left(\frac{4a^3b^5}{5m}\right)^3=\frac{64a^9b^{15}}{125m^3}$$

$$\left(\frac{0{,}2c^4}{3a^2b}\right)^n=\frac{0{,}2^nc^{4n}}{3^na^{2n}b^n}.$$

Падняцьце многачленаў у квадрат.

§ 8. Карыстаючыся формулай $(a+b)=a^2+2ab+b^2$, можам вывесьці агульны спосаб падняцьця ў квадрат адвольных многачленаў.

Дзеля гэтага, напішам трохчлен $a+b+c$ у форме $(a+b)+c$ і, уважаючы яго за суму двох складнікоў, паднясём у квадрат:

$$(a+b+c)^2=[(a+b)+c]^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2,$$

адкуль:

$$(a+b+c)^2=a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2.$$

Падносячы чатырохчлен $a+b+c+d$ у квадрат, раскладаем яго ў падобны спосаб на суму складнікоў $a+b+c$ і d, тады:

$$(a+b+c+d)^2=[(a+b+c)+d]^2=(a+b+c)^2+2(a+b+c)d+d^2,$$

адкуль:

$$(a+b+c+d)^2=a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2+2(a+b+c)d+d^2.$$

Бяручы потым квадрат сумы пяцёх, шасьцёх і г. д. выразаў, лёгка заўважым, што правы бок з кожным разам будзе зьмяшчаць больш на два выразы, з якіх першы будзе падвойным здабыткам усіх папярэдніх членаў на новы член, а другі—квадрат новага члена.—Адсюль робім вывад, што закон гэты ёсьць агульны для адвольнага ліку членаў многачлена, і дзеля гэтага можам сказаць:

квадрат многачлена ёсьць роўны квадрату першага члена, плюс падвойны здабытак першага на другі, плюс квадрат другога члена, плюс падвойны здабытак сумы першых двох членаў на трэці, плюс квадрат трэцяга, плюс падвойны здабытак сумы першых трох членаў на чацьверты, плюс квадрат чацьвертага, і г. д.

§ 9. Калі ў выразе

$$(a+b+c)^2=a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2$$

расчынім дужкі і квадраты паасобных членаў напішам спачатку, дык атрымаем:

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$$

У падобны спосаб знойдзем:

$$(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd.$$

І наогул:

$$(a+b+c+d+....)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+...+2ab+2ac+2ad+....+2bc+2bd+...+2cd+....$$

Гэта ёсьць другая формула, якая выражае квадрат многачлену.

Словамі яе можна выказаць так:

квадрат многачлена ёсьць роўны суме квадратаў паасобных яго членаў, плюс альгэбрычная сума падвойных здабыткаў гэтых членаў, узятых па два.

У вышэй дадзеным правіле кажам: „альгэбрычная сума“, бо, калі некаторыя члены будуць адмоўныя, дык знак пры адпаведных падвойных здабытках зьменіцца на адмоўны, напрыклад:

$$(a-b-c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2-2ab-2ac+2ad+2bc-2bd-2cd$$

Задачы.

34. $(2a^3)^4$

35. $(2a^5b^n)^m$

36. $\left(\frac{2a}{bc}\right)^4$

37. $\left(\frac{4a^2c^5}{5b^3}\right)^3$

38. $\left(\frac{3}{4}c^7d^2l\right)^4$

39. $\left(-1\frac{1}{2}a^2b^{m-1}\right)^4$

40. $(-0{,}1a^{n-2}b^{m})^{6}$ 41. $(2a^{3}b^{-2}c^{-1})^{2}$

42. $\left(-\frac{2}{3}a^{2}b^{-1}c^{3}d^{-2}\right)^{-2}$ 43. $\left[\left(\frac{a^{2}b^{3}}{c^{3}d^{-2}}\right)^{-1}\right]^{-m}$

44. $\left(\frac{a^{3}b^{-2}}{3cd^{-3}}\right)^{3}\cdot\left(\frac{3b^{3}c^{-2}}{a^{5}d}\right)^{2}$ 45. $(a+b-c)^{2}$

46. $(a^{4}+a^{2}-1)^{2}$ 47. $(3a^{2}-2ab-b^{2})^{2}$

48. $(5x^{2}-7x+3)^{2}$ 49. $\left(\frac{x^{2}}{2}+x+1\right)^{2}$

50. $(a^{3}+a^{2}+a+1)^{2}$ 51. $(3a^{3x}+2a^{2x}+a^{x}+1)^{2}$

52. $\left(a^{3}-\frac{3}{2}a^{2}b-\frac{3}{4}ab^{2}-\frac{1}{8}b^{3}\right)^{2}$

53. $(x^{4}-2x^{3}+3x^{2}-2x+1)^{2}$ 54. $\left(\frac{x^{3}}{6}+\frac{x^{2}}{2}+x+1\right)^{2}$.

Дабываньне корня з адначленаў.

§ 10. *Корнем* *) *данага ліку называем новы лік, які трэба падняць у ступень паказальніка корня, каб атрымаць даны лік, напрыклад:*

$$\sqrt[5]{32}=2,\ \text{бо}\ 2^{5}=82,$$

$$\sqrt[3]{\frac{8}{125}}=\frac{2}{5},\ \text{бо}\ \left(\frac{2}{5}\right)^{3}=\frac{8}{125}.$$

На аснове § 6, вывядзем наступныя правілы знакаў пры дабываньні корня з адначленаў:

1) *корань няцотнае ступені мае той самы знак, што й дадзены лік*, напрыклад:

$$\sqrt[3]{27}=3,\ \text{бо}\ 3^{3}=27,$$

$$\sqrt[3]{-27}=-3,\ \text{бо}\ (-3)^{3}=-27,$$

$$\sqrt[7]{-a^{7}}=-a\ \text{і г. д.}$$

2) *корань цотнае ступені з дадатнага ліку мае два значэньні: адно—дадатнае, другое—адмоўнае*, напрыклад:

$$\sqrt{4}=2\ \text{ і }\ \sqrt{4}=-2,$$

$$\text{бо й}\ 2.2=4\ \text{ і }\ (-2).(-2)=4,$$

$$\sqrt{a^{2}}=a\ \text{ і }\ \sqrt{a^{2}}=-a,$$

$$\text{бо й}\ a.a=a^{2}\ \text{ і }\ (-a).(-a)=a^{2}.$$

Каб паказаць, што корань цотнае ступені мае два значэньні, якія розьняцца знакамі, пішуць звычайна перад корнем падвойны знак $\pm$; значыцца:

$$\sqrt{4}=\pm 2,\quad \sqrt{a^{2}}=\pm a.$$

---

*) Знак корня $\sqrt{\ }$, які паходзіць ад літары r (першай літары лацінскага слова radix, што значыць «корань») быў уведзен нямецкімі матэматыкамі Крыштофам *Рудольфам* (Rudolff) у 1525 г. і *М. Штыфэлем* (Stifel) у 1544 г.

Часта, пры дабываньні корняў з лікаў, галоўным чынам нас цікавіць атрыманьне лікавага значэньня корня, незалежна ад знаку; тады знаку перад корнем ня пішам і называем яго ў гэтым выпадку *арытмэтычным корнем.*

3) *корань цотнае ступені з адмоўнага ліку ёсьць выраз немагчымы*, з тае прычыны, што, падносячы кожную велічыню (як дадатную, так і адмоўную) у цотную ступень, заўсёды атрымаем дадатны лік. Дзякуючы гэтаму, корань цотнае ступені з адмоўнага ліку называем *уяўным лікам;* так, напрыклад:

$$\sqrt{-4},\ \sqrt[4]{-27a^3}$$

ёсьць уяўныя лікі.

§ 11. *Корань здабытку ёсьць роўны здабытку корняў з кожнага сумножніка.*

Довад.—Хай трэба дабыць корань n-ае ступені з здабытку abc. Маем давесьці, што

$$\sqrt[n]{abc}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}.$$

Паднясём абодва бакі гэтай роўнасьці ў n-ую ступень:

$$\left(\sqrt[n]{abc}\right)^n=\left(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}\right)^n.$$

Але $\left(\sqrt[n]{abc}\right)^n=abc,$

а $\left(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}\right)^n=\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\cdot\left(\sqrt[n]{b}\right)^n\cdot\left(\sqrt[n]{c}\right)^n=abc$

Правыя бакі апошніх дзьвёх роўнасьцяў роўныя паміж сабой; адсюль вынікае, што й

$$\sqrt[n]{abc}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}.$$

Каб дабыць корань са ступені, трэба паказальнік ступені падзяліць на паказальнік корня.

Гэтае правіла вынікае з самага азначэньня корня (§ 10). І праўда:

$$\sqrt{a^6}=\pm a^3,\quad \text{бо}\quad (\pm a^3)^2=a^6,$$

$$\sqrt[p]{a^{mp}}=a^m,\quad \text{бо}\quad (a^m)^p=a^{mp}.$$

Каб дабыць корань з дробу, трэба дабыць корань асобна з лічніка й асобна з назоўніка, г. ё.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Каб давесьці правільнасьць гэтае формулы, паднясём абодва яе бакі ў n-ую ступень:

$$\left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right)^n=\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n$$

Левы бок $\left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right)^n = \frac{a}{b}$,

а правы, як ступень дробу: $\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n} = \frac{a}{b}$;

адкуль $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, што й трэба было давесьці.

На аснове дадзеных довадаў, можам сказаць: *каб дабыць корань з адначлену, трэба дабыць корань з яго лікавых коэфіцыэнтаў, а паказальнікі паасобных літар падзяліць на паказальнік корня.*

ПРЫКЛАДЫ:

$$\sqrt{36a^8b^4c^{6p}} = \pm 6a^4b^2c^{3p}$$

$$\sqrt[3]{-125a^3b^{12m}} = -5ab^{4m}$$

$$\sqrt[4]{\frac{16a^{12}b^{4-8p}}{81c^8}} = \pm \frac{2a^3b^{1-2p}}{3c^2}$$

Задачы.

55. $\sqrt{2^2} + \sqrt[3]{3^3} + \sqrt[4]{5^4}$

56. $\sqrt[6]{2^{12}}$

57. $\sqrt[4]{3^8}$

58. $\sqrt[3]{8.3^3}$

59. $\sqrt[n]{a^{3n}}$

60. $\sqrt{\frac{a^4}{9}}$

61. $\sqrt[4]{a^{16}b^8c^4}$

62. $\sqrt[-3]{27}$

63. $\sqrt[3]{a^{-6}}$

64. $\sqrt{6\frac{1}{4}a^6c^{4m}}$

65. $\sqrt[3]{0{,}027a^{6n-3}b^{18}c^{-6}}$

66. $\sqrt{\frac{4^{-1}a^4b^{-6}}{9^{-1}c^8d^{-2}}}$

67. $\sqrt[-2]{\frac{a^2b^{2n-6}c^{-2n}}{4d^{-6}l^{-4n+2}}}$

68. $2ab^2\sqrt{2a^3bc^3\sqrt[3]{8a^3b^9c^6}}$

69. $\sqrt{(a+b)^2} - \sqrt{(2b)^2} + \sqrt{(a-b)^2}$

70. $\sqrt{a^2+2ab+b^2} - \sqrt{4b^2} + \sqrt{a^2-2ab+b^2}$

71. $2a\sqrt{9a^2-12ab+4b^2} - 3b\sqrt{4a^2+12ab+9b^2}$

Дабываньне арытмэтычнага квадратовага корня з лікаў.

§ 12. Каб вывесьці правіла дабываньня квадратовага корня з лікаў, разгледзім рад наступных лікаў і іх квадратаў:

$$1^2=1$$
$$10^2=100$$
$$100^2=10000$$
$$1000^2=1000000 \quad \text{і г. д.}$$

З раду гэтага бачым, што квадраты адназнакавых лікаў знаходзяцца паміж 1 і 100, а, значыцца, корань квадратовы з адна-ці двохзнакавых лікаў заўсёды будзе (у сваёй цэлай частцы)—адназнакавы лік. Далей бачым, што корань з трох-ці чатырохзнакавага ліку (ад 100 да 10000) ёсьць лік двохзнакавы (ад 10 да 100) і г. д. Наогул, *квадратовы корань зьмяшчае цыфр два разы менш, чымся падкарэнны лік* (у падкарэнным ліку, маючым няцотную колькасьць цыфр, павялічваем іх на адзінку).

Выходзячы з гэтага правіла, пры дабываньні корня з лікаў, раней за ўсё азначаем колькасьць цыфр корня. Дзеля гэтае мэты дзелім лік пад корнем на грані па дзьве цыфры ад правай рукі к левай; апошняя грань можа зьмяшчаць адну цыфру. Колькасьць граняў пакажа нам колькасьць цыфр корня.

Квадратовыя корні з адназнакавых і двохзнакавых лікаў знаходзім беспасрэдна з таблічкі квадратаў адназнакавых лікаў:

$1^2=1$	$4^2=16$	$7^2=49$
$2^2=4$	$5^2=25$	$8^2=64$
$3^2=9$	$6^2=36$	$9^2=81.$

Калі лік, з якога дабываем квадратовы корань, зьмяшчаецца ў данай таблічцы з правага боку знака роўнасьці, то корань можам дабыць дакладна, напрыклад:

$$\sqrt{49}=7,\ \sqrt{81}=9 \text{ і г. д.}$$

Калі-ж падкарэнны лік не знаходзіцца ў табліцы, дык дабыць з яго корань ня можам дакладна, а толькі з меншым, ці большым прыбліжэньнем, напрыклад:

$\sqrt{72}$ ёсьць больш за 8, але менш за 9 на пэўную частку адзінкі. Можам, значыцца, сказаць, што $\sqrt{72}$ з прыбліжэньнем да 1 ёсьць роўны 8 з недахватам, ці 9 з перавышкай.

Корань, які нельга дакладна выразіць цэлым або дробавым лікам, *называецца нявымернай велічынёй.* Аб уласьцівасьцях нявымерных велічын, скажам у наступным аддзеле.

Калі лік складаецца больш, чымся з дзьвёх цыфр, то яго квадратовы корань будзе зьмяшчаць адзінкі, дзесяткі, сотні і г. д., у залежнасьці ад колькасьці граняў, на якія лік гэты даўся падзяліцца.

Каб лягчэй зразумець дабываньне квадратовага корня з лікаў, будзем лічыць кожны корань, пачынаючы ад двохзнакавага, за лік, які складаецца толькі з адзінак і дзесяткаў; напрыклад, калі корнем будзе лік 576, то скажам, што ён складаецца з 57 дзесяткаў і 6 адзінак.

Дабываньне квадратовых корняў з лікаў грунтуецца на формуле квадрата сумы двох лікаў, у якой першым выразам будзе лік дзесяткаў данага корня, а другім—лік адзінак.

Дзякуючы гэтаму, лік, з якога дабываем корань, будзе—сума чатырох складнікоў: першы з іх—квадрат дзесяткаў, другі—падвойны здабытак дзесяткаў на адзінкі, трэці—квадрат адзінак і чацьверты—астача (калі лік нявымерны).

Дабудзем вымерны квадратовы корань з ліку 1296.

Лік гэты складаецца з чатырох цыфр, значыцца, яго корань будзе зьмяшчаць дзьве цыфры: цыфру дзесяткаў і адзінак.

Дабываньне квадратовага корня робім у наступны спосаб:

$$\sqrt{12'96}=36$$

$$\begin{array}{r|l} & 9 \\ \hline 66 & 39'6 \\ 6 & 39\,6 \\ \hline & 0 \end{array}$$

Раней за ўсё азначаем цыфру дзесяткаў. Квадрат дзесяткаў, будучы закончаны двома нулямі, ня можа зьмяшчацца ў апошніх дзьвёх цыфрах; дзеля гэтага аддзяляем іх коскай і дабываем квадратовы корань з 12; атрымоўваем 3 з недахватам. Першая, значыцца, цыфра корня, ці цыфра дзезяткаў, ёсьць 3.

Аднімаючы квадрат дзесяткаў, г. ё. 900 ад усяго ліку, атрымаем астачу 396, якая ёсьць сума двох складнікоў: падвойнага здабытку дзесяткаў на адзінкі і квадрату адзінак. Першы складнік, як здабытак дзесяткаў, канчаецца нулём, значыцца, можа заключацца толькі ў першых дзьвёх цыфрах астачы 396. Дзеля гэтага, каб знайсьці цыфру адзінак корня, у астачы 396 аддзяляем апошнюю цыфру коскай, і застаўшыся лік 39 дзелім на падвойную цыфру дзесяткаў корня, г. ё. на 6; такім чынам, знойдзем цыфру адзінак шуканага корня 6, якую пішам побач з 3. Звычайна пры выкананьні дзеяньня рысуем з левага боку астачы старчавую рысу і перад ёй пішам падвойны лік дзесяткаў (6), пакідаючы месца для цыфры адзінак (6).

Урэшце, застаецца праверыць, ці атрыманая цыфра адзінак 6 не занадта вялікая; дзеля гэтае мэты ўкладаем суму падвойнага здабытку дзесяткаў на адзінкі і квадрата адзінак корня. Калі сума гэтая будзе больш за астачу (396), то цыфру адзінак зьмяншаем на адзінку.

У нашым прыкладзе сума гэта ёсьць роўная астачы:

$$\begin{array}{r} 60 \\ \times\ 6 \\ \hline 360 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6 \\ \times\ 6 \\ \hline 36 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 360 \\ +\ 36 \\ \hline 396 \end{array}$$

Адсюль бачым, што цыфра адзінак корня (6) ёсьць правільная, і квадратовы корань ліку 1296 ёсьць вымерны лік 36.

Тры апошнія дзеяньні звычайна злучаем у адно, дапісваючы проста да падвойнага ліку дзесяткаў (6) цыфру адзінак (6), і такім спосабам атрыманы лік 66 множым на цыфру адзінак:

$$\begin{array}{r} 66 \\ \times\ 6 \\ \hline 396 \end{array}$$

§ 13. Дабудзем цяпер нявымерны квадратовы корань, а мянавіта з 4092:

$$\sqrt{40'92}=63$$

$$\begin{array}{r|l} & 36 \\ \hline 123 & 49'2 \\ 3 & 36\,9 \\ \hline & 123 \end{array}$$

Цыфру дзесяткаў 6 знойдзем пры помачы дабываньня корня з першае грані, г. ё. з 40. Пасьля адніманьня квадрата дзесяткаў 3600 ад усяго ліку атрымоўваем астачу 492, у якой аддзяляем коскай цыфру адзінак 2, а застаўшыся лік 49 дзелім на падвойную цыфру дзесяткаў 12.

Дзеля таго, што 12 у 49 зьмяшчаецца 4 разы, дык трэба-б было да 12 дапісаць 4 і атрыманы такім спосабам лік 124 памножыць на 4; аднак-жа лёгка можам пераканацца, што рэзультат $124.4=496$ будзе больш за астачу 492; гэта даводзіць, што цыфра адзінак 4 завялікая. Зьмяншаем яе на адзінку і бярэм 3. Бачым, што новы здабытак $123.3=369$ менш за астачу 492; адсюль вынікае, што цыфра 3 правільная.

Такім чынам, у канцовым рэзультаце атрымалі 63 і астачу 123; гэта апошняя астача зьяўляецца азнакай таго, што $\sqrt{4092}$ ёсьць лік нявымерны.

§ 14. Дабудзем цяпер квадратовы корань з 6-знакавага ліку, напрыклад, з 223729. Знаходзім колькасьць дзесяткаў корня: аддзяляем коскай апошнія дзьве цыфры ў гэтым ліку 29, якія ня могуць зьмяшчаць квадрату дзесяткаў, і з астаўшайся часткі ліку 2237 дабываем вядомым нам шляхам квадратовы корань:

$$\sqrt{22'37}=47$$

$$\begin{array}{r|l} & 16 \\ \hline 87 & 63'7 \\ 7 & 60\,9 \\ \hline & 28 \end{array}$$

Бачым, што, такім чынам, $\sqrt{223729}$ зьмяшчае ў сабе 47 дзесяткаў. Каб знайсьці цыфру адзінак корня з усяго ліку, трэба да астачы $\sqrt{2237}$, г. ё. да 28, дапісаць трэцюю грань 29. Атрымаем гэткім спосабам другую астачу 2829.

$$\sqrt{22'37'29}=473$$

$$\begin{array}{r|l} & 16 \\ \hline 87 & 63'7 \\ 7 & 60\,9 \\ \hline 943 & 282'9 \\ 3 & 282\,9 \\ \hline & 0 \end{array}$$

Дзеля таго, што квадрат 47 дзесяткаў ужо быў адняты ад усяго ліку, значыцца, астача 2829 зьмяшчае падвойны здабытак дзесяткаў усяго ліку (47) на цыфру адзінак і квадрат адзінак. Дзякуючы гэтаму, каб знайсьці цыфру адзінак $\sqrt{223729}$, таксама аддзяляем коскай у астачы 2829 апошнюю цыфру і пазасталы лік 282 дзелім на падвойны лік дзесяткаў 94; дзель 3 і будзе цыфрай адзінак.

Праверыўшы, пераканаемся, што $\sqrt{223729}$ ёсьць вымерны лік, роўны 473.

§ 15. На аснове вышэйдадзеных прыкладаў і довадаў можам вывесьці наступнае агульнае правіла дабываньня квадратовага корня з лікаў:

Каб дабыць квадратовы корань з данага ліку, дзелім яго на грані па дзьве цыфры ад правай рукі к левай. Апошняя грань можа мець адну цыфру. Колькасьць граняў пакажа нам колькасьць цыфр корня.

Потым дабываем квадратовы корань з першае грані з левага боку; атрымоўваем у гэты спосаб першую цыфру корня, якую падносім у квадрат, аднімаем ад першае грані і да рэзультату дапісваем другую грань.

У атрыманай такім чынам першай астачы аддзяляем коскай апошнюю цыфру, а пазасталы лік дзелім на падвойную першую цыфру корня; дзель будзе другою цыфраю корня. Дапісваем яе да дзельніка і такім чынам утвораны лік множым на другую цыфру корня. Здабытак, які пры гэтым паўстане, аднімаем ад першае астачы. Калі здабытак гэты акажацца больш за астачу, дык другую цыфру корня трэба зьменшыць на адзінку. Да атрыманага пасьля адніманьня ліку дапісваем трэцюю грань і з трэцяй астачай робім, як вышэй апісана, і г. д.

П Р Ы К Л А Д.

$$\sqrt{2'82'37'44'16}=16804$$

	1
26	18'2
6	15 6
328	263'7
8	262 4
33604	13441'6
4	13441 6
	0

Дабываньне квадратовага корня з лікаў часам можна ўпросьціць, раскладваючы падкарэнны лік на сумножнікі і бяручы здабытак два разы меншай колькасьці кожнага сумножніка; напрыклад:

$$\sqrt{484}=\sqrt{2.2.11.11}=2.11=22$$

$$\sqrt{1296}=\sqrt{2.2.2.2.3.3.3.3}=2.2.3.3=36$$

Дабываньне корняў, падобнае да сучаснага спосабу, было вядома ўжо ў 3—4 веку пасьле Нар. Хр. (Тэон, грэк з Александрыі).

З а д а ч ы.

Дабыць квадратовыя корні:

72. $\sqrt{289}$ 73. $\sqrt{324}$

74. $\sqrt{1936}$ 75. $\sqrt{3025}$

76. $\sqrt{6561}$ 77. $\sqrt{7921}$

78. $\sqrt{9801}$ 79. $\sqrt{24336}$

80. $\sqrt{89401}$ 81. $\sqrt{33856}$

82. $\sqrt{725904}$ 83. $\sqrt{488601}$

84. $\sqrt{998001}$ 85. $\sqrt{35164900}$

86. $\sqrt{1018081}$ 87. $\sqrt{81108036}$

88. $\sqrt{114597025}$ 89. $\sqrt{51955264}$

90. $\sqrt{780811249}$

Нявымерныя лікі.

§ 15. У матэматыцы істнуе цэлы рад вялічынь, якія ня могуць быць выражаны ані пры помачы цэлых лікаў, ані пры помачы звычайных, дзесятковых або пэрыодычных дробаў. Да гэткіх лікаў належаць: стасунак акружыны кола да дыямэтру, стасунак дыягоналі квадрата да яго боку, стасунак даўжыні году да даўжыні дня і шмат іншых.

Велічыня, якая ня можа быць дакладна выражана за дапамогаю цыфр, зьяўляецца *выразам нявымерным*.

Да нявымерных лікаў паміж іншым належаць так званыя *ірацыянальныя лікі*, г. ё. корні якіх нельга дакладна выразіць цэлым або дробавым (не пэрыодычным) лікам.
Так, напрыклад:

$$\sqrt{2},\ \sqrt[3]{6},\ \sqrt[4]{27}$$

ёсьць нявымерныя ірацыянальныя *) лікі.

Што гэтыя корні ня могуць быць выражаны пры помачы цэлых лікаў,—бачым адразу. Каб давесьці, што яны ня могуць быць выражаны і за дапамогаю дробаў, зробім адваротнае дапушчэньне, г. ё. уявім сабе, што корань n-е ступені цэлага ліку N ёсьць дроб, які посьле скарочаньня будзе мець выгляд

$$\frac{a}{b},\ \text{ці}\ \sqrt[n]{N}=\frac{a}{b}$$

Падносячы абодва бакі гэтай роўнасьці ў n-ую ступень, атрымаем:

$$N=\frac{a^n}{b^n}$$

Але a і b ня маюць супольных сумножнікаў, значыцца, іх ступені таксама ня могуць мець супольных сумножнікаў і дзеля гэтага $\frac{a^n}{b^n}$ ня можа быць роўным цэламу ліку N.

З разважаньня гэтага вынікае наступны вынік: калі з лічніка ці назоўніка дробу нельга дабыць дакладнага корня, то даны выраз ёсьць лік нявымерны.

Кожны нявымерны лік заключаецца ў граніцах, якія называюцца яго *прыбліжэньнямі*. Калі граніцы зложаны толькі з цэлых адзінак, то кажам, што нявымерны лік ёсьць вылічаны з прыбліжэньнем (з дакладнасьцю) да адзінкі; калі ў склад прыбліжэньня ўваходзяць дзесятыя часткі адзінкі, то нявымерны лік ёсьць вылічаны з прыбліжэньнем да аднэй дзесятай і г. д.

*) Адкрыцьцё ірацыянальных лікаў прыпісваюць так званым пітагорэйцам—вучням вялікага грэцкага матэматыка *Пітагора* (5 век перад Нар. Хр.).

Возьмем для прыкладу квадратовы корань з 7-мёх і выпішам розныя ступені яго прыбліжэньня.

прыбліж. да 1:	$2^2=4$	$2<\sqrt{7}<3$	$3^2=9$
прыбліж. да 0,1:	$(2,6)^2=6,76$	$2,6<\sqrt{7}<2,7$	$(2,7)^2=7,29$
прыбліж. да 0,01:	$(2,64)^2=6,9696$	$2,64<\sqrt{7}<2,65$	$(2,65)^2=7,0225$
і г. д.			

Бачым, што з узрастаньнем дзесятковых знакаў значэньне прыбліжэньня $\sqrt{7}$ з недахватам ўзрастае, паступова праходзячы праз лікі: 2; 2,6; 2,64 і г. д.; наадварот, значэньне прыбліжэньня $\sqrt{7}$ з перавышкай, пры павялічваньні колькасьці дзесятковых знакаў, зьмяншаецца, праходзячы праз лікі: 3; 2,7; 2,65 і г. д.

Розьніца паміж двома адпаведнымі лікамі гэтых двох радоў паступова зьмяншаецца і можа зрабіцца так малой, як таго захочам.

Дабываньне квадратовых корняў з прыбліжэньнем.

§ 16. Калі выпадзе дабыць квадратовы корань з ліку, які ня ёсьць поўным квадратам, тады вылічаем квадратовы корань з пэўным прыбліжэньнем.

Квадратовы корань з прыбліжэньнем да 1 зьмяшчае цэлую частку данага корня, напрыклад: $\sqrt{563}=23$

Калі хочам дабыць корань з дакладнасьцю да $1/10$, то трэба яго памножыць і падзяліць на 10.

У гэты спосаб атрымаем:

$$\frac{10.\sqrt{563}}{10}=\frac{\sqrt{100.563}}{10}=\frac{\sqrt{56300}}{10}$$

Дзеля таго, што $\sqrt{56300}=237$,

дык $\dfrac{\sqrt{56300}}{10}=23,7$

Памнажаючы і дзелячы $\sqrt{563}$ на 100, і робячы як вышэй, знойдзем $\sqrt{563}=23,72$ з прыбліжэньнем да $\dfrac{1}{100}$ і г. д.

Дабываньне квадратовых корняў з лікаў з дакладнасьцю да 0,1, 0,01, 0,001 і г. д. робяць на практыцы так: дапісваюць да астачы корня столькі пар нулёў, колькі дзесятковых знакаў хочам атрымаць у рэзультаце, і дабываюць корань далей, так, напрыклад:

$$\sqrt{5'63}=23,727.....$$

$$\begin{array}{r|r}
 & 4 \\
\hline
43 & 163 \\
3 & 129 \\
\hline
467 & 340'0 \\
7 & 326\,9 \\
\hline
4742 & 1310'0 \\
2 & 948\,4 \\
\hline
47447 & 36160'0 \\
7 & 33212\,9 \\
\hline
 & 2947\,1 \\
 & \dots\dots \\
 & \dots\dots
\end{array}$$

Калі-б мы хацелі дабыць корань з ліку N з дакладнасьцю да $\frac{1}{\kappa}$, то перад дабываньнем корня трэба $\sqrt{N}$ памножыць і падзяліць на κ. Тады атрымаем:

$$\sqrt{N}=\frac{\kappa\sqrt{N}}{\kappa}=\frac{\sqrt{N.\kappa^2}}{\kappa}$$

Напрыклад, каб дабыць корань з 6 з прыбліжэньнем да $\frac{1}{15}$, трэба 6 памножыць на 15^2, з здабытку дабыць квадратовы корань з прыбліжэньнем да адзінкі і рэзультат падзяліць на 15. Атрымаем тады:

$$\sqrt{6} \text{ з прыбліж. да } \frac{1}{15}=\frac{\sqrt{6.225}}{15}=\frac{36}{15}=2\frac{2}{5}$$

Дабываньне квадратовага корня з звычайных дробаў.

§ 17. Пры дабываньні корня з дробу могуць быць наступныя выпадкі:

1) *Калі лічнік і назоўнік ёсьць поўныя квадраты, то дабываем корань асобна з лічніка і асобна з назоўніка*, напрыклад:

$$\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{3}{4}; \quad \sqrt{\frac{1}{225}}=\frac{1}{15};$$

$$\sqrt{\frac{25a^4b^2}{49c^6}}=\frac{5a^2b}{7c^3}$$

2) *Калі толькі назоўнік дробу ёсьць поўны квадрат, то з лічніка дабываем квадратовы корань з прыбліжэньнем і атрыманы рэзультат дзелім на корань з назоўніка*, напрыклад:

$$\sqrt{\frac{11}{16}}=\frac{\sqrt{11}}{4}; \quad \sqrt{11}=3{,}31\ldots.. \text{ з дакладнасьцю да } 0{,}01.$$

Дзелячы 3,31 на 4, атрымаем 0,82. Адсюль: $\sqrt{\frac{11}{16}}=0{,}82$ з прыбліжэньнем да $\frac{1}{100.4}$, г. ё. да $\frac{1}{400}$.

3) *Калі назоўнік дробу ня ёсьць поўны квадрат, дык спачатку лічнік і назоўнік дробу множым на такі лік, каб назоўнік стаўся поўным квадратам*; хай, напрыклад, трэба дабыць $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Памнажаючы лічнік і назоўнік на 3, атрымаем:

$$\sqrt{\frac{6}{9}}=\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{2{,}449}{3}=0{,}816.$$

Значыцца $\sqrt{\frac{2}{3}}=0{,}816$ з прыбліжэньнем да $\frac{1}{3000}$.

4. *Калі хочам дабыць корань з мяшанага ліку, то трэба спачатку замяніць мяшаны лік на дроб неўласьцівы*, напрыклад:

$$\sqrt{1\frac{24}{25}}=\sqrt{\frac{49}{25}}=\frac{7}{5}=1\frac{2}{5}$$

$$\sqrt{4\frac{3}{7}}=\sqrt{\frac{31}{7}}=\sqrt{\frac{31.7}{49}}=\frac{14,7}{7}=2,1$$

з прыбліжэньнем да $\frac{1}{70}$

Дабываньне квадратовага корня з дзесятковых дробаў.

§ 18. Хай маем дабыць квадратовы корань з ліку 6,405 з дакладнасьцю да 0,01. Напішам дадзены лік у форме звычайнага дробу $\frac{6405}{1000}$. Калі-б мы цяпер хацелі дабыць корань з данага ліку, то трэба-б было дабыць корань асобна з лічніка і асобна з назоўніка, а з прычыны таго, што назоўнік—няпоўны квадрат, дык прыпісваем нуль да лічніка і назоўніка і атрымаем $\frac{64050}{10000}$ Корань квадратовы з лічніка 64050 ёсьць 253...., корань з назоўніка ёсьць 100; значыцца шуканы корань з данага ліку будзе:

$$\frac{253}{100}=2,53$$

На практыцы пры дабываньні квадратовага корня з дзесятковых дробаў звычайна робяць так: дапаўняюць колькасьць дзесятковых знакаў (посьле коскі) да цотнага ліку, потым дабываюць корань, як-бы з цэлага ліку, і ў рэзультаце аддзяляюць коскай два разы меншую колькасьць дзесятковых цыфр, чымся меў дроб.

ПРЫКЛАД I.

$$\sqrt{0,37'65}=0,61......$$

$$\begin{array}{r|l} & 36 \\ \hline 121 & 165 \\ 1 & 121 \\ \hline & 44 \\ & ...... \\ & ...... \end{array}$$

ПРЫКЛАД II.

$$\sqrt{0,07'65'20}=0,276....$$

$$\begin{array}{r|l} & 4 \\ \hline 47 & 36'5 \\ 7 & 329 \\ \hline 546 & 362'0 \\ 6 & 3276 \\ \hline & 344 \\ & .... \\ & .... \end{array}$$

§ 19. Пазнаньне падобнага спосабу дабываньня корняў кубічных, а таксама вышэйшых ступеняў ня мае практычнага значэньня з тае прычыны, што гэткае дабываньне куды прасьцей і лягчэй можам выканаць, карыстаючыся ўласьцівасьцямі лёгарытмаў, аб чым даведаемся пазьней.

Задачы.

Дабыць наступныя корні з паказаным прыбліжэньнем:

91. $\sqrt{4897}$ да 1.
92. $\sqrt{8888}$ да 1.
93. $\sqrt{239593}$ да 1.
94. $\sqrt{982}$ да 0,1.
95. $\sqrt{91}$ да 0,01.
96. $\sqrt{19}$ да 0,001.
97. $\sqrt{7}$ да $\frac{1}{5}$
98. $\sqrt{3}$ да $\frac{1}{7}$
99. $\sqrt{87}$ да $\frac{1}{6}$
100. $\sqrt{213}$ да $\frac{1}{15}$
101. $\sqrt{373}$ да $\frac{1}{25}$

Дабыць корні з наступных дробаў:

102. $\frac{49}{81}$
103. $\frac{1369}{2025}$
104. $\frac{576}{45369}$
105. $29\frac{23}{49}$
106. $552\frac{1}{4}$
107. $750\frac{19}{25}$
108. 7,29
109. 14,44
110. $\sqrt{36,8449}$
111. $\sqrt{19,2721}$

Дабыць корні з паказаным прыбліжэньнем:

112. $\sqrt{34,151}$ да 0,01.
113. $\sqrt{141,2}$ да 0,001.
114. $\sqrt{3,666...}$ да 0,0001.
115. $\sqrt{6\frac{1}{2}}$ да 0,01.
116. $10\sqrt{3}$ да 0,01.
117. $\sqrt{\sqrt{222}}$ да 0,01.
118. $\sqrt{\sqrt{0,01}}$ да 0,01.

Дабыць корні з наступных лікаў:

119. $\sqrt{120^2+209^2}$
120. $\sqrt{320^2+999^2}$
121. $\sqrt{140^2+171^2}$
122. $\sqrt{1181^2-1131^2}$
123. $\sqrt{\sqrt{10617447681}}$
124. $\sqrt{\sqrt{69257922561}}$

Дабываньне квадратовага корня з многачленаў.

§ 20. Дзеля таго, што квадрат аднačлена ёсьць таксама аднačлен, а квадрат двохчлена ёсьць трохчлен, значыцца пры падняцьці альгэбрычных выразаў у квадрат ніколі не атрымаем двохчлена.

Трохчлен бывае поўным квадратам тады, калі складаецца з сумы квадратаў двох членаў і падвойнага іх здабытку.

Каб дабыць, значыцца, квадратовы корань з такога трохчлена, трэба дабыць квадратовы корань з яго поўных квадратаў і паміж атрыманымі выразамі паставіць такі знак, які меў падвойны здабытак, напрыклад:

$$\sqrt{4a^2b^4+12ab^3c^3+9b^2c^6}=\pm(2ab^2+3bc^3)$$

Падносячы ў квадрат многачлен, які складаецца больш, чымся з двох членаў, атрымаем (§ 8): квадрат першага члена, плюс падвойны здабытак першага члена на другі, плюс квадрат другога члена, плюс падвойны здабытак сумы двух першых членаў на трэці, плюс квадрат трэцяга і г. д.

Грунтуючыся на гэтым правіле, дабываем квадратовы корань з многачленаў спосабам зусім падобным да дабываньня квадратовага корня з лікаў.

Хай, напрыклад, маем дабыць квадратовы корань з многачлена

$$29x^4y^2-30x^3y^3+4x^6-12x^5y+25x^2y^4.$$

Дзеля гэтае мэты парадкуем яго водлуг спадаючых (або ўзрастаючых) ступеняў літары x і дабываем корань у спосаб, падобны да дабываньня корня з лікаў:

$$\sqrt{4x^6-12x^5y+29x^4y^2-30x^3y^3+25x^2y^4}=2x^3-3x^2y+5xy^2$$

$$\begin{array}{r|l}
 & -4x^6 \\
\hline
4x^3-3x^2y & -12x^5y+29x^4y^2 \ \ldots\ldots \text{ першая астача} \\
-3x^2y & \pm12x^5y\mp9x^4y^2 \\
\hline
4x^3-6x^2y+5xy^2 & 20x^4y^2-30x^3y^3+25x^2y^4 \ \ldots \text{ другая астача} \\
+5xy^2 & -20x^4y^2\pm30x^3y^3\mp25x^2y^4 \\
\hline
 & 0
\end{array}$$

Вышэйшы член гэтага многачлена павінен быць квадратам вышэйшага члена корня, значыцца, каб яго знайсьці, дабываем квадратовы корань з першага члена многачлена пад корнем:

$$\sqrt{4x^6}=\pm2x^3$$

З гэтых двух значэньняў корня бяром спачатку адно дадатнае.—Атрыманы такім чынам першы член корня $2x^3$ падносім у квадрат і аднімаем ад усяго многачлена. У рэзультаце атрымаем першую астачу, якая зьмяшчае ў сабе: падвойны здабытак першага члена на другі, плюс квадрат другога члена, плюс падвойны здабытак сумы першых двох членаў на трэці і г. д.

Такім спосабам, каб знайсьці другі член корня, дзелім першы член астачы $-12x^5y$ на падвойны першы член корня, г. ё. на $4x^3$, знаходзім $-3x^2y$, дапісваем гэты апошні з правага боку падвойнага першага члена (і з левага боку старчавай рысы), множым атрыманы двохчлен $(4x^3-3x^2y)$ на $-3x^2y$ і рэзультат множаньня аднімаем ад першай астачы. Утвораная гэткім спосабам другая астача заключае падвойны здабытак сумы першых двох членаў на трэці, плюс квадрат трэцяга члена і г. д. Дзеля гэтага, падзяліўшы першы член другой астачы $20x^4y^2$ на падвойны член корня $4x^3$, знойдзем трэці член корня $5xy^2$.

Зноў з левага боку другой астачы праводзім старчавую рысу, за якой пішам падвойныя першыя два члены корня $(4x^3-6x^2y)$, дапісваем знойдзены трэці $(+5xy^2)$ і ўвесь трохчлен множым на трэці член корня. Пасьле адніманьня гэтага здабытку ад другой астачы атрымліваем нуль. Значыць, дзеяньне скончана.

Пры дабываньні квадратовага корня з першага члена многачлена, мы ўзялі толькі яго дадатнае значэньне, а ўласна $+2x^3$. Калі-б мы ўзялі адмоўнае яго значэньне, а ўласна $-2x^3$, дык усе пазасталыя члены корня таксама зьмянілі-б свае знакі на супраціўныя, таму што для іх атрыманьня трэба-б было дзяліць першы член кожнай астачы не на $2x^3$, а на $-2x^3$. З гэтага бачым, што квадратовы корань з многачлена мае два значэньні: дадатнае і адмоўнае; у нашым прыкладзе:

$$\sqrt{4x^6-12x^5y+29x^4y^2-30x^3y^3+25x^2y^4}=\pm(2x^3-3x^2y+5xy^2)$$

ПРЫКЛАД I.

$$\sqrt{9a^6b^2+12a^5b^3-20a^4b^4-46a^3b^5-4a^2b^6+40ab^7+25b^8}=\pm(3a^3b+2a^2b^2-4ab^3-5b^4)$$

$$\begin{array}{r|l}
 & -9a^6b^2 \\
\hline
6a^3b+2a^2b^2 & 12a^5b^3-20a^4b^4 \\
+2a^2b^2 & -12a^5b^3\mp4a^4b^4 \\
\hline
6a^3b+4a^2b^2-4ab^3 & -24a^4b^4-46a^3b^5-4a^2b^6 \\
-4ab^3 & \pm24a^4b^4\pm16a^3b^5\mp16a^2b^6 \\
\hline
6a^3b+4a^2b^2-8ab^3-5b^4 & -30a^3b^5-20a^2b^6+40ab^7+25b^8 \\
-5b^4 & \pm30a^3b^5\pm20a^2b^6\mp40ab^7\mp25b^8 \\
\hline
 & 0
\end{array}$$

ПРЫКЛАД II.

$$\sqrt{x^6-10x^5+25x^4+6x^3-14x^2+4}=\pm(x^3-5x^2+3)$$

$$\begin{array}{r|l}
 & -x^6 \\
\hline
2x^3-5x^2 & -10x^5+25x^4 \\
-5x^2 & \pm10x^5\mp25x^4 \\
\hline
2x^3-10x^2+3 & 6x^3-14x^2+4 \\
+3 & \mp6x^3\pm30x^2\mp9 \\
\hline
 & 16x^2-5
\end{array}$$

У другім прыкладзе атрымалі трэцюю астачу $16x^2-5$; аднолька-ж далей весьці дзеяньня ня можам, бо першы член гэтае астачы $16x^2$ ня дзеліцца на падвойны першы член корня $2x^3$.

Рэзультат дзеяньня можам запісаць так:

$$x^6-10x^5+25x^4+6x^3-14x^2+4=\pm(x^3-5x^2+3)^2+16x^2-5.$$

§ 21. Дабываньне квадратовага корня з многачлена ня можа быць выканана:

1) калі вышэйшы або ніжэйшы члены данага многачлена ня ёсьць поўныя квадраты;

2) калі пры дзеяньні атрымаем астачу, у якой першы член ня дзеліцца на падвойны першы член корня.

Задачы.

Дабыць квадратовыя корні з наступных многачленаў:

125. $4a^4+12a^2b^2+9b^2$

126. $\frac{9}{16}a^2b^4-\frac{3}{5}a^3b^2+\frac{4}{25}a^4$

127. $\frac{1}{25}x^2-\frac{1}{15}xy+\frac{1}{36}y^2$

128. $\frac{x^4}{25y^2}-1+\frac{25y^2}{4x^4}$

129. $0{,}04x^4y^2-2x^2y+25$

130. $4a^4-4a^3+5a^2-2a+1$

131. $6a+9a^4+1+3a^2-18a^3$

132. $25a^2b^2-8ab^3-6a^3b+16b^4+9a^4$

133. $\frac{1}{16}x^4-\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{4}x^2-x+1$

134. $0{,}49x^4+1{,}65x^2y^2+y^4-0{,}7x^3y-xy^3$

135. $x^6+6x^5+x^4-34x^3-14x^2+40x+25$

136. $25x^{10}+46x^8+25x^6+4x^4+12x^5+44x^7+40x^9$

137. $\frac{a^4}{4}+\frac{a^3}{x}+\frac{a^2}{x^2}-ax-2+\frac{x^2}{a^2}$

138. $\frac{4x^2}{9y^4}-\frac{4x^2}{3y^2}+5z^2+\frac{27y^6z^5}{x^3}+\frac{81y^8z^6}{4x^4}$

139. $\left(x^2-\frac{2}{x}\right)+\frac{1}{x^2}\left(1-\frac{2}{x}\right)+\left(2+\frac{1}{x^4}\right)$

140. $\frac{9m^4-12m^3+10m^2-4m+1}{m^8+10m^6+21m^4-20m^2+4}$

Ірацыянальныя велічыні.

§ 22. Корні, якіх нельга дакладна выразіць цэлым або дробавам (не пэрыодычным) лікам, называюцца *ірацыянальнымі велічынямі.*

Такія велічыні атрымліваем тады, калі паказальнік ступені хоць-бы аднаго з сумножнікаў падкарэннага выразу ня ёсьць многакрацьцю ступені корня; напрыклад, лікі:

$$\sqrt{3ab},\quad \sqrt[3]{4ax^2}$$

належаць да ірацыянальных вялічынь.

Пры апісаньні дзеяньняў над ірацыянальнымі лікамі будзем заўсёды прыймаць пад увагу толькі арытмэтычны корань, г. ё. дадатны.

Вылучэньне вымерных сумножнікаў з пад знаку корня і ўвод коэфіцыэнта пад знак корня.

§ 23. Калі падкарэнны лік можна раскласьці на два сумножнікі ў такі спосаб, каб паказальнік аднаго сумножніка падзяліўся на паказальнік корня, то з гэтага сумножніка дабываем корань, вылучаючы яго такім чынам з пад знака корня; напрыклад:

$$\sqrt{4a^5}=\sqrt{4a^4.a}=2a^2\sqrt{a}$$

$$\sqrt{\frac{12a^3b^7}{25mx^3}}=\sqrt{\frac{4a^2b^6.3ab}{25x^2.mx}}=\frac{2ab^3}{5x}\sqrt{\frac{3ab}{mx}}$$

Наогул: $\sqrt[m]{a^mb}=a\sqrt[m]{b}$

Вымерны сумножнік пры ірацыянальным ліку будзем называць *коэфіцыэнтам корня.* Такім чынам, у нашых прыкладах коэфіцыэнтамі корняў ёсьць лікі:

$$2a^2,\quad \frac{2ab^3}{5x}\ \text{і}\ a$$

Наадварот: коэфіцыэнт корня можам увесьці пад знак корня; дзеля гэтае мэты трэба паднесьці яго ў ступень корня і памножыць на падкарэнны лік; напрыклад:

$$3a\sqrt{2ab^2}=\sqrt{9a^2.2ab^2}=\sqrt{18a^3b^2}$$

$$\frac{4a^2}{3x^4}\sqrt[3]{\frac{3ab^2}{2y}}=\sqrt[3]{\frac{64a^6.3ab^2}{27x^{12}.2y}}=\sqrt[3]{\frac{192a^7b^2}{54x^{12}y}}$$

Наогул: $a\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{a^m b}.$

Калі посьле вылучэньня вымерных сумножнікаў з-пад знаку корня падкарэнны лік мае назоўнік, дык звычайна перарабляюць яго так, каб назоўнік зрабіўся вымерным; напрыклад, маючы

$$\sqrt{\frac{a}{b}},$$

множым лічнік і назоўнік падкарэннага ліку на b; тады атрымаем:

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\sqrt{\frac{ab}{b^2}}=\frac{\sqrt{ab}}{b}$$

У падобны спосаб:

$$\sqrt{\frac{2ax}{3by}}=\sqrt{\frac{2ax.3by}{9b^2y^2}}=\frac{\sqrt{6abxy}}{3by}$$

Скарочаньне паказальнікаў корня і прывядзеньне корняў да супольнага паказальніка.

§ 24. *Значэньне корня ня зьменіцца, калі паказальнік корня і паказальнік ступені падкарэннага ліку памножым на той самы лік,* г. ё.

$$\sqrt[k]{a^m}=\sqrt[kp]{a^{mp}}$$

Каб давесьці правільнасьць гэтае роўнасьці, паднясём абодва яе бак ў ступень kp. Тады правы бок заменіцца на a^{mp}. Падносячы левы бок пасьледаўна ў ступень k і p, атрымаем спачатку a^m, а потым a^{mp}.

Дзеля таго, што абодва лікі $\sqrt[k]{a^m}$ і $\sqrt[kp]{a^{mp}}$ пры падняцьці ў аднаковую ступень kp, далі аднаковыя рэзультаты, значыцца, яны зьяўляюцца арытмэтычнымі корнямі ліку a^{mp}. Але арытмэтычны корань для данага ліку можа быць толькі адзін, значыцца

$$\sqrt[k]{a^m}=\sqrt[kp]{a^{mp}}$$

Пераставіўшы левы бок гэтай роўнасьці направа і наадварот, атрымаем:

$$\sqrt[kp]{a^{mp}}=\sqrt[k]{a^m}$$

г. ё. *значэньне корня ня зьменіцца, калі паказальнік корня і паказальнік ступені падзелім на адзін і той самы лік.*

На гэтай аснове грунтуецца скарочаньне корняў, як напрыклад:

$$\sqrt[6]{a^4b^2}=\sqrt[6]{(a^2b)^2}=\sqrt[3]{a^2b},$$

$$\sqrt[12]{8a^9b^6}=\sqrt[12]{(2a^3b^2)^3}=\sqrt[4]{2a^3b^2}$$

Гэтыя-ж, уласьцівасьці корняў дазваляюць нам прывадзіць корні да супольнага паказальніка.

Хай, напрыклад, маем два корні:

$$\sqrt{m}\ ,\ \sqrt[3]{m}$$

Памнажаючы паказальнік корня і ступені першага ліку на 3, атрымаем

$$\sqrt{m}=\sqrt[6]{m^3}$$

Памнажаючы паказальнік корня і ступені другога ліку на 2, будзем мець:

$$\sqrt[3]{m}=\sqrt[6]{m^2}$$

З гэтага прыкладу бачым, што супольны паказальнік корняў ёсьць найменшы супольны кратны лік паказальнікаў даных корняў.

Дзелячы супольны паказальнік корня на паказальнікі даных корняў, атрымліваем дадатковыя сумножнікі, якія паказваюць, у якую ступень трэба паднесьці падкарэнны лік.

П Р Ы К Л А Д. Прывесьці да супольнага паказальніка корні:

$$\sqrt[4]{3a^2b^3}\ ,\qquad \sqrt[3]{5ab^2c}\ ,\qquad \sqrt[6]{7a^5bm^4}$$

А Д К А З: $\sqrt[12]{27a^6b^9}$, $\sqrt[12]{625a^4b^8c^4}$, $\sqrt[12]{49a^{10}b^2m^8}$

Нормальны від корняў.

§ 25. Корань мае нормальны від тады, калі ён не зьмяшчае нявымерных назоўнікаў, вымерных сумножнікаў пад знакам корня і паказальнікаў ступеняў, якія могуць быць скарочаны з паказальнікам корня; так, напрыклад, выразы:

$$4ab\sqrt[3]{a^2x}\quad \text{і}\quad \frac{3}{5}b\sqrt[5]{a^4c^3}$$

маюць нормальны від; выразы-ж:

$$3ab\sqrt{\frac{ab^2}{5cx}}\quad \text{і}\quad 2am^2\sqrt{4a^3}$$

ня маюць нормальнага віду.

Корань, які ня мае нормальнага віду, можам заўсёды прывесьці да нормальнага віду, напрыклад:

$$3ab\sqrt{\frac{ab^2}{5cx}}=3ab\sqrt{\frac{ab^2 5cx}{25c^2x^2}}=\frac{3ab^2}{5cx}\sqrt{5acx}.$$

З а д а ч ы.

Вывесьці па меры магчымасьці з-пад знаку корня сумножнікі:

141. $\sqrt{8}$ 142. $\sqrt[3]{81}$

143. $\sqrt[3]{-108}$ 144. $\sqrt[5]{96}$

145. $2\sqrt{405}$ 146. $\frac{5}{2}\sqrt[5]{128}$

147. $\sqrt[5]{a^{15}b^{6}}$

148. $2\sqrt{75c^{6}d^{4}}$

149. $\frac{12}{5}\sqrt{1+\frac{1}{24}}$

150. $\sqrt[5]{\frac{a^{14}}{b^{10}}}$

151. $a^{2}\sqrt[3]{\frac{-0,343}{a^{6}x^{6}}}$

152. $\sqrt{\frac{(a^{2}-2ab+b^{2})y}{25}}$

153. $\sqrt{8a^{5}b^{2}-4a^{4}b^{3}}$

154. $\sqrt{\frac{a^{2}b+2ab^{2}+b^{3}}{3a^{2}-6ab+3b^{2}}}$

Увесьці пад знак корня:

155. $2\sqrt{3}$

156. $2\sqrt[3]{3}$

157. $y\sqrt[6]{5}$

158. $0,2\sqrt{50}$

159. $\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}}$

160. $-\frac{a}{b}\sqrt[3]{-\frac{b^{4}}{a^{5}}}$

161. $2ab^{m}\sqrt[n]{3a^{m}b^{2}}$

162. $\frac{b-c}{b+c}\sqrt{\frac{a^{2}+bc}{b^{2}-2bc+c^{2}}}$

Скараціць корні:

163. $\sqrt[8]{a^{6}}$

164. $\sqrt[18]{a^{27}}$

165. $\sqrt[-5]{a^{20}}$

166. $\sqrt[-12]{a^{-8}}$

167. $\sqrt[8]{\frac{64a^{4}b^{12}}{81c^{-6}}}$

168. $\sqrt[-4]{a^{-8}b^{10}c^{-2}}$

Прывесьці наступныя корні да супольнага паказальніка:

169. $\sqrt[6]{a^{5}}$; $\sqrt[4]{a^{3}}$

170. $\sqrt[3]{2a^{2}}$ і $\sqrt[6]{ab^{5}}$

171. $\sqrt{\frac{3a^{5}}{b^{3}}}$ і $\sqrt[9]{\frac{10b^{2}}{a}}$

172. $\sqrt[12]{a^{2}b^{3}}$, $\sqrt[4]{a}$ і $\sqrt[8]{a^{3}}$

173. $\sqrt{\frac{a^{3}}{b^{2}}}$, $\sqrt[5]{\frac{x}{y^{4}}}$ і $\sqrt[3]{\frac{y}{z^{2}}}$

Прадставіць наступныя корні ў нормальным відзе:

174. $5\sqrt{\frac{2}{5}}$

175. $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$

176. $2\sqrt[3]{\frac{11}{54}}$

177. $\sqrt[3]{\frac{7}{20}}$

178. $\frac{3xy^{2}}{2}\sqrt{\frac{8}{xy}}$

179. $b\sqrt{\frac{1}{b^{2}}-\frac{a^{2}}{b^{4}}}$

180. $\sqrt{\frac{18}{25a}-\frac{9b^2}{25a^3}}$ 181. $\frac{a+b}{a}\sqrt[3]{\frac{a^{13}-a^{12}b}{(a-b)^2}}$

182. $\sqrt{\frac{3a+8b}{b}-\frac{2a-3b}{a}}$

183. $\sqrt{\frac{2a}{2a-b}+\frac{4ab}{4a^2-b^2}-\frac{b}{2a+b}}$

Падобнасьць корняў.

§ 26. *Корні ёсьць падобныя тады, калі маюць аднаковыя паказальнікі і адны й тыя самыя падкарэнныя лікі;* так, напрыклад, падобнымі корнямі будуць:

$$5\sqrt[3]{a^2bc} \quad \text{і} \quad \frac{2}{3}ac\sqrt[3]{a^2bc}$$

Часам здараецца, што падобныя ў істоце корні, дзякуючы таму, што яны ня прыведзены да нормальнага віду, здаюцца непадобнымі, як, напрыклад, корні:

$$3ab\sqrt[3]{2a^2b^6x} \quad \text{і} \quad 5b^2c\sqrt[3]{16a^5c^3x^4}$$

Дзеля гэтага, каб знайсьці падобнасьць корняў, трэба прывесьці іх спачатку да нормальнага віду; тады:

$$3ab^2\sqrt[3]{2a^2x} \quad \text{і} \quad 10ab^2c^2x\sqrt[3]{2a^2x}$$

Як бачым, корні нашы—падобныя.

Грунтуючыся на аснове падобнасьці корняў, можам іх злучаць (водлуг правілаў злучэньня вымерных лікаў), напрыклад:

$$4\sqrt[3]{bx^2}-5\sqrt[3]{bx^2}+3\sqrt[3]{bx^2}=2\sqrt[3]{bx^2}$$

Калі падобныя корні маюць розныя літарныя коэфіцыэнты, то пры злучэньні звычайна корань выносім за дужкі, напрыклад:

$$5a^3\sqrt{3ac}-2b\sqrt{3ac}=(5a^3-2b)\sqrt{3ac}$$

Складаньне і адніманьне корняў.

§ 27. Складаньне і адніманьне ірацыянальных лікаў робім паводлуг правілаў складаньня і адніманьня вымерных лікаў, а ўласна:

Каб *дадаць ці адняць* ірацыянальныя *адначлены*, трэба выпісаць кожны член з уласьцівым знакам;

Каб *дадаць* ірацыянальны *многачлен*, трэба выпісаць папарадку ўсе яго члены з папярэднімі знакамі;

Каб *адняць* ірацыянальны *многачлен*, трэба ва ўсіх яго членах зьмяніць знакі на супрацiўныя.

Посьле выкананьня дзеяньня ў кожным з трох пералічаных выпадкаў трэба зрабіць усе магчымыя ўпрошчаньні, г. ё. прывесьці корні да нормальнага віду і потым злучыць падобныя выразы:

ПРЫКЛАД I.

$$7\sqrt[3]{2ax^2}-3\sqrt{5ab}+(\sqrt{3b}-4\sqrt{2ax^2})-(3\sqrt{5ab}+11\sqrt{3b}-8\sqrt[3]{2ax^2})=$$
$$=7\sqrt[3]{2ax^2}-3\sqrt{5ab}+\sqrt{3b}-4\sqrt[3]{2ax^2}-3\sqrt{5ab}-11\sqrt{3b}+8\sqrt[3]{2ax^2}=$$
$$=11\sqrt[3]{2ax^2}-6\sqrt{5ab}-8\sqrt{3b}$$

ПРЫКЛАД II.

$$3\sqrt{\frac{an}{4}}-\left(\frac{16}{3a}\sqrt{\frac{a^3n}{16}}-3a\sqrt{\frac{n}{a}}+2n\sqrt{\frac{a}{9n}}\right)=3\sqrt{\frac{an}{4}}-\frac{16}{3a}\sqrt{\frac{a^3n}{16}}+$$
$$+3a\sqrt{\frac{n}{a}}-2n\sqrt{\frac{a}{9n}}=\frac{3}{2}\sqrt{an}-\frac{16}{3a.4}\sqrt{a^2.an}+3a\sqrt{\frac{an}{a^2}}-2n\sqrt{\frac{an}{9n^2}}=$$
$$=\frac{3}{2}\sqrt{an}-\frac{4a}{3a}\sqrt{an}+\frac{3a}{a}\sqrt{an}-\frac{2n}{3n}\sqrt{an}=\frac{3}{2}\sqrt{an}-\frac{4}{3}\sqrt{an}+$$
$$+3\sqrt{an}-\frac{2}{3}\sqrt{an}=2\frac{1}{2}\sqrt{an}$$

Задачы.

Выканаць дзеяньні і ўпросьціць.

184. $(\sqrt{117}+\sqrt{325})-(\sqrt{52}-\sqrt{1573})$

185. $(\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{128})+(\sqrt[3]{250}-\sqrt[3]{54})$

186. $3\sqrt[3]{135}+4\sqrt[3]{40}+6\sqrt[3]{320}-\sqrt[3]{625}$

187. $6a\sqrt{63ab^3}-3\sqrt{112a^3b^3}+2ab\sqrt{343ab}-5b\sqrt{28a^3b}$

188. $3\sqrt[5]{2}-\frac{1}{2}\sqrt[5]{64}+10\sqrt[5]{486}-6\frac{1}{2}\sqrt[5]{2}$

189. $3\frac{1}{2}\sqrt{24}-\frac{\sqrt[3]{54}}{4}+2\frac{\sqrt{99}}{3}-1\frac{1}{2}\sqrt{44}+3\sqrt[3]{2}$

190. $\sqrt[4]{162x^4y}-\sqrt[3]{54x^3y}-\sqrt[4]{32x^8y^5}+\sqrt[3]{16x^6y^4}$

191. $5\sqrt[3]{x^2y^5}+4y^2\sqrt{\frac{x^2}{y}}+\frac{4y}{x^2}\sqrt[3]{-x^8y^2}-\left(6xy\sqrt[3]{\frac{y^2}{x}}+\frac{3}{2}xy^2\sqrt[3]{-\frac{8}{xy}}\right)$

192. $\sqrt{\frac{(a^2-b^2)(a-b)^2}{a+b}}+\frac{1}{2a-3b}\sqrt{(2a-3b)^2(a-b)}-$
$-(a-b)\sqrt{\frac{(a+b)^2}{a-b}}$

Множаньне і дзяленьне корняў.

§ 28. З § 11 ведаем, што корань здабытку ёсьць роўны здабытку корняў сумножнікаў, г. ё.:

$$\sqrt[n]{abc}=\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}.\sqrt[n]{c}\,;$$

значыцца, і наадварот:

$$\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}.\sqrt[n]{c}=\sqrt[n]{abc}$$

Адсюль вынікае наступнае правіла:

Каб памножыць корні з аднаковымі паказальнікамі, трэба памножыць іх падкарэнныя лікі.

Калі корні маюць розныя паказальнікі, то спачатку прыводзім іх да супольнага паказальніка, а потым ужо множым падкарэнныя лікі.

Калі пры корнях ёсьць коэфіцыэнты, то іх множым асобна, а ірацыянальныя вялічыні асобна.

П Р Ы К Л А Д І.

$$\sqrt[5]{2a^3x}.\sqrt[5]{8ax^2}.\sqrt[5]{2a^4x^2}=\sqrt[5]{32a^8x^5}=2ax\sqrt[5]{a^3}$$

П Р Ы К Л А Д ІІ.

$$15\sqrt[4]{\frac{2a^3}{3b^2x}}\cdot\frac{1}{3}ab\sqrt[3]{3ax^2}\cdot\frac{4b}{x}\sqrt[6]{\frac{b}{2a^4x^3}}=$$

$$=15\sqrt[12]{\frac{8a^9}{27b^6x^3}}\cdot\frac{1}{3}ab\sqrt[12]{81a^4x^8}\cdot\frac{4b}{x}\sqrt[12]{\frac{b^2}{4a^8x^6}}=\frac{15.4ab^2}{3x}\sqrt[12]{\frac{8.81a^{13}b^2x^8}{27.4a^8b^6x^9}}=$$

$$=\frac{20ab^2}{x}\sqrt[12]{\frac{6a^5}{b^4x}}=\frac{20ab^2}{x}\sqrt[12]{\frac{6a^5.b^8x^{11}}{b^{12}x^{12}}}=20\frac{ab}{x^2}\sqrt[12]{6a^5b^8x^{11}}$$

Дзяленьне корняў выконываем на аснове правіла аб дабываньні корня з дробу, якое кажа (§ 11), што корань дробу ёсьць роўны корню лічніка, падзеленаму на корань назоўніка, ці:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\,,$$

а. значыцца, і наадварот:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\,,$$

адкуль вынікае. што

Каб падзяліць корні з аднаковымі паказальнікамі, трэба падзяліць іх падкарэнныя лікі.

Калі корні маюць розныя паказальнікі, то перад дзеяньнем спачатку прыводзім іх да супольнага паказальніка.

Калі пры корнях ёсьць коэфіцыэнты, то іх дзелім асобна, а ірацыянальныя вялічыні асобна.

ПРЫКЛАД.

$$\frac{3}{10}x\sqrt[6]{\frac{6a^5}{x^4}}:\frac{2}{5}\sqrt[4]{\frac{x^2}{a^3}}=\frac{3}{10}x\sqrt[12]{\frac{36a^{10}}{x^8}}:\frac{2}{5}\sqrt[12]{\frac{x^6}{a^9}}=\frac{3.5.x}{10.2}\sqrt[12]{\frac{36a^{19}}{x^{14}}}=$$

$$=\frac{3x}{4}\sqrt[12]{\frac{a^{12}.36a^7x^{10}}{x^{24}}}=\frac{3a}{4x}\sqrt[12]{36a^7x^{10}}$$

Задачы.

Выканаць дзеяньні і ўпросьціць.

193. $\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}$

194. $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{16}$

195. $2\sqrt[3]{16}\cdot\frac{3}{4}\sqrt[3]{-5}$

196. $\frac{1}{3}\sqrt[4]{27}\cdot\frac{1}{9}\sqrt[4]{243}$

197. $2\sqrt[4]{32}\cdot\sqrt[4]{216}\cdot 3\sqrt[4]{60}$

198. $\sqrt[5]{12}\cdot\sqrt[5]{450}\cdot\sqrt[5]{36}\cdot\sqrt[5]{125}$

199. $(7\sqrt{35}+8\sqrt{27}-6\sqrt{48}+3\sqrt{70}) . 4\sqrt{21}.$

200. $(2\sqrt[3]{5}+3\sqrt[4]{6}+4\sqrt[6]{8}+8\sqrt{3}) . 4\sqrt[3]{25}$

201. $(5\sqrt{6}-6\sqrt{5})(3\sqrt{6}+4\sqrt{5})$

202. $\frac{12a^3}{5x^2}\sqrt[4]{\frac{a^7x}{32}}\cdot\frac{10x^3}{3a^2}\sqrt[4]{\frac{4}{a^3x}}$

203. $(\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}-\sqrt[6]{2})(\sqrt[6]{5}-\sqrt[3]{5}+\sqrt{5})$

204. $\sqrt{\frac{4}{x}-\frac{x}{4}}\cdot\sqrt{\frac{4}{x}+\frac{x}{4}}$

205. $(\sqrt{a^3bc}-\sqrt{b^3cd}+\sqrt{c^3da}-\sqrt{d^3ab}) . \sqrt{abcd}$

206. $(a-\sqrt{ab}+\sqrt{a^2+ab})(b-\sqrt{ab}+\sqrt{b^2+ab})$

207. $a^{-1}b^3\sqrt[5]{a^{-1}b^9}\cdot 4a^3b^{-3}\sqrt[5]{a^3b}\cdot\frac{1}{8}a^4b^{-1}\sqrt[5]{b^4a^{-3}}$

208. $\sqrt{28}:\sqrt{7}$

209. $\sqrt{\frac{12}{35}}:\sqrt{\frac{7}{5}}$

210. $2\sqrt[3]{\frac{4}{25}}:\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{125}}$

211. $\sqrt[4]{27a^3}:\sqrt[4]{\frac{a^2}{3}}$

212. $\sqrt[4]{250}:\sqrt{5}$

213. $\sqrt{\frac{3}{5}}:\sqrt[6]{3\frac{3}{8}}$

214. $\sqrt[6]{0{,}064}:\sqrt{10}$

215. $\sqrt[6]{16x^3y^4}:\sqrt[3]{2xy^2}$

216. $\sqrt[6]{243} : (\sqrt[8]{27} \cdot \sqrt[12]{3})$

217. $\dfrac{\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[5]{16}}{\sqrt[6]{32} \cdot \sqrt[15]{4} \cdot \sqrt[10]{2}}$

218. $\sqrt{ax+bx} : \sqrt{a^2+ab}$

219. $\sqrt{3(12a^3-16a^2+7a-1)} : \sqrt{a-\dfrac{1}{3}}$

220. $\sqrt{3a^3b-6a^2b^2+3ab^3} : \sqrt{a^2-2ab+b^2}$

221. $(7\sqrt{35}-5\sqrt{6}-3\sqrt{45}+8\sqrt{8}) : \sqrt{10}$

222. $\left(2\sqrt[4]{x^3y}-3\sqrt[4]{\dfrac{xy^3}{2}}+\sqrt[4]{\dfrac{1}{x}}\right) : \dfrac{1}{xy}\sqrt[4]{x^3y^2}$

223. $(\sqrt{15}+\sqrt{30}-\sqrt{10}-2\sqrt{5}) : (\sqrt{5}+\sqrt{10})$

224. $\dfrac{2a^2b}{c}\sqrt[3]{\dfrac{a^3b^2}{c^4d}} : \dfrac{4ab^2}{c^2}\sqrt[5]{\dfrac{a^6d^2}{b^8c^4}}$

225. $(a^2b\sqrt[5]{a^2b}+ab\sqrt[4]{a^3b^2}-\dfrac{a^2}{b}\sqrt[10]{a^4b^3}) : \dfrac{b^2}{a}\sqrt[10]{a^2b}$

226. $(\sqrt[5]{8x^3}-3\sqrt{3}) : (\sqrt[5]{2x}-\sqrt{3})$

227. $(1-a) : (1-\sqrt{a})$

228. $\sqrt{\dfrac{a+b+c}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}}} : \sqrt{\dfrac{bc+ca+ab}{\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}+\dfrac{1}{ab}}}$

Падняцьце корняў у ступень і дабываньне з іх корняў.

§ 29. *Каб корань падняць у ступень, трэба падняць у гэтую ступень падкарэнную велічыню.*

І праўда:

$$(\sqrt[n]{a})^p = \underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \ldots}_{p \text{ разоў}} = \sqrt[n]{\underbrace{a.a.a.\ldots}_{p \text{ разоў}}} = \sqrt[n]{a^p}$$

што й трэба было давесьці.

Вынік. Калі корань падносім у такую ступень, якой паказальнік ёсьць роўны паказальніку корня, то проста зносім знак корня.

Увага. Калі пры корні ёсьць коэфіцыэнт, то, падносячы корань у ступень, трэба паднесьці ў гэтую ступень і коэфіцыэнт.

ПРЫКЛАД І.

$$\left(\sqrt[7m]{3bc^2}\right)^{7m} = 3bc^2$$

ПРЫКЛАД II.

$$\left(4ax^5\sqrt{\frac{5b}{2ax}}\right)^3 = 64a^3x^{15}\sqrt{\frac{125b^3}{8a^3x^3}} = 64a^3x^{15}\sqrt{\frac{125b^3 2ax}{16a^4x^4}} =$$
$$= \frac{64a^3x^{15}.5b}{4a^2x^2}\sqrt{10abx} = 80abx^{13}\cdot\sqrt{10abx}$$

Цяпер хай трэба дабыць корань k-ой ступені з велічыні $\sqrt[n]{a}$ Абазначым атрыманы пры гэтым рэзультат праз x, тады:

$$\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = x$$

Падносячы абодва бакі гэтай роўнасьці ў k-ую ступень, будзем мець:

$$\sqrt[n]{a} = x^k$$

Падносячы абодва бакі апошняй роўнасьці ў степень n, атрымаем:

$$a = x^{kn}$$

Калі цяпер, наадворот, з абодвух бакоў дабудзем корань ступені kn, то знойдзем:

$$\sqrt[kn]{a} = x,$$

а з прычыны таго, што на пачатку доваду праз x мы абазначылі $\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}}$, значыцца:

$$\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[kn]{a},$$

адкуль:

Каб дабыць корань з корня, трэба перамножыць іх паказальнікі.

Вынік. Калі паказальнік корня можа быць раскладзены на сумножнікі, то дабываньне корня данае ступені можна раскласьці на пасьледаўнае дабываньне корняў з паказальнікамі, роўнымі даным сумножнікам, напрыклад:

1. $\sqrt[6]{729} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{729}}$; $\sqrt{729} = 27$ і $\sqrt[3]{27} = 3$,

значыцца: $\sqrt[6]{729} = 3$

2. $\sqrt[12]{4096} = \sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{4096}}}$; $\sqrt{4096} = 64, \sqrt{64} = 8$, а $\sqrt[3]{8} = 2$,

значыцца: $\sqrt[12]{4096} = 2$

Калі пры дабываньні корня з усяго выразу пры корні стаіць коэфіцыэнт, то звычайна спачатку ўводзім яго пад знак корня, напрыклад:

1. $\sqrt[3]{2x^2\sqrt{3ax}} = \sqrt[3]{\sqrt{4x^4.3ax}} = \sqrt[6]{12ax^5}$

2. $\sqrt{a\sqrt{2ab\sqrt[3]{3a^2b}}}=\sqrt{a\sqrt{\sqrt[3]{8a^3b^3.3a^2b}}}=\sqrt{a\sqrt[6]{24a^5b^4}}=$

$$=\sqrt{\sqrt[6]{a^6.24a^5b^4}}=\sqrt[12]{24a^{11}b^4}$$

Задачы.

229. $(\sqrt{2})^3$

230. $(\sqrt[3]{2})^2$

231. $(3\sqrt[3]{4})^2$

232. $(-\sqrt[14]{12})^7$

233. $(\sqrt[10]{a})^5$

234. $(\sqrt[mn]{x})^n$

235. $(a^2x\sqrt[3]{3a^2x})^4$

236. $\left(-2a\sqrt[6]{\frac{3}{a^4}}\right)^4$

237. $(\sqrt[5]{(x-y)^2})^4$

238. $\left(\frac{\sqrt{a^{-3}b^2}}{a^{-2}b^3}\right)^3$

239. $(a^{-1}b^2\sqrt[3]{4a^nb^{-2}})^{-2}$

240. $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$

241. $(\sqrt[6]{2}-\sqrt{3})^2$

242. $(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6})^2$

243. $\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2$

244. $(2\sqrt{15}-3\sqrt{5})^2-(\sqrt{21}-2\sqrt{7})^2$

245. $(\sqrt{5}+\sqrt{4}).(\sqrt{5}-\sqrt{4})$

246. $\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}\right)^2$

247. $\sqrt{\sqrt[3]{a^2}}$

248. $\sqrt[3]{\sqrt{125}}$

249. $\sqrt{a\sqrt[4]{a^3}}$

250. $\sqrt{\sqrt[4]{a^{10}b^2c^8}}$

251. $\sqrt{x^3\sqrt[3]{x\sqrt[4]{x}}}$

252. $\sqrt{x\sqrt{\frac{x^2}{y}}+\sqrt{\frac{x}{y}}}$

253. $\sqrt[4]{2x\sqrt[3]{2x^2y\,.\,3y\sqrt{3xy^3}}}$

254. $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{2}x^4y^2\sqrt{\frac{x}{2}\sqrt{\frac{1}{4}x}}}$

255. $\sqrt[4]{20736}$

256. $\sqrt[8]{6561}$

257. $\sqrt[4]{a^4+4a^3+6a^2+4a+1}$

258. $\sqrt[4]{16a^4-48a^3b+54a^2b^2-27ab^3+\frac{81}{16}b^4}$

Зьніштажэньне нявымернасьці ў многачленных назоўніках.

§ 30. Разважым галоўныя выпадкі, якія могуць здарыцца пры вылічэньнях:

I. Калі назоўнік дробу ёсьць сума двох квадратовых корняў, або сума вымернага ліку і квадратовага корня, то множым лічнік і назоўнік на розьніцу гэтых лікаў. Калі-ж назоўнік ёсьць розьніца двох квадратовых корняў, або розьніца вымернага ліку і корня, то множым лічнік і назоўнік на суму гэтых лікаў. У абодвух выпадках атрымліваем у назоўніку розьніцу квадратаў лікаў, т. ё. розьніцу двох вымерных лікаў.

ПРЫКЛАДЫ:

1. $$\frac{4}{3+\sqrt{5}}=\frac{4(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}=\frac{4(3-\sqrt{5})}{9-5}=3-\sqrt{5}$$

2. $$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{3-2}=$$
$$=3+2\sqrt{6}+2=5+2\sqrt{6}$$

II. У падобны спосаб робім, калі назоўнік зьмяшчае альгэбрычную суму некалькіх нявымерных лікаў, напрыклад:

$$\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{5}-(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\frac{2\sqrt{6}(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2})}{5-(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}=$$

$$=\frac{2\sqrt{6}(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2})}{5-3+2\sqrt{6}-2}=\frac{\cancel{2\sqrt{6}}(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2})}{\cancel{2\sqrt{6}}}=\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}.$$

III. Калі назоўнік заключае ў сабе суму, або розьніцу корняў аднаковых ступеняў (вышэй другой), то, карыстаючыся правіламі §§ 50—51 ч. 1, знаходзім дадатковы сумножнік, на які множым лічнік і назоўнік дробу; напрыклад:

$$\frac{21}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{3}}=\frac{21(\sqrt[3]{4^2}-\sqrt[3]{4.3}+\sqrt[3]{3^2})}{(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{4^2}-\sqrt[3]{4.3}+\sqrt[3]{3^2})}=$$

$$=\frac{21\sqrt[3]{4^2}-21\sqrt[3]{12}+21\sqrt[3]{3^2}}{4+3}=6\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{12}+3\sqrt[3]{9}$$

IV. Калі назоўнік зьмяшчае суму, або розьніцу двох корняў розных ступеняў, то спачатку прыводзім іх да супольнага паказальніка, а потым ужо прыстасоўваем папярэднія правілы; напрыклад:

$$\frac{11}{\sqrt{3}+\sqrt[4]{5}}=\frac{11}{\sqrt[4]{9}+\sqrt[4]{5}}=\frac{11(\sqrt[4]{9}-\sqrt[4]{5})}{\sqrt{9}-\sqrt{5}}=\frac{11(\sqrt{3}-\sqrt[4]{5})(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}=$$

$$=\frac{(11\sqrt{3}-11\sqrt[4]{5})(3+\sqrt{5})}{9-5}=\frac{33\sqrt{3}+11\sqrt{15}-33\sqrt[4]{5}-11\sqrt[4]{125}}{4}$$

Задачы.

Зьніштожыць нявымернасьць у назоўніках.

259. $\frac{a}{\sqrt{a}}$ 260. $\frac{b^2}{\sqrt{b}}$

261. $\frac{a^2-b^2}{\sqrt[3]{a-b}}$ 262. $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

263. $\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$ 264. $\frac{1-a}{\sqrt{1-\sqrt{a}}}$

265. $\frac{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ 266. $\frac{\sqrt{ax}+\sqrt{bx}}{a\sqrt{x}+b\sqrt{x}}$

267. $\frac{12}{3+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ 268. $\frac{2+\sqrt{30}}{\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{7}}$

269. $\frac{\sqrt{5abx}}{\sqrt{ax+b\sqrt{2x}}}$ 270. $\frac{60\sqrt{2}+12\sqrt{3}}{5\sqrt{6}+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$

271. $\frac{1}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}$ 272. $\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}}$

273. $\frac{1}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$

Пераробка корня віду $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$.

§ 31. Пры вылічэньнях альгэбрычных часам атрымоўваем выраз віду $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$, у якім A і B ёсьць вымерныя лікі, але B ня ёсьць поўны квадрат. Выраз гэты ў даным відзе нязручны для вылічэньняў. Істнуюць аднак-жа варункі, пры якіх такі складаны корань можам замяніць на суму або розьніцу двох звычайных корняў. Разгледзім гэтыя варункі.

Хай: $\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ і $\sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$

Складаючы і аднімаючы гэтыя раўнаньні бакамі, атрымаем:

$$2\sqrt{x}=\sqrt{A+\sqrt{B}}+\sqrt{A-\sqrt{B}} \quad і \quad 2\sqrt{y}=\sqrt{A+\sqrt{B}}-\sqrt{A-\sqrt{B}}.$$

Падносячы ў квадрат, будзем мець:

$$4x=A+\sqrt{B}+A-\sqrt{B}+2\sqrt{A^2-B} \quad і \quad 4y=A+\sqrt{B}+A-\sqrt{B}-2\sqrt{A^2-B},$$

або: $4x=2A+2\sqrt{A^2-B}$ і $4y=2A-2\sqrt{A^2-B}$,

ці: $x=\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}$ і $y=\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}$.

Адкуль: $\sqrt{x}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}$ і $\sqrt{y}=\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$

Значыцца: $\sqrt{x}\pm\sqrt{y}=$

$$=\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$$

Калі (A^2-B) ёсьць поўны квадрат, то x і y ёсьць вымерныя лікі і правы бок выведзенай роўнасьці будзе куды прасьцей ад левага, напрыклад:

$$\sqrt{6+\sqrt{11}}$$

можам раскласьці на суму корняў другой ступені, бо 6^2-11 ёсьць поўны квадрат; значыцца

$$\sqrt{6+\sqrt{11}}=\sqrt{\frac{6+5}{2}}+\sqrt{\frac{6-5}{2}}=\sqrt{\frac{11}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}$$

Выраз $\sqrt{8-2\sqrt{12}}$ можна раскласьці на розьніцу корняў, бо, уводзячы 2 пад знак корня, будзем мець $\sqrt{8-\sqrt{48}}$, а дзеля таго, што $8^2-48=16$ ёсьць поўны квадрат, дык:

$$\sqrt{8-2\sqrt{12}}=\sqrt{8-\sqrt{48}}=\sqrt{\frac{8+4}{2}}-\sqrt{\frac{8-4}{2}}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$$

Вылічыўшы з прыбліжэньнем да 0,001, знойдзем:

$\sqrt{6}=2{,}448...$, $\sqrt{2}=1.414...$,

адсюль: $\sqrt{8-2\sqrt{12}}=\sqrt{6}-\sqrt{2}=2{,}448....-1{,}414....=1{,}034....$

Упрошчаньне складанага корня мае прыстасаваньне ў геомэтрыі пры вылічэньні бакоў упісаных многакутнікаў; так, напрыклад, пры радыусе, роўным адзінцы, бок упісанага 12-кутніка выражаецца формулай:

$$a_{12}=\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

Перарабіўшы гэты складаны корань на розьніцу звычайных корняў, будзем мець:

$$a_{12}=\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}=$$

$$=\frac{2{,}448-1{,}414}{2}=0{,}517.\ \left(\text{з дакладнасьцю да}\ \frac{1}{2000}\right)$$

Пераробка $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$ была вядома яшчэ *Эвкліду* (каля 300 г. пасьле Нар. Хр.), вядомаму грэцкаму геомэтру, але ў альгэбрычнай форме была дадзена індусам *Бхаскарай* (1141—1225).

Задачы.

Упросьціць наступныя складаныя корні:

274. $\sqrt{3+\sqrt{8}}$
275. $\sqrt{8-\sqrt{28}}$
276. $\sqrt{10-\sqrt{84}}$
277. $\sqrt{7+2\sqrt{10}}$
278. $\sqrt{13-2\sqrt{30}}$
279. $\sqrt{57-12\sqrt{15}}$
280. $\sqrt{\frac{5}{7}+\frac{1}{7}\sqrt{21}}$
281. $\sqrt{\frac{21}{22}-\frac{2}{11}\sqrt{5}}$
282. $\sqrt{0{,}38+3\sqrt{0{,}0091}}$
283. $\sqrt[4]{14+6\sqrt{5}}$
284. $\sqrt{4\sqrt{5}-\sqrt{60}}$
285. $\sqrt{4+\sqrt{7}}+\sqrt{4-\sqrt{7}}$
286. $\sqrt{6+\sqrt{20}}-\sqrt{6-\sqrt{20}}$

Выразы з дробавымі паказальнікамі *).

§ 32. Мы ўжо ведаем, што пры дабываньні корня са ступені трэба паказальнік ступені падзяліць на паказальнік корня, напрыклад:

$$\sqrt[5]{a^{15}b^{10}}=a^3b^2$$

Калі правіла гэта будзем стасаваць і ў тым выпадку, калі паказальнік ступені ня дзеліцца на паказальнік корня, то атрымаем выраз з дробавым паказальнікам, напрыклад:

$$\sqrt[3]{a^2} \text{ можам напісаць у выглядзе } a^{\frac{2}{3}},$$

$$\text{выраз } \sqrt[4]{ab^3} \text{ у форме } a^{\frac{1}{4}}\, b^{\frac{3}{4}},$$

$$\text{наогул: } \sqrt[m]{a^k}=a^{\frac{k}{m}}$$

Адсюль бачым, што *лічнік дробавага паказальніка азначае паказальнік ступені данага ліку, а назоўнік—корня.*

Замяняючы ірацыянальныя лікі на лікі з дробавымі паказальнікамі, мы ўсе дзеяньні з ірацыянальнымі лікамі выконываем водлуг правіл, выведзеных для вымерных лікаў, што робіць альгэбрычныя вылічэньні больш лёгкімі і прасьцейшымі.

§ 33. *Каб перамножыць лікі з дробавымі паказальнікамі, трэба дадаць паказальнікі пры аднаковых сумножніках.*

І праўда:

$$a^{\frac{k}{m}}\cdot a^{\frac{p}{r}}=\sqrt[m]{a^k}\cdot\sqrt[r]{a^p}=\sqrt[mr]{a^{kr}}\cdot\sqrt[mr]{a^{mp}}=\sqrt[mr]{a^{kr+mp}}=a^{\frac{kr+mp}{mr}}=a^{\frac{k}{m}+\frac{p}{r}},$$

што й трэба было давесьці.

*) Дробавыя паказальнікі былі ўведзены спачатку *Міколай Орэмам* (Nicole Oresme, 1323—1382, Нормандзкі біскуп), але замацаваліся ў матэматыцы толькі посьле *Сымона Стэвіна* (Simon Stevin, 1548—1620).

ПРЫКЛАД І. $a^{\frac{2}{5}} \cdot a^{\frac{3}{5}} = a^{\frac{5}{5}} = a$

ПРЫКЛАД ІІ. $x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{3}{4}} \cdot x^{\frac{5}{6}} = x^{\frac{8+9+10}{12}} = x^{\frac{27}{12}} = x^{\frac{9}{4}}$

Каб падзяліць два лікі з дробавымі паказальнікамі, трэба ад паказальніка дзеліва адняць паказальнік дзельніка.

І праўда:

$$a^{\frac{k}{m}} : a^{\frac{p}{r}} = \sqrt[m]{a^k} : \sqrt[r]{a^p} = \sqrt[mr]{a^{kr}} : \sqrt[mr]{a^{mp}} = \sqrt[mr]{a^{kr-mp}} = a^{\frac{kr-mp}{mr}} = a^{\frac{k}{m} - \frac{p}{r}},$$

што й трэба было давесьці.

ПРЫКЛАД І. $a^{\frac{3}{4}} : a^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{2}{4}} = a^{\frac{1}{2}}$

ПРЫКЛАД ІІ. $a^{\frac{5}{6}} : a^{\frac{3}{8}} = a^{\frac{20-9}{24}} = a^{\frac{11}{24}}$

Каб лік з дробавым паказальнікам паднесьці ў ступень, трэба перамножыць паказальнікі ступеняў.

І праўда:

$$\left(a^{\frac{k}{m}}\right)^{\frac{p}{r}} = \sqrt[r]{\left(a^{\frac{k}{m}}\right)^{p}} = \sqrt[r]{\left(\sqrt[m]{a^k}\right)^{p}} = \sqrt[r]{\sqrt[m]{a^{kp}}} = \sqrt[mr]{a^{kp}} = a^{\frac{kp}{mr}} = a^{\frac{k}{m} \cdot \frac{p}{r}},$$

што й трэба было давесьці.

ПРЫКЛАД І. $\left(a^{\frac{3}{5}}\right)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{5}}.$

ПРЫКЛАД ІІ. $\left(a^{\frac{4}{5}}\right)^{\frac{25}{4}} = a^{\frac{4}{5} \cdot \frac{25}{4}} = a^5$

Каб дабыць корань з ліку з дробавым паказальнікам, трэба паказальнік ступені падзяліць на паказальнік корня.

І праўда, роўнасьць

$$\sqrt[\frac{p}{r}]{a^{\frac{k}{m}}} = a^{\frac{k}{m} : \frac{p}{r}}$$

ёсьць правільная, бо, падносячы яе ў ступень $\frac{p}{r}$, кожны яе бок заменіцца на $a^{\frac{k}{m}}$

ПРЫКЛАД І. $\sqrt[2/5]{a^{4/5}} = a^{4/5 \,:\, 2/5} = a^2$

ПРЫКЛАД ІІ. $\sqrt{a^{6/7} \cdot b^{2/3}} = a^{3/7} \cdot b^{1/3}$

Задачы.

Замяніць корні дробавымі паказальнікамі:

287. $\sqrt[3]{a^2}$

288. $\sqrt[4]{a^{-3}}$

289. $\sqrt[5]{a^{-3}b^4}$

290. $\sqrt[-2]{a^{-3}}$

Замяніць дробавыя паказальнікі корнямі.

291. $a^{5/6}$ 292. $a^{-3/4}$

293. $a^{-3/2}$ 294. $(a-b)^{5/3}$

295. $3a^{-1/2}(a-b)^{3/8}$

Вылічыць лікавыя значэньні шляхам упрошчаньня.

296. $4^{1/2}$ 297. $81^{3/4}$

298. $16^{-5/4}$ 299. $32^{-4/5}$

300. $(-8)^{2/3}$ 301. $(-27)^{4/3}$

302. $\left(\frac{25}{36}\right)^{-1/2}$ 303. $(0{,}64)^{0{,}5}$

304. $81^{-0{,}75}$ 305. $\sqrt[2/3]{16}$

306. $\sqrt[3/5]{-8}$ 307. $\sqrt[1^1/_3]{16}$

308. $\sqrt[5/6]{27^{2\frac{1}{2}}}$

Выканаць паказаныя дзеяньні.

309. $a^{2/3} \cdot b^{3/5} \cdot a^{3/4} \cdot b^{2/3}$ 310. $a^{7/12} b^{5/6} : a^{2/3} b^{3/4}$

311. $\left(a^{3/2}+b^{3/2}\right)\left(a^{1/2}-b^{1/2}\right)$ 312. $27^{3/4} \cdot 3^{3/4}$.

313. $\left(a^{3/4}+a^{1/4}b^{1/2}-b^{5/4}\right)^2$ 314. $\left(a^{2/3}b^{3/4}\right)^{12/5}$

315. $\left(0{,}1a^{1/4}+0{,}5b^{1/2}+0{,}3c^{1/7}\right)^2$

316. $\left(7\frac{2}{7}\right)^{3/8} \cdot \left(1\frac{2}{5}\right)^{3/8} : \left(10\frac{1}{5}\right)^{3/8}$

317. $\left(a^{1/2}-b^{1/2}-c^{1/2}+2b^{1/4}c^{1/4}\right) : \left(a^{1/4}+b^{1/4}-c^{1/4}\right)$

318. $\sqrt[5]{a^{\frac{5}{3}}}$ 319. $\sqrt[2/3]{a^4}$

320. $\sqrt[\frac{3}{4}]{\frac{b^3}{\sqrt{a}}}$ 321. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\frac{a^{5/2} \cdot b^{-6/5}}{ab^4}\left(2a^{-2/3}b^{3/5}\right)^2}}$

322. $\sqrt[-2/3]{a\sqrt{b^3} \cdot b^{-2} \sqrt[1/2]{a^{1/3}b}}$

323. $\left\{\left[a+(a^2-b^3)^{1/2}\right] \cdot \left[a-(a^2-b^3)^{1/2}\right]\right\}^{1/3}$.

Уяўныя лікі.

§ 34. *Уяўным лікам у матэматыцы называецца корань цотнае ступені з адмоўнага ліку;* так, напрыклад, уяўнымі лікамі будуць:

$$\sqrt{-a^2},\ \sqrt[4]{-8},\ \sqrt[6]{-7} \quad \text{і г. д.}$$

Гэтыя лікі маюць у альгэбры толькі тэорытычнае значэньне і ўведзены дзеля ўагульненьня некаторых матэматычных заданьняў.

Усе іншыя (ня ўяўныя) лікі называюцца сапраўднымі.

Дзеяньні над уяўнымі лікамі ўмовіліся рабіць па тых самых правілах, што й над лікамі сапраўднымі.

З прычыны таго, што кожны корань цотнае ступені можа быць прыведзены да квадратовага корня, дык у гэтым артыкуле будзем разглядаць толькі *квадратовыя корні* з адмоўных лікаў.

$\sqrt{-1}$ у матэматыцы ўмовіліся называць уяўнай адзінкай і абазначаюць яе літарай i (ад францускага слова imaginaire).

Гэтай уяўнай адзінцы ўмоўна далі ўласьцівасьць, па якой $i^2=-1$. Такім чынам:

$$\begin{aligned}
&i=\sqrt{-1},\\
&i^2=-1,\\
&i^3=i^2.i=-\sqrt{-1}=-i,\\
&i^4=i^2.\,i^2=1,\\
&i^5=i^4.i=1.\sqrt{-1}=\sqrt{-1}=i.
\end{aligned}$$

Значыцца, 5-я ступень $\sqrt{-1}$ ёсьць роўная першай, 6-я ступень будзе роўная другой і г. д.

Наогул, каб падняць $\sqrt{-1}$ у ступень p, трэба p падзяліць на 4 і калі ў астачы будзе 1, то $(\sqrt{-1})^p$ будзе роўны i; калі ў астачы будзе 2, то $(\sqrt{-1})^p$ будзе роўны -1; калі ў астачы будзе 3, то $(\sqrt{-1})^p$ будзе роўны $-i$; калі-ж астачы саўсім ня будзе, то $(\sqrt{-1})^p$ будзе роўны дадатнай адзінцы.

Напрыклад: $(\sqrt{-1})^{14}=(\sqrt{-1})^2=-1$.

a ўяўных адзінак будзем абазначаць $a\sqrt{-1}$, або ai, у якім выразе коэфіцыэнт a можа быць лікам дадатным, або адмоўным, вымерным і нявымерным.

Тады кожны ўяўны лік можам прывесьці да віду ai, напрыклад:

$$\sqrt{-a^2}=\sqrt{a^2(-1)}=a\sqrt{-1}=ai$$

$$\sqrt{-25}=\sqrt{25(-1)}=5\sqrt{-1}=5i$$

$$-\sqrt{-3}=-\sqrt{3(-1)}=-\sqrt{3}\,.\sqrt{-1}=-i\sqrt{3} \quad \text{і г. д.}$$

§ 35. Пры *дадаваньні і адніманьні* ўяўных лікаў атрымоўваем таксама ўяўны лік.

І праўда, дадаючы $a\sqrt{-1}$ да $b\sqrt{-1}$, атрымаем:

$$a\sqrt{-1}+b\sqrt{-1}=(a+b)\sqrt{-1}=(a+b)i,$$

або: $5\sqrt{-1}-3\sqrt{-1}+2\sqrt{-1}=4\sqrt{-1}=4i.$

Памнажаючы ўяўны лік на ўяўны, атрымоўваем сапраўдны лік.

І праўда, калі памножым $a\sqrt{-1}$ на $b\sqrt{-1}$, атрымаем:

$$(a\sqrt{-1})(b\sqrt{-1})=ab(\sqrt{-1})^2=-ab.$$

У падобны спосаб знойдзем:

$$\sqrt{-2}\,.\,\sqrt{-32}=\sqrt{2}\,.\,\sqrt{32}\,.\,(\sqrt{-1})^2=-\sqrt{64}=-8$$

$$\sqrt{-3}\,.\,\sqrt{-4}=\sqrt{3}\,.\,\sqrt{4}(\sqrt{-1})^2=-2\sqrt{3}.$$

Пры *дзяленьні* ўяўнага ліку на ўяўны атрымоўваем сапраўдны лік.

І праўда, калі $a\sqrt{-1}$ падзелім на $b\sqrt{-1}$, атрымаем:

$$\frac{a\sqrt{-1}}{b\sqrt{-1}}=\frac{a}{b},$$

або: $\sqrt{-45}:\sqrt{-5}=\sqrt{9}=3$

Падносячы ў ступень p ўяўны лік $a\sqrt{-1}$, атрымоўваем

$$a^p\,.\,(\sqrt{-1})^p$$

Напрыклад: $(a\sqrt{-1})^{11}=a^{11}(\sqrt{-1})^3=a^{11}\,.\,(-i)=-a^{11}i.$

Комплексныя лікі.

§ 36. *Комплексным лікам* называем сапраўдны лік, злучаны знакам дадаваньня ці адніманьня з уяўным лікам, напрыклад:

$4+3i,\ \ 2-3\sqrt{5}\,i$ і г. д.

Агульны від комплекснага ліку ёсьць:

$$a+bi$$

Лікі сапраўдныя і ўяўныя ёсьць паасобныя выпадкі комплексных лікаў, а мянавіта:

калі $b=0$, то лік $a+bi=a$,

калі $a=0$, то лік $a+bi=bi$

Пры ўсіх альгэбрычных дзеяньнях з комплекснымі лікамі атрымоўваем таксама комплексныя лікі.

ПРЫКЛАД I.

$$(a+bi)+(a_1+b_1i)=(a+a_1)+(b+b_1)i$$

ПРЫКЛАД II.

$$(a+bi)(a_1+b_1i)=aa_1+a_1bi+ab_1i+bb_1i^2=aa_1+(a_1b+ab_1)i-bb_1=$$
$$=(aa_1-bb_1)+(a_1b+ab_1)i.$$

ПРЫКЛАД III.

$$\frac{a+bi}{a_1+b_1i}=\frac{(a+bi)(a_1-b_1i)}{a_1^2-b_1^2i^2}=\frac{aa_1+bb_1+(a_1b-ab_1)i}{a_1^2+b_1^2}=\frac{aa_1+bb_1}{a_1^2+b_1^2}+\frac{a_1b-ab_1}{a_1^2+b_1^2}\cdot i$$

ПРЫКЛАД IV.

$$(a-bi)^2=a^2-2abi+b^2i^2=a^2-b^2-2abi$$

§ 37. Два ўяўныя лікі:

$$a+bi \text{ і } a-bi,$$

якія розьняцца паміж сабой толькі знакам пры коэфіцыэнце ўяўнай часткі, называюцца *супрэжанымі комплекснымі лікамі.*

Асаблівая ўласьцівасьць супрэжаных комплексных лікаў заключаецца ў тым, што іх сума і здабытак ёсьць сапраўдныя лікі, а мянавіта:

$$(a+bi)+(a-bi)=2a$$
$$\text{і } (a+bi)(a-bi)=a^2-b^2i^2=a^2+b^2$$

На аснове апошняе формулы суму квадратаў двох лікаў можам заўсёды раскласьці на здабытак двох супрэжаных комплексных лікаў, напрыклад:

$$4a^2+25=(2a)^2+5^2=(2a+5i)(2a-5i)$$

Задачы.

Знайсьці значэньне ступеняў:

324. $(\sqrt{-1})^6$

325. $(\sqrt{-1})^7$

326. $(\sqrt{-1})^{25}$

327. $(\sqrt{-1})^{14}$

328. $(\sqrt{-1})^{56}$

329. $(\sqrt{-1})^{38}$

330. $(-\sqrt{-1})^{12}$

331. $(-\sqrt{-1})^{18}$

332. i^{40}

333. i^{18}

334. i^{4n-1}

335. i^{4n+2}

336. i^{8n+5}

Прывесьці да віду $a\sqrt{-1}$ (ai) корні:

337. $\sqrt{-4}$

338. $\sqrt{-36}$

339. $\sqrt{-a^2}$

340. $\sqrt{-b^6}$

341. $\sqrt{-9b^8}$

342. $\sqrt{-\frac{9}{4}}$

343. $\sqrt{-\frac{16}{81}}$

344. $\sqrt{-a}$

345. $\sqrt{-9x}$

346. $\sqrt{-a^2-b^2}$

347. $\sqrt{-(a-b)^2}$

348. $\sqrt{-x^2-y^2-2xy}$

Выканаць паказаныя дзеяньні:

349. $\sqrt{-25}+\sqrt{-49}-\sqrt{-64}+\sqrt{-1}$

350. $3\sqrt{-4}+5\sqrt{-27}-3\sqrt{-16}-5\sqrt{-3}$

351. $10\sqrt{-25}-5\sqrt{-8}+\sqrt{-49}-2\sqrt{-2}$

352. $3+2i+(4-3i)-[(8-5i)-(5+13i)]$

353. $3a-2bi+(a-bi)+[(3a-5bi)-(2a-8bi)]$

354. $\sqrt{-8}\cdot\sqrt{-2}$

355. $\sqrt{a-b}\cdot\sqrt{b-a}$

356. $(2-5i)(8-3i)$

357. $(5+2\sqrt{-7})(6-5\sqrt{-7})$

358. $(3\sqrt{-5}-2\sqrt{-7})(2\sqrt{-7}+3\sqrt{-5})$

359. $\sqrt{-(a+x)}\cdot\sqrt{-(a-x)}\cdot\sqrt{-(a^2-x^2)}$

360. $\sqrt{-ax}:\sqrt{-x}$

361. $\frac{a^2+b^2}{a-bi}$

362. $\frac{3-5i\sqrt{8}}{3+5i\sqrt{8}}$

363. $\frac{2-\sqrt{-7}}{3+\sqrt{-21}}$

364. $(3-\sqrt{-2})^2$

365. $\left(\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right)^2$

366. $(2-3\sqrt{-2})^2$

Першы раз уяўныя лікі сустракаюцца ў італьянскіх матэматыкаў *Тартальля* (Tartaglia, 1500—1557) і *Кардано* (Cardano, 1501—1576), якія яшчэ не прызнавалі іх за лікі. Толькі пачынаючы ад Дэкарта уяўныя лікі паступова замацоўваюцца ў матэматыцы, а канчатковае прызнаньне атрымліваюць посьле прац вядомага нямецкага матэматыка *Гаўсса* (Karl-Friedrich Gauss, 1777—1855), які ўвёў сымболь i і даў поўную тэорыю комплексных лікаў.

III.

Раўнаньні другой ступені.

Агульны від квадратовага раўнаньня з аднэй невядомай.

§ 38. *Раўнаньнем другой ступені, або квадратовым, называем такое раўнаньне, у якім, посьле зьнясеньня корняў, назоўнікаў, дужак і злучэньня падобных членаў,—вышэйшая ступень невядомай—другая.*

У раўнаньні другой ступені звычайна ўсе выразы пераносім на левы бок роўнасьці; дзеля гэтага правы бок робіцца роўны нулю, і раўнаньне прыймае выгляд:

$$ax^2+bx+c=0$$

Напрыклад, раўнаньне

$$x^2-3x=\frac{5x-12}{2}$$

посьле ўпрошчаньня прыводзім да выгляду:

$$2x^2-11x+12=0$$

Раўнаньне

$$ax^2+bx+c=0$$

называем *агульным відам* раўнаньня другой ступені.

Падзелім усе выразы агульнага раўнаньня на коэфіцыэнт пры x^2, а ўласна на a; тады агульнае раўнаньне заменіцца на раўнаньне

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

Калі ў гэтым апошнім $\frac{b}{a}$ абазначым праз p, а $\frac{c}{a}$ праз q, дык атрымаем раўнаньне

$$x^2+px+q=0,$$

якое будзем называць ***нормальным раўнаньнем*** другой ступені.

Такім чынам, нормальнае раўнаньне розьніцца ад агульнага толькі тым, што коэфіцыэнт пры квадраце невядомай нормальнага раўнаньня ёсьць роўны адзінцы.

Выраз c агульнага раўнаньня і q нормальнага раўнаньня называем выразам вядомым, або выразам незалежным ад x (вольным).

Няпоўнае раўнаньне II ступені.

§ 39. Раўнаньне другой ступені ёсьць няпоўнае, калі ў ім не хапае: або выразу, які заключае ў сабе першую ступень невядомай x, або выразу вядомага, або абодвух гэтых выразаў.

У першым выпадку раўнаньне мае від:

$$ax^2+c=0,$$

у другім:

$$ax^2+bx=0,$$

у трэцім:

$$ax^2=0$$

§ 40. Каб разьвязаць раўнаньне

$$ax^2+c=0,$$

пераносім вядомы выраз на правы бок, тады:

$$ax^2=-c;$$

падзяліўшы абодва выразы на a, атрымаем;

$$x^2=-\frac{c}{a},$$

адкуль

$$x_{1_2}=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}},$$

ці

$$x_1=\sqrt{-\frac{c}{a}},\ x_2=-\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Адсюль бачым, што ў раўнаньні віду

$$ax^2+c=0$$

абодва разьвязкі маюць роўныя значэньні і розьняцца толькі знакамі.

Калі a і c маюць знакі розныя, то пад корнем атрымоўваем лік дадатны, і тады абодва разьвязкі будуць сапраўдныя, вымерныя або нявымерныя.

Калі-ж a і c маюць аднолькавыя знакі, то пад корнем атрымоўваем адмоўны лік, і тады абодва разьвязкі будуць ўяўныя. У гэтым можам пераканацца і пры помачы звычайнага разважаньня, што сума двух лікаў з аднолькавымі знакамі ня можа быць роўная нулю, калі кожны з іх паасобку ня ёсьць роўны нулю.

ПРЫКЛАД I.

$$25x^2-49=0.$$

$$25x^2=49;\ x^2=\frac{49}{25};\ x_{1_2}=\pm\sqrt{\frac{49}{25}}=\pm\frac{7}{5}=\pm1\frac{2}{5}$$

адкуль: $x_1=1\frac{2}{5},\ x_2=-1\frac{2}{5}$

ПРЫКЛАД II.

$$9x^2-28=0;\ x_{1_2}=\pm\sqrt{\frac{28}{9}}=\pm\sqrt{\frac{4.7}{9}}=\pm\frac{2}{3}\sqrt{7}.$$

адкуль:

$$x_1=\frac{2}{3}\sqrt{7} \quad \text{і} \quad x_2=-\frac{2}{3}\sqrt{7},$$

ПРЫКЛАД III.

$$4x^2+7=0;\ x_{1_2}=\pm\sqrt{-\frac{7}{4}}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{-7},$$

адкуль:

$$x_1=\frac{1}{2}\sqrt{-7} \quad \text{і} \quad x_2=-\frac{1}{2}\sqrt{-7}$$

§ 41. Дзеля разьвязаньня раўнаньня

$$ax^2+bx=0$$

вывядзем за дужкі x (у левым баку раўнаньня); атрымаем тады:

$$x(ax+b)=0$$

У гэтым відзе левы бок раўнаньня ёсьць роўны нулю. Заўважым, што здабытак ёсьць роўны нулю, калі адзін з сумножнікаў ёсьць роўны нулю; з гэтае прычыны:

або $\quad x=0,$

або $\quad ax+b=0$

Разьвязваючы другое раўнаньне, атрымаем:

$$x=-\frac{b}{a}$$

Адсюль вынікае, што ў даным раўнаньні x мае два значэньні:

$$x_1=0 \quad \text{і} \quad x_2=-\frac{b}{a}$$

ПРЫКЛАД I.

$$3x^2-4x=0;\ x(3x-4)=0;\ x_1=0,\ x_2=\frac{4}{3}$$

ПРЫКЛАД II.

$$5x^2+ax=0;\ x(5x+a)=0;\ x_1=0,\ x_2=-\frac{a}{5}$$

Урэшце, няпоўнае раўнаньне $ax^2=0$ пры $a\neq 0$, мае толькі адзін разьвязак:

$$x_1=x_2=0$$

Разьвязаньне нормальнага квадратовага раўнаньня віду

$$x^2+px+q=0\ ^{*)}$$

§ 42. Посьле пераносу ў раўнаньні

$$x^2+px+q=0$$

вядомага выразу q на правы бок, атрымоўваем:

$$x^2+px=-q$$

---

*) Агульнае разьвязаньне квадр. раўнаньняў было дадзена ў першы раз індыйскім матэматыкам *Брахмагуптай* у 7-м веку.

Двохчлен (біном) x^2+px, або інакш $x^2+2\frac{p}{2}x$, складаецца з квадрату x і падвойнага здабытку x на $\frac{p}{2}$. Дзеля гэтага, калі мы да гэтага біному дадамо $\left(\frac{p}{2}\right)^2$, то атрымаем трохчлен, які будзе квадратам сумы $x+\frac{p}{2}$

А значыцца, дадаючы да абодвух бакоў раўнаньня выраз $(\frac{p}{2})^2$, будзем мець:

$$x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q,$$

$$\text{г. ё. } \left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$$

Дабываючы квадратовы корань з абодвух бакоў і, памятуючы аб двох значэньнях квадратовага корня з правага боку (дадатнага і адмоўнага), маем:

$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q},$$

адкуль: $$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q},$$

або $$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2-4q}{4}},$$

$$\text{г. ё. } x=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

А значыцца: $$x_1=\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

$$\text{і } x_2=\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

Разьвязваючы, напрыклад, раўнаньне

$$x^2+3x-4=0,$$

атрымоўваем: $$x=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{2},$$

ці $$x=\frac{-3\pm5}{2}$$

адкуль: $$x_1=1;\ x_2=-4$$

З раўнаньня $\frac{x^2}{2}=2(3-x)$

посьле ўпрошчаньня маем:

$$x^2+4x-12=0,$$

адкуль $$x=\frac{-4\pm\sqrt{16+48}}{2},$$

ці $$x=\frac{-4\pm8}{2}$$

А значыцца: $$x_1=2;\ x_2=-6$$

Раўнаньне $\frac{x}{a}+\frac{a}{x}=2$

посьле ўпрошчаньня прыводзім да віду

$$x^2-2ax+a^2=0,$$

адкуль: $x=\frac{2a\pm\sqrt{4a^2-4a^2}}{2}$

Значыцца: $x_1=x_2=a$

§ 43. З формулы $x=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$

можам атрымаць формулу: $x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$,

якую зручней прыстасоўваць пры разьвязваньні нормальнага квадратовага раўнаньня ў тым выпадку, калі коэфіцыэнт пры першай ступені невядомай ёсьць цотны.

Напрыклад, стасуючы першую формулу пры разьвязваньні раўнаньня

$$x^2-6x-55=0,$$

маем: $x=\frac{6\pm\sqrt{36+220}}{2}$,

або $x=\frac{6\pm16}{2}$,

адкуль $x_1=11$; $x_2=-5$.

Разьвязваючы-ж гэтае раўнаньне пры помачы ўпрошчанай формулы, атрымоўваем:

$$x=3\pm\sqrt{9+55},$$

або $x=3\pm8$,

адкуль: $x_1=11$; $x_2=-5$

Бачым, што ў даным прыкладзе вылічэньне значэньня x за дапамогаю другой формулы ёсьць больш простае.

Наадварот, калі коэфіцыэнт пры x — няцотны, тады зручней карыстацца з першае формулы.

З а д а ч ы.

Разьвязаць няпоўныя квадратовыя раўнаньні:

367. $x^2=49$

368. $x^2=\frac{361}{441}$

369. $y^2=7,84$

370. $7y^2=448$

371. $\frac{7}{11}x^2=308$

372. $x^2-5x=0$

373. $x^2=9x$

374. $5x^2+3x=0$

375. $7x^2=-5x$

376. $4x^2-11=89$

377. $6x^2+3x=4x^2+x$

378. $(2x+5)^2-(x-3)^2=16$

379. $(3x-8)^2-4(2x-3)^2+(5x-2)(5x+2)=96$

380. $(2x+3)(3x+4)(4x+5)=(2x-3)(3x-4)(4x-5)+904$

381. $\frac{x+3}{x-3}+\frac{x-3}{x+3}=3\frac{1}{3}$

382. $\frac{3x+8}{5x-2}-\frac{x+1}{3x-7}=0$

383. $\frac{x-2}{x+2}+\frac{x+2}{x-2}=\frac{2(x+3)}{x-3}$

384. $\frac{5\sqrt{7}-2x}{\sqrt{7}-10x}=\frac{\sqrt{7}-4x}{2(\sqrt{7}-x)}$

385. $\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+x}{x+2\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{x-2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}+\sqrt{3}-x}$

Разьвязаць поўныя квадратовыя раўнаньні:

386. $x^2-8x+15=0$

387. $x^2-12x+35=0$

388. $x^2+18x-40=0$

389. $x^2+30x-1144=0$

390. $x^2-5x-36=0$

391. $x^2+17x-60=0$

392. $x^2-(a+b)x+ab=0$

393. $x^2+(ac-bd)x-abcd=0.$

394. $x^2-2(a^2+b^2)x+(a^2-b^2)^2=0.$

Уласьцівасьці разьвязкаў раўнаньня $x^2+px+q=0$.

§ 44. Маючы разьвязкі нормальнага раўнаньня:

$$x_1=\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2} \text{ і } x_2=\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

і дадаючы іх адпаведнымі бакамі, атрымаем:

$$x_1+x_2=\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}-p-\sqrt{p^2-4q}}{2},$$

$$\text{або } x_1+x_2=-\frac{2p}{2},$$

$$\text{адкуль: } x_1+x_2=-p, \text{ г. ё.:}$$

У нормальным раўнаньні $x^2+px+q=0$ сума разьвязкаў ёсьць роўная коэфіцыэнту пры першай ступені x з супрацiўным знакам.

Памнажаючы цяпер адпаведныя бакі гэтых самых разьвязкаў

$$x_1=\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2} \text{ і } x_2=\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2},$$

$$\text{атрымаем: } x_1x_2=\frac{(-p+\sqrt{p^2-4q})\cdot(-p-\sqrt{p^2-4q})}{4},$$

$$\text{або } x_1x_2=\frac{p^2-(p^2-4q)}{4},$$

$$\text{адкуль: } x_1x_2=q, \text{ г. ё.:}$$

У нормальным раўнаньні $x^2+px+q=0$ здабытак разьвязкаў ёсьць роўны выразу, незалежнаму ад x (вольнаму).

§ 45. На аснове выведзеных уласьцівасьцяў разьвязкаў раўнаньня $x^2+px+q=0$, можам скласьці квадратовае раўнаньне, маючы яго разьвязкі.

Напрыклад, калі $x_1=4$ і $x_2=3$, то $p=-(4+3)$ і $q=4.3$

і раўнаньне будзе мець выгляд:

$$x^2-(4+3)x+4.3=0,$$

або

$$x^2-7x+12=0$$

І праўда, разьвязваючы гэтае раўнаньне, атрымаем:

$$x=\frac{7\pm\sqrt{49-48}}{2},$$

або

$$x=\frac{7\pm1}{2},$$

адкуль:

$$x_1=4;\ x_2=3$$

Разьвязкі 5 і —2 мае раўнаньне:

$$x^2-(5-2)x+5.(-2)=0,$$

г. ё.

$$x^2-3x-10=0.$$

Разьвязкі $3+\sqrt{2}$ і $3-\sqrt{2}$ мае раўнаньне

$$x^2-(3+\sqrt{2}+3-\sqrt{2})x+(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})=0,$$

г. ё.

$$x^2-6x+7=0.$$

§ 46. Уласьцівасьці разьвязкаў раўнаньня $x^2+px+q=0$ даюць магчымасьць азначыць знакі разьвязкаў гэтага раўнаньня, не разьвязваючы яго; напрыклад, маючы раўнаньне $x^2-8x+15=0$, мы адразу можам сказаць, што абодва яго разьвязкі маюць аднаковыя знакі, бо іх здабытак (15) ёсьць дадатны, а з прычыны таго, што коэфіцыэнт пры x ёсьць адмоўны, значыцца сума разьвязкаў ёсьць дадатная; гэта даводзіць, што разьвязкі раўнаньня дадатныя.

У раўнаньні $x^2+5x-14=0$ разьвязкі маюць розныя знакі, бо іх здабытак (—14) ёсьць адмоўны. Сума разьвязкаў (—5) ёсьць адмоўная, адсюль вынікае, што большы разьвязак ёсьць адмоўны.

Расклад на сумножнікі левага боку раўнаньня $x^2+px+q=0$.

§ 47. Абазначыўшы разьвязкі нормальнага раўнаньня літарамі x_1 і x_2, атрымаем:

$$x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0,$$

ці

$$x^2-x_1x-x_2x+x_1x_2=0.$$

Вынясем з першых двух выразаў за дужкі x, а з двух пазасталых— x_2; будзем мець:

$$x(x-x_1)-x_2(x-x_1)=0,$$

адкуль: $$(x-x_1)(x-x_2)=0$$

Значыцца, левы бок нормальнага квадратовага раўнаньня раскладаецца на два сумножнікі, роўныя розьніцам паміж x і разьвязкамі раўнаньня; напрыклад, раўнаньне $x^2-10x+21=0$, якое мае разьвязкі 7 і 3, можам напісаць у форме:

$$(x-7)(x-3)=0.$$

Раўнаньне $x^2+9x+20=0$, разьвязкі якога ёсьць лікі -4 і -5, можам напісаць у відзе $(x+4)(x+5)=0$.

§ 48. Расклад левага боку нормальнага квадратовага раўнаньня на сумножнікі дае нам другі спосаб укладаньня квадратовага раўнаньня паводле яго разьвязкаў; напрыклад, маючы разьвязкі раўнаньня $x_1=6$ і $x_2=-7$, укладаем раўнаньне

$$(x-6)(x+7)=0,$$

якое посьле ўпрошчаньня прыйме выгляд:

$$x^2+x-42=0$$

І праўда, разьвязваючы гэтае раўнаньне, атрымаем:

$$x_1=6;\ x_2=-7$$

§ 49. Уласьцівасьць раскладу нормальнага квадратовага раўнаньня на сумножнікі мае прыстасаваньне пры раскладзе на сумножнікі трохчлену, маючага выгляд

$$x^2+px+q$$

Дзеля гэтае мэты прыраўноўваем яго да нуля і разьвязваем атрыманае, такім чынам, квадратовае раўнаньне; потым левы бок раскладываем на сумножнікі паводле паказанага спосабу.

Калі-б мы, напрыклад, хацелі раскласьці на сумножнікі трохчлен

$$x^2-5x-24,$$

то, прыраўнаўшы яго да нуля, атрымаем раўнаньне

$$x^2-5x-24=0,$$

з якога знойдзем:

$$x_1=8;\ x_2=-3$$

Дзякуючы гэтаму, дадзены трохчлен

$$x^2-5x-24=(x-8)(x+3)$$

У падобны спосаб прыраўнаўшы трохчлен

$$a^2+11a+30$$

да нуля і разьвязаўшы раўнаньне $a^2+11a+30=0$ адносна a, атрымаем:

$$a_1=-5;\ a_2=-6,$$

адкуль: $$a^2+11a+30=(a+5)(a+6)$$

Задачы.

Утварыць квадратовыя раўнаньні, маючы іх разьвязкі.

395. 3 і 5.

396. 6 і —3.

397. 4 і —4.

398. —10 і —10.

399. 0 і —2.

400. a і b.

401. $a+2$ і $a-2$.

402. $2+\sqrt{3}$ і $2-\sqrt{3}$.

403. $1+\sqrt{-1}$ і $1-\sqrt{-1}$.

Не разьвязваючы наступных раўнаньняў, знайсьці знакі іх разьвязкаў і паказаць, які з іх мае большае абсолютнае значэньне.

404. $x^2-12x+35=0$

405. $x^2-14x+49=0$

406. $x^2-22x+71=0$

407. $x^2+20x+100=0$

408. $x^2-13x+42=0$

409. $x^2+20x-125=0$

Раскласьці наступныя трохчлены на сумножнікі:

410. $x^2-8x-884$

411. $x^2+12x-925$

412. $x^2+3x-108$

413. $x^2-13x-9858$

414. $x^2+4ax+3a^2$

415. $x^2+2ax+a^2-b^2$

416. $x^2-ax-a\sqrt{b}-b$

417. $x^2+\sqrt{b}\,x-a^2+a\sqrt{b}$

Разьвязаньне агульнага квадратовага раўнаньня віду $ax^2+bx+c=0$

§ 50. Падзяліўшы ўсе выразы раўнаньня

$$ax^2+bx+c=0$$

на a, атрымоўваем:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0,$$

а посьле пераносу вядомага выразу на правы бок:

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a},$$

або

$$x^2+2\frac{b}{2a}x=-\frac{c}{a};$$

дапоўніўшы левы бок да квадрату, будзем мець:

$$x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a},$$

г. ё.

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a},$$

значыцца $$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}},$$

адкуль: $$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}},$$

або $$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}},$$

канчаткова: $$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ПРЫКЛАД I.

Разьвязаць раўнаньне $2x^2+3x-14=0$

У раўнаньні гэтым: $a=2$, $b=3$ і $c=-14$,

значыцца: $$x=\frac{-3\pm\sqrt{9-4\,.\,2\,(-14)}}{4},$$

ці $$x=\frac{-3\pm\sqrt{9+4\,.\,2\,.\,14}}{4}=\frac{-3\pm\sqrt{9+112}}{4}=\frac{-3\pm\sqrt{121}}{4}=\frac{-3\pm11}{4},$$

адкуль: $$x_1=\frac{-3+11}{4}=2 \text{ і } x_2=\frac{-3-11}{4}=-3\frac{1}{2}$$

ПРЫКЛАД II.

Разьвязаць раўнаньне $9x^2-12x+7=0$

$$x=\frac{12\pm\sqrt{144-252}}{18}=\frac{12\pm\sqrt{-108}}{18}=\frac{12\pm\sqrt{36\,.\,(-3)}}{18}=\frac{6(2\pm\sqrt{-3})}{18}=$$

$$=\frac{2\pm\sqrt{-3}}{3}=\frac{2\pm i\sqrt{3}}{3},$$

адкуль $$x_1=\frac{2+i\sqrt{3}}{3} \text{ і } x_2=\frac{2-i\sqrt{3}}{3}$$

Разьвязкі гэтага раўнаньня ёсьць лікі комплексныя супрэжаныя.

ПРЫКЛАД III.

Разьвязаць раўнаньне $(bx-a)(ax-b)=0$

Посьле ўпрошчаньня атрымоўваем:

$$abx^2-(a^2+b^2)x+ab=0,$$

адкуль: $$x=\frac{a^2+b^2\pm\sqrt{a^4+2a^2b^2+b^4-4a^2b^2}}{2ab},$$

$$x=\frac{a^2+b^2\pm\sqrt{a^4-2a^2b^2+b^4}}{2ab}=\frac{a^2+b^2\pm(a^2-b^2)}{2ab}$$

$$x_1=\frac{a^2+b^2+a^2-b^2}{2ab}=\frac{2a^2}{2ab}=\frac{a}{b}$$

$$x_2=\frac{a^2+b^2-a^2+b^2}{2ab}=\frac{2b^2}{2ab}=\frac{b}{a}$$

§ 51. Выведзеная формула разьвязку агульнага квадратовага раўнаньня

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

можа быць упрошчана ў тым выпадку, калі коэфіцыэнт b пры першай ступені невядомай ёсьць цотны лік. Вось-жа, калі абазначым яго праз $2к$, г. ё. калі $b=2к$, то агульнае раўнаньне атрымоўвае від:

$$ax^2+2кx+c=0,$$

і тады:

$$x=\frac{-2к\pm\sqrt{4к^2-4ac}}{2a}=\frac{-2к\pm\sqrt{4(к^2-ac)}}{2a},$$

адкуль:

$$x=\frac{-2к\pm2\sqrt{к^2-ac}}{2a},$$

а посьле скарочаньня на 2:

$$x=\frac{-к\pm\sqrt{к^2-ac}}{a}$$

ПРЫКЛАД:

У раўнаньні $4x^2-12x-27=0$,

а) паводле скарочанай формулы

$$x=\frac{6\pm\sqrt{36+108}}{4}=\frac{6\pm\sqrt{144}}{4}=\frac{6\pm12}{4}$$

$$x_1=\frac{18}{4}=4\frac{1}{2}\ \text{і}\ x_2=\frac{-6}{4}=-1\frac{1}{2}$$

б) паводле-ж агульнай формулы:

$$x=\frac{12\pm\sqrt{144+432}}{8}=\frac{12\pm\sqrt{576}}{8}=\frac{12\pm24}{8}$$

$$x_1=\frac{36}{8}=4\frac{1}{2}\ \text{і}\ x_2=\frac{-12}{8}=-1\frac{1}{2}$$

Сума і здабытак разьвязнаў раўнаньня $ax^2+bx+c=0$.

§ 52. Дадаўшы адпаведнымі бакамі формулы:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\quad \text{і}\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

атрымоўваем:

$$x_1+x_2=\frac{-2b}{2a},$$

або:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

Памнажаючы-ж памянёныя формулы, маем:

$$x_1 x_2 = \frac{(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})\,(b - \sqrt{b^2 - 4ac})}{4a^2}$$

$$x_1 x_2 = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2},$$

канчаткова:

$$x_1 . \, x_2 = \frac{c}{a}$$

Трохчлен другой ступені.

§ 53. *Трохчленам другой ступені, або квадратовым трохчленам,* называем трохчлен віду:

$$ax^2 + bx + c,$$

у якім x ёсьць зьменная велічыня, г. ё. можа прыймаць адвольныя значэньні.

На асаблівую ўвагу заслугоўвае расклад квадратовага трохчлена на сумножнікі. Дзеля гэтае мэты прыраўнаем яго да нуля і вывядзем a за дужкі; атрымаем тады:

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0$$

Хай разьвязкамі раўнаньня

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ёсьць лікі x_1 і x_2. Калі мы цяпер, на аснове папярэдняга §, у раўнаньні гэтым заменім

$$\frac{b}{a} \text{ праз } -\left(x_1 + x_2\right)$$

$$\text{і } \frac{c}{a} \text{ праз } x_1 . x_2, \text{ то атрымаем:}$$

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[x^2 - \left(x_1 + x_2\right)x + x_1 x_2\right] =$$

$$= a\left(x^2 - x_1 x - x_2 x + x_1 x_2\right) = a\left[x\left(x - x_1\right) - x_2\left(x - x_1\right)\right] =$$

$$= a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right),$$

ці: $ax^2 + bx + c = a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right).$

Калі цяпер захочам, на основе выведзенай формулы, раскласьці на сумножнікі квадратовы трохчлен

$$3x^2-20x+12,$$

то, прыраўнаўшы яго да нуля, разьвязваем раўнаньне $3x^2-20x+12=0$.

А дзеля таго, што разьвязкамі гэтага раўнаньня ёсьць лікі

$$x_1=6 \text{ i } x_2=\frac{2}{3},$$

значыцца $\quad 3x^2-20x+12=3(x-6)\left(x-\frac{2}{3}\right),$

або $\quad 3x^2-20x+12=(x-6)(3x-2)$

У падобны спосаб знойдзем:

$$10a^2+7a+1=10\left(a+\frac{1}{2}\right)\left(a+\frac{1}{5}\right)=(2a+1)(5a+1)$$

Задачы.

Разьвязаць поўныя раўнаньні:

418. $y^2-2\frac{5}{6}y+2=0$

419. $y^2-4\frac{8}{15}y+4=0$

420. $y^2+8\frac{1}{9}y-8=0$

421. $z^2+1{,}5z+0{,}56=0$

422. $z^2+1{,}6z-1{,}05=0$

423. $2x^2-5x+2=0$

424. $4x^2-17x+15=0$

425. $6x^2+19x-20=0$

426. $3x^2-10x-8=0$

427. $12x^2+160x+125=0$

428. $3x^2-10x+253=0$

429. $6y^2+3\frac{1}{5}y-1\frac{1}{2}=0$

430. $0{,}15z^2+0{,}01z-0{,}28=0$

431. $(x+5)^2+(x-2)^2+(x-7)(x+7)=11x+30$

432. $4(x+2)^2-(3x-1)^2+(3x-1)(3x-15)=4(2x-3)$

433. $a^2(a-x)^2=b^2(b-x)^2$

434. $a^2(b-x)^2=b^2(a-x)^2$

435. $(x+3)(x+1)(x-8)-(x-1)(x-2)(x-3)+216=0$

436. $\frac{x^2}{2}-\frac{x}{3}+7\frac{3}{8}=8$

437. $\frac{x+1}{x-2}=\frac{3x-7}{x-1}$

438. $\frac{2x-1}{x-3}=\frac{5x+2}{x+1}$

439. $\frac{x+0{,}5}{x-0{,}5}=\frac{2x+1}{x+2{,}5}$

440. $\frac{x}{4}+\frac{2}{x}+\frac{(x+1)}{x}=\frac{(x+2)(x+1)}{2x}$

441. $\frac{3(3x-1)}{12x+1}=\frac{2(3x+1)}{15x+8}$

442. $\frac{(x-12)^2}{6}-\frac{x}{9}+\frac{x(x-9)}{18}=\frac{(x-14)^2}{2}+5$

443. $\frac{(x-20)(x-10)}{10}-\frac{(34-x)(40-x)}{2}+\frac{(30-x)(5-x)}{3}=0$

444. $\frac{6}{x^2-1}-\frac{2}{x-1}=2-\frac{x+4}{x+1}$

445. $\frac{2x+1}{x+3}-\frac{x-1}{x^2-9}=\frac{x+3}{3-x}-\frac{4+x}{3+x}$

446. $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x+2}{x-2}-\frac{2x+13}{x+1}=0$

447. $\frac{x^2+10x}{x^4-1}+\frac{4}{x+1}=\frac{4x^2+21}{x^3+x^2+x+1}+\frac{1}{x^3-x^2+x-1}$

448. $a+x=\frac{1}{a}+\frac{1}{x}$ 449. $\frac{x+b}{ax-ab}-\frac{x-a}{bx+ab}=\frac{a+b}{a(a-b)}$

450. $x+\frac{1}{x}=\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}$ 451. $\frac{(a-x)^2+(b-x)^2}{(a-x)(b-x)}=\frac{5}{2}$

Утварыць квадратовыя раўнаньні, маючы іх разьвязкі:

452. 1 і $\frac{1}{2}$ 453. $\frac{1}{2}$ і $\frac{1}{3}$

454. $-\frac{2}{3}$ і $-\frac{3}{2}$ 455. $\frac{3}{7}$ і $\frac{7}{3}$

456. $-\frac{a}{3}$ і $\frac{a}{2}$ 457. $\frac{a-b}{a+b}$ і 1

Не разьвязваючы наступных раўнаньняў, знайсьці знакі іх разьвязкаў і паказаць, які з іх мае большае абсолютнае значэньне:

458. $2x^2+5x+2=0$ 459. $6x^2-5x-6=0$

460. $4x^2+2x+1=0$ 461. $8x^2+4x-1=0$

462. $3x^2-7x+2=0$

Раскласьці наступныя трохчлены на сумножнікі:

463. $6x^2+5x-6$ 464. $30x^2+37x+10$

465. $15x^2+34x+15$ 466. $15x^2-7x-88$

467. $4x^2-17x+15$ 468. $x^2-2ax+a^2-b^2$

469. $abx^2+(a+b)x+1$ 470. $abx^2+(a^2-b^2)x-ab$

Дасьледаваньне агульнага квадратовага раўнаньня віду

$$ax^2+bx+c=0$$

§ 54. Пры разьвязваньні раўнаньня

$$ax^2+bx+c=0,$$

мы атрымалі наступную формулу, якая азначае яго разьвязкі:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Правая частка гэтай роўнасьці можа быць лікам сапраўдным, ці ўяўным, у залежнасьці ад характару выразу $\sqrt{b^2-4ac}$

I. Калі ў раўнаньні $ax^2+bx+c=0$ выраз c ёсьць *адмоўны*, то $4ac$ ёсьць дадатны лік, і ўвесь выраз пад корнем прыймае выгляд b^2+4ac. У гэтым выпадку абодва разьвязкі ёсьць *сапраўдныя*, вымерныя або нявымерныя, у залежнасьці ад таго, ці b^2+4ac ёсьць поўны квадрат, ці не; напрыклад, раўнаньне

$$4x^2-5x-6=0$$

павінна мець абодва разьвязкі сапраўдныя, бо $5^2+4.4.6$ ёсьць дадатны лік. І праўда, разьвязваючы яго, знойдзем:

$$x_1=2 \text{ і } x_2=-\tfrac{3}{4}$$

II. Калі ў раўнаньні $ax^2+bx+c=0$ выраз c ёсьць *дадатны*, то $4ac$ ёсьць адмоўны. Тутака трэба будзе адрозьніваць тры гатункі разьвязкаў, а мянавіта:

1) калі $b^2>4ac$, выраз b^2-4ac ёсьць дадатны лік, і раўнаньне мае два *сапраўдныя розныя* разьвязкі, напрыклад, з раўнаньня

$$6x^2-11x+4=0, \text{ у якім } 11^2>4.6.4,$$

атрымоўваем: $x_1=1\tfrac{1}{3},\ x_2=\tfrac{1}{2}$

2) калі $b^2=4ac$, то $\sqrt{b^2-4ac}=0$. У гэтым выпадку разьвязкам раўнаньня будзе *сапраўдны вымерны* лік, а мянавіта $-\dfrac{b}{2a}$. Аднак-жа, каб уагульніць разьвязваньне раўнаньняў другой ступені, кажам, што раўнаньне гэтае мае *два розныя разьвязкі.*

Напрыклад, раўнаньне $9x^2-6x+1=0$, у якім $6^2=4.9.1$, мае абодва разьвязкі роўныя, а мянавіта:

$$x_1=x_2=\tfrac{1}{3}$$

3) калі $b^2<4ac$, выраз b^2-4ac ёсьць адмоўны. Абодва разьвязкі тады ёсьць *уяўныя* і твораць лікі *комплексныя супрэжаныя.*

Напрыклад, раўнаньне $2x^2-8x+17=0$, у якім $8^2<4.2.17$, мае абодва разьвязкі супрэжаныя комплексныя, а мянавіта:

$$x_1=\frac{4+3i\sqrt{2}}{2} \text{ і } x_2=\frac{4-3i\sqrt{2}}{2}$$

§ 55. Калі ў раўнаньні $ax^2+bx+c\ \ 0$ коэфіцыэнт $a=0$,

$$\text{то } x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2}}{0},$$

адкуль: $x_1 = \frac{-b+b}{0} = \frac{0}{0}$

$$і \; x_2 = \frac{-b-b}{0} = \frac{-2b}{0} = \infty$$

Каб знайсьці гранічнае значэньне разьвязка x_1, множым лічнік і назоўнік дробу

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{на} \quad (-b-\sqrt{b^2-4ac})$$

Атрымаем тады:

$$\frac{(-b+\sqrt{b^2-4ac})(-b-\sqrt{b^2-4ac})}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})} =$$

$$= \frac{b^2-b^2+4ac}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})} = \frac{4ac}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})} = \frac{2c}{-b-\sqrt{b^2-4ac}}$$

Падставіўшы цяпер у атрыманую формулу 0 на месца a, будзем мець

$$x_1 = \frac{2c}{-b-b} = -\frac{2c}{2b},$$

адкуль, посьле скарочаньня на 2, $x_1 = -\frac{c}{b}$

І праўда, калі $a=0$, то раўнаньне $ax^2+bx+c=0$ замяніцца на раўнаньне

$$bx+c=0,$$

якога разьвязак $x = -\frac{c}{b}$

Другі разьвязак $x_2 = \infty$ даводзіць, што, калі ў раўнаньні

$$ax^2+bx+c=0$$

коэфіцыэнт a паступова зьмяншаецца і ўрэшце робіцца роўным нулю, то адно значэньне x павялічваецца і можа зрабіцца больш за кожную, адвольна выбраную намі, велічыню. Гэта можна давесьці і ў іншы спосаб: падзяліўшы ўсе выразы раўнаньня

$$ax^2+bx+c=0 \quad \text{на} \quad x^2,$$

атрымаем: $a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} = 0$

Левы бок гэтай роўнасьці толькі тады стане роўны нулю, калі x атрымае бяскрайна-вялікае значэньне.

Калі ў раўнаньні $ax^2+bx+c=0$ коэфіцыэнты a і b ёсьць роўныя нулю, то:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{0}{0} \quad (1)$$

$$і \; x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{0}{0} \quad (2)$$

Памнажаючы ў гэтым выпадку лічнік і назоўнік дробу (1) на $-b-\sqrt{b^2-4ac}$, а лічнік і назоўнік дробу (2) на $-b+\sqrt{b^2-4ac}$, атрымаем, посьле ўпрошчаньня,

$$x_1=\frac{2c}{-b-\sqrt{b^2-4ac}} \text{ і } x_2=\frac{2c}{-b+\sqrt{b^2-4ac}}$$

Падставіўшы цяпер 0 на месца a і b, маем:

$$x_1=\frac{2c}{0}=\infty \text{ і } x_2=\frac{2c}{0}=\infty$$

Адсюль бачым, што, калі ў агульным раўнаньні коэфіцыэнты a і b прыбліжаюцца да нуля, то абодва разьвязкі імкнуцца да бяскрайнасьці.

Задачы.

Не разьвязваючы наступных раўнаньняў, азначыць, якія з іх маюць сапраўдныя, роўныя ці ўяўныя разьвязкі.

471. $x^2+11x+130=0$

472. $x^2+3x-180=0$

473. $x^2-9x+20=0$

474. $9x^2-12x+4=0$

475. $3x^2+12x+130=0$

476. $9x^2-42x+49=0$

477. $36x^2+48x+61=0$

У раўнаньні $ax^2+bx+c=0$ падставіць на месца a, b і c такія цэлыя лікі, каб разьвязкі атрыманага раўнаньня былі:

478. сапраўдныя з аднаковымі знакамі;

479. сапраўдныя розныя, абодва дадатныя;

480. сапраўдныя розныя, абодва адмоўныя;

481. уяўныя;

482. роўныя, абодва дадатныя;

483. роўныя, абодва адмоўныя;

484. адзін роўны нулю, другі дадатны;

485. адзін роўны нулю, другі адмоўны;

486. абодва роўныя нулю.

487. Пры якім значэньні b раўнаньне $4x^2+bx+25=0$ мае роўныя разьвязкі?

488. Пры якіх дадатных значэньнях c разьвязкі раўнаньня $3x^2-18x+c=0$ сапраўдныя і пры якіх уяўныя?

Разьвязваньне тэкстовых задач пры помачы квадратовых раўнаньняў.

§ 56. Агульныя асновы прыстасаваньня квадратовых раўнаньняў да разьвязваньня задач—такія самыя, як і для раўнаньняў першае ступені (§ 65 ч. I). Улажыўшы, на аснове ўмоў задачы, раўнаньне і разьвязаўшы яго, можам атрымаць наступныя выпадкі:

1. Абодва разьвязкі раўнаньня—дадатныя.

Задача тады можа мець два разьвязкі*) (або адно, калі абодва разьвязкі раўнаньня роўныя паміж сабой).

2. Адзін разьвязак раўнаньня—дадатны, другі—адмоўны.

У залежнасьці ад таго, ці значэньне невядомай можа быць адмоўным ці не, атрымоўваем або два разьвязкі задачы, або адзін, адкідваючы ў другім выпадку адмоўны разьвязак раўнаньня.

3. Уяўныя разьвязкі раўнаньня даводзяць немагчымасьць даных варункаў задачы.

ПРЫКЛАД I.

Купец, прадаўшы гадзіньнік за 24 рублі, страціў столькі процантаў, колькі рублёў сам за яго заплаціў. Колькі заплаціў купец за гадзіньнік?

Разьвязаньне. Хай купец заплаціў за гадзіньнік x рублёў. Адзін процант ад гэтай сумы будзе $\frac{x}{100}$ рублёў, значыцца x процантаў будзе $\frac{x^2}{100}$ рублёў. З тае прычыны, што купец атрымаў за гадзіньнік 24 рублі, значыцца

$$x - \frac{x^2}{100} = 24$$

Разьвязаўшы гэтае раўнаньне, атрымаем:

$$x_1 = 60 \text{ і } x_2 = 40,$$

адкуль бачым, што купец заплаціў за гадзіньнік або 60, або 40 рублёў.

ПРЫКЛАД II.

Колькі сшыткаў купіў вучань за 4 рублі, калі колькасьць капеек, заплачаная за кожны сшытак, ёсьць меншая на 9 ад колькасьці ўсіх сшыткаў?

Разьвязаньне. Калі абазначым колькасьць сшыткаў праз x, то кожны сшытак будзе каштаваць $(x-9)$ кап., а сума, выданая на куплю ўсіх x сшыткаў, будзе $(x-9)x$ кап.

З прычыны таго, што за ўсе сшыткі выдана 400 капеек, дык

$$(x-9)x = 400.$$

Разьвязаўшы гэтае раўнаньне, атрымоўваем:

$$x_1 = 25, \; x_2 = -16$$

З прычыны таго, што колькасьць сшыткаў можа быць толькі дадатная, дык другі разьвязак раўнаньня, які не адказвае варункам задачы, адкідваем.

---

*) Але можа ня мець і ніводнага, калі атрыманыя разьвязкі не адказваюць варункам задачы (напрыклад, калі разьвязак задачы павінен быць цэлым, а знойдзеныя разьвязкі раўнаньня—дробавыя і г. д.).

ПРЫКЛАД III.

Калі квадрат пэўнага ліку падзелім на 12 і да рэзультату дадамо адну трэцюю гэтага ліку, то атрымаем 5. Знайсьці гэты лік.

Разьвязаньне. Абазначыўшы шуканы лік праз x, укладаем раўнаньне:

$$\frac{x^2}{12}+\frac{x}{3}=5$$

Разьвязаўшы яго, будзем мець:

$$x_1=6,\ x_2=-10$$

А значыцца, варункі задачы здавальняюцца двома лікамі: адным дадатным і другім адмоўным.

ПРЫКЛАД IV.

Падзяліць 20 на дзьве часткі так, каб іх здабытак быў роўны 109.
Разьвязаньне. Улажыўшы з даных варункаў задачы раўнаньне

$$x(20-x)=109,$$

атрымоўваем:

$$x_{1_2}=10\pm 3i$$

Уяўныя разьвязкі раўнаньня паказваюць, што здабытак дзьвёх частак ліку 20 ня можа быць роўным 109. І праўда, лёгка можам пераканацца, што найбольшы здабытак дзьвёх частак, на якія раскладаецца лік, бывае тады, калі абедзьве часткі—роўныя паміж сабой. А значыцца, наш здабытак ня можа быць большым за 100.

ПРЫКЛАД V.

Два батракі, з якіх адзін працаваў на a $(=8)$ дзён больш за другога, атрымалі па b $(=96)$ рублёў. Калі-б першы працаваў столькі дзён, колькі другі, а другі столькі, колькі першы, дык яны атрымалі-б разам c $(=200)$ рублёў. Колькі дзён працаваў кожны батрак?

Разьвязаньне. Разьвяжам спачатку гэтую задачу ў агульным відзе. Абазначым колькасьць дзён працы першага батрака праз x, а другога праз $(x+a)$. У другім-жа выпадку адпаведна праз: $(x+a)$ і x. Штодзённая плата тады для першага батрака будзе: $\frac{b}{x}$, для другога: $\frac{b}{x+a}$. Адсюль можам улажыць раўнаньне:

$$\frac{b}{x}(x+a)+\frac{b}{x+a}x=c.$$

Упросьцім яго:

$$b(x+a)^2+bx^2=cx(x+a),$$
$$bx^2+2abx+ba^2+bx^2=cx^2+acx,$$
$$(c-2b)x^2+a(c-2b)x-ba^2=0,$$
$$x^2+ax-\frac{ba^2}{c-2b}=0$$

Адсюль:

$$x=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{ba^2}{c-2b}}=-\frac{a}{2}\pm\frac{a}{2}\sqrt{\frac{c-2b+4b}{c-2b}}=$$

$$=\frac{a}{2}\left(-1\pm\sqrt{\frac{c+2b}{c-2b}}\right)$$

Падставіўшы цяпер лікавыя значэньні a, b і c, атрымаем:

$$x_1=\frac{a}{2}\left(-1+\sqrt{\frac{c+2b}{c-2b}}\right)=\frac{8}{2}\cdot\left(-1+\sqrt{\frac{200+2\cdot 96}{200-2\cdot 96}}\right)=4\cdot(-1+7)=24 \text{ дні}$$

$$x_2=4\cdot(-1-7)=-32$$

Другі разьвязак, які ёсьць адмоўны і ня мае значэньня ў задачы, адкідваем.

Дасьледаваньне. Магчымасьць *сапраўдных* разьвязкаў патрабуе, каб даныя лікі b і c, з прыроды рэчаў *дадатныя,* здавальнялі-б апрача таго варунак:

$$c-2b>0,$$

адкуль: $c>2b$, а гэта значыць, што сума (c), якую зарабілі абодва батракі ў другім выпадку, ня можа быць менш, або роўнай папярэдняй суме ($2b$).

З будовы самага квадратовага раўнаньня бачым, што, пры варунку $c>2b$, вядомы выраз $\left(-\frac{ba^2}{c-2b}\right)$ ёсьць адмоўны; значыцца разьвязкі раўнаньня маюць розныя знакі, а адмоўны разьвязак павінен быць адкінуты, як не адказваючы задачы.

Трэба яшчэ заўважыць, што ў крытычным выпадку, калі $c=2b$, $x=\infty$; гэта значыць, што толькі тады сума зробленых батракамі грошай магла-бы быць у абодвух выпадках аднаковая, калі-б батракі працавалі *бяскрайна-вялікі* час, атрымоўваючы за сваю працу *бяскрайна-малую* плату.

$$\left(\frac{b}{x}=\frac{b}{x+a}=\frac{b}{\infty}=0\right).$$

Задачы.

489. Здабытак двох лікаў ёсьць 72, а дзель іх 2. Знайсьці гэтыя лікі.

490. Знайсьці лік, большы ад свайго квадрату на $\frac{1}{4}$.

491. Сума двох лікаў ёсьць роўная 15, а сума іх квадратаў 113. Знайсьці гэтыя лікі.

492. Сума двох лікаў ёсьць роўная 6, а сума іх кубаў ёсьць у 6 разоў большая ад розьніцы іх квадратаў. Знайсьці гэтыя лікі.

493. Сума квадратаў двох пасьледаўных цотных лікаў ёсьць 52. Знайсьці гэтыя лікі.

494. Сума катэтаў простакутнага трыкутніка ёсьць роўная 17 мэтрам, проціпростакутная $=13$ м. Знайсьці катэты.

495. Плошча простакутнага агароду мае 520 кв. мэтраў; даўжыня яго на 6 м. больш за шырыню. Знайсьці даўжыню і шырыню агароду.

496. Прадалі некалька кілёграмаў тавару за 120 рублёў; цана кілёграма (у рублёх) на 2 менш за лік кілёграмаў. Колькі кілёграмаў прадалі?

497. На 1 р. 30 к. купілі некалька грамаў тавару двух гатункаў, прычым другога на 2 больш, чым першага. За грам кожнага тавару плацілі столькі капеек, колькі было куплена грамаў гэтага тавару. Колькі купілі грамаў кожнага гатунку?

498. Нанялі двух наймітаў за розную плату. Першы працаваў на 5 дзён больш за другога і атрымаў 80 рублёў, а другі зарабіў 45 рублёў. Калі-б першы атрымоўваў плату за кожны дзень такую, як другі, а другі —такую, як першы, дык яны-б атрымалі роўныя сумы. Колькі кожны з іх зарабляў штодзень?

499. Ці магчымы такі простакутны трыкутнік, у якога бакі выражаюцца трома пасьледаўнымі цотнымі лікамі?

500. Некалькі асоб павінны былі заплаціць пароўну, усяго 72 рублі. Каб іх было на 3 менш, то кожны павінен быў-бы заплаціць на 4 рублі больш. Колькі было ўсяго асоб?

501. На роўніцы знаходзіцца некалькі пунктаў, прычым праз кожную пару пунктаў праходзіць асобная простая лінія. Усіх такіх ліній 10. Колькі пунктаў?

502. Два кашы віна featgatunku, з якіх першы зьмяшчае на 10 бутэлек больш, чым другі,—каштуюць 120 і 75 рублёў. Калі-б у першым было на 4 бут. менш, а ў другім на 10 бут. больш, то яны-б разам каштавалі 208 рублёў. Колькі бутэлек у кожным кашы?

503. Басэйн напаўняецца дзьвёма трубамі ў 6 гадз. Адна першая труба напаўняе яго на 5 гадз. хутчэй, чымся адна другая. У які час кожная труба, працуючы асобна, можа напоўніць басэйн?

504. Купец, прадаўшы гадзіньнік за 39 рублёў, атрымаў столькі процантаў зыску, колькі рублёў яму самому каштаваў гадзіньнік. Колькі купец сам заплаціў за гадзіньнік?

505. Ці магчымы такі многакутнік, у якім было-б усяго 10 дыягоналяў?

506. Купілі тавару двух гатункаў, першага на 156 рублёў, другога на 210 руб. Другога гатунку на 3 кілёграмы больш, чымся першага, і каштуе ён за кілёграм на 1 рубель больш. Колькі купілі кожнага гатунку?

507. У бочцы знаходзіцца 80 літраў віна. У першы раз выліваюць з яе пэўную колькасьць літраў віна і дапаўняюць бочку вадой; ізноў выліваюць з бочкі такую самую колькасьць мешаніны і даліваюць столькі-ж вады, посьле чаго ў бочцы засталося толькі 45 літраў чыстага віна. Колькі літраў вылівалі кожны раз?

508. Два капіталы, роўныя ў суме 11000 рубл., паложаны ў банк; першы дае што-год 360 рублёў зыску, другі—250 р. Калі-б перамяніць іх процантныя таксы, то капіталы давалі-б роўныя зыскі. Якія гэта капіталы?

509. Супольны капітал двох прадпрыемстваў ёсьць роўны 14000 р. Капітал першага быў у абароце 16 месяцаў, а другога—20 месяцаў. Посьле гэтых тэрмінаў капітал першага, разам з зыскам, стаў роўным 10400 р., а другога—8250 р. Знайсьці пачатковы капітал кожнага прадпрыемства.

510. Знайсьці лік, якога квадрат, разам з кубам, ёсьць роўны дзевяціразаваму наступнаму ліку.

511. Дзьве асобы адначасна выяжджаюць з аднаго месца ў другое. Першая робіць у гадзіну на адзін кілёмэтр больш за другую і прыяжджае на 1 гадз. раней. Адлегласьць паміж месцамі 56 кілём. Колькі кілёмэтраў робіць кожная асоба ў гадзіну?

512. Цягнік выяжджае з А да В, адлеглых на 216 кілём. а 2-гой гадзіне раніцы. А $5^1/_2$ гадзіне раніцы выяжджае з А у гэтым самым кірунку другі цягнік, які робіць у гадзіну на 4 кілём. больш, чымся першы, і прыяжджае у В на 1 гадз. раней. А якой гадзіне кожны цягнік прыехаў да В?

513. Наняты два найміты па рознай цане. Першы атрымаў 48 рубл., а другі, які працаваў на 6 дзён менш за першага, атрымаў 27 рублёў; калі-б першы працаваў столькі дзён, колькі другі, а другі столькі, колькі першы,-то яны-б атрымалі пароўну. Колькі дзён працаваў кожны?

514. Два цягнікі выяжджаюць з мест А і В, адлеглых на 560 кілём. і едуць насустрэчу. Каб яны спаткаліся на палове дарогі, трэба каб цягнік з В выехаў на $1^3/_4$ гадз. раней. Калі-ж яны выедуць адначасна, то, посьле 7 гадзін, адлегласьць паміж імі будзе толькі=0,1 пачатковай адлегласьці. Колькі часу патрэбна для кожнага цягніка, каб праехаць ад А да В?

515. Нанялі двух наймітаў на адзін і той самы тэрмін, але па рознай цане. Першы скончыў працу на 1 дзень раней тэрміну і атрымаў 18 руб., другі скончыў працу на 3 дні раней тэрміну і атрымаў 21 рубель. Калі-б першы працаваў столькі дзён, колькі другі, а другі столькі, колькі першы, дык другі атрымаў-бы на 13 рублёў больш, чымся першы. На які тэрмін былі наняты найміты?

516. Кур'ер выяжджае з места А і павінен прыехаць у В праз 5 гадз. У той самы час другі кур'ер выяжджае з С і, каб прыехаць у В адначасна з першым, павінен рабіць кожны кілёмэтр на $1\frac{1}{4}$ мінуты хутчэй, чымся першы. Адлегласьць ад С да В на 20 кілём. больш за адлегласьць ад А да В. Знайсьці гэтую апошнюю?

517. Воз праехаў 54 мэтры, прычым пярэдняе кола зрабіла на 9 абаротаў больш, чымся задняе. Калі-б павялічыць акружыну кожнага кола на 3 дэцымэтры, то пярэдняе кола на гэтай самай адлегласьці зрабіла-б толькі на 6 абаротаў больш, чымся задняе. Якая акружына кожнага кола?

518. Двое падарожных выяжджаюць адначасна з аднаго месца: адзін на поўдзень, другі на ўсход. Першы што-дзень робіць 30 кілём., другі—40 кілём. Праз колькі дзён адлегласьць паміж імі будзе роўная 250 кілём.?

519. У банак палажылі капітал і праз год атрымалі 120 рублёў зыску; капітал разам з зыскам быў пакінуты ў банку яшчэ на 1 год. Посьле гэтага капітал, разам з наросшымі процантамі, стаў роўным 2646 рублям. Які быў капітал спачатку?

520. Праз першы кран вада напаўняе басэйн на 9 мінут даўжэй, чымся праз другі кран яна выліваецца. Калі-ж адначасна пусьціць у работу абодва краны, то з поўнага басэйну ўся вада выльлецца у 70 мінут. На працягу якога часу першы кран напоўніць вадою пусты басэйн?

521. Дзьве асобы ідуць насустрэчу з двух месц А і В. Пры спатканьні выявілася, што першы прайшоў на 6 кілём. больш за другога. Посьле гэтага яны ідуць далей, і першы прыходзіць у В праз 4 гадзіны, а другі ў А праз 9 гадз. посьле іх спатканьня. Знайсьці адлегласьць паміж А і В.

522. Два краны, працуючы адначасна, могуць напоўніць басэйн у $26^1/_4$ гадз. Калі-ж яны будуць працаваць паасобку, то большы кран напоўніць басэйн на 18 гадз. хутчэй, чымся меншы. На працягу якога часу можа напоўніць басэйн кожны кран паасобку?

523. Калі-б тры найміты капалі роў паасобку, то першы капаў-бы яго на 6 дзён больш, другі на 30 дзён больш, а трэці ў тры разы больш, чымся калі-б яны ўсе працавалі разам. На працягу якога часу выкапаюць роў усе тры найміты супольнымі сіламі?

IV.

Раўнаньні вышэйшых ступеняў, якія прыводзяцца да квадратовых.

§ 57. Спосабы разьвязаньня агульных раўнаньняў 3-яе ступені

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

і 4-ае ступені

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$$

дае *вышэйшая альгэбра.**)

У альгэбры-ж элемэнтарнай знаходзім толькі разьвязаньні такіх раўнаньняў вышэйшых ступеняў, якія можам прывесьці да квадратовых.

Сюды належаць:

1) двохчленныя раўнаньні віду $x^n-a=0$

2) трохчленныя раўнаньні віду $ax^{2n}+bx^n+c=0$

і 3) сымэтрычныя, або зваротныя раўнаньні.

Вышэйшая альгэбра доводзіць, што *кожнае вымернае **) раўнаньне n-ае ступені мае n разьвязкаў.*

Разьвязкі гэтыя могуць быць сапраўдныя або ўяўныя, вымерныя ці нявымерныя; паміж разьвязкамі могуць аказацца і некалькі роўных разьвязкаў.

У правільнасьці прыведзенай тэорэмы пераканаемся, разьвязваючы розныя тыпы прыкладаў на раўнаньні вышэйшых ступеняў.

Двохчленныя раўнаньні віду $x^n-a=0$.

§ 58. Разьвязваньне двохчленных раўнаньняў выконваем звычайна пры помачы раскладаньня левага боку раўнаньня на сумножнікі.

1) Хай маем раўнаньне

$$x^3-1=0$$

*) Спосабы разьвязваньня агульных раўнаньняў 3-е і 4-ае ступені знойдзены італьянскімі матэматыкамі XVI сталецьця: Тарталья, Кардано і Фэррарі. Усе далейшыя пробы матэматыкаў разьвязаньня раўнаньняў 5-ае і вышэй ступені (у агульным відзе) не дасяглі мэты, а ў пачатку XIX сталецьця нарвэжскі матэматык Н. Абэль давёў, што раўнаньні, вышэйшыя ад 4-ае ступені, ня могуць быць разьвязаны альгэбрычна, пры помачы корняў.

**) Раўнаньне нявымернае можа ня мець ніводнага разьвязку. (Гл. § 62).

Раскладваючы левы бок гэтага раўнаньня на сумножнікі, атрымаем:

$$(x-1)(x^2+x+1)=0$$

З прычыны таго, што здабытак двох сумножнікаў толькі тады можа быць роўным нулю, калі адзін з іх ёсьць роўны нулю, дык:

або $\quad x-1=0,$

або $\quad x^2+x+1=0$

У першым выпадку з раўнаньня $x-1=0$

маем $\quad x=1;$

у другім выпадку з раўнаньня $x^2+x+1=0$

знаходзім $\quad x=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$

А значыцца, раўнаньне $x^3-1=0$ мае тры разьвязкі:

$$x_1=1$$

$$x_2=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{i} \quad x_3=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2};$$

з якіх першы—сапраўдны, а два пазасталыя—комплексныя.

II) Раскладваючы ў падобны спосаб на сумножнікі левы бок раўнаньня

$$x^3+1=0,$$

маем $\quad (x+1)(x^2-x+1)=0,$

адкуль

$$x+1=0$$

$$\text{i} \quad x^2-x+1=0$$

З першага раўнаньня атрымоўваем:

$$x=-1,$$

з другога: $\quad x=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$

Адсюль вынікае, што раўнаньне

$$x^3+1=0$$

мае тры разьвязкі:

$$x_1=-1$$

$$x_2=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{i} \quad x_3=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$$

III) Раўнаньне

$$x^4-a^4=0$$

можам напісаць у відзе

$$(x+a)(x-a)(x^2+a^2)=0$$

Такім чынам, бачым, што раўнаньне гэтае можа быць раскладзена на наступныя тры раўнаньні:

$$x+a=0,$$
$$x-a=0,$$
$$x^2+a^2=0.$$

З першага раўнаньня атрымаем:

$$x=-a,$$

з другога $x=a$

з трэцяга $x=\pm ai$

А значыцца, раўнаньне $x^4-a^4=0$

мае чатыры разьвязкі:

$$x_1=-a;\ x_2=a;\ x_3=ai;\ x_4=-ai$$

IV) Левы бок раўнаньня

$$x^6-a^6=0.$$

можам раскласьці на чатыры сумножнікі:

$$(x+a)(x^2-ax+a^2)(x-a)(x^2+ax+a)=0,$$

адкуль:

$$x+a=0,$$
$$x^2-ax+a^2=0,$$
$$x-a=0,$$
$$x^2+ax+a^2=0.$$

Разьвязваючы гэтыя чатыры раўнаньні, атрымоўваем наступныя шэсьць разьвязкаў:

$$x_1=-a,$$

$$x_2=\frac{a(1+i\sqrt{3})}{2},$$

$$x_3=\frac{a(1-i\sqrt{3})}{2},$$

$$x_4=a,$$

$$x_5=\frac{-a(1-i\sqrt{3})}{2},$$

$$x_6=\frac{-a\ (1+i\sqrt{3})}{2}$$

§ 59. Прыведзеныя прыклады ня вычэрпываюць усіх узораў двохчленных раўнаньняў; аднак-жа даводзяць правільнасьць тэорэмы, што кожнае вымернае раўнаньне n-ае ступені мае n разьвязкаў.

З тэорэмы гэтай вынікае наступны вынік:

Корань n-ае ступені з данага ліку a, г.ё. $\sqrt[n]{a}$, мае n значэньняў, роўных разьвязкам раўнаньня

$$x^n - a = 0$$

Сапраўды, пераносячы $-a$ у гэтым апошнім раўнаньні ў правы бок, атрымоўваем:

$$x^n = a,$$

адкуль:

$$x = \sqrt[n]{a}$$

А з прычыны таго, што x у раўнаньні $x^n - a = 0$ мае n значэньняў, дык столькі-ж значэньняў мае і лік $\sqrt[n]{a}$

Так, напрыклад, разьвязваючы раўнаньне

$$x^3 - 1 = 0,$$

мы знайшлі, што x мае тры значэньні, а мянавіта:

$$x_1 = 1\,;\; x_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \text{ і } x_3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

Заключаем адсюль, што $\sqrt[3]{1}$ мае тры значэньні, з якіх першае ёсьць 1, другое $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, трэцяе $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$. Лёгка ў гэтым можам пераканацца, падносячы кожнае з іх у трэцюю ступень; за кожным разам атрымаем **1**.

У падобны спосаб знойдзем, што $\sqrt[3]{8}$ мае тры значэньні:

$$2\,;\, -1 + i\sqrt{3}\,;\, -1 - i\sqrt{3},$$

роўныя разьвязкам раўнаньня $x^3 - 8 = 0$.

$\sqrt[4]{16}$ мае чатыры значэньні: 2; -2; $2i$; $-2i$, роўныя разьвязкам раўнаньня $x^4 - 16 = 0$ і г. д. *).

З а д а ч ы.

Разьвязаць наступныя двохчленныя раўнаньні:

524. $x^2 - 1 = 0$ 525. $x^2 + 1 = 0$

526. $x^4 - 1 = 0$ 527. $x^4 + 1 = 0$

528. $x^3 - 8 = 0$ 529. $x^3 + 125 = 0$

530. $125x^3 + 8 = 0$ 531. $16x^4 - 25 = 0$

532. $729 - x^6 = 0$

---

*) Агульнае разьвязаньне двохчленных раўнаньняў першы даў *Вандермонд* (1735—1796). Розныя значэньні $\sqrt[n]{\pm 1}$ першы даў англік Рожэр Котэс (1682—1716).

Трохчленныя раўнаньні.

§ 60. Да трохчленных раўнаньняў належаць такія раўнаньні, якія, посьле пераносу ўсіх выразаў на левы бок, упрошчаньня іх і злучэньня, зьмяшчаюць у сабе наступныя тры выразы:

1. Выраз з невядомай у якой-небудзь цотнай ступені,

2. Выраз з невядомай у два разы меншай ступені,

і 3. Вядомы выраз.

Агульны від трохчленнага раўнаньня ёсьць:

$$ax^{2n}+bx^n+c=0$$

Каб разьвязаць гэткае раўнаньне, абазначым x^n праз y; тады трохчленнае раўнаньне прыйме выгляд квадратовага раўнаньня

$$ay^2+by+c=0,$$

з якога знойдзем два разьвязкі y_1 і y_2

А дзеля таго, што $x^n=y$,

дык $x=\sqrt[n]{y_1}$,

або $x=\sqrt[n]{y_2}$

Адсюль бачым, што разьвязаньне трохчленнага раўнаньня приводзіцца звычайна да разьвязаньня спачатку квадратовага, а потым двохчленнага раўнаньня.

I. Найпрасьцейшым трохчленным раўнаньнем ёсьць квадратовае раўнаньне

$$ax^2+bx+c=0, \text{ у якім } n=1$$

II. Калі ў агульным трохчленным раўнаньні на месца n падставім **2**, то атрымаем раўнаньне

$$ax^4+bx^2+c=0$$

Раўнаньне гэтае называецца *двохквадратовым* *).

Каб разьвязаць яго, дапусьцім, што

$$x^2=y,$$

тады двохквадратовае раўнаньне заменіцца на

$$ay^2+by+c=0 \;,$$

адкуль $y=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

А, значыцца,

$$x=\pm\sqrt{y}=\pm\sqrt{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}},$$

---

*) Першы даў яго разьвязаньне араб *Алькаргі* з Багдаду ў XI веку.

адкуль $x_1=\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$; $x_2=\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$

$$x_3=-\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2+4ac}}{2a}};\quad x_4=-\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

1. Калі $b^2>4ac$, то ўсе разьвязкі будуць сапраўдныя або комплексныя, або два разьвязкі будуць сапраўдныя, а другія два комплексныя, у залежнасьці ад таго, ці абодва значэньні y будуць дадатныя або адмоўныя, ці адно значэньне дадатнае, а другое адмоўнае.

2. Калі $b^2=4ac$, то раўнаньне мае толькі два разьвязкі; разьвязкі гэтыя будуць сапраўдныя або комплексныя, у залежнасьці ад таго, ці $\frac{-b}{2a}$ ёсьць лік дадатны, ці адмоўны.

3. Урэшце, калі $b^2<4ac$, усе разьвязкі будуць комплексныя.

Для прыкладу возьмем наступнае двохквадратовае раўнаньне:

$$x^4-13x^2+36=0$$

Абазначыўшы x^2 праз y і разьвязваючы раўнаньне

$$y^2-13y+36=0,$$

знойдзем

$$y_1=9;\ y_2=4$$

А дзеля таго, што $x^2=y$, значыцца

$$x_{\frac{1}{2}}=\pm\sqrt{9};\ x_{\frac{3}{4}}=\pm\sqrt{4},$$

ці: $x_1=3$; $x_2=-3$; $x_3=2$; $x_4=-2$

III. Каб разьвязаць трохчленнае раўнаньне 6-ае ступені, напрыклад:

$$x^6-7x^3-8=0,$$

абазначым x^3 праз y; тады $x^6=y^2$, і раўнаньне прыйме выгляд:

$$y^2-7y-8=0$$

Адкуль:

$$y_1=8;\ y_2=-1$$

Разьвязваючы двохчленныя раўнаньні $x^3=8$ і $x^3+1=0$, знойдзем:

$$x_1=2$$

$$x_2=-1+i\sqrt{3}$$

$$x_3=-1-i\sqrt{3}$$

$$x_4=-1$$

$$x_5=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$$

$$x_6=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$$

Задачы.

Разьвязаць наступныя трохчленныя раўнаньні:

533. $x^4-41x^2+400=0$.

534. $x^4-7x^2+12=0$.

535. $x^4-25x^2+144=0$.

536. $x^4-10x^2+61=0$.

537. $5x^4+x^2-4=0$.

538. $3x^4-x^2-2=0$.

539. $x^6-3x^3+2=0$.

540. $x^6+4x^3-96=0$

541. $x^6-72x^3+512=0$.

542. $x^6-133x^3+1000=0$.

543. $x^8-97x^4+1296=0$.

544. $x^8-9x^4-112=0$.

Сымэтрычныя (зваротныя) раўнаньні*).

§ 61. Сымэтрычным, або зваротным, раўнаньнем называецца такое раўнаньне, якое мае роўныя коэфіцыэнты пры выразах, аднакова адлеглых ад пачатку і канца.

1) Сымэтрычнае раўнаньне *3-яе ступені* мае выгляд:

$$ax^3+bx^2+bx+a=0.$$

Каб разьвязаць яго, з першага і апошняга выразу выводзім за дужкі a, а з другога і трэцяга bx; тады атрымаем:

$$a(x^3+1)+bx(x+1)=0,$$

або $$a(x+1)(x^2-x+1)+bx(x+1)=0,$$

ці $$(x+1)[a(x^2-x+1)+bx]=0.$$

Адкуль:

або $$x+1=0,$$

або $$a(x^2-x+1)+bx=0.$$

З першага раўнаньня знойдзем $x_1=-1$.

Два другія разьвязкі знойдзем з квадратовага раўнаньня

$$a(x^2-x+1)+bx=0.$$

ПРЫКЛАД.

Разьвязаць сымэтрычнае раўнаньне 3-яе ступені

$$2x^3-3x^2-3x+2=0.$$

З першага і апошняга выразаў выводзім за дужкі 2, а з двох іншых $-3x$; тады:

$$2(x^3+1)-3x(x+1)=0,$$

ці $$(x+1)[2(x^2-x+1)-3x]=0,$$

*) Першы даў мэтод разьвязаньня зваротных раўнаньняў англік *Абрагам дэ-Моавр* (Moivre, 1667—1751).

$$x+1=0;\ x_1=-1,$$

$$2(x^2-x+1)-3x=0,$$

$$2x^2-2x+2-3x=0,$$

$$2x^2-5x+2=0.$$

Адкуль $x_2=2$ і $x_3={}^1/_2$

II) Для разьвязаньня сымэтрычнага раўнаньня *4-ае ступені*, якое мае выгляд;

$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0,$$

дзелім усе яго выразы на x^2, і ў атрыманым такім чынам раўнаньні:

$$ax^2+bx+c+b.\frac{1}{x}+a\cdot\frac{1}{x^2}=0$$

з 1-га і 5-га выразаў выведзем за дужкі a, а з 2-га і 4-га выведзем b. Раўнаньне тады атрымае наступны выгляд:

$$a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0.$$

Хай $x+\frac{1}{x}=y$; падносячы абодва бакі гэтай роўнасьці ў другую ступень, будзем мець:

$$x^2+2+\frac{1}{x^2}=y^2,$$

адкуль $$x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$$

Падставім цяпер у данае раўнаньне на месца $x^2+\frac{1}{x^2}$ выраз y^2-2, а на месца $x+\frac{1}{x}$ выраз y, атрымаем квадратовае раўнаньне

$$a(y^2-2)+by+c=0,$$

з якога знойдзем разьвязкі y_1 і y_2

Калі, посьле гэтага, значэньні y_1 і y_2 падставім на месца y ў раўнаньні

$$x+\frac{1}{x}=y,$$

то атрымаем усе чатыры разьвязкі данага сымэтрычнага раўнаньня 4-ае ступені.

П Р Ы К Л А Д.

Разьвязаць сымэтрычнае раўнаньне 4-ае ступені

$$12x^4+8x^3-39x^2-8x+12=0.$$

Дзелячы раўнаньне на x^2, атрымаем

$$12x^2+8x-39-8.\frac{1}{x}+12.\frac{1}{x^2}=0.$$

Выводзячы за дужкі з 1-га і 5-га выразаў 12, а з 2-га і 4-га 8, маем:

$$12\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+8\left(x-\frac{1}{x}\right)-39=0.$$

Абазначаем $x-\frac{1}{x}$ праз y і падносім абодва бакі раўнаньня $x-\frac{1}{x}=y$ у другую ступень:

$$x^2-2+\frac{1}{x^2}=y^2,$$

ці

$$x^2+\frac{1}{x^2}=y^2+2$$

Падставіўшы y^2+2 і y на месца $x^2+\frac{1}{x^2}$ і $x-\frac{1}{x}$ у наша раўнаньне, будзем мець:

$$12(y^2+2)+8y-39=0,$$

ці

$$12y^2+24+8y-39=0,$$

або

$$12y^2+8y-15=0,$$

адкуль

$$y=\frac{-4\pm\sqrt{16+180}}{12}=\frac{-4\pm 14}{12}$$

А, значыцца,

$$y_1=\frac{5}{6};\ y_2=-\frac{3}{2}$$

Цяпер застаецца ў раўнаньні $x-\frac{1}{x}=y$ на месца y падставіць $\frac{5}{6}$ і $-\frac{3}{2}$. У гэты спосаб з раўнаньня $x-\frac{1}{x}=\frac{5}{6}$

атрымаем:

$$x_1=1\frac{1}{2};\ x_2=-\frac{2}{3};$$

а з раўнаньня

$$x-\frac{1}{x}=-\frac{3}{2}$$

атрымаем

$$x_3=\frac{1}{2};\ x_4=-2$$

Усе сымэтрычныя раўнаньні маюць наступную супольную ўласьцівасьць: калі ў раўнаньні заменім x на $\frac{1}{x}$ і пазбудземся назоўнікаў, то атрымаем гэтае-ж самае раўнаньне. Адсюль вынікае наступны вынік: *адваротнасьць разьвязку сымэтрычнага раўнаньня ёсьць таксама разьвязкам гэтага раўнаньня.*

Задачы.

Разьвязаць наступныя сымэтрычныя раўнаньні:

545. $5x^3-21x^2-21x+5=0.$
546. $6x^3-7x^2-7x+6=0.$
547. $6x^3-19x^2+19x-6=0.$
548. $8x^3+73x^2+73x+8=0.$
549. $6x^4+5x^3-38x^2+5x+6=0.$

550. $2x^4+x^3-11x^2+x+2=0.$

551. $6x^4-5x^3-38x^2-5x+6=0.$

552. $8x^4-54x^3+101x^2-54x+8=0.$

553. $10x^4-27x^3-110x^2-27x+10=0,$

Нявымерныя раўнаньні.

§ 62. *Нявымерным раўнаньнем* (або *радыкальным*) называецца такое раўнаньне, у якім невядомы лік знаходзіцца пад знакам корня.

Пры разьвязваньні нявымерных раўнаньняў звычайна стараемся прывесьці яго да вымернага віду.

Тутака могуць здарыцца наступныя выпадкі:

I) Калі вымернае раўнаньне посьле ўпрошчаньня заключае толькі адзін корань адвольнай ступені, то пераносім яго на адзін бок, а ўсе іншыя выразы—на другі, потым падносім абодва бакі ў ступень корня і, такім чынам, звальняемся ад корня.

Пры гэтым трэба памятаць, што пры падняцьці раўнаньня ў ступень могуць быць уведзены чужыя разьвязкі (§ 64 ч. I). З гэтае прычыны посьле разьвязаньня нявымернага раўнаньня трэба заўсёды праверыць, ці атрыманыя разьвязкі здавальняюць першае раўнаньне.

ПРЫКЛАД I.

Разьвязаць раўнаньне

$$1+\frac{1}{2}\sqrt[3]{x^3-7x^2+14x}=\frac{x}{2}$$

Пазбываемся назоўнікаў:

$$2+\sqrt[3]{x^3-7x^2+14x}=x,$$

або
$$\sqrt[3]{x^3-7x^2+14x}=x-2$$

Падносячы абодва бакі ў 3-ю ступень:

$$x^3-7x^2+14x=x^3-6x^2+12x-8,$$

ці
$$-x^2+2x+8=0,\ x^2-2x-8=0,$$

адкуль
$$x_1=4\,;\,x_2=-2$$

Падставіўшы цяпер знойдзеныя значэньні x ва ўпрошчанае раўнаньне, а мянавіта

$$\sqrt[3]{x^3-7x^2+14x}=x-2,$$

бачым, што абодва разьвязкі замяняюць яго ў тожсамасьць.

Гэта даводзіць, што данае раўнаньне мае 2 разьвязкі.

ПРЫКЛАД II.

Разьвязаць раўнаньне

$$x-\sqrt{x^2-1-\sqrt{x^2+180}}=3.$$

Пакідаем корань на адным баку:

$$x-3=\sqrt{x^2-1-\sqrt{x^2+180}}$$

Падносім абодва бакі раўнаньня ў квадрат:

$$x^2-6x+9=x^2-1-\sqrt{x^2+180},$$

ці

$$\sqrt{x^2+180}=6x-10$$

Ізноў падносім у квадрат:

$$x^2+180=36x^2-120x+100,$$

ці

$$36x^2-x^2-120x+100-180=0,$$

або

$$35x^2-120x-80=0,$$

$$7x^2-24x-16=0,$$

адкуль

$$x=\frac{12\pm\sqrt{144+112}}{7}$$

А, значыцца:

$$x_1=4\,;\,x_2=-\frac{4}{7}$$

Падставіўшы знойдзеныя значэньні невядомай, бачым, што толькі адзін першы разьвязак $x_1=4$ здавальняе данае раўнаньне.

Другі разьвязак $x_2=-\frac{4}{7}$ ёсьць чужы; ён здавальняе наступнае раўнаньне

$$x+\sqrt{x^2-1+\sqrt{x^2+180}}=3.$$

II. Калі нявымернае раўнаньне заключае два квадратовыя корні, то спачатку пакідаем на адным баку раўнаньня адзін з корняў і падносім абодва бакі ў квадрат. Потым пакідаем на адным баку раўнаньня другі корань, і ізноў падносім раўнаньне ў квадрат.

Напрыклад, маючы раўнаньне:

$$1+\sqrt{2x}-\sqrt{x+7}=0,$$

пакідаем на левым баку $\sqrt{2x}$,

атрымоўваем:

$$\sqrt{2x}=\sqrt{x+7}-1.$$

Падносім абодва бакі ў квадрат:

$$2x=x+7-2\sqrt{x+7}+1,$$

ці

$$x-8=-2\sqrt{x+7}$$

Ізноў падносячы раўнаньне ў квадрат, маем:

$$x^2-16x+64=4x+28,$$

ці $$x^2-20x+36=0,$$

адкуль $$x_1=18 \text{ і } x_2=2.$$

Пры падстаноўцы атрыманых разьвязкаў у першае раўнаньне, бачым, што толькі адзін разьвязак, а мянавіта $x_2=2$, здавальняе раўнаньне, замяняючы яго на тожсамасьць. Значыцца, данае раўнаньне мае толькі адзін разьвязак; разьвязак-ж другі, а мянавіта $x_1=18$, здавальняе наступнае раўнаньне:

$$1-\sqrt{2x}+\sqrt{x+7}=0.$$

III. Хай цяпер нявымернае раўнаньне заключае тры квадратовыя корні, напрыклад:

$$\sqrt{x-2}+\sqrt{x+3}=\sqrt{6x-11}.$$

Разьвязаньне. $$x-2+2\sqrt{x^2+x-6}+x+3=6x-11;$$

$$2\sqrt{x^2+x-6}=4x-12;$$

$$\sqrt{x^2+x-6}=2x-6;$$

$$x^2+x-6=4x^2-24x+36;$$

$$3x^2-25x+42=0,$$

$$x_1=6 \text{ і } x_2=2^1/_3.$$

Посьле праверкі бачым, што першы разьвязак 6 адказвае першаму раўнаньню; другі-ж разьвязак $2^1/_3$ адказвае раўнаньню

$$-\sqrt{x-2}+\sqrt{x+3}=\sqrt{6x-11}.$$

IV. Калі нявымернае раўнаньне заключае больш, чымся тры квадратовыя корні, або больш, чымся адзін корань вышэйшых ступеняў, то прывесьці яго да вымернага раўнаньня, пры помачы падняцьця ў ступень, ня можам (за выключэньнем некаторых выпадкаў).

З а д а ч ы.

Разьвязаць наступны нявымерныя раўнаньні:

554. $5+\sqrt{6-x}=7$

555. $x+\sqrt{16x+x^2}=8$

556. $3x-8=4\sqrt{4x+1}$

557. $4+3\sqrt{5x^2-7x+12}=7x$

558. $\sqrt{17-\sqrt{x-8}}=4$

559. $\sqrt{8x+13-7\sqrt{x^2-11x+4}}=9$

560. $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x-1}=1$

561. $2\sqrt{x+18}+\sqrt{4x-3}=15$

562. $4\sqrt{6x+1}-3\sqrt{7x+8}=2$

563. $\sqrt{2x+7}+\sqrt{3x-18}=\sqrt{7x+1}$

564. $4\sqrt{4x+1}-3\sqrt{3x-2}=2\sqrt{5x-1}$

565. $x=-2+\sqrt{4+x\sqrt{36+x^2}}$

566. $\frac{2}{x}+2=\sqrt{4+\frac{1}{x}\sqrt{64+\frac{144}{x^2}}}$

567. $1-\frac{1}{x}=\sqrt{1-\frac{1}{x}\sqrt{4-\frac{7}{x^2}}}$ 568. $\frac{5}{x+\sqrt{5+x^2}}-\frac{5}{x-\sqrt{5+x^2}}=6$

569. $\frac{x-1}{1+\sqrt{x}}=4-\frac{1-\sqrt{x}}{2}$ 570. $\frac{x+1-\sqrt{2x+1}}{x+1+\sqrt{2x+1}}=\frac{\sqrt{2x+1}+1}{\sqrt{2x+1}-1}$

Уклад раўнаньняў 2-ой ступені.

§ 63. Поўнае раўнаньне другой ступені з дзьвёма невядомымі, посьле ўпрошчаньня, мае від:

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0.$$

У раўнаньні гэтым тры першыя выразы ёсьць другой ступені адносна невядомых (сюды залічаем і выраз bxy), два другія ёсьць выразы першае ступені, а выраз f-ы—вядомы.

Пры разьвязваньні сыстэмы двох поўных квадратовых раўнаньняў з дзьвёма невядомымі

$$a_1x^2+b_1xy+c_1y^2+d_1x+e_1y+f_1=0.$$

$$a_2x^2+b_2xy+c_2y^2+d_2x+e_2y+f_2=0,$$

атрымоўваем поўнае раўнаньне 4-ае ступені, якое ня можа быць разьвязана спосабамі элемэнтарнай матэматыкі. З гэтае прычыны мы можам выясьніць толькі некаторыя спосабы разьвязаньня ўкладаў няпоўных раўнаньняў другой і вышэйшых ступеняў.

§ 64. I) *Калі адно раўнаньне ёсьць другой ступені, а другое—першай, то з раўнаньня першае ступені выражаем значэньне аднэй невядомай праз другую і знойдзенае, такім чынам, значэньне падстаўляем у раўнаньне другой ступені.*

Маючы, напрыклад, сыстэму раўнаньняў:

$$x^2-2xy-4y^2+3x+6y-5=0,$$

$$3x+2y=4,$$

з раўнаньня 2-га азначаем y:

$$y=\frac{4-3x}{2}$$

Знойдзенае значэньне y падстаўляем на месца y у першае раўнаньне:

$$x^2-2x\cdot\frac{4-3x}{2}-4\left(\frac{4-3x}{2}\right)^2+3x+6\cdot\frac{4-3x}{2}-5=0,$$

ці: $$x^2-4x+3x^2-16+24x-9x^2+3x+12-9x-5=0,$$

канчаткова:

$$5x^2-14x+9=0,$$

адкуль:

$$x_1=1\frac{4}{5};\quad x_2=1.$$

Падставіўшы знойдзеныя разьвязкі ў другое раўнаньне на месца x, атрымаем:

$$y_1 = -\frac{7}{10}; y_2 = \frac{1}{2}$$

Да гэтага-ж выпадку прыводзім сыстэму квадратовых раўнаньняў, з якіх можна выключыць выразы другой ступені адносна невядомых спосабам зраўнаньня коэфіцыэнтаў.

Напрыклад, разьвязваючы ўклад:

$$2x^2 - 8x + y + 2 = 0$$
$$5x^2 - 6x - 8y + 5 = 0,$$

посьле зраўнаньня коэфіцыэнтаў пры x^2, атрымаем:

$$\begin{array}{r} 10x^2 - 40x + 5y + 10 = 0 \\ -\ 10x^2 \pm 12x \pm 16y \mp 10 = 0 \\ \hline -28x + 21y = 0 \end{array}$$

ці: $$4x - 3y = 0,$$

адкуль $$x = \frac{3y}{4}$$

Падставім цяпер значэньне x, выражанае праз y, у першае раўнаньне:

$$2\left(\frac{3y}{4}\right)^2 - 8 \cdot \frac{3y}{4} + y + 2 = 0.$$

Посьле ўпрошчаньня:

$$9y^2 - 40y + 16 = 0,$$

адкуль:

$$y_1 = 4 ; y_2 = \frac{4}{9}$$

Падставіўшы знойдзеныя разьвязкі y_1 і y_2 у раўнаньне

$$4x - 3y = 0,$$

атрымаем:

$$x_1 = 3 ; x_2 = 1\frac{1}{3}$$

§ 65. II) *Калі ў сыстэме раўнаньняў другой ступені адно раўнаньне—аднароднае, г.ё. ўсе яго выразы аднаковай ступені адносна невядомых,—то разьвязваем уклад спосабам уводу дапаможных невядомых.*

Хай маем наступны ўклад раўнаньняў:

$$x^2 - 3xy + 2y^2 + x - 5y + 6 = 0$$
$$2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0$$

Абазначым y праз xz; тады з другога раўнаньня (аднароднага) атрымаем:

$$2x^2 - 5x^2z + 2x^2z^2 = 0,$$

ці $$2z^2 - 5z + 2 = 0$$ (скараціўшы раўнаньне на x^2), адкуль: $z_1=2$; $z_2=\frac{1}{2}$

А з прычыны таго, што $y=xz$, значыцца:

$$y_1=2x\ ;\ y_2=\frac{1}{2}x$$

Падставіўшы цяпер значэньне y, выражанае праз x, у першае раўнаньне, атрымаем посьле ўпрошчаньня:

$$x^2-3x+2=0\ \left(\text{калі } y_1=2x\right),$$

або $3x=12$ $\left(\text{калі } y_2=\frac{1}{2}x\right)$

З першага раўнаньня маем:

$$x_1=2 \text{ і } x_2=1,$$

з другога: $x_3=4$

Значэньні y знойдзем, падставіўшы знойдзеныя значэньні x у якоенебудзь з даных раўнаньняў.

§ 66. III) Часта разьвязаньне сыстэмы раўнаньняў другой і вышэйшых ступеняў грунтуецца на *штучных спосабах*, якія мы разьгледзім у наступных прыкладах.

П Р Ы К Л А Д I.
$$x+y=a$$
$$xy=b$$

Азначаем з першага раўнаньня адну невядомую праз другую і атрыманае значэньне падстаўляем у другое раўнаньне:

$$x=a-y,$$
$$y(a-y)=b,$$

або $y^2-ay+b=0,$

адкуль $y=\dfrac{a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$

У падобны спосаб можам знайсьці значэньне x.

Другі спосаб разьвязаньня такой сыстэмы грунтуецца на ўласьцівасьцях разьвязкаў квадратовага раўнаньня.

З прычыны таго, што ў даным укладзе маем *суму і здабытак* невядомых, значыцца, x і y можам прыняць за разьвязкі пэўнага квадратовага раўнаньня

$$z^2-az+b=0,$$

з якога атрымаем

$$z=(x \text{ і } y)=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$$

П Р Ы К Л А Д II.
$$x+y=a$$
$$x^2+y^2=b.$$

Гэтую сыстэму таксама можам разьвязаць спосабам падстаноўкі.

Другі спосаб разьвязаньня грунтуецца на тым, што першае раўнаньне падносім у квадрат і ад рэзультату аднімаем другое раўнаньне. Атрымаем:

$$\begin{array}{r} x^2+y^2+2xy=a^2 \\ -x^2-y^2=-b \\ \hline 2xy=a^2-b, \end{array}$$

ці

$$xy=\frac{a^2-b}{2}$$

Цяпер мы ўжо маем сыстэму

$$x+y=a$$

$$\text{і} \quad xy=\frac{a^2-b}{2},$$

разьвязаньне якой бачылі ў прыкладзе I.

ПРЫКЛАД III. $\quad x^2+y^2=a,$

$$xy=b$$

З раўнаньня другога азначаем адну невядомую, напрыклад x, і, падставіўшы яе значэньне ў першае раўнаньне, атрымоўваем:

$$\frac{b^2}{y^2}+y^2=a,$$

посьле ўпрошчаньня:

$$y^4-ay^2+b^2=0$$

З гэтага двохквадратовага раўнаньня знойдзем чатыры значэньні y.

Другі спосаб. Падвоім другое раўнаньне і дадамо яго да першага; атрымаем тады:

$$x^2+y^2+2xy=a+2b,$$

ці

$$(x+y)^2=a+2b,$$

або

$$x+y=\pm\sqrt{a^2+2b}.$$

Посьле гэтага, разьвязваем сыстэму:

$$x+y=\pm\sqrt{a^2+2b}$$

$$\text{і} \quad xy=b.$$

ПРЫКЛАД IV.

Раўнаньні $\quad x^3-y^3=a \quad$ і $\quad x-y=b$

разьвязваем, дзелячы першае з іх на другое:

$$x^2+xy+y^2=\frac{a}{b}.$$

Потым з другога раўнаньня ($x-y=b$) азначаем x праз y і падстаўляем у новае раўнаньне

$$x^2+xy+y^2=\frac{a}{b}.$$

Атрымаем тады раўнаньне

$$(y+b)^2+(y+b)y+y^2=\frac{a}{b},$$

з якога знойдзем значэньні y.

Задачы.

Разьвязаць наступныя сыстэмы раўнаньняў:

571. $x^2-y^2=32$
$x-2y=2$

572. $2x^2-2xy+x=-9$
$2y-3x=1$

573. $5x^2-3y^2=33$
$4x+9y=30$

574. $5x+3y=30$
$xy=15$

575. $x^2-y^2+2x-y=112$
$x+y=19$

576. $2x^2+3y^2-4x+y=176$
$2y-x=2$

577. $5x^2+xy-3y^2=-4$
$2x^2+3xy=104$

578. $x^2+3xy-5y^2=208$
$xy-2y^2=16$

579. $x+y=21$
$xy=108$

580. $x^2+y^2=73$
$xy=24$

581. $x^3-y^3=341$
$x-y=11$

582. $x^2+y^2=125$
$3xy=150$

583. $x^3+y^3=152$
$xy=15$

584. Знайсьці бок простакутніка, абвод якога ёсьць роўны 22 мэтрам, а плошча=30 кв. мэтрам.

585. Калі да здабытку двох лікаў дадаць меншы лік, то атрымаем 54. Калі-ж да гэтага здабытку дадаць большы лік, то атрымаем 56. Знайсьці гэтыя лікі.

586. Здабытак цыфр двохзнакавага ліку ў 3 разы менш за самы лік. Калі-ж да шуканага ліку дадаць 18, то атрымаем лік, які складаецца з тых самых цыфр, але ў адваротным парадку. Знайсьці лік.

587. Здабытак двох цэлых дадатных лікаў у 3 разы больш за іх суму, а сума квадратаў гэтых лікаў ёсьць роўная 160. Знайсьці лікі.

588. Сума двох лікаў ёсьць роўная 22, а сума іх кубаў 2926. Знайсьці гэтыя лікі.

589. Два найміты, працуючы разам, выканалі пэўную работу ў 12 дзён. Калі-б спачатку першы найміт выканаў адну трэцюю гэтай работы, а потым другі—пазасталую частку, то прайшло-б $26\frac{2}{3}$ дзён. У колькі дзён кожны з іх мог-бы выканаць гэтую работу, працуючы асобна?

V.

Прогрэсіі.

Арытмэтычная прогрэсія.

§ 67. *Арытмэтычнай прогрэсіяй называецца рад выразаў (лікаў), у якім кожны наступны выраз розьніцца ад папярэдняга на адзін і той самы лік.*

Арытмэтычнай прогрэсіяй будуць напрыклад:

1, 2, 3, 4, 5, 6....	(натуральны рад лікаў)
1, 3, 5, 7, 9....	(рад няцотных лікаў)
2, 4, 6, 8, 10....	(рад цотных лікаў)
7, 10, 13, 16....	
8, 3,—2,—7,—12....	
5, $3\frac{2}{3}$, $2\frac{1}{3}$, 1,—$\frac{1}{3}$,....	і г. д.

Лікі, якія твораць прогрэсію, называюцца *выразамі* прогрэсіі, а розьніца паміж даным выразам і папярэднім называецца *розьніцай* прогрэсіі.

Калі розьніца ёсьць дадатная, то прогрэсія называецца *ўзрастаючай*, калі розьніца адмоўнаяпрогрэсія *спадаючая*.

Для абазначэньня арытмэтычнай прогрэсіі перад першым яе выразам пішам знак $\div$

П Р Ы К Л А Д Ы.

$\div$ 4, 7, 10, 13,...

Розьніца прогрэсіі=3; прогрэсія ўзрастаючая.

II. $\div$ 9, 5, 1,—3,—7,...

Розьніца прогрэсіі=—4; прогрэсія спадаючая.

§ 68. Абазначым першы выраз прогрэсіі праз a_1, другі праз a_2, трэці праз a_3, ..., агульны выраз праз a_n, розьніцу прогрэсіі праз d.

Тады:

$$a_2=a_1+d$$

$$a_3=a_1+2d$$

$$a_4=a_1+3d$$

. . . .

. . . .

і выраз агульны a_n, які мае $(n-1)$ папярэдніх выразаў, выразіцца:

$$a_n=a_1+(n-1)d \qquad (1)$$

г. ё.

кожны выраз арытмэтычнай прогрэсіі ёсьць роўны першаму выразу, плюс розьніца, памножаная на колькасьць папярэдніх выразаў.

Карыстаючы з выведзеных формул, можам азначыць які-хочаш (адвольны) выраз арытмэтычнай прогрэсіі, ня вылічаючы выразаў, якія знаходзяцца паміж першым і шуканым.

Так, напрыклад, 12-м выразам прогрэсіі

$$\div\ 5,\ 8,\ 11,\ 14,\ldots$$

будзе

$$a_{12}=5+11\,.\,3=38$$

25-м выразам прогрэсіі

$a_n = a_1 + (n-1).d$

$$\div\ 32,\ 27,\ 22,\ 17,\ldots$$

будзе

$$a_{25}=32-24\,.\,5=-88$$

П Р Ы К Л А Д І.

Маючы першы выраз прогрэсіі$=14$, апошні$=39$ і колькасьць выразаў$=6$, *знайсьці розьніцу прогрэсіі.*

Разьвязаньне.

З формулы

$$a_n=a_1+(n-1)d$$

атрымоўваем:

$$d=\frac{a_n-a_1}{n-1}=\frac{39-14}{6-1}=5$$

П Р Ы К Л А Д ІІ.

Маючы першы выраз прогрэсіі$=13$, апошні$=30\frac{1}{2}$ і розьніцу$=2\frac{1}{2}$, *знайсьці колькасьць выразаў.*

Разьвязаньне.

З формулы

$$a_n=a_1+(n-1)d$$

маем:

$$n=\frac{a_n-a_1}{d}+1=\frac{30\frac{1}{2}-13}{2\frac{1}{2}}+1=8.$$

§ 69. Хай у арытмэтычнай прогрэсіі

$$\div a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k \ldots a_z \ldots a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$$

выраз a_k ёсьць κ-ы выраз ад пачатку прогрэсіі,

а выраз a_z ёсьць κ-ы выраз ад канца »

Тады

$$a_k = a_1 + (\kappa - 1)d$$

$$\text{і } a_z = a_n - (\kappa - 1)d,$$

адкуль

$$a_k + a_z = a_1 + a_n,$$

г. ё.

сума двох выразаў арытмэтычнай прогрэсіі, аднакова адлеглых ад пачатку і канца, ёсьць роўная суме канцавых выразаў.

§ 70. Ведаючы канцавыя выразы і колькасьць выразаў, можам вылічыць суму выразаў арытмэтычнай прогрэсіі. Дзеля гэтае мэты напішам суму n выразаў прогрэсіі ў форме:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n,$$

і ў адваротным парадку:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots\ldots + a_3 + a_2 + a_1$$

Склаўшы бакамі гэтыя роўнасьці, атрымаем:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots\ldots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Двохчлены, якія стаяць у дужках, зьяўляюцца сумамі выразаў прогрэсіі, аднакова адлеглых ад пачатку і канца; кожная з такіх сум (гл. папярэдні §) $= a_1 + a_n$. А, значыцца,

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots\ldots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)$$

(n разоў),

$$\text{або } 2S_n = (a_1 + a_n)n,$$

адкуль

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \qquad (2),$$

г. ё.

сума выразаў арытмэтычнай прогрэсіі ёсьць роўная палове сумы канцавых выразаў, памножанай на колькасьць выразаў.

Падставіўшы ў знойдзенай формуле (2) заместа a_n яго значэньне (1), атрымаем другую формулу для сумы выразаў арытмэтычнай прогрэсіі, а мянавіта:

$$S_n = \left[2a_1 + (n-1)d\right] \cdot \frac{n}{2} \qquad (3)$$

якую ўжываем тады, калі апошні выраз прогрэсіі ёсьць невядомы, але затое вядомая розьніца.

ПРЫКЛАДЫ.

1) *Знайсьці суму 26 выразаў прогрэсіі*

$$\div 6, 9, 12, 15 \ldots\ldots$$

У прогрэсіі гэтай $a_1=6$, $d=3$, $n=26$,

значыцца: $S_{26}=\left[2a_1+(n-1)d\right]\frac{n}{2}=(12+25.3)\frac{26}{2}=1131$.

2) *Знайсьці суму* 18 *выразаў* прогрэсіі, у якой першы выраз$=14$, апошні$=39\frac{1}{2}$

У гэтай прогрэсіі $a_1=14$, $a_n=39\frac{1}{2}$, $n=18$,

значыцца:

$$S_{18}=\frac{(a_1+a_n)n}{2}=\frac{(14+39\frac{1}{2}).18}{2}=481\frac{1}{2}.$$

3) *Колькі* трэба ўзяць *выразаў* прогрэсіі

$$\div 12, 10, 8, 6, 4 \ldots.,$$

каб атрымаць суму, роўную 22?

У гэтай прогрэсіі сума$=22$, $a_1=12$, $d=-2$,

значыцца:

$$22=\left[24-(n-1)2\right]\frac{n}{2}$$

Пасьле ўпрошчаньня атрымаем квадратовае раўнаньне:

$$n^2-13n+22=0,$$

з якога знойдзем: $n_1=11$, $n_2=2$, г. ё. для атрыманьня шуканае сумы можам узяць або два выразы, або 11. Вынік гэты лёгка праверыць, вылічыўшы беспасрэдна суму 2-х і 11-ёх выразаў прогрэсіі

$$\div 12, 10, 8, 6, 4, 2, 0, -2, -4, -6, -8.$$

Пераконваемся, што, сапраўды, абодва разьвязкі здавальняюць пытаньне.

4) Сума пятага і восьмага выразаў арытмэтычнай прогрэсіі$=24$, а адзінаццаты выраз ёсьць 21. *Знайсьці 17-ты выраз* гэтай прогрэсіі.

З варункаў задачы маем:

$$1)\ a_5+a_8=24, \quad \text{г. ё.}$$

$$a_1+4d+a_1+7d=24,$$

$$2a_1+11d=24 \quad (1)$$

і 2) $a_{11}=21$, г. ё.

$$a_1+10d=21 \quad (2)$$

Разьвязваючы раўнаньнії (1) і (2), атрымаем:

$$d=2,\ a_1=1,$$

адсюль шуканы выраз

$$a_{17}=a_1+16d=1+2.16=33.$$

5) *Знайсьці суму n першых натуральных лікаў*: 1, 2, 3, 4, 5,... Абазначым шуканую суму праз S^1_n, тады:

$$S^1_n=1+2+3+4+....+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Так, напрыклад, калі $n=8$,

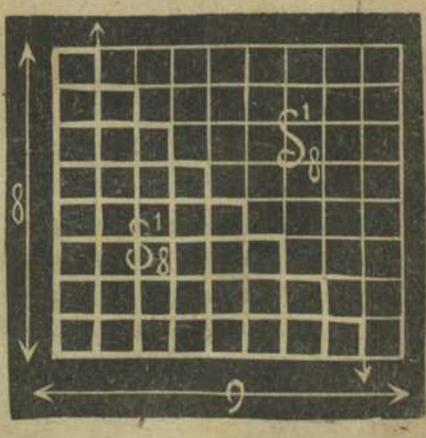
$$S^1_n=\frac{8.9}{2}=36.$$

Атрыманы рэзультат можам праверыць пры помачы беспасрэднага дадаваньня.

Карысьць гэтай формулы асабліва адчуваецца, калі n ёсьць вялікім лікам, напрыклад: $S^1_{1000}=\frac{1000.1001}{2}=500500.$

Формулу $S^1_n=n\frac{n+1}{2}$ можам прадставіць графічна ў відзе простакутніка з бакамі n і $n+1$ (рыс. 18).

Суму выразаў прогрэсії S^1_n будзе выражаць палова плошчы простакутніка, напрыклад, калі $n=8$, то $S^1_8=\frac{8.9}{2}=36.$



Рыс. 18.

6) *Знайсьці суму n першых няцотных лікаў:*

1, 3, 5, 7, 9 . . . . . $(2n-1)$.

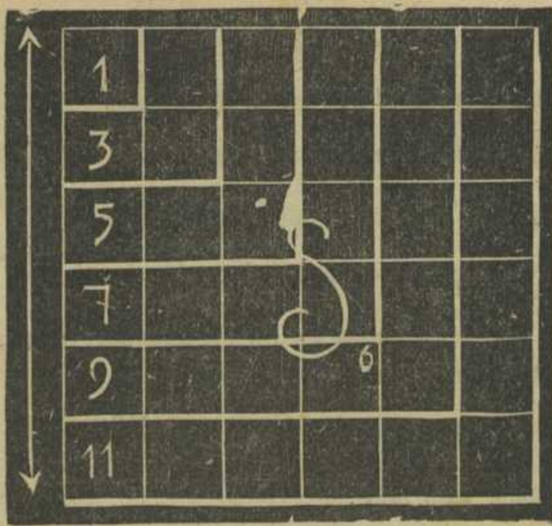
У гэтай прогрэсії: $a_1=1$; $d=2$; $a_n=2n-1$.

Значыцца, $S_n=\frac{[1+(2n-1)]n}{2}=n^2$

Напрыклад, пры 6-ёх выразах сума прогрэсії:

$$1+3+5+7+9+11=6^2=36.$$

Апошнюю формулу можам графічна прадставіць у форме квадрата з бокам n. На рысунку 19-м $n=6$.



Рыс. 19.

З а д а ч ы.

590. Знайсьці суму ўсіх цотных лікаў да 200 уключна.

591. Знайсьці суму n выразаў прогрэсіі

$$\div a,\ 2a-b,\ 3a-2b,\ \ldots\ldots$$

592. Знайсьці апошні выраз і суму выразаў, маючы $a_1=7, d=4, n=13$.

593. Знайсьці апошні выраз і суму выразаў, ведаючы $a_1=56, d=-3$, $n=11$.

594. Маючы апошні выраз$=149$, розьніцу $d=7$ і колькасьць выразаў $n=22$, знайсьці першы выраз і суму выразаў прогрэсіі.

595. Маючы першы выраз$=10$, апошні$=-9$ і суму n выразаў$=10$, знайсьці розьніцу і колькасьць выразаў.

596. Маючы першы выраз$=36$, апошні$=8$ і колькасьць выразаў $n=15$, знайсьці розьніцу прогрэсіі і суму n яе выразаў.

597. Маючы першы выраз$=-45$, колькасьць выразаў $n=31$ і суму n выразаў$=0$, знайсьці апошні выраз і розьніцу.

598. Маючы першы выраз$=14{,}5$, апошні$=32$ і розьніцу$=0{,}7$, знайсьці колькасьць выразаў і суму.

599. Маючы розьніцу прогрэсіі $d=\frac{1}{2}$, колькасьць выразаў $n=25$ і суму n выразаў$=-75$, знайсьці першы і апошні выразы прогрэсіі.

600. Маючы першы выраз$=41$, розьніцу $d=2$ і суму n выразаў$=4784$, знайсьці колькасьць выразаў і апошні выраз.

601. Маючы розьніцу прогрэсіі $d=4$, апошні выраз$=88$ і суму $S_n=1008$, знайсьці колькасьць выразаў і першы выраз прогрэсіі.

602. Чацьвёрты выраз прогрэсіі=9, а дзевяты=—6. Колькі трэба ўзяць выразаў, каб сума іх была роўная 54?

603. Знайсьці розьніцу прогрэсіі, у якой першы выраз=100, а сума шасьцёх першых выразаў у 5 разоў больш за суму наступных 6 выразаў.

604. Знайсьці прогрэсію, ведаючы, што сума другога і чацьвертага яе выразаў=16, а здабытак першага выразу на пяты=28.

605. Найміты ўзялісь выкапаць студню з такой умовай, каб за першы мэтр ім заплацілі 40 кап., а за кожны наступны на 15 кап. больш, чымся за папярэдні. Колькі мэтраў усяго яны выкапалі, калі за ўсю работу атрымалі 16 руб. 90 кап?

606. Два целы рухаюцца насустрэчу з двох месц, адлеглых на 153 мэтры. Першае праходзіць па 10 мэтраў у сэкунду, а другое прайшло ў першую сэкунду 3 мэтры, а ў кожную наступную сэкунду робіць на 5 мэтраў больш, як у папярэднюю. Праз колькі сэкунд цэлы спаткаюцца?

607. Вядома, што свабодна падаючае цела праходзіць у першую сэкунду 16,1 мэтры, а ў кожную наступную на 32,2 м. больш, чымся ў папярэднюю. Калі два целы пачалі падаць з аднэй вышыні,—адно праз 5 сэкунд посьле другога,—то праз колькі сэкунд адлегласьць паміж імі будзе=724,5 мэтра?

Геомэтрычная прогрэсія.

§ 71. *Геомэтрычнай прогрэсіяй называецца рад выразаў (лікаў), у якім кожны наступны выраз раўняецца папярэдняму, памножанаму на адзін і той самы лік.*

Гэты апошні называецца *множнікам* прогрэсіі.

Калі гэты множнік ёсьць больш за 1, то прогрэсія ўзрастаючая, калі множнік менш за 1,—прогрэсія спадаючая.

Для абазначэньня геомэтрычнае прогрэсіі перад першым яе выразам пішам знак $\because\!\!\because$

ПРЫКЛАДЫ.

1) $\because\!\!\because$ 4, 12, 36, 108 . . . .

Множнік прогрэсіі=3; прогрэсія ўзрастаючая

2) $\because\!\!\because$ 9, 3, 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$ . . . .

Множнік прогрэсіі $\frac{1}{3}$; прогрэсія спадаючая.

§ 72. Калі абазначым першы выраз геомэтрычнае прогрэсіі праз a_1, другі—праз a_2 . . . . , агульны выраз праз a_n, множнік прогрэсіі праз q, тады:

$$a_2 = a_1 q$$
$$a_3 = a_1 q^2$$
$$a_4 = a_1 q^3$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Бачым, што другі выраз ёсьць роўны першаму, памножанаму на першую ступень множніка; трэці выраз ёсьць роўны першаму, памножанаму на другую ступень множніка і г. д.; а, значыцца, агульны выраз a_n атрымаем, памнажаючы першы выраз a_1 на множнік прогрэсіі, падняты ў ступень, роўную колькасьці папярэдніх выразаў, г. ё.

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

Кожны выраз геомэтрычнае прогрэсіі ёсьць роўны першаму выразу, памножанаму на множнік прогрэсіі, падняты ў ступень, роўную колькасьці папярэдніх выразаў; так, напрыклад, восьмым выразам прогрэсіі

$$\div\div\ 6,\ 12,\ 24,\ 48......$$

будзе:
$$a_8 = 6\,.\,2^7 = 6\,.\,128 = 768$$

П Р Ы К Л А Д I.

Трэці выраз геомэтрычнае прогрэсіі ёсьць $\frac{1}{18}$, а множнік $= \frac{1}{3}$. Знайсьці пяты выраз прогрэсіі.

У прогрэсіі гэтай $a_3 = \frac{1}{18}$ і $q = \frac{1}{3}$. Дзеля таго, што $a_3 = a_1 q^2$,

значыцца
$$a_1 = \frac{a_3}{q^2} = \frac{1}{18} : \frac{1}{9} = \frac{1}{2}$$

$$a_5 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{81} = \frac{1}{162}$$

П Р Ы К Л А Д II.

Які выраз прогрэсіі

$$\div\div\ 5,\ 15,\ 45\ ......\ \text{ёсьць} = 405?$$

У прогрэсіі гэтай $a_1 = 5$, $q = 3$, $a_n = 405$.

З формулы $a_n = a_1 q^{n-1}$ атрымоўваем:

$$405 = 5\,.\,3^{n-1},\ \text{або}\ 81 = 3^{n-1},$$

а з прычыны таго, што

$$81 = 3^4,$$

значыцца,
$$3^4 = 3^{n-1},\ \text{г. ё.}$$

$$4 = n - 1,\ \text{адкуль}\ n = 5.$$

§ 73. Ведаючы канцавыя выразы і лік усіх выразаў, можам вылічыць суму выразаў геомэтрычнай прогрэсіі.

Калі шуканую суму абазначым праз S_n, то

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \ ......\ + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1}$$

Памнажаючы абодва бакі на q, атрымаем:

$$S_n q = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + a_1 q^4 + \ ......\ + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n$$

Пры аднiманьнi верхняе сумы ад нiжняй сярэднiя выразы скароцяцца i застанецца:

$$S_nq = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \ldots\ldots + a_1q^{n-1} + a_1q^n$$

$$-S_n = -a_1 \mp a_1q \mp a_1q^2 \mp a_1q^3 \mp \ldots\ldots \mp a_1q^{n-1}$$

$$S_nq - S_n = a_1q^n - a_1$$

або $$S_n(q-1) = a_1q^n - a_1$$

адкуль $$S_n = \frac{a_1q^n - a_1}{q-1}$$

Формулу гэтую ўжываем пры вылiчэньнях сумы выразаў узрастаючай прогрэсii. Для спадаючай прогрэсii зручней зьмяніць знак у лiчнiку i назоўнiку дробу i ўжываць формулу:

$$S_n = \frac{a_1 - a_1q^n}{1-q}$$

Дзеля таго, што $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, дык $a_nq = a_1q^n$

Падставiўшы цяпер у формулу сумы выразаў геомэтрычнае прогрэсii a_nq замест a_1q^n, атрымаем:

$$S_n = \frac{a_nq - a_1}{q-1} \quad *)$$

Гэтую формулу ўжываем пры вылiчэньнях сумы выразаў геомэтрычнай прогрэсii, калi маем першы выраз, апошнi i множнiк прогрэсii.

П Р Ы К Л А Д Ы.

I) Знайсьцi *суму* шасьцёх *выразаў* прогрэсii:

$$\div\div\; 5,\ 15,\ 45\ \ldots\ldots$$

У прогрэсii гэтай $a_1 = 5$, $q = 3$, $n = 6$.

Значыцца $$S_6 = \frac{5 \cdot 3^6 - 5}{2} = \frac{5 \cdot 729 - 5}{2} = 1820.$$

II) Знайсьцi *суму* пяцёх *выразаў* прогрэсii

$$\div\div\; 3,\ 1\frac{1}{2},\ \frac{3}{4}\ \ldots\ldots$$

У прогрэсii гэтай: $a_1 = 3$, $q = \frac{1}{2}$, $n = 5$.

Значыцца:

$$S_5 = \frac{3 - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5}{\frac{1}{2}} = \left(3 - \frac{3}{32}\right) \cdot 2 = 5\frac{13}{16}$$

*) Формулу сумы выразаў геомэтрычнае прогрэсii мы знаходзiм яшчэ ў грэцкага матэматыка Эўклiда (III сталецьце перад Нар. Хр.).

III) Маючы $q=2$, $n=7$, $a_n=352$, знайсьці a_1 і S_n

Дзеля таго, што $a_n=a_1q^{n-1}$, значыцца:

$$a_1=\frac{a_n}{q^{n-1}}=\frac{352}{2^6}=\frac{352}{64}=5\frac{1}{2}$$

$$S_n=\frac{a_1q^n-a_1}{q-1}=5\frac{1}{2}\,.\,2^7-5\frac{1}{2}=698\frac{1}{2}$$

IV) Маючы $a_1=6$, $a_n=3750$, $S_n=4686$, знайсьці q і n

Разьвязаньне.

$$S_n=\frac{a_nq-a_1}{q-1}$$

$$S_nq-S_n=a_nq-a_1\,;\; S_nq-a_nq=S_n-a_1\,;$$

$$q(S_n-a_n)=S_n-a_1\,;\; q=\frac{S_n-a_1}{S_n-a_n}=\frac{4686-6}{4686-3750}=5$$

$$a_n=a_1q^{n-1};\; 3750=6\,.\,5^{n-1};\; 625=5^{n-1},\text{ г. ё.}$$

$$5^4=5^{n-1},\text{ адкуль } 4=n-1 \text{ і } n=5.$$

V) Знайсьці 6 выразаў геомэтрычнае прогрэсіі, у якой пяты выраз ёсьць больш за першы на 105, а сума трэцяга і першага$=35$.

Разьвязаньне.

Маем два раўнаньні:

$$a_5-a_1=105$$
$$a_8+a_1=35,$$

ці

$$a_1q^4-a_1=105$$
$$a_1q^2+a_1=35$$

або

$$a_1(q^4-1)=105$$
$$a_1(q^2+1)=35$$

Падзяліўшы апошнія два раўнаньні бакамі, атрымаем:

$$\frac{a_1(q^2+1)(q^2-1)}{a_1(q^2+1)}=\frac{105}{35},$$

або

$$q^2-1=3$$
$$q^2=4;\; q=\pm 2.$$
$$a_1(q^2+1)=35;\; a_1\,.\,5=35;\; a_1=7.$$

Шуканая прогрэсія будзе:

$$\div 7,\; \pm 14,\; 28,\; \pm 56,\; 112,\; \pm 224.$$

Задачы.

608. Знайсьці суму дзесяцёх выразаў прогрэсіі:

$$\div\div\ 10,\ 20,\ 40\ \ldots\ldots$$

609. Знайсьці суму адзінаццацёх выразаў прогрэсіі:

$$\div\div\ -2,\ 1,\ -\frac{1}{2}\ \ldots\ldots$$

610. Маючы апошні выраз $a_n=128$, множнік $q=2$ і лік выразаў $n=7$, знайсьці першы выраз і суму.

611. Маючы множнік прогрэсіі $q=2$, лік выразаў $n=7$ і суму $S_n=635$, знайсьці першы і апошні выразы прогрэсіі.

612. Маючы першы выраз $a_1=2$, апошні $a_n=1458$ і суму $S_n=2186$, знайсьці множнік і лік выразаў прогрэсіі.

613. Маючы першы выраз $a_1=7$, множнік $q=3$ і суму $S_n=847$, знайсьці апошні выраз і лік выразаў.

614. Маючы апошні выраз $a_n=32768$, множнік $q=4$, і суму $S_n=$ $=43690$, знайсьці першы выраз і лік выразаў.

615. Маючы першы выраз $a_1=12$, лік выразаў $n=3$ і суму $S_n=372$, знайсьці множнік і апошні выраз прогрэсіі.

616. Маючы апошні выраз $a_n=135$, лік выразаў $n=3$ і $S_n=195$, знайсьці множнік і першы выраз прогрэсіі.

617. Сума першага і трэцяга выразаў прогрэсіі=15, а сума другога і чацьвертага=30. Знайсьці суму дзесяцёх выразаў.

618. Знайсьці чатыры выразы геомэтрычнае прогрэсіі, ведаючы, што першы выраз больш за другога на 36, а трэці больш за чацьвертага на 4.

619. Знайсьці прогрэсію з шасьцёх выразаў, ведаючы, што сума першых трох выразаў=112, а сума трох апошніх=14.

Бяскрайная геомэтрычная прогрэсія.

§ 74. Калі рад лікаў, з якіх складаецца прогрэсія, можа быць прадоўжан без канца, то прогрэсія называецца *бяскрайнай*.

I) Калі прогрэсія ўзрастаючая, то $q>1$. Лік, большы за адзінку, пры падняцьці ў ступень (дадатную і цэлую) павялічваецца; дзеля гэтага сумножнік q^n формулы

$$S_n=\frac{a_1q^n-a_1}{q-1},$$

па меры ўзросту n, павялічваецца (а з ім і a_1q^n), і, пры бяскрайна-ўзрастаючым n, можа стацца большым за кожную адвольна выбраную намі велічыню, г. ё. зробіцца бяскрайна-вялікім.

А з прычыны таго, што вынікі ўсіх альгэбрычных дзеяньняў, якія выконваем над бяскрайна-вялікімі лікамі пры помачы скончаных лікаў, застаюцца бяскрайна-вялікімі, значыцца, і сума выразаў прогрэсіі ў гэтым выпадку ёсьць бяскрайна-вялікая велічыня, што азначаем формулай:

$$\lim S_n = \infty$$
$$(\text{пры } n \rightarrow \infty),$$

гэта значыць:

граніца,) да якой імкнецца сума бяскрайна-вялікай колькасьці ($n \rightarrow \infty$) выразаў ўзрастаючай прогрэсіі, ёсьць бяскрайнасьць.*

II. Калі прогрэсія *спадаючая,* то $q < 1$, г. ё. уласьцівы дроб, які, пры падняцьці ў ступень (дадатную і цэлую), зьмяншаецца. Па меры ўзросту колькасьці выразаў n, сумножнік q^n, а разам з ім і здабытак $a_1 q^n$ зьмяншаюцца і, пры бяскрайна-ўзрастаючым n, можа стацца меншым ад кожнай адвольна намі выбранай велічыні, г. ё. зробіцца бяскрайна-малым.

Тады й сума выразаў спадаючай прогрэсіі, якую выражаем формулай

$$S_n = \frac{a_1 - a_1 q^n}{1 - q},$$

імкнецца да пэўнай азначанай граніцы, а мянавіта да $\frac{a_1}{1-q}$

Сапраўды:
$$S_n = \frac{a_1 - a_1 q^n}{1 - q},$$

$$\text{або } S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Але, як мы ўжо заўважылі вышэй, q^n, пры $n \rightarrow \infty$, ёсьць велічыня бяскрайна-малая, г. ё. імкнецца да нуля:

$$\lim q^n = 0.$$

$$\text{Адсюль: } \lim S_n = \lim a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = a_1 \cdot \frac{1 - 0}{1 - q} = \frac{a_1}{1 - q}.$$
$$(\text{пры } n \rightarrow \infty),$$

г ё. *Граніца, да якой імкнецца сума n выразаў спадаючай геомэтрычнай прогрэсіі, калі лік n бяскрайна ўзрастае, ёсьць дроб*

$$\frac{a}{1-q},$$

у якім a ёсьць першы выраз прогрэсіі, а q множнік. Гэтую граніцу звычайна называем сумай выразаў бяскрайна-спадаючай прогрэсіі.

Напрыклад, сума выразаў прогрэсіі

$$\div 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \ldots\ldots,$$

у якой
$$a_1 = 1, q = \frac{1}{2},$$

---

*) limes па латыні значыць «граніца».

будзе

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2:1=2$$

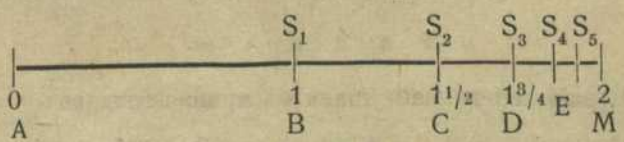
§ 75. Факт гэты, што сума раду спадаючых лікаў імкнецца да пэўнай граніцы, калі дадаем што-раз больш выразаў, можа быць даведзены і геомэтрычным шляхам пры помачы рысунку 20-га, які прадстаўляе сумы S_1, S_2, S_3, S_4....... прогрэсіі

$$\div 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\ldots\ldots \quad \text{на лікавай лініі.}$$

Хай нейкі пункт рухаецца ад A (=0) да M (=2) у такі спосаб, што спачатку робіць дарогу AB=1, потым BC= $\frac{1}{2}$, потым CD= $\frac{1}{4}$ і г. д.

Дадамо да $S_1=AB=1$ палову адлегласьці паміж B і M; атрымаем

$$AC=1+\frac{1}{2}=S_2$$



Рыс. 20.

Да AC дадамо $\frac{1}{4}$, г. ё. палову адлегласьці паміж C і M; атрымаем $AD=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=S_3$. Да AD дадамо ізноў палову DM, г. ё. $\frac{1}{8}$; атрымаем

$$AE=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=S_4$$

Робячы гэтак далей, з кожным разам пасоўваемся ўсё больш направа. Ясная рэч, што ў гэты спосаб не пасоўваемся ў бяскрайнасьць, але заўсёды застаемся на левым баку пункту M, адказваючага ліку 2. Адлегласьць аднак-жа, якая нас аддзяляе ад пункту M, робіцца што-раз меншай і можа стацца адвольна малай; гэта значыць, што пункт M ёсьць граніца, да якой імкнуцца пункты S_2, S_3, S_4.......

§ 76. Формула сумы выразаў бяскрайнай спадаючай геомэтрычнай прогрэсіі мае прыстасаваньне пры азначэньні дакладнага значэньня пэрыядычных дробаў.

Хай, напрыклад, маем пэрыядычны дроб

$$0{,}232323\ldots\ldots$$

Дакладнае значэньне гэтага дробу ёсьць граніца сумы:

$$\frac{23}{100}+\frac{23}{(100)^2}+\frac{23}{(100)^3}+\ldots\ldots,$$

якая, як бачым, прадстаўляе граніцу сумы выразаў бяскрайна-спадаючай геомэтрычнай прогрэсіі; першы выраз яе ёсьць $\frac{23}{100}$, множнік= $\frac{1}{100}$

Дзеля гэтага:

$$0,(23)=\frac{\frac{23}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{\frac{23}{100}}{\frac{99}{100}}=\frac{23}{99}.$$

Калі пэрыядычны дроб ёсьць мяшаны, напрыклад, 0,3(18), то для знаходжаньня гранічнага значэньня яго дадаем да 0,3 суму

$$\frac{18}{10^3}+\frac{18}{10^5}+\frac{18}{10^7}+\ldots\ldots$$

Атрымаем: $$0,3(18)=\frac{3}{10}+\frac{\frac{18}{10^3}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{3}{10}+\frac{18.100}{10^3.99}=$$

$$=\frac{3}{10}+\frac{18}{990}=\frac{7}{22}$$

Задачы.

Знайсьці граніцы сум наступных бяскрайна-спадаючых прогрэсій

620. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots\ldots$ 621. $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\ldots\ldots$

622. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots\ldots$ 623. $\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}+\ldots\ldots$

624. $10+9+8\frac{1}{10}+\ldots\ldots$

625. Знайсьці множнік бяскрайна - спадаючай прогрэсіі, у якой першы выраз=5, а сума=16.

626. Сума бяскрайна-спадаючай геомэтрычнай прогрэсіі=2, а другі выраз$=\frac{4}{9}$. Знайсьці гэтую прогрэсію.

Пристасоўваючы ўласьцівасьці бяскрайна - спадаючай геомэтрычнай прогрэсіі, замяніць наступныя пэрыядычныя дробы на звычайныя:

627. 0,5555...... 628. 0,25252525......

629. 0,033033...... 630. 0,299999......

631. 0,08888...... 632. 1,755555......

633. У кола ўпісан квадрат, у квадрат упісана другое кола, у другое кола ўпісан другі квадрат і г. д. Азначыць граніцы сум плошчаў усіх колаў і ўсіх квадратаў.

VI.

Лёгарытмы.

Азначэньне лёгарытму. Мэта ўводу лёгарытмаў.

§ 77. Возьмем тры адвольныя лікі a, b і c і дапусьцім, што лік c ёсьць вынік дзеяньняў над лікамі a і b.

Калі паміж данымі лікамі істнуе залежнасьць:

$$a+b=c,$$

то, маючы суму c і складнік a, пры помачы адваротнага складаньню дзеяньня, а мянавіта адніманьня, знаходзім складнік b, а маючы суму c і складнік b, пры помачы таго-ж адніманьня, можам знайсьці складнік a.

Адсюль вынікае, што складаньне мае адно адваротнае дзеяньне—адніманьне.

Дапусьцім далей, што c ёсьць рэзультат множаньня a на b, г. ё.

$$ab=c.$$

Калі ў даным выпадку маем здабытак c і множнік a, то, пры помачы адваротнага множаньню дзеяньня, а мянавіта дзяленьня, знаходзім множнік b. Пры помачы таго-ж дзяленьня можам знайсьці a, маючы здабытак c і множнік b.

Бачым адсюль, што множаньне таксама мае адно адваротнае дзеяньне—дзяленьне.

Возьмем, урэшце, гэтыя самыя лікі a, b і c і дапусьцім, што паміж імі істнуе наступная залежнасьць:

$$a^b=c.$$

Калі цяпер, маючы c і адзін з двох іншых лікаў, захочам знайсьці трэці, то натрапім на два саусім розныя дзеяньні:

1) маючы ступень c і паказальнік b, можам знайсьці a пры помачы дабываньня корня, бо

$$a=\sqrt[b]{c},$$

2) але, каб мы захацелі, маючы ступень c і лік a, даведацца, у якую ступень трэба падняць a, каб атрымаць c, то павінны былі-б разьвязаць раўнаньне, у якім невядомы лік ёсьць паказальнік, г. ё.

$$a^x=c.$$

Раўнаньне гэтае называецца *паказальнікавым*; лік a, які падносім у ступень,—*асновай*, а паказальнік ступені x—*лёгарытмам*.

Адсюль вынікае, што:

лёгарытмам данага ліку называецца паказальнік ступені, у якую трэба падняць аснову, каб атрымаць даны лік *).

Лёгарытм абазначаем звычайна знакам *log* або *lg*. Пры гэтых знаках часам дапісваем з правага боку ў нізе основу.

Так, напрыклад, каб паказаць, што ў раўнаньні

$$a^x = c$$

x ёсьць лёгарытм ліку c пры аснове a, пішам:

$$x = lg_a c.$$

Калі за аснову выберам лік 2, то

$$2^2=4;\ 2^3=8,\ 2^5=32 \text{ і г. д.}$$

Дзеля гэтага:

$$lg_2 4=2;\ lg_2 8=3;\ lg_2 32=5.....$$

Пры аснове 3:

$$3^3=27,\ 3^4=81 \text{ і г. д.}$$

Значыцца:

$$lg_3 27=3;\ lg_3 81=4....$$

Пры аснове 5:

$$5^1=5,\ 5^3=125,\ 5^{-2}=\frac{1}{25}$$

Значыцца:

$$lg_5 5=1;\ lg_5 125=3;\ lg_5 \frac{1}{25}=-2....$$

§ 78. У элемэнтарнай матэматыцы лёгарытмы маюць вялікае практычнае значэньне, палягчаючы нам розныя вылічэньні.

З курсу дзеяньняў над альгэбрычнымі лікамі ведаем, што множаньне ступеняў аднаковых лікаў грунтуецца на складаньні іх паказальнікаў, дзяленьне—на адніманьні паказальнікаў, паднясьце ў ступень—на множаньні паказальніка ступені данага ліку на паказальнік новай ступені, і дабываньне корня—на дзяленьні паказальніка ступені данага ліку на паказальнік корня. З гэтае прычыны, калі-б мы маглі ўсе лікі выразіць у форме ступеняў аднаго сталага ліку, то, замяняючы множаньне, дзяленьне, паднясьце ў ступень і дабываньне корня прасьцейшымі дзеяньням, а мянавіта: складаньнем, адніманьнем, множаньнем і дзяленьнем паказальнікаў ступеняў даных лікаў,—мы-б у значнай меры палягчылі-б усе вылічэньні.

Прыклады нам ясьней гэта выявяць.

Уявім сабе, што маем уложаную наступную таблічку ступеняў ліку 2

$1=2^0$	$16=2^4$	$256=2^8$
$2=2^1$	$32=2^5$	$512=2^9$
$4=2^2$	$64=2^6$	$1024=2^{10}$
$8=2^3$	$128=2^7$	$2048=2^{11}$

*) Лёгарытмы былі ўведзены шотляндзкім матэматыкам *Джонам Нэперам* (John Napier, 1550—1617).

$4096=2^{12}$	$65536=2^{16}$	$1048576=2^{20}$
$8192=2^{13}$	$131072=2^{17}$	$2097152=2^{21}$
$16384=2^{14}$	$262144=2^{18}$	$4194304=2^{22}$
$32768=2^{15}$	$524288=2^{19}$	і г. д.

і хочам паводле яе знайсьці *здабытак* 2048.512.

З прычыны таго, што

$$2048=2^{11}, \text{ а } 512=2^{9},$$

значыцца $$2048 . 512=2^{11} . 2^{9}=2^{20},$$

але $$2^{20}, \text{ як бачым з таблічкі, } =1048576,$$

адсюль $$2048 . 512=1048576.$$

Вылічым цяпер паводле нашай таблічкі *дзель* 2097152 : 4096.

Дзеля таго, што

$$2097152=2^{21}, \text{ а } 4096=2^{12},$$

значыцца:

$$2097152 : 4096=2^{21} : 2^{12}=2^{9}, \text{ але } 2^{9}=512,$$

адсюль вынікае, што

$$2097152 : 4096=512.$$

Калі-б мы захацелі знайсьці 64^3, то паводле нашай таблічкі маем $64=2^6$,

значыцца $$64^3=(2^6)^3=2^{18}, \text{ але } 2^{18}=262144,$$

адсюль вынікае, што

$$64^3=262144.$$

Каб вылічыць $\sqrt[3]{2097152}$, знаходзім паводле таблічкі $2097152=2^{21}$,

адсюль

$$\sqrt[3]{2^{21}}=2^7, \text{ а з прычыны таго, што } 2^7=128,$$

значыцца: $$\sqrt[3]{2097152}=128.$$

Вылічым яшчэ паводле нашай таблічкі больш складаны прыклад, а манавіта:

$$x=\frac{8192^6 . \sqrt[3]{32768}}{262144^4 . \sqrt[5]{1048576}}$$

$$8192=2^{13};\ 8192^6=(2^{13})^6=2^{78};$$

$$32768=2^{15};\ \sqrt[3]{32768}=\sqrt[3]{2^{15}}=2^5;$$

$$262144=2^{18};\ 262144^4=(2^{18})^4=2^{72};$$

$$1048576=2^{20};\ \sqrt[5]{1048576}=\sqrt[5]{2^{20}}=2^4;$$

значыцца:

$$x=\frac{2^{78}\,.\,2^5}{2^{72}\,.\,2^4}=\frac{2^{83}}{2^{76}}=2^7=128.$$

З дадзеных прыкладаў бачым, наколькі лягчэй выконываць вылічэньні пры помачы нашай таблічкі. У падобны спосаб уложаны табліцы лёгарытмаў, якія маюць мэтай палягчэньне рознага роду матэматычных вылічэньняў.

Агульныя ўласьцівасьці лёгарытмаў.

§ 79. I. *Лёгарытм адзінкі пры кожнай аснове ёсьць* 0.

Ї праўда:

$$lg_a 1=0, \text{ бо } a^0=1.$$

II. *Лёгарытм асновы ёсьць роўны адзінцы.*

Ї праўда:

$$lg_a a=1, \text{ бо } a^1=a.$$

Пры ўсялякіх вылічэньнях, якія мы выконываем пры помачы лёгарытмаў, за аснову іх бярэцца *дадатны* лік; адсюль вынікае, што:

III. *Адмоўныя лікі ня маюць лёгарытмаў*, бо, падносячы дадатную аснову ў якую-хочаш ступень, заўсёды атрымаем дадатны лік.

IV. *Пры аснове, большай за адзінку, лікі большыя за адзінку маюць дадатныя лёгарытмы, а ўласьцівыя дробы маюць адмоўныя лёгарытмы.*

Ї праўда, калі ў раўнаньні

$$c=a^x$$

аснова a ёсьць больш за 1, то пры x дадатным выразы:

$$a^2,\ a^{\frac{1}{3}},\ a^{\frac{4}{5}}\ldots\ldots \text{ (г. ё. } \sqrt[3]{a},\ \sqrt[5]{a^4}\ldots\ldots)$$

ёсьць большыя за 1; наадварот, калі x ёсьць адмоўны, то a^{-x} ёсьць менш за 1; напрыклад:

$$a^{-5}=\frac{1}{a^5}<1,$$

$$a^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$$ таксама менш за 1 і г. д.

V. Калі пры аснове, большай за 1, *дадатны* x бяскрайна ўзрастае, то a^x робіцца бяскрайна-вялікім лікам, г. ё.

$$a^{\infty}=\infty$$

Гэтую залежнасьць выражаем формулай:

$$lg\,\infty=\infty$$

Наадварот, калі *адмоўны* x пры аснове, большай за 1, бяскрайна ўзрастае, то лік a^x імкнецца да нуля, бо

$$a^{-\infty}=\frac{1}{a^{\infty}}=\frac{1}{\infty}=0,$$

што выражаем формулай:

$$lg\ 0 = -\infty$$

Задачы.

634. Які лік мае лёгарытм 3 пры аснове 2?

635. » » » » 1 » » 2?

636. » » » » 2 » » 3?

637. » » » » 5 » » 3?

638. » » » » 3 » » 5?

639. » » » » $\frac{1}{2}$ » » 25?

640. » » » » $\frac{1}{3}$ » » 64?

641. » » » » $\frac{1}{4}$ » » 625?

642. » » » » -2 » » 9?

643. » » » » -3 » » 4?

644. » » » » -5 » » 2?

Знайсьці x, калі:

645. $lg_4 x = 2$

646. $lg_5 x = 3$

647. $lg_{10} x = 5$

648. Пры якой аснове лік 16 мае лёгарытм 2?

649. » » » » 81 » » 2?

650. » » » » 81 » » 4?

651. » » » » 4 » » $\frac{1}{2}$?

652. » » » » $\frac{8}{27}$ » » 3?

653. » » » » 125 » » -3?

Знайсьці x, калі:

654. $lg_x 32 = 5$

655. $lg_x 81 = 4$

656. $lg_x 729 = 6$

Разьвязаць наступныя раўнаньні:

657. $5^x = 5$ 658. $2^x = 64$

659. $9^x = 3$ 660. $10^x = \frac{1}{10}$

661.	Знайсьці	лёгарытм	ліку	2	пры аснове	2?
662.	»	»	»	4	» »	2?
663.	»	»	»	16	» »	2?
664.	»	»	»	81	» »	3?
665.	»	»	»	$\frac{1}{5}$	» »	$\frac{1}{5}$?
666.	»	»	»	$\frac{1}{25}$	» »	$\frac{1}{5}$?

667. $lg_5 125 = ?$

668. $lg_{13} 169 = ?$

Асноўныя тэорэмы тэорыі лёгарытмаў.

§ 80. I) *Лёгарытм здабытку ёсьць роўны суме лёгарытмаў сумножнікаў.*

Довад.

Хай:

$$lg_a n_1 = x_1;\ lg_a n_2 = x_2;\ lg_a n_3 = x_3\ ,$$

$$\text{г. ё. } n_1 = a^{x_1};\ n_2 = a^{x_2};\ n_3 = a^{x_3}$$

Памнажаючы апошнія тры роўнасьці бакамі, атрымаем:

$$n_1 . n_2 . n_3 = a^{x_1 + x_2 + x_3}\ ,$$

адкуль:

$$lg_a \left(n_1 . n_2 . n_3\right) = x_1 + x_2 + x_3 = lg_a n_1 + lg_a n_2 + lg_a n_3 .$$

II) *Лёгарытм дзелі двох лікаў ёсьць роўны розьніцы лёгарытмаў гэтых лікаў.*

Довад.

Хай:

$$lg_a n_1 = x_1\ ;\ lg_a n_2 = x_2\ ,$$

тады:

$$n_1 = a^{x_1}\ ;\ n_2 = a^{x_2}$$

Дзелячы апошнія дзьве роўнасьці бакамі, атрымаем:

$$\frac{n_1}{n_2} = a^{x_1 - x_2}\ ,$$

адкуль:

$$lg_a \frac{n_1}{n_2} = x_1 - x_2 = lg_a n_1 - lg_a n_2 .$$

Калі дзеліва ёсьць роўнае 1, тады атрымаем:

$$lg_a \frac{1}{n} = lg_a 1 - lg_a n = 0 - lg_a n = - lg_a n,$$

г.ё., *лёгарытм адваротнасьці ліку ёсьць роўны лёгарытму гэтага ліку з супраціўным знакам:* напрыклад:

$$lg_2 32 = - lg_2 \frac{1}{32}$$

III. *Лёгарытм ступені ёсьць роўны паказальніку ступені, памножанаму на лёгарытм ліку.*

Довад.

Хай $lg_a n = x,$

тады: $n = a^x.$

Падносячы ў ступень p абодва бакі апошняе роўнасьці,

атрымаем: $n^p = a^{px},$

адкуль:

$$lg_a n^p = px = p.lg_a n,$$ што й трэба было давесьці.

IV. *Лёгарытм корня ёсьць роўны лёгарытму падкарэннага ліку, падзеленаму на паказальнік корня.*

Довад.

Хай: $lg_a n = x,$

тады: $n = a^x.$

Дабываючы корань p ступені з абодвых бакоў гэтай роўнасьці, атрымаем:

$$\sqrt[p]{n} = \sqrt[p]{a^x}, \text{ ці } \sqrt[p]{n} = a^{\frac{x}{p}},$$

адкуль: $$lg_a \sqrt[p]{n} = \frac{x}{p} = \frac{lg_a n}{p}$$

V. *Калі рад дадатных лікаў творыць геомэтрычную прогрэсію, то іх лёгарытмы твораць арытмэтычную прогрэсію.*

Довад.

Хай у геомэтрычнай прогрэсіі

$$\div\div a, aq, aq^2, aq^3 \ldots.$$

лікі a і q ёсьць дадатныя.

Знаходзячы лёгарытмы кожнага выразу гэтай прогрэсіі, атрымаем:

$$lg(a) = lga$$

$$lg(aq) = lga + lgq$$

$$lg(aq^2) = lga + 2lgq$$

$$lg(aq^3) = lga + 3lgq$$

Бачым, што рад лёгарытмаў выразаў данай прогрэсіі:

$$lga, lga+lgq, lga+2lgq, lga+3lgq, \ldots$$

творыць арытмэтычную прогрэсію, у якой першым выразам ёсьць lga, а розьніцай lgq.

Лёгарытмаваньне і потэнцыраваньне.

§ 81. Выведзеныя ў папярэднім параграфе тэорэмы маюць вялікае значэньне пры вылічэньнях за дапамогаю лёгарытмаў. Калі, напрыклад, маем выраз, у склад якога ўваходзяць лікі, зьвязаныя паміж сабой множаньнем, дзяленьнем, падняцьцем у ступень або дабываньнем корня, то можам лёгарытм гэтага выразу напісаць у відзе сумы, розьніцы, здабытку або дзелі лёгарытмаў лікаў, якія ўваходзяць у гэты выраз.

Такое *прадстаўленьне лёгарытму данага альгэбрычнага выразу ў відзе лёгарытмаў паасобных лікаў гэтага выразу называецца лёгарытмаваньнем выразу. Дзеяньне адваротнае*, *якое грунтуецца на знаходжаньні альгэбрычнага выразу, калі маем яго лёгарытм, выражаны праз лёгарытмы паасобных яго выразаў, называецца потэнцыраваньнем.*

ПРЫКЛАД I.

Пралёгарытмаваць выраз

$$N=\frac{3a^5b^2}{4c^3\sqrt[4]{d}}$$

Разьвязаньне.

$$lgN=lg(3a^5b^2)-lg(4c^3\sqrt[4]{d})=$$

$$=(lg3+lga^5+lgb^2)-(lg4+lgc^3+lg\sqrt[4]{d})=$$

$$=lg3+5lga+2lgb-lg4-3lgc-\frac{lgd}{4}.$$

Пры пэўнай практыцы, рэзультат лёгарытмаваньня знаходзім адразу, упісываючы да яго множнікі лічніка з дадатным знакам, а множнікі назоўніка з адмоўным знакам.

ПРЫКЛАД II.

Пралёгарытмаваць выраз

$$N=\frac{2a^4m^3\sqrt{x}}{15b^2\sqrt[3]{y^2}}$$

Разьвязаньне.

$$lgN=lg2+4lga+3lgm+\frac{lgx}{2}-lg15-2lgb-\frac{2lgy}{3}$$

ПРЫКЛАД III.

Спотэнцыраваць выраз

$$lgN=lg3+7lga+\frac{lgc}{2}-2lgb-2lgx.$$

Разьвязаньне.

$$lg\,N = lg\left(3a^7\sqrt{c}\right) - lg\left(b^2x^2\right) = lg\frac{3a^7\sqrt{c}}{b^2x^2},$$

адкуль
$$N = \frac{3a^7\sqrt{c}}{b^2x^2}$$

Задачы.

Выканаць лёгарытмаваньне наступных выразаў: *)

669. $2ab$

670. $5xy$

671. a^3b^2

672. $\frac{a^2}{b^3c^7}$

673. $\frac{(a-b)^2c}{(a+b)d}$

674. $5a^2b\sqrt[3]{c}$

675. $2b\sqrt{ac}$

676. $\sqrt[5]{\frac{3a^3b}{c^4}}$

677. $\sqrt[4]{\frac{a^3}{2b^2c}}$

678. $\frac{2ab^3}{c\sqrt{d}}$

679. $\frac{1}{a^n\sqrt{b}}$

680. $a^{2/3}b^{3/5}$

681. $\sqrt{2\sqrt{6\sqrt{15}}}$

682. $\sqrt[3]{\frac{a^2b}{\sqrt[5]{c^3}}}$

683. $\sqrt{\frac{15\sqrt{3\sqrt{5}}}{\sqrt[3]{25\sqrt{3}}}}$

Выканаць потэнцыраваньне наступных выразаў:

684. $lg\,x = lg\,7 - lg\,3 + lg\,2$

685. $lg\,x = 3\,lg\,5 + 2\,lg\,3$

686. $lg\,x = \frac{3}{5}lg\,11 - \frac{2}{7}lg\,5$

687. $lg\,x = 2lg\,13 - \frac{2}{5}\,lg\,2 - \frac{4}{3}lg\,7.$

---

*) Лёгарытмаваць, як мы ўжо бачылі, можам толькі здабытак, дзель, ступень або корань. З гэтае прычыны сумы і розьніцы не лёгарытмуем і бяром іх у дужкі. Напрыклад:

$$lg\frac{a}{b+x} = lg\,a - lg\,(b+x).$$

Уклад лёгарытмаў.

§ 82. Збор лёгарытмаў натуральных лікаў, вылічаных пры аднэй аснове, творыць *уклад (сыстэму) лёгарытмаў*. Існуюць два галоўныя уклады лёгарытмаў, якія ўжываюцца пры вылічэньнях, гэта: уклад *натуральных лёгарытмаў* і уклад *дзесятковых*, або *звычайных лёгарытмаў*.

Асновай натуральных лёгарытмаў ёсьць нявымерны лік, які абазначаем літарай e; лікавае значэньне яго ёсьць:

$$e = 2{,}7182818284...$$

Натуральныя лёгарытмы ўжываюцца пераважна ў вышэйшым аналізе пры тэорэтычных вылічэньнях.

Для практычных вылічэньняў карыстаемся дзесятковымі лёгарытмамі, вылічанымі пры аснове 10*). Дзесятковыя лёгарытмы вылічыў і ўлажыў у табліцы ангельскі матэматык Гэнрык Брігг (Henry Briggs, 1556—1630).

Уласьцівасьці дзесятковых лёгарытмаў.

§ 83. I. *Лёгарытм цэлай і дадатнай ступені 10 ёсьць роўны сталькім дадатным адзінкам, колькі нулёў заключае лік.*

І праўда:

$$lg\ 10 = 1$$
$$lg\ 100 = lg\ 10^2 = 2 lg\ 10 = 2.$$
$$lg\ 1000 = lg\ 10^3 = 3 lg\ 10 = 3.$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Наогул: $lg\ 10^m = m.$

II. *Лёгарытм дзесятковага дробу, які ёсьць цэлая і адмоўная ступень 10, раўняецца сталькім адмоўным адзінкам, колькі дроб мае цыфр пасьле коскі.*

І праўда:

$$lg\ 0{,}1 = lg\ 10^{-1} = -1$$
$$lg\ 0{,}01 = lg\ 10^{-2} = -2$$
$$lg\ 0{,}001 = lg\ 10^{-3} = -3$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Наогул: $lg\ 10^{-m} = -m$

III. *Лёгарытм цэлага ліку, які не выражаецца адзінкай з нулямі, ёсьць нявымерны лік.*

Довад.

Дапусьцім спачатку, што цэлы лік k, які ня выражаецца адзінкай з нулямі, мае цэлы лёгарытм m. Тады: $k = 10^m$, але правы бок гэтай роўнасьці ня можа быць роўны леваму, бо k ня ёсьць многакрацьцю ліку 10.

---

*) Гэтую аснову звычайна ня пішуць пры знаку lg.

Дапусьцім цяпер, што лік κ мае дробавы лёгарытм $\frac{p}{r}$, тады

$$\kappa = 10^{\frac{p}{r}}, \text{ або } \quad \kappa^r = 10^p.$$

Ізноў правы бок гэтай роўнасьці ня можа быць роўным леваму, бо κ ня ёсьць многакрацьцю ліку 10.

З атрыманай недарэчнасьці бачым, што дапушчэньне нашае было памылковым, і лёгарытм ліку κ ня можа быць выражаны ані цэлым, ані дробавым лікам, значыцца, ёсьць нявымерны.

Нявымерныя лёгарытмы звычайна выражаем пры помачы дзесятковых дробаў, з пэўнай ступеньню прыбліжэньня.

Кожны лёгарытм складаецца з дзьвёх частак: цэлай і дробавай. Цэлая частка лёгарытму называецца *азнакай* лёгарытму, а дробавая частка—мантысай. Так, напрыклад, лёгарытм ліку 528 ёсьць 2,72263; цэлую частку гэтага лёгарытму, а мянавіта 2, называем азнакай, а дробавую частку 72263—мантысай.

IV. *Азнака лёгарытму ліку, большага за адзінку, ёсьць на 1 меншая за колькасьць цыфр цэлай часткі гэтага ліку.*

Довад.

З прычыны таго, што

$$lg\ 1 = 0, \text{ а } lg\ 10 = 1,$$

значыцца лёгарытмы лікаў, якія заключаюцца паміж 1 і 10, ёсьць большыя за 0, але меншыя ад 1, г. ё. маюць азнаку 0.

Лёгарытмы лікаў, якія заключаюцца паміж 10 і 100, ёсьць большыя за 1, але меншыя ад 2,—значыцца маюць азнаку 1.

У падобны спосаб можам давесьці, што лёгарытмы лікаў, якія заключаюцца паміж 100 і 1000, маюць азнаку 2; і, наогул, лік, у якога цэлая частка складаецца з m цыфраў, мае лёгарытм з азнакай $(m-1)$.

Так, напрыклад, лёгарытм ліку 5 мае азнаку 0, лёгарытм 645,3 мае азнаку 2, лёгарытм 7343 мае азнаку 3 і г. д.

V. *Калі лік памножым на 10^m (m—цэлы і дадатны), азнака яго лёгарытму павялічыцца на m адзінак; калі лік падзелім на 10^m (m—цэлы і дадатны), азнака лёгарытму зменшыцца на m адзінак. Мантыса-ж у абодвух выпадках ня зьменіцца.*

І праўда, калі даны лік κ памножым на 10^m, то

$$lg\ (\kappa \cdot 10^m) = lg\ \kappa + lg\ 10^m = lg\ \kappa + m.$$

З прычыны таго, што m ёсьць цэлы і дадатны лік, значыцца пры складаньні яго з $lg\ \kappa$ павялічваем азнаку лёгарытму κ на m адзінак, дробавая-ж частка, г. ё. мантыса, ад гэтага не зьмяняецца.

Грунтуючыся на даведзеным правіле, можам сказаць, што:

калі $lg\ 347 = 2{,}54033$,

то $lg\ 3470 = 3{,}54033$

$lg\ 34700 = 4{,}54033$ і г. д.,

а таксама:

$$lg\ 34{,}7 = 1{,}54033,$$
$$lg\ 3{,}47 = 0{,}54033,$$
$$lg\ 0{,}347 = \overline{1}{,}54033,$$
$$lg\ 0{,}0347 = \overline{2}{,}54033 \text{ і г. д.}$$

У двох апошніх выпадках мантыса ёсьць дадатная, а азнака—адмоўная; дзеля гэтага заместа

$$-1+0{,}54033, \text{ або } -2+0{,}54033$$

пішам знак — угары над азнакай, каб паказаць, што знак гэты належыць толькі да азнакі.

З прыведзеных прыкладаў бачым, што:

VI. *Азнака лёгарытму дзесятковага дробу заключае столькі адмоўных адзінак, колькі нулёў мае дроб на пачатку (уключна з нулём перад коскай).*

Табліцы лёгарытмаў. Знаходжаньне лёгарытму данага ліку.

§ 84. Лёгарытмы Брігга былі вылічаны з 14 дзесятковымі цыфрамі. Аднак-жа пры звычайных вылічэньнях элемэнтарнай матэматыкі выстарчаюць лёгарытмы пяцёх і нават чатырохцыфровыя.

Апішам пяцёхцыфровыя табліцы лёгарытмаў Пржэвальскага.

Першая старонка табліц (у кніжцы 29-ая) заключае лёгарытмы ад 1 да 99 (уключна). У слупкох пад літарай N знаходзім лікі; пад словам *Log*—адказваючыя ім лёгарытмы (мантысы).

Наступныя старонкі (30—59 уключна) заключаюць лёгарытмы лікаў ад 100 да 10009 (уласна кажучы, толькі мантысы, бо азнаку кожнага лёгарытму можам знайсьці без табліц). На кожнай з гэтых старонак у першым слупку (пад літарай N) знаходзяцца тры першыя цыфры данага ліку, чацьвертую цыфру ліку шукаем у першым радку (цыфры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9).

§ 85. Калі-б мы, напрыклад, хацелі знайсьці мантысу лёгарытму ліку 4754, то шукаем на стар. 42 пад літарай N радок з трохцыфровым лікам 475 і старчавы слупок з цыфрай 4 угары. На перасячэньні гэтага радка са слупком знаходзім апошнія тры цыфры мантысы 706, а першыя дзьве 67 знаходзім у слупку пад нулём крыху вышэй. Значыцца, уся мантыса нашага ліку ёсьць 67706. А дзеля таго, што лік складаецца з чатырох цэлых цыфр, дык азнака яго лёгарытму будзе 3, і ўвесь лёгарытм будзе:

$$lg\ 4754=3{,}67706.$$

Маючы лёгарытм ліку 4754, можам знайсьці лёгарытмы лікаў у 10, 100, 1000 і г. д. разоў большых або меншых, адпаведна павялічваючы або зьмяншаючы азнаку. Такім чынам:

$$lg\ 47{,}54=1{,}67706,$$
$$lg\ 0{,}4754=\overline{1}{,}67706,$$
$$lg\ 475400=5{,}67706 \text{ і г. д.}$$

У падобны спосаб знойдзем, што:

$$lg\ 3227=3{,}50880,$$
$$lg\ 5{,}732=0{,}75831,$$
$$lg\ 873=2{,}94101.$$

Пры вылічэньні лёгарытму 7946 бачым, што поплеч з трома апошнімі цыфрамі мантысы *015 ёсьць зорачка; гэта значыць, што першыя дзьве цыфры трэба ўзяць з наступнага раду, г. ё. 90. Такім чынам

$$lg\ 7946=3{,}90015.$$

Дапусьцім цяпер, што пры даным ліку 4754 маем яшчэ адну дзесятковую цыфру, напрыклад, 6 і хочам знайсьці lg 4754,6. Дзеля таго, што лічнік складаецца з пяцёх цыфраў,—лёгарытму яго ў табліцах няма. З гэтае прычыны выпісваем з табліц лёгарытм ліку 4754, а мянавіта 3,67706 і дадаем да яго прырост лёгарытму, адказваючы прыросту ліку 0,6. Каб знайсьці гэты прырост, бярэм розьніцу паміж мантысай лёгарытму 4755 і мантысай лёгарытму 4754, г. ё. 67715—67706=9. (Заўважым, што розьніца паміж мантысамі суседніх лёгарытмаў называецца таблічнай розьніцай.) Пераглядваючы табліцы, лёгка можам заўважыць, што, пры павялічваньні лікаў на адзінку таблічная розьніца зьмяняецца вельмі нязначна; дзеля гэтага без вялікай памылкі можам сказаць, што роўным прыростам лікаў адказваюць роўныя прыросты лёгарытмаў, або інакш—*прыросты лёгарытмаў пропорцыянальны прыростам лікаў*.

Такім чынам, у нашым прыкладзе прырост лёгарытму, адказваючы прыросту ліку на 1, ёсьць роўны 9 адзінкам пятага месца мантысы. Каб знайсьці прырост лёгарытму, адказваючы 0,6 нашага ліку, абазначым яго праз x; тады шуканы прырост x будзе ў столькі разоў менш ад 9, у колькі разоў 0,6 ёсьць менш ад 1, г. ё.

$$\frac{x}{9}=\frac{0,6}{1}, \quad \text{адкуль} \quad x=9\,.\,0,6=5,4$$

З прычыны таго, што мы множылі 0,6 на 9 адзінак пятага месца мантысы, значыцца атрымалі 5 адзінак пятага і 4 адзінкі шостага месца мантысы, г. ё. 0,000054. Гэты прырост дадаем да 3,67706; атрымаем:

$$lg\ 4754,6=3,67706+0,000054=3,67711.$$

Шостую цыфру мантысы 4, як лішнюю, адкідаем; калі-б шостая цыфра была больш ад 5, то папярэднюю трэба было-б павялічыць на адзінку.

З дадзенага прыкладу бачым, што для знаходжаньня прыросту лёгарытму трэба таблічную розьніцу (у нашым прыкладзе 0,00009) памножыць на пятую цыфру ліку (у нашым прыкладзе 6). Каб зрабіць больш лёгкім гэтае дзеяньне, у табліцах з правага боку знаходзяцца таблічкі пад літарамі P. P. (partes proportionales,—што значыць „пропорцыянальныя часткі“), у якіх маем гатовыя рэзультаты множаньня. У нашым прыкладзе таблічная розьніца ёсьць 9 стотысячных, а прырост ліку 0,6. Дзякуючы гэтаму, на стар. 42 у слупку P. P. пад лікам 9 шукаем з левага боку цыфру 6; поплеч з ёй знаходзім рэзультат множаньня 9 на 0,6, а мянавіта 5,4, які трэба дадаць да адпаведніка цыфр мантысы.

Дзеяньне ўкладаем у наступны спосаб:

$$\begin{array}{rcl} 4754, & — & 67706 \\ 6 & & 5,4 \\ \hline lg\ 4754,6 & = & 3,67711\ 4=3,67711 \end{array}$$

Вылічаючы ў падобны спосаб лёгарытм ліку 72683, бачым, што азнака яго ёсьць 4; знаходзім мантысу, адказваючую чатырохцыфроваму ліку 7268, а мянавіта 86141. Таблічная розьніца паміж гэтай мантысай і наступнай ёсьць 6,—значыцца, у слупку P. P. пад лікам 6 шукаем цыфру 3 і побач з ёй знаходзім лік 1,8, які і дадаем да апошніх цыфр мантысы, г. ё.

$$\begin{array}{rcl} 7268 & — & 86141 \\ 3 & & 1,8 \\ \hline lg\ 72683 & = & 4,86142\ 8=4,81643. \end{array}$$

У гэтым прыкладзе мы адкінулі шостую цыфру мантысы 8, але затое павялічылі пятую цыфру з 2 на 3.

Знойдзем яшчэ лёгарытм шасьцёхцыфровага ліку, а мянавіта 227,654 Азнака лёгарытму гэтага ліку 2, мантыса 4-х першых цыфр ёсьць 35717, таблічная розьніца 19. Дзеля гэтага:

$$\begin{array}{rcl} 2276 & — & 35717 \\ 5 & & 95 \\ 4 & & 76 \\ \hline \end{array}$$
$$lg\ 227{,}654=2{,}3572726=2{,}35727$$

Пры знаходжаньні лёгарытму ліку, які складаецца больш, як з 6, цыфр, апошнія цыфры (пачынаючы ад 7-ай), як ня маючыя ўплыву на мантысу, адкідваем.

Знаходжаньне ліку паводле яго лёгарытму.

§ 86. Пры знаходжаньні ліку паводле яго лёгарытму могуць быць два выпадкі:

I) *Мантыса данага лёгарытму знаходзіцца ў таблiцах.*

Тады, не зварочваючы ўвагі на азнаку лёгарытму, знаходзім у табліцах лік, адказваючы мантысе і аддзяляем у ім коскай колькасьць цэлых цыфр, якія адказваюць азнацы данага лёгарытму. Напрыклад, калі лёгарытм шуканага ліку ёсьць 1,76238, то на стар. 45 знаходзім лік 5768, адказваючы данай мантысе; а дзеля таго, што азнака лёгарытму ёсьць 1, значыцца ў знойдзеным ліку аддзяляем коскай 2 першыя цыфры; атрымаем 57,86.

Такім чынам:

$$Nlg\ 1{,}76238=57{,}86.$$

(Nlg, які чытаем numerus logarithmi, абазначае лік, які адказвае лёгарытму).

У падобны спосаб знойдзем:

$$Nlg\ \overline{1}{,}29732=0{,}1983.$$

II) *Мантысы данага лёгарытму няма ў табліцах.*

У гэтым выпадку для прыкладу знойдзем лік, які адказвае лёгарытму 3,58562. Бачым, што ў табліцах на стар. 39 мантысе 58557 адказвае лік 3851, а мантысе наступнага лёгарытму адказвае лік 3852. Калі нам ня ходзіць аб вялікай дакладнасьці, то можам узяць або першы лік (з недахватам), або другі (з перавышкай). Пры больш дакладных вылічэньнях атрымаем 3851 з дробам. Каб знайсьці гэты дроб, аднімаем ад данага лёгарытму 3,58562 лёгарытм меншага ліку 3,58557; атрымаем розьніцу 0,00005. Гэтая розьніца лёгарытмаў адказвае прыросту шуканага ліку, а з прычыны таго, што прырост суседніх таблічных лёгарытмаў у даным выпадку ёсьць

$$3{,}58569—3{,}58557=0{,}00012 \text{ (таблічная розьніца),}$$

значыцца, прырост ліку ёсьць у столькі разоў меншы за 1, у колькі разоў 0,00005 ёсьць менш за 0,00012. Калі прырост ліку абазначым праз x, то:

$$\frac{x}{1}=\frac{0{,}00005}{0{,}00012},$$

адкуль:

$$x=\frac{5}{12}=0{,}41......$$

Знойдзены дроб дапісваем да ліку; атрымаем:

$$\mathrm{N}lg\ 3{,}58562=3851{,}41......$$

Маючы лік, адказваючы данаму лёгарытму, можам знайсьці лік, адказваючы лёгарытму з данай мантысай, але з іншай азнакай; напрыклад, можам напісаць:

$$\mathrm{N}lg\ 5{,}58562=385141$$

$$\mathrm{N}lg\ \overline{2}{,}58562=0{,}0385141.....\ \text{і г. д.}$$

Такім чынам, каб знайсьці лік, адказваючы лёгарытму, мантысы якога няма ў табліцах, выпісваем лік, адказваючы найбліжэйшай меншай мантысе; у гэты спосаб атрымоўваем першыя чатыры цыфры шуканага ліку; наступныя цыфры знойдзем, падзяліўшы розьніцу паміж даным лёгарытмам і меншым на таблічную розьніцу. Урэшце, ставім на адпаведным месцы ў атрыманым ліку коску.

Прырост ліку можам знайсьці таксама і пры помачы таблічкі Р. Р. У папярэднім прыкладзе, каб знайсьці прырост ліку, у слупку пад лікам 12 шукаем з *правага* боку лік, найбольш блізкі да 5; такім лікам ёсьць 4,8; а поплеч з ім з левага боку знаходзім 4; адсюль вынікае, што першая цыфра прыросту ліку ёсьць 4. Вылічэньне ўкладаем у наступны спосаб:

$$\begin{array}{lcr} \mathrm{N}lg\ 3{,}58557 & — & 3851 \\ \quad\quad\quad\ 5 & & 4 \\ \hline \mathrm{N}lg\ 3{,}58562 & = & 3851{,}4\ ..... \end{array}$$

Знойдзем яшчэ лік, адказваючы лёгарытму $\overline{1}{,}59478$.

$$\mathrm{N}lg\ \overline{1}{,}59472=0{,}3933.$$

Розьніца паміж $\overline{1}{,}59478$ і $\overline{1}{,}59472=6$, таблічная розьніца$=11$, адсюль прырост ліку

$$x=\frac{6}{11}=0{,}54......\ \text{і, значыцца:}$$

$$\mathrm{N}lg\ \overline{1}{,}59478=0{,}393354......$$

Гэтае-ж вылічэньне, зробленае пры помачы таблічкі Р. Р., укладаем так

$$\begin{array}{lcr} \mathrm{N}lg\ \overline{1}{,}59472 & — & 0{,}3933 \\ \quad\quad\quad\ 55 & & 5 \\ \quad\quad\quad\ 44 & & 4 \\ \hline \mathrm{N}lg\ \overline{1}{,}59478 & = & 0{,}393354.... \end{array}$$

З а д а ч ы.

Знайсьці лёгарытмы наступных лікаў:

688. 8. 689. 141.

690. 420. 691. 3907.

692. 900,1. 693. 0,0028.

694. 0,1008. 695. 0,00005.

696. 2174,5. 697. 1445,7.

698. 2169,5. 699. 6,2853.

700. 0,73938. 701. 0,054294.

702. 631,074. 703. 2,79556.

704. 0,00237158.

Знайсьці лікі, якія адказваюць наступным лёгарытмам:

705. 3,16227. 706. 2,93318.

707. 0,41078. 708. 1,60065.

709. $\overline{2},75686$. 710. $\overline{3},23528$.

711. $\overline{5},14613$. 712. 3,57686.

713. 3,16340. 714. 2,40359.

715. 4,49823. 716. 2,83882.

717. $\overline{1},50060$. 718. $\overline{4},25100$.

719. 7,16105.

Дзеяньні над лёгарытмамі.

§ 87. Усе дзеяньні над лёгарытмамі выконываем на аснове правіл дзеяньняў над дзесятковымі дробамі. Асаблівую ўвагу толькі трэба зьвярнуць на дзеяньні, калі азнака лёгарытму ёсьць адмоўная.

Прыклады на *складаньне і адніманьне* лёгарытмаў.

I)
$$\begin{array}{r} 2,30458 \\ +\,\overline{3},64172 \\ \overline{2},86035 \\ \hline \overline{2},80665 \end{array}$$

II)
$$\begin{array}{r} 1,58044 \\ -\;3,72563 \\ \hline \overline{3},85481 \end{array}$$

III)
$$\begin{array}{r} \overline{2},37169 \\ -\;1,50921 \\ \hline \overline{4},86248 \end{array}$$

IV)
$$\begin{array}{r} 0,39576 \\ -\;\overline{3},52898 \\ \hline 2,86678 \end{array}$$

V)
$$\begin{array}{r} \overline{2},04934 \\ -\;\overline{4},57816 \\ \hline 1,47118 \end{array}$$

У апошніх двох прыкладах маем аднімнікі з адмоўнымі азнакамі; з гэтае прычыны пры адніманьні лёгарытмаў трэба да азнакі зьменшыва *дадаць* абсолютнае значэньне азнакі аднімніка.

§ 88. Часта для палягчэньня вылічэньняў адніманьне лёгарытму данага ліку замяняем на складаньне яго *колёгарытмаў*.

Каб знайсьці колёгарытм, дадаем да азнакі лёгарытму $+1$ *і зьмяняем знак атрыманай сумы на супраціўны, а для атрыманьня мантысы колёгарытму бярэм яе дапаўненьне да* 1 (г. ё. усе цыфры мантысы аднімаем ад 9, апрача апошняй, якую аднімаем ад 10).

Так, напрыклад:

калі $lg\,x = 3{,}73682$, то $colg\,x = \overline{4}{,}26318$,

» $lg\,x = 0{,}26971$, то $colg\,x = \overline{1}{,}73029$,

» $lg\,x = \overline{1}{,}35046$, то $colg\,x = 0{,}64954$,

» $lg\,x = \overline{3}{,}27980$, то $colg\,x = 2{,}72020$.

Замяняючы адніманьне лёгарытмаў складаньнем колёгарытмаў у прыкладах (2, 3, 4 і 5), атрымаем, разумеецца, тыя самыя рэзультаты:

$$+\begin{array}{r}1{,}58044\\ \overline{4}{,}27437\\ \hline \overline{3}{,}85481\end{array}\qquad +\begin{array}{r}\overline{2}{,}37169\\ \overline{2}{,}49079\\ \hline \overline{4}{,}86248\end{array}\qquad +\begin{array}{r}0{,}39576\\ 2{,}47102\\ \hline 2{,}86678\end{array}\qquad +\begin{array}{r}\overline{2}{,}04934\\ 3{,}42184\\ \hline 1{,}47118\end{array}$$

Пры стасаваньні колёгарытмаў, вылічэньні выконваюцца куды лягчэй асабліва ў тых выпадках, калі маем складаны выраз, у якім некалькі лёгарытмаў трэба скласьці і некалька адняць; напрыклад, калі хочам вылічыць

$$1{,}62049 - 2{,}05316 + \overline{2}{,}49180 - \overline{1}{,}31775 - 0{,}51987,$$

то да першага дадаем трэці, потым складаем лёгарытмы: другі, чацьверты і пяты, і, урэшце, ад першай сумы аднімаем другую, г. ё.:

$$+\begin{array}{r}1{,}62049\\ \overline{2}{,}49180\\ \hline 0{,}11229\end{array}\qquad +\begin{array}{r}2{,}05316\\ \overline{1}{,}31775\\ 0{,}51987\\ \hline 1{,}89078\end{array}\qquad -\begin{array}{r}0{,}11229\\ 1{,}89078\\ \hline \overline{2}{,}22151\end{array}$$

Вылічаючы-ж гэты прыклад з прыстасаваньнем колёгарытмаў, рэзультат знойдзем адразу і куды прасьцей:

$$+\begin{array}{r}1{,}62049\\ \overline{3}{,}94684\\ \overline{2}{,}49180\\ 0{,}68225\\ \overline{1}{,}48013\\ \hline \overline{2}{,}22151\end{array}$$

§ 89. ***Множаньне*** лёгарытму, азнака якога ёсьць дадатны лік, выконываем, як звычайнае множаньне дзесятковага дробу, пакідаючы ў здабытку заўсёды толькі пяць дзесятковых цыфр.

$$\times\begin{array}{r}0{,}30592\\ 4\\ \hline 1{,}22368\end{array}\qquad \times\begin{array}{r}1{,}24278\\ 4{,}2\\ \hline 248556\\ 497112\\ \hline 5{,}219676 = 5{,}21968\end{array}$$

Калі-ж азнака адмоўная, множым асобна азнаку і асобна мантысу, а потым бярэм суму здабыткаў; напрыклад:

$$\overline{2},58426\,.\,5=\overline{10}+2,92130=\overline{8},92130, \text{ або}$$

$$\begin{array}{r} \overline{1},62857 \\ \times\quad 3 \\ \hline \overline{2},88571 \end{array}$$

Калі маем памножыць лёгарытм з адмоўнай азнакай на дробавы, або адмоўны множнік, то перарабляем лёгарытм так, каб цэлая і дробавая часткі былі адмоўныя, а посьле множаньня ізноў варочаемся да звычайнага віду (у якім мантыса павінна быць дадатнай).

Напрыклад:

I. $\overline{2},38421\,.\,0,75=(-2+0,38421)\,.\,0,75=-1,61579\,.\,0,75=$
$=-1,21184=-1-0,21184=\overline{2},78816.$

або II. $\overline{1},39645\,.\,(-4)=(-1+0,39645)\,.\,(-4)=(-0,60355)\,.\,(-4)=$
$=2,41420.$

§ 90. *Дзяленьне* лёгарытму з дадатнай азнакай, або роўнай нулю, ня розьніцца ад звычайнага дзяленьня дзесятковых дробаў.

Калі азнака адмоўная і дзеліцца без астачы на дзельнік, то дзелім асобна азнаку і асобна мантысу, напрыклад:

$$\overline{4},58462:2=\overline{2},29231.$$

$$\begin{array}{l|l} \overline{6}.40871 & 3 \\ \cline{2-2} \underline{10} & \overline{2},13624 \\ \quad 18 & \\ \quad\underline{\;\;7} & \\ \quad\;\; 11 & \end{array}$$

Калі-ж адмоўная азнака ня дзеліцца без астачы на дзельнік, то дадаем да яе столькі адмоўных адзінак, каб яна магла падзяліцца, а да мантысы дадаем столькі-ж адзінак дадатных, посьле чаго выконываем дзяленьне асобна азнакі і асобна мантысы.

Напрыклад:

$$\text{I.}\quad \begin{array}{l|l} \overline{2},73152:3=\overline{3}+1,73152 & 3 \\ \cline{2-2} \qquad\qquad\qquad\quad \underline{23} & \overline{1},57717 \\ \qquad\qquad\qquad\quad\;\; \underline{21} & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\;\; \underline{5} & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\;\; 22 & \end{array}$$

$$\text{II.}\quad \begin{array}{l|l} \overline{5},72018:4=\overline{8}+3,72018 & 4 \\ \cline{2-2} \qquad\qquad\qquad\quad \underline{12} & \overline{2},93004 \\ \qquad\qquad\qquad\quad\;\; 018 & \end{array}$$

Калі, урэшце, маем падзяліць лёгарытм з адмоўнай азнакай на дробавы або адмоўны лік, то спачатку перарабляем увесь лёгарытм на адмоўны, напрыклад:

$$\overline{2},46103:(-3)=(-2+0,46103):(-3)=(-1,53897):(-3)=0,51299.$$

§ 91. Зробім некалькі прыкладаў на лёгарытмічныя вылічэньні.

ПРЫКЛАД I.

$$x=3{,}1584^4\,.\,0{,}8642^3\,.\,\sqrt[5]{475}$$

Разьвязаньне.

$$lg\;x=4lg\,3{,}1584+3lg\,0{,}8642+\tfrac{1}{5}lg\,475.$$

Канчатковыя лёгарытмы

$4\,lg\,3{,}1584=1{,}99788$

$3\,lg\,0{,}8642=\bar{1}{,}80983$

$\frac{1}{5}\,lg\,475=0{,}53534$

$lg\;x=2{,}34305$

$2{,}34301 — 2203$
$\quad 4 \qquad 2$

$N lg\,2{,}34305=220{,}32$

$x=220{,}32$

Дапаможныя дзеяньні

$lg\,3158 — 49941$
$\quad 4 \qquad 56$

$lg\,3{,}1584=0{,}49947$
$\times\,4$

$4\,lg\,3{,}1584=1{,}99788$

$lg\,0{,}8642=\bar{1}{,}93661$
$\times\,3$

$3\,lg\,0{,}8642=\bar{1}{,}80983$

$\frac{1}{5}\;lg\;475=2{,}67669:5=0{,}53534$

ПРЫКЛАД II.

$$x=\frac{0{,}724^2\,.\,\sqrt[3]{25627}}{2{,}38^5\,.\,\sqrt[4]{0{,}365}}$$

Лёгарытмуем гэты выраз (з уводам колёгарытмаў):

$$lg\,x=2\,lg\,0{,}724+\frac{1}{3}\,lg\,25627+5\,colg\,2{,}38+\frac{1}{4}\,colg\,0{,}365.$$

$2\,lg\,0{,}724=\bar{1}{,}71948$

$\frac{1}{3}\,lg\,25627=1{,}46957$

$5\,colg\,2{,}38=\bar{2}{,}11710$

$\frac{1}{4}\,colg\,0{,}365=0{,}10943$

$lg\,x=\bar{1}{,}41558$

$41547 — 2603$
$\quad 102 \qquad 6$

$N lg\,\bar{1}{,}41557=0{,}26036$

$x=0{,}26036.$

$lg\,0{,}724=\bar{1}{,}85974$
$\quad 2$

$2\,lg\,0{,}724=\bar{1}{,}71948$

$lg\,2562 — 40858$
$\quad 7 \qquad 119$

$lg\,25627=4{,}40870 \mid 3$ — $1{,}46957$
14
20
28
17
20

$lg\,2{,}38=0{,}37658$

$colg\,2{,}38=\bar{1}{,}62342$
$\quad 5$

$5\,colg\,2{,}38=\bar{2}{,}11710$

$lg\,0{,}365=\bar{1}{,}56229$

$colg\,0{,}365=0{,}43771 \mid 4$ — $0{,}10943$
37
17
11

ПРЫКЛАД III.

$$x=-\sqrt[3]{\frac{0{,}96415^2}{1{,}048^4 . \sqrt{0{,}0024}}}$$

У даным прыкладзе маем лёгарытмаваць адмоўны лік. Дзеля гэтага зьменім знакі абодвух бакох роўнасьці на супраціўныя; атрымаем тады:

$$-x=\sqrt[3]{\frac{0{,}96415^2}{1{,}048^4 \sqrt{0{,}0024.}}}$$

Цяпер ужо можам лёгарытмаваць абодва бакі, бо ў даным прыкладзе $-x$ выражаецца дадатнай велічынёй, а значыцца:

$$lg(-x)=lg\sqrt[3]{\frac{0{,}96415^2}{1{,}048^4 \sqrt{0{,}0024}}}=lg\frac{\sqrt[3]{0{,}96415^2}}{\sqrt[3]{1{,}048^4} . \sqrt[6]{0{,}0024}}=$$

$$=\frac{2}{3} lg\, 0{,}96415+\frac{4}{3} colg\, 1{,}048+\frac{1}{6} colg\, 0{,}0024.$$

$$\frac{2}{3} lg\, 0{,}96415=\bar{1}{,}98943$$
$$\frac{4}{3} colg\, 1{,}048=\bar{1}{,}97285$$
$$\frac{1}{6} colg\, 0{,}0024=0{,}43663$$
$$lg(-x)=0{,}39891$$

39881 — 2505
102 6

$$N lg\, 0{,}39891=2{,}5056$$

$$-x=2{,}5056$$
$$x=-2{,}5056$$

lg 9641 98412
5 25

$$lg\, 0{,}96415=\bar{1}{,}98414$$
2
$$\bar{1}{,}96828$$

$$\bar{1}{,}96828:3=(\bar{3}+2{,}96828):3=$$
$$=\bar{1}{,}98943$$
$$lg\, 1{,}048=0{,}02036$$
$$colg\, 1{,}048=\bar{1}{,}97964$$
4
$$\bar{1}{,}91856$$

$$\bar{1}{,}91856:3=(\bar{3}+2{,}91856):3=$$
$$=\bar{1}{,}97285$$
$$lg\, 0{,}0024=\bar{3}{,}38021$$
$$colg\, 0{,}0024=2{,}61979$$
$$1/_6\, colg\, 0{,}0024=0{,}43663$$

ПРЫКЛАД IV.

$$x=\frac{\sqrt[5]{4645}+0{,}875^3}{2{,}8}.$$

У лічніку маем суму; выраз, значыцца, ня ёсьць лёгарытмічны; дзеля гэтага вылічаем яго часткамі, абазначыўшы першы складнік лічніка $\sqrt[5]{4645}$ праз y, а другі складнік $0{,}875^3$ праз z.

Тады:

$$v=\sqrt[5]{4645}\,;\; lg\, y=\frac{1}{5}\; lg\, 4645$$

$$lg\ 4645 = 3{,}66699;\ \frac{1}{5}\ lg\ 4645 = 0{,}73340$$

$$\begin{array}{l} 73336 \ — \ 5\,412 \\ \quad\ 40 \qquad\quad 5 \\ \hline N\,lg\,0{,}73340 = 5{,}4125 \end{array}$$

$$y = 5{,}4125$$

$$z = 0{,}875^3;\quad lg\ z = 3lg\ 0{,}875\ ;\ lg\ 0{,}875 = \overline{1}{,}94201;$$

$$3\ lg\ 0{,}875 = \overline{1}{,}82603.$$

$$\begin{array}{l} 82601 \ — \ 6699 \\ \quad\ 18 \qquad\quad 3 \\ \hline N\,lg\ \overline{1}{,}82603 = 0{,}66993 \end{array}$$

$$z = 0{,}66993$$

З прычыны таго, што $y = 5{,}4125$ і $z = 0{,}66993$, значыцца

$$y + z = 5{,}4125 + 0{,}66993 = 6{,}08243.$$

Дзеля гэтага:

$$x = \frac{6{,}08243}{2{,}8}$$

Гэтае апошняе дзеяньне можам выканаць пры помачы лёгарытмаў; у даным выпадку аднак-жа спосаб звычанага дзяленьня будзе і карацейшым і больш дакладным. А мянавіта:

$$6{,}08243 : 2{,}8 = 2{,}1723.$$

З а д а ч ы.

Вылічыць пры помачы лёгарытмічных табліц:

720. $394 . 81$

721. $3{,}4097 . 0{,}08833$

722. $8{,}7406 . 0{,}003976 . 0{,}97485.$

723. $\frac{8{,}759}{0{,}05764}$

724. $\frac{70368 . 0{,}000764}{983{,}745}$

725. $0{,}78765^6$

726. $\frac{61^3}{17^4}$

727. $\left(\frac{515}{713}\right)^4$

728. $\sqrt[9]{76245}$

729. $\sqrt[4]{0{,}2539}$

730. $9{,}28 \cdot \sqrt[4]{0{,}00394}$

731. $\sqrt[10]{10^7}$

732. $0{,}97^2 . \sqrt[3]{0{,}0069^5}$

733. $\sqrt[3]{8{,}25^2 . 9{,}37^4}$

734. $\sqrt[5]{\frac{764}{931}}$

735. $\sqrt{\left(\frac{214}{719}\right)^3}$

736. $\left(\sqrt[3]{29}.\sqrt[4]{31}.\sqrt[5]{33}\right)^6$

737. $\sqrt[3]{175\,.\sqrt{7{,}4295}}$

738. $92{,}78^{5/6}.87{,}35^{6/7}$

39. $(0{,}0009)^{0{,}0009}$

740. $\sqrt{145{,}27^2-124{,}49^2}$

741. $\sqrt[9]{\frac{8}{7}\sqrt[6]{54321}}$

742. $\dfrac{5076.\sqrt{0{,}007109}}{9384.\sqrt[3]{0{,}0005318}}$

743. $\dfrac{\sqrt[7]{36926{,}5^3}\,.\,\sqrt[5]{2629}}{\sqrt[3]{6258{,}96^2}}$

744. $\dfrac{0{,}0875}{9{,}8304}\sqrt{\dfrac{78}{0{,}007615}}$

745. $\sqrt[3]{\dfrac{413{,}9.\sqrt{0{,}5127}}{372\,.\,9{,}046}}$

746. $\sqrt[4]{\dfrac{0{,}753.\sqrt{115{,}15^3}}{1{,}11\,.\sqrt[5]{0{,}08833^2}}}$

747. $\sqrt[4]{\dfrac{9{,}4792}{38{,}56}\sqrt[5]{\dfrac{56{,}284^2}{17{,}396^3}}}$

748. $\sqrt[10]{\dfrac{15+\sqrt{4419567}}{541-\sqrt[8]{18295}}}$

749. $\sqrt[10]{\dfrac{27+3\sqrt[20]{1{,}4762}}{\sqrt[5]{11}}}$

Паказальнікавыя раўнаньні

§ 92. *Паказальнікавым называецца раўнаньне, у якім невядомы лік уваходзіць у склад паказальніка ступені.*

Істнуе некалькі спосабаў разьвязаньня паказальнікавых раўнаньняў; пры разьвязваньні выбіраем з іх такі, які можа быць у даным выпадку застасованы.

I. *Спосаб зраўнаньня асноў.*

Гэты спосаб грунтуецца на наступным правіле: пры роўных асновах (апрача 0 і 1) роўныя лікі маюць і роўныя паказальнікі ступеняў.

Для прыкладу возьмем раўнаньне: $3^{x-5}=81$.

Каб яго разьвязаць, трэба лікі абодвух бакоў раўнаньня выразіць у відзе ступеняў аднэй і той самай асновы; а дзеля таго, што

$$81=3^4,\ \text{дык}\ 3^{x-5}=3^4,$$

адсюль
$$x-5=4,$$

значыцца
$$x=9.$$

Раўнаньне

$$\sqrt[2x]{64}=2$$

разьвязваем, замяняючы знак корня на дробавы паказальнік ступені; тады атрымаем:

$$64^{\frac{1}{2x}}=2,\ \text{або}\ 2^{\frac{6}{2x}}=2,$$

адкуль
$$\frac{6}{2x}=1,$$

а значыцца
$$x=3.$$

У падобны спосаб разьвяжам раўнаньне

$$2^{x^2}=0,25\cdot 2^{2(4x+11)}$$

$$2^{x^2}=\frac{1}{4}\cdot 2^{8x+22}$$

$$2^{x^2}=2^{-2}\cdot 2^{8x+22}$$

$$2^{x^2}=2^{8x+20}$$

адсюль $$x^2=8x+20.$$

З гэтага раўнаньня атрымоўваем:

$$x_1=10;\ x_2=-2.$$

Пры разьвязваньні раўнаньня

$$2^{x-1}+2^{x-2}+2^{x-3}=448.$$

выводзім за дужкі 2^x; тады будзем мець:

$$2^x\cdot(2^{-1}+2^{-2}+2^{-3})=448$$

$$\frac{7}{8}\cdot 2^x=448$$

$$2^x=512$$
$$2^x=2^9$$
$$x=9.$$

II. *Спосаб лёгарытмаваньня* стасуем тады, калі даныя лікі ня можам выразіць у відзе ступеняў аднэй асновы; напрыклад, маючы раўнаньне

$$6^x=4252,$$

лёгарытмуем абодва яго бакі:

$$x\ lg\,6=lg\,4252$$

$$x=\frac{lg\,4252}{lg\,6}=\frac{3,62859}{0,77815}=4,66......$$

У падобны спосаб разьвяжам раўнаньне

$$31\,.\,5^x=13\,.\,3^x.$$

Лёгарытмуем абодва яго бакі; атрымаем:

$$lg\,31+x\,lg\,5=lg\,13+x\,lg\,3$$

$$x\,lg\,5-x\,lg\,3=lg\,13-lg\,31$$

$$x(lg\,5-lg\,3)=lg\,13-lg\,31$$

$$x=\frac{lg\,13-lg\,31}{lg\,5-lg\,3}=\frac{-0,37742}{0,22185}=-1,7......$$

Каб разьвязаць раўнаньне

$$x^{lg\,x}=100x,$$

таксама лёгарытмуем абодва яго бакі:

$$lg\,x\,.\,lg\,x=lg\,100+lg\,x,$$

або

$$lg^2x - lgx - 2 = 0$$

З гэтага квадратовага раўнаньня азначым $lg\,x$:

$$lg\ x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

г. ё.

$$lg\ x_1 = 2;\ lg\ x_2 = -1,$$

значыцца:

$$x_1 = 100;\ x_2 = 0{,}1.$$

Наогул, калі маем раўнаньне

$$a^x = b,$$

лёгарытмуючы яго, атрымаем:

$$x\ lg\ a = lg\ b,$$

адкуль:

$$x = \frac{lg\ b}{lg\ a}$$

III. *Спосаб замены невядомых.*

Маючы раўнаньне

$$3^{2x} - 4 \,.\, 3^x + 3 = 0,$$

абазначым 3^x праз y, тады атрымаем:

$$y^2 - 4y + 3 = 0.$$

З гэтага раўнаньня азначаем:

$$y_1 = 3;\ y_2 = 1,$$

але

$$3^x = y,$$

значыцца $3^x = 3$, адкуль $x_1 = 1$,

а потым з раўнаньня

$$3^x = 1$$

знаходзім

$$x_2 = 0.$$

Лёгарытмічныя раўнаньні.

§ 93. *Лёгарытмічнымі называюцца раўнаньні, якія заключаюць у сабе лёгарытмы невядомых.*

Каб разьвязаць такое раўнаньне, звычайна потэнцыруем абодва яго бакі, і ў гэты спосаб прыводзім данае лёгарытмічнае раўнаньне да звычайнага. Так, напрыклад, раўнаньне

$$lg\ x = 5\,lg\,2 + 3\,lg\,5$$

разьвязваем пры помачы потэнцыраваньня, а мянавіта:

$$lg\ x = lg\ (2^5 \,.\, 5^3)$$
$$lg\ x = lg\ 4000,$$

адкуль $$x=4000.$$

У падобны спосаб разьвяжам раўнаньне

$$1+lglg\,x=lg\,360-lg\,9$$
$$lg\,10+lglg\,x=lg\,360-lg\,9$$
$$lg\,(10lg\,x)=lg\,\frac{360}{9}$$
$$10\,lg\,x=40$$
$$lg\,x=4$$
$$x=10000.$$

Задачы.

Разьвязаць наступныя раўнаньні без дапамогі лёгарытмічных табліц:

750. $5^{2x+5}=5^{3x+2}$

751. $4^{2x-5}=64$

752. $\left(\frac{3}{7}\right)^{2x-1}=\frac{27}{343}$

753. $\left(\frac{4}{5}\right)^{2x-3}=\frac{5}{4}$

754. $(-27)^x=81$

755. $8^{-x}=\frac{1}{2}$

756. $\left(\frac{1}{3}\right)^x=\sqrt[4]{27}$

757. $4^{(3-x)(2-x)}=1$

758. $2^{3x-4}\,.\,4^{2x-3}=8^{x+2}$

759. $3^x-3^{x-2}=8$

760. $3^{2x+4}-3^{2x+3}-3^{2x+1}=153$

761. $2^{2x}+3\,.\,2^x=88$

762. $2^x+4^x=272$

763. $2^{x+3}+4^{x+1}=320$

764. $2^{\sqrt{x}}=64$

765. $x^{lgx}=10$

766. $3lg\,x=2lg\,8$

767. $lg\,x-lg\,(x+1)-lg\,(x+2)+lg\,(x+4)=0$

768. $\frac{1}{2}lg\,(4+\sqrt{2x})-lg\,\sqrt{\sqrt{2x}-2}=lg\,2$

Разьвязаць наступныя раўнаньні пры помачы лёгарытмічных табліц

769. $177147^x=81$

770. $\left(\sqrt[7]{14}\right)^x=26$

771. $6^{x^4-18x^2+86}=7776$

772. $5^x\,.\,3^{2x}=461$

773. $2^{3x}\,.\,7^{5x}=19142.$

Складаныя процанты.

§ 94. Лёгарытмы маюць вялікае прыстасаваньне пры разьвязваньні розных задач з галіны складаных процантаў.

Проценты называюцца *звычайнымі*, калі лічым іх ад пачатковага капіталу; калі-ж проценты ў пэўных пэрыодах часу далучаем да капіталу і новыя проценты лічым ад утворанай такім чынам сумы, тады проценты называюцца *складанымі*.

§ 95. *Вылічэньне складаных процантаў*.

Асноўнай задачай на вылічэньне складаных процантаў ёсьць:

Знайсьці суму, у якую заменіцца капітал а рублёў праз n гадоў пры процантнай таксе p?

Разьвязаньне.

Праз 1 год 100 рублёў заменяцца на $(100+p)$ рублёў, а кожны рубель на

$$\frac{100+p}{100},$$

або

$$\left(1+\frac{p}{100}\right) \text{ рублёў.}$$

Каб зрабіць формулу больш зручнай, абазначым

$$\left(1+\frac{p}{100}\right) \quad \text{праз} \quad R.$$

Пры вылічэньнях лік R азначаем адразу; напрыклад, калі процантная такса $p=4\%$, тады $R=1{,}04$;

калі $p=6{,}5$, тады $R=1{,}065$ і г. д.

З прычыны таго, што 1 рубель праз год заменіцца на R рублёў, значыцца ўвесь капітал a заменіцца на aR.

Праз 2 гады новы капітал aR заменіцца на $aR.R$, г. ё. на aR^2.

Праз 3 гады капітал aR^2 заменіцца на aR^3.

Наогул, праз n гадоў пачатковы капітал a заменіцца на aR^n. Калі гэтую суму абазначым праз A, то атрымаем формулу:

$$A=aR^n \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1).$$

у якой $R=1+\dfrac{p}{100}$.

У формуле (1) маем чатыры велічыні: A, a, R і n; калі 3 велічыні з іх ёсьць вядомыя, то знойдзем і чацьвертую. Дзеля гэтага адрозьніваем 4 гатункі задач, а мянавіта:

I) Пачатковы капітал $a=3225$ паложан у банак па $p=7\%$. *У якую суму* A *ён заменіцца* праз $n=12$ гадоў?

Разьвязаньне.

Пры процантнай таксе $p=7$, R будзе роўным 1,07, значыцца

$$A=3225.1.07^{12}.$$

Лёгарытмуючы, маем:

$$lg\, A=lg\, 3225+12\, lg\, 1{,}07.$$

$$\begin{array}{r} lg\, 3225 = 3{,}50853 \\ \underline{12\, lg\, 1{,}07 = 0{,}35256} \\ lg\, A = 3{,}86109 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} 86106 - & 7262 \\ 3 & 5 \\ \hline \multicolumn{2}{r}{N\, lg\, 3{,}86109 = 7262{,}5\,,} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} lg\, 1{,}07 = 0{,}02938 \\ 12 \\ \hline 5876 \\ 2938 \\ \hline 12\, lg\, 1{,}07 = 0{,}35256 \end{array}$$

г. ё. $A=7262$ руб. 50 кап.

II. *Які пачатковы капітал* трэба палажыць у банак, каб праз 8 гадоў пры 5,5% атрымаць 36380 рублёў?

Разьвязаньне.

У гэтай задачы: $A = 36380$, $n = 8$, $p = 5{,}5$, значыцца $R = 1{,}055$.

З формулы $A = aR^n$

атрымоўваем:

$$a = \frac{A}{R^n} = \frac{36380}{1{,}055^8}$$

$$lg\,a = lg\,36380 - 8\,lg\,1{,}055.$$

$$\begin{array}{r|r}
lg\,36380 = 4{,}56086 & \\
8\,lg\,1{,}055 = 0{,}18600 & lg\,1{,}055 = 0{,}02325 \\
\hline
lg\,a = 4{,}37486 & 8 \\
37475 - 2370 & \overline{8\,lg\,1{,}055 = 0{,}18600} \\
108 \quad\quad 6 & \\
\hline
N\,lg\,4{,}37486 = 23706, \text{ г. ё.} &
\end{array}$$

$$a = 23706 \text{ рублёў}.$$

III. На *які процант* трэба палажыць капітал 853 рублі, каб праз 18 гадоў атрымаць 2650 рублёў?

Разьвязаньне.

У гэтай задачы: $a = 853$; $A = 2650$; $n = 18$.

З формулы $A = aR^n$ азначаем: $R = \sqrt[n]{\frac{A}{a}}$,

адкуль:

$$lg\,R = \frac{lg\,A - lg\,a}{n} = \frac{lg\,2650 - lg\,853}{18} =$$

$$= \frac{3{,}42325 - 2{,}93095}{18} = \frac{0{,}49230}{18} = 0{,}02735.$$

$$N\,lg\,0{,}02735 = 1{,}065,$$

значыцца: $R = 1{,}065$, адкуль $p = 6{,}5\%$

IV. *Праз колькі гадоў* капітал 615 рублёў зменіцца на 3768 рублёў, пры 8,2%?

Разьвязаньне.

У гэтай задачы: $A = 3768$, $a = 615$, $p = 8{,}2$, значыцца:

$$R = 1{,}082.$$

З формулы $A = aR^n$

маем: $R^n = \frac{A}{a}$

Каб разьвязаць гэтае лёгарытмічнае раўнаньне, пралёгарытмуем абодва яго бакі:

$$n\,lg\,R = lg\,A - lg\,a,$$

адкуль шуканы лік

$$n = \frac{lg\,A - lg\,a}{lg\,R} = \frac{lg\,3768 - lg\,615}{lg\,1{,}082}$$

$$\begin{array}{lr} lg\,3768 & 3{,}57611 \\ & - \\ lg\;\;615 & 2{,}78888 \\ \hline & 0{,}78723 \end{array}$$

$$lg\;1{,}082 = 0{,}03423$$

$$n = \frac{0{,}78723}{0{,}03423} = 23 \text{ (гады)}$$

§ 96. *Пэрыодычныя ўзносы.*

Калі хто-небудзь кладзе ў банак у роўныя пэрыоды часу (напрыклад, што-год) аднаковыя сумы, то сумы гэтыя называюцца *пэрыодычнымі ўзносамі.*

Разьвяжам наступную задачу на вылічэньне пэрыодычных узносаў.

Нехта кладзе ў банак на пачатку кожнага году па b рублёў. Які капітал ён атрымае праз n гадоў пры $p\%$?

Разьвязаньне.

Першы ўзнос b, паложаны ў банак на пачатку першага году, заменіцца праз n гадоў у bR^n.

Другі ўзнос, паложаны на пачатку другога году, будзе ляжаць у банку толькі (n—1) гадоў, значыцца, праз (n—1) гадоў ён заменіцца ў bR^{n-1}.

Трэці ўзнос праз (n—2) гадоў заменіцца ў bR^{n-2} і г. д.

Прадапошні ўзнос процантуе 2 гады, значыцца, заменіцца ў bR^2; урэшце апошні ўзнос на працягу 1 году заменіцца ў bR.

Калі дадамо ўсе атрыманыя сумы, а агульную суму абазначым праз B, то будзем мець:

$$\begin{aligned} B &= bR^n + bR^{n-1} + bR^{n-2} + \ldots\ldots + bR^2 + bR = \\ &= bR + bR^2 + \ldots\ldots + bR^{n-2} + bR^{n-1} + bR^n = \\ &= bR(1 + R + R^2 + \ldots\ldots + R^{n-3} + R^{n-2} + R^{n-1}). \end{aligned}$$

З прычыны таго, што ў дужках маем геомэтрычную прогрэсію, першы выраз якой ёсьць 1, множнік $= R$ і колькасьць выразаў n, значыцца, сума выразаў геомэтрычнай прогрэсіі ў дужках будзе роўнай:

$$\frac{R^n - 1}{R - 1},$$

адсюль:

$$B = bR.\frac{R^n - 1}{R - 1} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Калі, напрыклад, $b = 600$, $p = 7$, $n = 15$, тады $R = 1{,}07$

$$B = 600.1{,}07.\frac{1{,}07^{15} - 1}{1{,}07 - 1} = \frac{600.1{,}07.(1{,}07^{15} - 1)}{0{,}07}$$

Формула гэтая ёсьць нязручная для лёгарытмаваньня, бо лічнік правага боку заключае розьніцу. З гэтае прычыны спачатку вылічаем $1{,}07^{15}$; ад рэзультату аднімаем 1, а потым ужо выконываем далейшыя вылічэньні.

$$y = 1{,}07^{15},$$
$$lg\,y = 15\,lg\,1{,}07$$
$$lg\,1{,}07 = 0{,}02938$$
$$\underline{15\,lg\,1{,}07 = 0{,}44070}$$
$$0{,}44059 \;—\; 2758$$
$$\underline{112 \qquad 7}$$
$$N lg\,0{,}44070 = 2{,}7587$$

значыцца:
$$1{,}07^{15} = 2{,}7587$$
$$1{,}07^{15} - 1 = 2{,}7587 - 1 = 1{,}7587.$$

Такім чынам

$$B = \frac{600.1{,}07.1{,}7587}{0{,}07} = \frac{600.107.1{,}7587}{7}$$

$$lg\,B = lg\,600 + lg\,107 + lg\,1{,}7587 + colg\,7.$$

$$lg\,600 = 2{,}77815$$
$$lg\,107 = 2{,}02938$$
$$lg\,1{,}7587 = 0{,}24520$$
$$\underline{colg\,7 = \bar{1}{,}15490}$$
$$lg\,B = 4{,}20763$$

$$lg\,1{,}758 \;—\; 24502$$
$$\underline{7 \qquad 175}$$
$$lg\,1{,}7587 = 0{,}24520$$
$$lg\,7 = 0{,}84510$$

адкуль $B = 16130$ рублёў.

Формула (2) заключае чатыры лікі B, b, R і n, з якіх, маючы тры, можам вылічыць чацьверты (за выняткам выпадку, калі невядомы ёсьць R, бо тады трэба-б было разьвязаць раўнаньне ступені $n+1$).

Калі хочам разьвязаць задачу, у якой шукаецца *колькасьць гадоў*, напрыклад:

колькі гадоў трэба плаціць па 750 рублёў пры 6%, каб атрымаць посьле гэтага 9000 рублёў? —

тады з формулы
$$B = bR \cdot \frac{R^n - 1}{R - 1}$$

азначаем n, а мянавіта:

$$B(R-1) = bR(R^n - 1)$$
$$B(R-1) = bR^{n+1} - bR$$
$$bR^{n+1} = B(R-1) + bR$$
$$R^{n+1} = \frac{B(R-1) + bR}{b}$$

$$(n+1)\,lg\,R = lg\,[B(R-1) + b\,R] - lg\,b$$
$$n + 1 = \frac{lg\,[B(R-1) + bR] - lg\,b}{lg\,R}$$
$$n = \frac{lg\,[B(R-1) + bR] - lg\,b}{lg\,R} - 1$$

Падставіўшы ў гэтую формулу лікі з данае задачы, будзем мець:

$$n = \frac{lg\,(9000\,.\,0{,}06 + 750\,.\,1{,}06) - lg\,750}{lg\,1{,}06} - 1$$

$$lg(9000 . 0,06 + 750 . 1,06) = lg\,1335 = 3,12548$$

$$lg\,750 = 2,87506$$

$$0,25042$$

$$lg\,1,06 = 0,02531$$

$0,25042 : 0,02531 = 10$ (з акругленьнем),

адсюль $n = 9$.

§ 97. Калі аднаковыя ўзносы кладуць у банак *у канцы году*, тады першы ўзнос процантуе $(n-1)$ гадоў, другі $(n-2)$ гадоў і г. д., урэшце апошні процантуе 0 гадоў, г. ё. саусім ня дасьць зыску. Абазначыўшы канчатковую суму праз B_1, а паасобныя ўзносы праз b_1, атрымаем:

$$B_1 = b_1R^{n-1} + b_1R^{n-2} + \ldots\ldots + b_1R + b_1 =$$

$$= b_1 + b_1R + \ldots\ldots + b_1R^{n-2} + b_1R^{n-1} =$$

$$= b_1(1 + R + \ldots\ldots + R^{n-2} + R^{n-1})$$

$$B_1 = b \cdot \frac{R^n - 1}{R - 1} \ldots\ldots\ldots (2a).$$

§ 98. *Тэрміновыя выплаты.*

Тэрміновымі выплатамі называюцца аднаковыя сумы, якія трэба плаціць у роўныя пэрыоды часу (напрыклад, што-год), каб выплаціць пазычаны доўг разам з процантамі.

Задача.

Знайсьці суму, якую трэба плаціць у канцы кожнага году, каб праз n гадоў выплаціць пазычаны капітал C рублёў разам з процантамі (па p %).

Разьвязаньне.

На аснове формулы $(2a)$, сумы ўсіх гэтых выплат разам з процантамі праз n гадоў дадуць:

$$c \cdot \frac{R^n - 1}{R - 1} \text{ рублёў.}$$

Але капітал у гэтым часе разам з процантамі павялічыцца да CR^n рублёў. З прычыны таго, што абедзьве сумы павінны быць роўныя паміж сабой (бо доўг у канцы n-га году будзе ўжо выплачаны), значыцца

$$CR^n = c \cdot \frac{R^n - 1}{R - 1} \ldots\ldots\ldots (3)$$

Формула гэтая выражае залежнасьць паміж чатырма вялічынямі: C, c, R і n, з якіх можам вылічыць адну, маючы тры іншыя (апрача таго выпадку, калі шуканым лікам ёсьць R).

Каб разьвязаць нашую задачу, з формулы (3) атрымоўваем:

$$c=\frac{CR^n(R-1)}{R^n-1}$$

Калі, напрыклад, $C=15000$ рубл., $p=6{,}5$, $n=8$, тады $R=1{,}065$.

$$c=\frac{15000.1{,}065^8.0{,}065}{1{,}065^8-1}$$

Пры помачы лёгарытмаў знойдзем:

$$1{,}065^8=1{,}655, \text{ адкуль } 1{,}655-1=0{,}655$$

і значыцца:

$$c=\frac{15000.1{,}655.65}{655}$$

Правы бок гэтай формулы можам цяпер вылічыць або пры помачы звычайнага множаньня і дзяленьня, або пры помачы лёгарытмаў.

У падобны спосаб з формулы (3) можам азначыць C, маючы c, R n, а мянавіта:

$$C=\frac{c.(R^n-1)}{R^n.(R-1)}$$

Каб азначыць n, маем:

$$CR^n(R-1)=cR^n-c$$
$$cR^n-CR^n(R-1)=c$$
$$R^n[c-C(R-1)]=c$$
$$R^n=\frac{c}{c-C(R-1)}$$

$$n\,lg\,R=lg\,c-lg\,[c-C(R-1)]$$
$$n=\frac{lg\,c-lg\,[c-C(R-1)]}{lg\,R}$$

З атрыманай формулы бачым, што задача—магчымая для разьвязаньня тады, калі $c>C(R-1)$, г.ё. калі гадавая выплата ёсьць большая за гадавы прырост капіталу, бо тады мы выплачваем і процанты й частку капіталу.

Калі, напрыклад, $C=24000$; $c=2750$; $p=8$, то $R=1{,}08$; $R-1=0{,}08$; $C(R-1)=1920$; $c-C(R-1)=830$

$$\text{і } n=\frac{lg\,2750-lg\,830}{lg\,1{,}08}=\frac{3{,}43933-2{,}91908}{0{,}03342}=\frac{0{,}52025}{0{,}03342}=15{,}5$$

Задачы.

774. У якую суму замяніцца капітал 16000 рублёў праз 14 гадоў пры 4%?

775. У якую суму замяніцца 1 капейка праз 300 гадоў пры $5^3/_4$%.

776. Места Менск мае 106000 жыхароў; колькі будзе жыхароў праз 15 гадоў, калі гадавы прырост ёсьць роўны 2,5%?

777. Які капітал трэба палажыць цяпер на 6%, каб праз 20 гадоў атрымаць 20645,5 рублёў?

778. Доўг, які быў пазычаны 8 гадоў назад па $3^1/_2\%$, выплацілі цяпер у суме 2370 руб. 20 кап. Якую суму пазычылі?

779. Праз колькі гадоў капітал 2000 рублёў, паложаны на $4\frac{1}{2}\%$, заменіцца ў 4615 руб. 72 кап.?

780. Праз колькі гадоў капітал, паложаны на 3,5%, падвоіцца?

781, Капітал 38000 рублёў палажылі па $4\frac{1}{2}\%$, а 99398 рублёў па $3\frac{1}{2}\%$. Праз колькі гадоў капіталы гэтыя стануць роўныя?

782. На які процант трэба палажыць 5600 рублёў, каб праз 25 гадоў атрымаць 18963 рублі?

783. На які процант трэба палажыць капітал, каб праз 16 гадоў ён падвоіўся-б?

784. Якая ўтворыцца сума праз 25 гадоў пры 3%, калі на пачатку кожнага году будзем рабіць узносы по 300 рублёў?

785. Якая ўтворыцца сума праз 20 гадоў пры 5%, калі на пачатку кожнага году будзем рабіць узносы па 2000 рублёў?

786. Якая ўтворыцца сума праз 20 гадоў пры $4\frac{1}{2}\%$, калі ў канцы кожнага году будзем рабіць узносы па 1200 рублёў?

787. Праз колькі гадоў 80-рублёвыя ўзносы, якія робяцца ў пачатку кожнага году, пры 7%, утвораць суму 4979 руб. 92 кап.?

788. Якую суму трэба плаціць у канцы кожнага году, каб праз 8 гадоў выплаціць доўг 2506,44 рублёў пры $4\frac{1}{2}\%$?

789. Каб выплаціць пазычаны на 6% доўг, нехта ў працягу 5 гадоў плаціў у канцы кожнага году па 2373 руб. 72 кап. Колькі ён пазычыў?

790. Праз колькі гадоў можна выплаціць пазычаны па $3^3/_4\%$ доўг 216600 рублёў, калі ў канцы кожнага году выплачваць па 13500 рублёў?

VII.

Тэорыя злучэньняў.

§ 99. Маючы пэўную колькасьць матар'яльных рэчаў, літар, цыфр і т. п., можам злучаць іх у пэўныя групы, так званыя *злучэньні*, якія розьняцца адна ад другой або самымі рэчамі, або парадкам іх, або тым і другім.

Рэчы, з якіх творым розныя злучэньні, будзем называць *элемэнтамі*.

Істнуюць тры віды злучэньняў: 1) *разьмяшчэньні* (Arrangements), 2) *перастаўкі* (Permutations) і 3) *комбінацыі* (Combinaisons).

Разьмяшчэньні.

§ 100. *Разьмяшчэньнямі называем злучэньні, якія розьняцца паміж сабой або самымі элемэнтамі, або іх парадкам.*

Маючы m элемэнтаў, можам тварыць з іх разьмяшчэньні па 1 элемэнту ў кожным, па 2, па 3...... і ўрэшце па k элемэнтаў, дзе $k<m$.

Калі маем, напрыклад, 4 элемэнты:

$$a,\ b,\ c,\ d,$$

можам утварыць з іх наступныя 12 разьмяшчэньняў па 2:

$$ab,\ ac,\ ad$$

$$ba,\ bc,\ bd$$

$$ca,\ cb,\ cd$$

$$da,\ db,\ dc$$

Лёгка можам заўважыць, што некаторыя з гэтых разьмяшчэньняў заключаюць адны й тыя самыя элемэнты і розьняцца толькі іх парадкам' як, напрыклад: ab, ba.....; другія-ж, як напрыклад: ab, dc..... розьняцца самымі элемэнтамі.

Колькасьць разьмяшчэньняў з m элемэнтаў па k будзем абазначаць знакам A_m^k (A—пачатковая літара францускага слова Arrangements).

Выведзем формулу, пры помачы якой можна вылічыць колькасьць (лік) разьмяшчэньняў з m элемэнтаў па k.

Дзеля гэтае мэты возьмем m элемэнтаў:

$$a,\ b,\ c,\ d,\ e\ ......$$

і ўложым з іх спачатку ўсе разьмяшчэньні па аднаму элемэнту. Ясна, што такіх разьмяшчэньняў будзе столькі, колькі маем элемэнтаў, г. ё. m, а значыцца:

$$A_m^1=m.$$

Каб утварыць з даных m элемэнтаў усе разьмяшчэньні па 2, далучаем па чарзе да кожнага з гэтых m элемэнтаў кожны з пазасталых $(m-1)$ элемэнтаў, а мянавіта: да элемэнту a далучаем b, c, d, e...., да элемэнту b далучаем a, c, d..... і гэтак далей, аж да канца. Такім спосабам атрымаем:

$$\begin{array}{llll} ab, & ac, & ad, & ae \ldots.. \\ ba, & bc, & bd, & be \ldots.. \\ ca, & cb, & cd, & ce \ldots... \\ da, & db, & dc, & de \ldots... \\ ea, & eb, & ec, & ed \ldots... \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

У гэтай таблічцы маем m радкоў (бо кожны пачынаецца ад аднаго з элемэнтаў: a, b, c, d....., усіх-жа такіх элемэнтаў ёсьць m); кожны радок заключае $m-1$ разьмяшчэньняў. Дзеля гэтага колькасьць усіх разьмяшчэньняў будзе

$$m(m-1),$$

ці

$$A_m^2 = m(m-1).$$

Каб атрымаць разьмяшчэньні з m элемэнтаў па 3, трэба да кожнага з папярэдніх $m(m-1)$ разьмяшчэньняў далучыць па чарзе кожны з пазасталых $(m-2)$ элемэнтаў, якіх у ім не хапае; значыцца: да першага разьмяшчэньня ab трэба далучыць спачатку элемэнт c, потым d, e, f, g.... г. д.; тады:

$$\begin{array}{llll} \text{з} & ab & \text{атрымаем:} & abc,\ abd,\ abe\ldots... \\ \text{з} & ac & » & acb,\ acd,\ ace\ldots... \\ \text{з} & ad & » & adb,\ adc,\ ade\ldots... \\ & \ldots & \ldots & \ldots \\ & \ldots & \ldots & \ldots \\ \text{з} & ba & \text{атрымаем:} & bac,\ bad,\ bae\ldots... \\ & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

У гэты спосаб з кожнага папярэдняга разьмяшчэньня атрымаем $(m-2)$ новых разьмяшчэньняў, а з прычыны таго, што разьмяшчэньняў з m элемэнтаў па 2 мы мелі $m(m-1)$, дык разьмяшчэньняў з m элемэнтаў па 3 будзе:

$$m(m-1)(m-2),$$

ці

$$A_m^3 = m(m-1)(m-2)$$

У падобны спосаб можам давесьці, што:

$$A_m^4 = m(m-1)(m-2)(m-3)$$

$$A_m^5 = m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)$$

. . . .

і наогул:
$$A_m^k = m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-\kappa+1) \qquad (1)$$

Формулу гэтую можам выразіць словамі так:

Колькасьць разьмяшчэньняў з m элемэнтаў па κ ёсьць роўная здабытку κ пасьледаўных цэлых лікаў, з якіх найбольшы ёсьць m.

Напрыклад:

$$A_6^4 = 6.5.4.3 = 360.$$

$$A_{12}^5 = 12.11.10.9.8 = 95040.$$

П Р Ы К Л А Д I.

Колькі трохцыфровых лікаў можна ўтварыць з цыфр 2,3,4,5 і 6?

Разьвязаньне.

Трохцыфровых лікаў можна ўтварыць столькі, колькі можа быць разьмяшчэньняў з даных пяцёх цыфраў па 3, г. ё.:

$$A_5^3 = 5.4.3 = 60.$$

П Р Ы К Л А Д II.

Колькі розных трохкаляровых стужак можна зрабіць з 7 рознакаляровых паскаў?

Разьвязаньне.

$$A_7^3 = 7.6.5 = 210.$$

П Р Ы К Л А Д III.

Рада таварыства ў ліку 12 асоб выбірае сярод сябе старшыню, падстаршыню, скарбніка і пісара. Колькі ўсяго можа быць розных выбарных лістоў на гэтыя 4 пасады?

Адказ: 11880.

П Р Ы К Л А Д IV.

Знайсьці m, калі $A_m^2 = 30$.

Разьвязаньне.

$$m(m-1) = 30; \; m^2 - m - 30 = 0; \; m = 6$$

(другі разьвязак —5 не адказвае пытаньню, бо m — лік з натуры рэчаў дадатны).

Перастаўкі.

§ 101. *Злучэньні, якія заключаюць за кожным разам усе даныя элемэнты й розьняцца толькі іх парадкам, называюцца перастаўкамі.*

З трох элемэнтаў:

$$a, b, c$$

усе магчымыя перастаўкі будуць:

$$abc, acb, bac, bca, cab, cba.$$

Калі маем 5 элемэнтаў, то можам рабіць перастаўкі, зьмяняючы рознымі спосабамі парадак элемэнтаў; напрыклад, з элемэнтаў a, b, c, d, e можам тварыць наступныя перастаўкі:

$$abcde,$$

$$abced,$$

$$abdce,$$

$$bacde,$$

$$\ldots\ldots$$

і г. д.

Адсюль бачым, што перастаўкі зьяўляюцца частным выпадкам разьмяшчэньняў, а мянавіта — перастаўкі з m элемэнтаў ёсьць разьмяшчэньні з m элемэнтаў па m.

Лік пераставак з m элемэнтаў будзем абазначаць знакам P_m (P — пачатковая літара францускага слова Permutations).

З прычыны таго, што

$$P_m = A_m^m,$$

значыцца
$$P_m = m(m-1)(m-2)\ldots\ldots3.2.1,$$

або
$$P_m = 1.2.3.\ldots\ldots(m-2)(m-1)m \qquad (2)$$

г. ё.: *колькасьць перастаўак з m элемэнтаў ёсьць роўная здабытку натуральных лікаў ад 1 да m (уключна).*

Для скарочаньня формулы часта, замест раду натуральных лікаў ад 1 да m, пішуць літару m з клічнікам, а значыцца:

$$P_m = m!$$

Напрыклад:

$$P_5 = 5! = 1.2.3.4.5 = 120.$$

ПРЫКЛАД I.

У колькі розных спосабаў можна запрэгчы ў рад чацьвёрку коняў?

Адказ:

$$P_4 = 1.2.3.4 = 24.$$

ПРЫКЛАД II.

Колькі пяцёхцыфровых лікаў можна ўтварыць з цыфр: 3, 5, 6, 7, 9?

Адказ:

$$P_5 = 1.2.3.4.5 = 120.$$

Комбінацыі.

§ 102. *Комбінацыямі называюцца такія злучэньні, якія розьняцца адно ад другога прынамсі адным элемэнтам, незалежна ад парадку спалукі.*

Напрыклад, з 6 элемэнтаў:

$$a, b, c, d, e, f$$

можна ўтварыць наступныя комбінацыі па 2:

$$\begin{array}{lllll} ab, & ac, & ad, & ae, & af \\ & bc, & bd, & be, & bf \\ & & cd, & ce, & cf \\ & & & de, & df \\ & & & & ef \end{array}$$

З гэтых самых 6 элемэнтаў комбінацыі па 3 будуць:

$$\begin{array}{llll} abc, & abd, & abe, & abf \\ & acd, & ace, & acf \\ & & \ldots & \ldots \\ & & & \ldots \end{array}$$

і г. д.

З комбінацый можна ўтварыць разьмяшчэньні; трэба толькі з кожнай комбінацыі зрабіць усе магчымыя перастаўкі.

Так, напрыклад, з чатырох элемэнтаў

$$a, b, c, d$$

можам утварыць наступныя чатыры комбінацыі па 3:

$$abc, abd, acd, bcd.$$

Вось-жа, калі мы цяпер у кожнай з гэтых комбінацый зробім усе 6 магчымых перастанавак, то атрымаем наступны рад разьмяшчэньняў:

abc	*abd*	*acd*	*bcd*
acb	*adb*	*adc*	*bdc*
bac	*bad*	*cad*	*cbd*
bca	*bda*	*cda*	*cdb*
cab	*dba*	*dac*	*dbc*
cba	*dab*	*dca*	*dcb*

Адсюль вынікае, што колькасьць разьмяшчэньняў з m элемэнтаў па k ёсьць роўная колькасьці комбінацый з m элемэнтаў па k, памножанай на колькасьць перастанавак з k элемэнтаў.

Калі колькасьць комбінацый з m элемэнтаў па k абазначым знакам C_m^k (C—пачатковая літара французскага слова «Combinaisons»), то

$$A_m^k = C_m^k \cdot P_k,$$

адкуль

$$C_m^k = \frac{A_m^k}{P_k},$$

або:

$$C_m^k = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-\kappa+1)}{1.2.3.\ldots\ldots\kappa} \qquad (3)$$

Дзеля гэтага:

$$C_6^2 = \frac{6.5}{1.2} = 15.$$

$$C_8^4 = \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4} = 70.$$

ПРЫКЛАД І.

З аддзелу 15 салдат трэба ўтварыць варту з 4 чалавек. У колькі спосабаў можна гэта зрабіць?

Разьвязаньне.

З прычыны таго, што ў варту за кожным разам уваходзіць новы салдат, значыцца, колькасьць спосабаў ёсьць роўная колькасьці комбінацый з 15 элемэнтаў па 4, г. ё.:

$$C_{15}^4 = \frac{15.14.13.12}{1.2.3.4} = 1365.$$

ПРЫКЛАД ІІ.

У колькі спосабаў можна выцягнуць 13 карт з 52, каб за кожным разам была прынамсі адна карта іншая?

Адказ:

$$C_{52}^{13} = \frac{52.51.50.49.48.47.46.45.44.43.42.41.40}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13} =$$

$$= 635013559600.$$

ПРЫКЛАД ІІІ.

Знайсьці m, калі $C_m^5 : C_m^3 = \frac{3}{5}$

Разьвязаньне.

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5} : \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{(m-3)(m-4)}{4.5} = \frac{3}{5}$$

$$m^2 - 7m = 0,$$

адкуль $m_1 = 7$ і $m_2 = 0$ (другі разьвязак, як не адказваючы пытаньню, бо m павінна быць большае за 1, адкідваем).

§ 103. Формулу комбінацый (3) можна прадставіць у іншай форме, калі памножым лічнік і назоўнік яе на здабытак

$$1.2.3.4 \ldots\ldots\ldots (m-\kappa);$$

тады ў лічніку атрымаем здабытак натуральных лікаў ад 1 да m, а ў назоўніку—здабытак натуральных лікаў ад 1 да κ, памножаны на здабытак натуральных лікаў ад 1 да $m-\kappa$

$$C_m^k = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-\kappa+1).1.2.3\ldots\ldots(m-\kappa)}{1.2.3\ldots\kappa.1.2.3\ldots\ldots(m-\kappa)},$$

або

$$C_m^k = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-\kappa+1)(m-\kappa)\ldots 3.2.1.}{1.2.3\ldots\ldots\kappa.1.2.3\ldots(m-\kappa)}$$

ці

$$C_m^k = \frac{1.2.3\ldots(m-1)m}{1.2.3\ldots\kappa.1.2.3\ldots(m-\kappa)} = \frac{P_m}{P_k.P_{m-k}} \qquad (4)$$

Замяняючы ў апошняй формуле κ на $m-\kappa$, атрымоўваем

$$C_m^{m-k} = \frac{P_m}{P_{m-k}P_k}$$

Параўнаўшы цяпер гэтую формулу з формулай (4), знаходзім:

$$C_m^k = C_m^{m-k}, \qquad \text{г. ё.:}$$

колькасьць комбінацый з m элемэнтаў па κ ёсьць роўная ліку комбінацый з m элемэнтаў па $(m-\kappa)$.

Вынік гэты можам атрымаць таксама й на аснове наступнага разважаньня. Калі мы ад m элемэнтаў возьмем κ элемэнтаў і ўложым з іх адну комбінацыю, то пазасталыя элемэнты ўтвораць адну комбінацыю з $m-\kappa$ элемэнтаў. Такім чынам, кожнай новай комбінацыі з κ элемэнтаў будзе адказваць комбінацыя з $(m-\kappa)$ пазасталых, і наадварот; адсюль вынікае, што:

$$C_m^k = C_m^{m-k}$$

Выведзеная ўласьцівасьць палягчае нам знаходжаньне колькасьці комбінацый тады, калі κ ёсьць большае за палову m; напрыклад, колькасьць комбінацый з 12 элемэнтаў па 9 паводле агульнай формулы:

$$C_{12}^9 = \frac{12.11.10.9\,8.7.6.5\,4}{1.2.3.4.5.6\,7.8.9} = 220,$$

а паводле ўпрошчанай формулы:

$$C_{12}^9 = C_{12}^{12-9} = C_{12}^3 = \frac{12.11.10}{1\,2.3} = 220\,.$$

§ 104. З прычыны таго, што колькасьць комбінацый з m элемэнтаў па κ, г. ё.

$$C_m^k = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-\kappa+1)}{1.2.3\ldots\ldots\kappa},$$

ёсьць цэлы лік, значыцца,

здабытак к пасьледаўных цэлых лікаў дзеліцца без астачы на здабытак к першых натуральных лікаў.

Задачы.

791. Знайсьці колькасьць разьмяшчэньняў з 12 элемэнтаў па 2.

792. Знайсьці A_{10}^{3}.

793. Знайсьці A_{20}^{5}.

794. Колькі трохцыфровых лікаў можна ўлажыць з цыфр 1,2,3......9, у такі спосаб, каб ніводная з іх не паўтаралася?

795. $A_{n}^{2}=132$. Знайсьці n.

796. $n A_{n}^{3}=120$. Знайсьці n.

797. Колькі паставак можна зрабіць з дзесяцёх розных элемэнтаў?

798. Вылічыць P_8.

799. У колькі спосабаў можна пасадзіць 5 вучняў на лаўцы?

800. Лік перавак з $(n+2)$ элемэнтаў ёсьць у 210 разоў большы за лік перастановак з n элемэнтаў. Знайсьці n.

801. $P_n : P_{n+1}=1:9$. Знайсьці n.

802. Знайсьці колькасьць комбінацый з 12 элемэнтаў па 3.

803. Вылічыць C_{10}^{4}.

804. Вылічыць C_{10}^{8}.

805. $C_{n}^{3} : C_{n+2}^{4}=1:5$. Знайсьці n.

806. $C_{2n}^{n+1} : C_{2n+1}^{n-1}=3:5$. Знайсьці n.

807. З 12 асоб трэба выбраць камісію з 5 асоб. У колькі спосабаў можна гэта зрабіць?

808. З 8 гатункаў кавы купец утварыў розныя мешаніны, бяручы да кожнай аднаковыя колькасьці трох розных гатункаў. Колькі новых гатункаў у гэты спосаб утварыў купец?.

VIII.

Двохчлен Ньютона.*)

§ 105. З формул частных выпадкаў множаньня ведаем, што:

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$$

$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$$

Пры помачы формулы, званай «двохчленам Ньютона», можам падняць кожны двохчлен у адвольную ступень, г. ё. знайсьці значэньне выразу

$$(a+b)^n,$$

дзе n ёсць адвольны цэлы і дадатны лік.

Здабытак двохчленаў, маючых супольны першы выраз.

§ 106. Хай маем здабытак двохчленаў, маючых аднаковы першы выраз, напрыклад:

$$(x+a)\,(x+b)\,(x+c)........(x+\kappa)$$

і хай усіх такіх двохчленаў будзе n.

Возьмем спачатку здабытак першых двох сумножнікаў; атрымаем:

$$(x+a)\,(x+b)=x^2+(a+b)x+ab,$$

або:

$$(x+a)\,(x+b)=x^2\begin{array}{r|l} +a & x+ab \\ +b & \end{array}$$

(у гэтых формулах заместа дужак для навочнасьці будзем ужываць старчавую рысу).

Памнажаючы атрыманы здабытак на трэці сумножнік $(x+c)$, будзем мець:

$$(x+a)\,(x+b)\,(x+c)=x^3\begin{array}{r|r|l} +a & x^2+ab & x+abc \\ +b & +ac & \\ +c & +bc & \end{array}$$

Памнажаючы апошнюю формулу на $(x+d)$, атрымаем здабытак чатырох двохчленаў:

$$(x+a)\,(x+b)\,(x+c)\,(x+d)=x^4\begin{array}{r|r|r|l} +a & x^3+ab & x^2+abc & x+abcd. \\ +b & +ac & +abd & \\ +c & +ad & +acd & \\ +d & +bc & +bcd & \\ & +bd & & \\ & +cd & & \end{array}$$

---

*) Ісаак Ньютон (Isaac Newton, 1642—1727)—славутны ангельскі матэматык.

Разглядаючы атрыманыя здабыткі, бачым, што ўсе яны ёсьць многачлены, упарадкаваныя паводле спадаючых ступеняў сумножніка x.

Паказальнік ступені пры x у першым члене ёсьць роўны колькасьці множаных двохчленаў, а ў кожным наступным члене зьмяншаецца на адзінку.

Коэфіцыэнт першага члена ёсьць роўны 1.

Коэфіцыэнт другога члена ёсьць роўны суме другіх выразаў множаных двохчленаў.

Коэфіцыэнт трэцяга члена ёсьць роўны суме здабыткаў другіх членаў, узятых па 2.

Коэфіцыэнт чацьвертага выразу ёсьць роўны суме здабыткаў другіх членаў, узятых па 3.

Апошні член ёсьць здабытак усіх другіх членаў множаных двохчленаў.

Калі-б памножылі 5, 6 і г. д. двохчленаў, то атрымалі-б здабыткі, утвораныя паводле гэтага самага правіла.

Каб пераканацца, што выведзены закон утварэньня выразу данага здабытку ёсьць агульны, давядзем, што, калі ён правільны для здабытку n двохчленаў

$$(x+a)(x+b)(x+c)......(x+\kappa),$$

то будзе правільным таксама і для $(n+1)$ двохчленаў.

Вось-жа далусьцім, што, утвараючы здабытак n двохчленаў з супольным першым выразам, мы знайшлі:

$$(x+a)(x+b)(x+c)........(x+\kappa)=$$

$$=x^n+S_1x^{n-1}+S_2x^{n-2}+S_3x^{n-3}+.........+S_{n-1}x+S_n \qquad \text{(A)}$$

У формуле гэтай

S_1 ёсьць сума членаў a, b, c,......κ

S_2 ёсьць сума здабыткаў (комбінацый) гэтых членаў, узятых па 2.

S_3 ёсьць сума здабыткаў (комбінацый) гэтых членаў, узятых па 3 і г. д.

Урэшце S_n ёсьць здабытак гэтых членаў.

Калі цяпер абодва бакі формулы (A) памножым на двохчлен $(x+l)$, то будзем мець:

$$(x+a)(x+b)(x+c).......(x+\kappa)(x+l)=$$

$$=x^{n+1}+S_1x^n+S_2x^{n-1}+S_3x^{n-2}+.........+S_nx+$$

$$+lx^n+lS_1x^{n-1}+lS_2x^{n-2}+.........+lS_{n-1}x+lS_n\,.$$

Выводзячы за дужкі выразы, якія зьмяшчаюць у сабе аднаковыя ступені x, атрымаем:

$$(x+a)(x+b)(x+c)........(x+\kappa)(x+l)=$$

$$=x^{n+1}\left.\begin{matrix}+S_1\\+l\end{matrix}\right|x^n\left.\begin{matrix}+S_2\\+lS_1\end{matrix}\right|x^{n-1}\left.\begin{matrix}+S_3\\+lS_2\end{matrix}\right|x^{n-2}+.......\left.\begin{matrix}+S_n\\+lS_{n-1}\end{matrix}\right|x+lS_n$$

Лёгка можам пераканацца, што атрыманая формула ўложана паводле таго самага закону, што й формула (A).

Сапраўды:

Паказальнік ступені пры x у першым члене $(n+1)$ ёсьць роўны колькасьці множаных двохчленаў, і ў кожным наступным члене зьмяншаецца на адзінку.

Коэфіцыэнт другога члена S_1+l ёсьць сума членаў

$$a,\ b,\ c \ldots\ldots к,\ l.$$

Коэфіцыэнт трэцяга члена S_2+lS_1 складаецца з S_2 (г. ё. сумы здабыткаў (комбінацый) з членаў a, b, $c\ldots$ $к$ па 2) і з $S_1 l$ (г. ё. здабытку кожнага выразу a, b, $c\ldots\ldots к$ па l), а значыцца S_2+lS_1 ёсьць сума здабыткаў (комбінацый) з членаў a, b, $c\ldots\ldots к$, l, узятых па 2.

У падобны спосаб можам давесьці, што коэфіцыэнт пры чацьвертым члене ёсьць сума здабыткаў (комбінацый) з членаў: a, b, $c\ldots\ldots к$, l, узятых па 3 і г. д.

Апошні член lS_n ёсьць здабытак усіх другіх членаў множаных двохчленаў.

З данага доваду бачым, што калі формула (А) ёсьць правільная для n сумножнікаў, то будзе правільнай і тады, калі колькасьць сумножнікаў павялічым на 1. Але мы беспасрэдна пераканаліся, што яна—правільная для 4 сумножнікаў; адсюль вынікае, што яна правільная і для 5 сумножнікаў, а будучы правільнай для 5 сумножнікаў, яна ёсьць правільная для 6 і г. д., наогул для n сумножнікаў.

Спосаб, які мы ўжылі пры даным довадзе, называецца „довадам ад n да $n+1$". Часта яшчэ называюць яго «матэматычнай індукцыяй», або «поўнай індукцыяй».

Карыстаючыся формулай (А), знойдзем:

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=x^4+10x^3+35x^2+50x+24.$$

Разьвіненьне двохчлена Ньютона.

§ 107. Дапусьцім, што ва ўсіх сумножніках формулы (А):

$$(x+a)(x+b)\ldots\ldots(x+к)=x^n+S_1x^{n-1}+S_2x^{n-2}+\ldots\ldots+S_{n-1}x+S_n$$

другія члены: a, b, $c\ldots\ldots к$ ёсьць роўныя a, тады левы бок роўнасьці замeніцца на $(x+a)^n$

Першы выраз правага боку x^n застанецца бяз зьмены.

Коэфіцыэнт другога выразу $S_1=a+b+c+\ldots\ldots+к$ заменіцца на na.

Коэфіцыэнт трэцяга выразу $S_2=ab+ac+bc+\ldots\ldots$ заменіцца на a^2, паўторанае столькі разоў, колькі можна ўтварыць комбінацый з n элемэнтаў па 2, г. ё. на

$$\frac{n(n-1)}{1.2}a^2=C_n^2a^2$$

Коэфіцыэнт чацьвертага выразу

$$S_3=abc+abd+bcd+\ldots\ldots$$

заменіцца на a^3, паўторанае столькі разоў, колькі можна ўтварыць комбінацый з n элемэнтаў па 3, г. ё. на

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^3=C_n^3a^3 \qquad \ldots\ldots \text{ і г. д.}$$

Апошні выраз $S_n=abc\ldots\ldots$ заменіцца на a^n.

Такім чынам формула будзе мець наступны від:

$$(x+a)^n=x^n+nax^{n-1}+C_n^2a^2x^{n-2}+\ldots\ldots+C_n^ka^kx^{n-k}+\ldots\ldots+na^{n-1}x+a^n \quad \text{(B)}$$

Атрыманая формула называецца *двохчленам Ньютона*, а правы бок яе—*разьвіненьнем двохчлена.*

Бадаючы формулу (B), бачым, што колькасьць выразаў разьвіненьня двохчлена ёсьць большая на адзінку за паказальнік двохчлена.

Паказальнік ступені x у першым выразе ёсьць роўны паказальніку двохчлена n, а ў кожным наступным зьмяншаецца на адзінку; урэшце апошні выраз разьвіненьня заключае паказальнік пры x, роўны нулю. Наадварот, паказальнік пры a пасьледаўна ўзрастае на адзінку ад 0 да n. Такім чынам вымер кожнага выразу разьвіненьня ёсьць роўны паказальніку ступені двохчлена n.

Коэфіцыэнт першага выразу ёсьць 1.

Коэфіцыэнт другога выразу ёсьць роўны паказальніку двохчлена n.

Коэфіцыэнт трэцяга выразу ёсьць роўны колькасьці комбінацый з n элемэнтаў па 2.

Коэфіцыэнт чацьвертага выразу ёсьць роўны колькасьці комбінацый з n элемэнтаў па 3.

Наогул, коэфіцыэнт $(\kappa+1)$-га выразу ёсьць роўны колькасьці комбінацый з n элемэнтаў па κ, г. ё. C_n^k.

Параўнаўшы цяпер коэфіцыэнты выразаў, аднакова адлеглых ад пачатку і канца, бачым, што коэфіцыэнт I выразу ад пачатку разьвіненьня ёсьць 1, коэфіцыэнт першага выразу ад канца (г. ё. апошняга) ёсьць C_n^n, г. ё. таксама 1.

Коэфіцыент II выразу ад пачатку$=n$, г. ё. C_n^1, коэфіцыэнт II выразу ад канца (прадапошняга) ёсьць C_n^{n-1}, але $C_n^1=C_n^{n-1}$.

Коэфіцыэнт трэцяга выразу ад пачатку C_n^2, а трэцяга ад канца$=$ $=C_n^{n-2}$, але $C_n^2=C_n^{n-2}$ і г. д.

Адсюль вынікае, што *выразы разьвіненьня двохчлена Ньютона, аднакова адлеглыя ад пачатку і канца, маюць аднаковыя коэфіцыэнты.*

ПРЫКЛАДЫ:

1. $(x+a)^7=x^7+7ax^6+\frac{7.6}{1.2}a^2x^5+\frac{7.6.5}{1.2.3}a^3x^4+\frac{7.6.5}{1.2.3}a^4x^3+\frac{7.6}{1.2}a^5x^2+$
$+7a^6x+a^7=x^7+7ax^6+21a^2x^5+35a^3x^4+35a^4x^3+21a^5x^2+7a^6x+a^7$

2. $(2a+b)^4=(2a)^4+4.(2a)^3.b+\frac{4.3}{1.2}(2a)^2b^2+4.2ab^3+b^4=$
$$=16a^4+32a^3b+24a^2b^2+8ab^3+b^4.$$

3. $\left(\frac{1}{2}b+2\sqrt{c}\right)^4=\left(\overset{x}{\overbrace{\frac{1}{2}b}}+\overset{a}{\overbrace{2c^{1/2}}}\right)^4=$

$$=\left(\frac{1}{2}b\right)^4+4\left(\frac{1}{2}b\right)^3\cdot 2c^{1/2}+\frac{4.3}{1.2}\left(\frac{1}{2}b\right)^2\cdot\left(2c^{1/2}\right)^2+4\cdot\frac{1}{2}b\left(2c^{1/2}\right)^3+\left(2c^{1/2}\right)^4=$$

$$=\frac{1}{16}b^4+4\cdot\frac{1}{8}b^3\cdot 2c^{1/2}+6\cdot\frac{1}{4}b^2\cdot 4c+4\cdot\frac{1}{2}b\cdot 8c^{3/2}+16c^2=$$

$$=\frac{1}{16}b^4+b^3\sqrt{c}+6b^2c+16bc\sqrt{c}+16c^2.$$

§ 108. *Агульным выразам* разьвіненьня двохчлена Ньютона называем выраз, які знаходзіцца посьле адвольнай (якой-хочаш) колькасьці κ выразаў, г. ё., які знаходзіцца на $(\kappa+1)$ месцы. Калі выраз гэты абазначым праз T_{k+1}, то на аснове формулы (B) можам напісаць:

$$T_{k+1}=C_n^k a^k x^{n-k}$$

Падстаўляючы ў гэтай формуле на месца κ лікі 1,2,3,.. (пры вядомым паказальніку ступені двохчлена n), атрымаем значэньне адвольнага выразу двохчлена, апрача першага; так, напрыклад, каб атрымаць 5-ты выраз разьвіненьня $(x+a)^9$, трэба ў формуле агульнага выразу падставіць 5 на месца $\kappa+1$ (г. ё. 4 на месца κ) і 9 на месца n, атрымаем тады:

$$T_5=C_9^4 \cdot a^4 \cdot x^5=\frac{9.8.7.6}{1.2.3.4}a^4x^5=126a^4x^5.$$

Калі параўнаем два пасьледаўныя выразы разьвіненьня двохчлена Ньютона:

$$T_{k+1}=\frac{n(n-1).....(n-\kappa+1)}{1.2.3.....\kappa}a^k x^{n-k}$$

$$\text{і}\quad T_{k+2}=\frac{n(n-1)....(n-\kappa+1)(n-\kappa)}{1.2.3.....\kappa(\kappa+1)}a^{k+1}x^{n-k-1},$$

лёгка заўважым, што коэфіцыэнт наступнага выразу ёсьць роўны коэфіцыэнту папярэдняга, памножанаму на паказальнік ступені x у гэтым выразе і падзеленаму на колькасьць папярэдніх выразаў.

П Р Ы К Л А Д Ы:

1. Ведаючы, што 5-ты выраз разьвіненьня двохчлена $(x+a)^{12}$ ёсьць роўны $495a^4x^8$, знайсьці шосты выраз.

Адказ.

$$T_6=\frac{495.8}{5}a^5x^7=792a^5x^7$$

2. Знайсьці сярэдні выраз разьвіненьня

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\sqrt[4]{4x^3}\right)^6$$

Разьвязаньне.

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\sqrt[4]{4x^3}\right)^6=\left(\overbrace{x^{-\frac{1}{3}}}^{x}+\overbrace{4^{\frac{1}{4}}x^{\frac{3}{4}}}^{a}\right)^6$$

З прычыны таго, што разьвіненьне двохчлена заключае 7 выразаў, дык сярэднім выразам ёсьць 4-ты выраз і значыцца:

$$\kappa+1=4;\ \kappa=3;\ n=6.$$

Такім чынам:

$$T_4=\frac{6.5.4}{1.2.3}\cdot\left(4^{\frac{1}{4}}.x^{\frac{3}{4}}\right)^3\cdot\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^3=$$

$$=20\cdot 4^{3/4}.x^{9/4}.x^{-1}=20.2^{6/4}.x^{5/4}=40x\sqrt[4]{4x}$$

3. Знайсьці коэфіцыэнт таго выразу разьвіненьня двохчлена

$$\left(\sqrt[6]{z}+\sqrt[3]{z^2}\right)^{12},$$

які зьмяшчае ў сабе z^6.

Разьвязаньне.

$$\left(\sqrt[6]{z}+\sqrt[3]{z^2}\right)^{12}=\left(z^{1/6}+z^{2/3}\right)^{12}$$

$$T_{k+1}=C_{12}^{k}.\left(z^{2/3}\right)^{k}.\left(z^{1/6}\right)^{12-k}=C_{12}^{k}.z^{\frac{2k}{3}}.z^{\frac{12-k}{6}}=C_{12}^{k}.z^{\frac{k+4}{2}}$$

але з умоў задачы ведаем, што

$$z^{\frac{\kappa+4}{2}}=z^6,$$

значыцца:

$$\frac{\kappa+4}{2}=6,$$

адкуль $\kappa=8$;

з гэтае прычыны

$$T_9=C_{12}^{8}z^6$$

Шуканы коэфіцыэнт $=C_{12}^{8}=C_{12}^{4}=\dfrac{12.11.10.9}{1.2.3.4}=495.$

4. Знайсьці выраз разьвіненьня двохчлена

$$\left(\sqrt{a^{-1}}+\sqrt[3]{a}\right)^{15},$$

які не зьмяшчае ў сабе a.

Разьвязаньне.

$$\left(\sqrt{a^{-1}}+\sqrt[3]{a}\right)^{15}=\left(\overset{z}{\widehat{a^{-\frac{1}{2}}}}+\overset{a}{\widehat{a^{\frac{1}{3}}}}\right)^{15}$$

$$T_{k+1}=C_{15}^{k}\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{k}\cdot\left(a^{-\frac{1}{2}}\right)^{15-k}=C_{15}^{k}a^{\frac{k}{3}}a^{-\frac{15-k}{2}}=C_{15}^{k}a^{\frac{5k-45}{6}}$$

але з умоў задачы

$$a^{\frac{5\kappa-45}{6}}=a^0,$$

адсюль

$$\frac{5\kappa-45}{6}=0 \quad \text{і} \quad \kappa=9$$

$$T_{10}=C_{15}^{9}a^0=C_{15}^{6}=\frac{15.14.13.12.11.10}{1.2.3.4.5.6}=5005.$$

§ 109. Каб знайсьці формулу разьвіненьня $(x-a)^n$, трэба ва ўсіх выразах формулы (B) падставіць на месца a выраз $(-a)$; тады выразы, якія заключаюць няцотныя ступені a, зьменяць знакі, і двохчлен будзе мець від:

$$(x-a)^n=x^n-nax^{n-1}+C_n^2a^2x^{n-2}-C_n^3a^3x^{n-3}+\ldots\ldots\pm a^n$$

Калі ў гэтай формуле зробім

$$x=a=1,$$

то атрымаем:

$$0=1-n+C_n^2-C_n^3+\ldots\ldots\pm 1.$$

З формулы гэтай бачым, што *сума коэфіцыэнтаў на цотных месцах двохчлена ёсьць роўная суме коэфіцыэнтаў на няцотных месцах.*

Калі ў формуле (B)

$$(x+a)^n=x^n+nax^{n-1}+C_n^2a^2x^{n-2}+ \ldots\ldots +a^n$$

зробім

$$x=a=1,$$

то атрымаем:

$$(1+1)^n=2^n=1+n+C_n^2+C_n^3+ \ldots\ldots +1.$$

Гэта даводзіць, што *сума ўсіх коэфіцыэнтаў у разьвіненьні двохчлена* $(x+a)^n$ *ёсьць роўная* 2^n.

§ 110. Грунтуючыся на формуле (B) двохчлена Ньютона, можам паднасіць у ступень n і многачлены.

Так, напрыклад, каб знайсьці значэньне выразу:

$$(a+2b-b^2)^4,$$

абазначаем $(2b-b^2)$ праз y, тады:

$$(a+y)^4=a^4+4a^3y+6a^2y^2+4ay^3+y^4.$$

Падставіўшы цяпер $2b-b^2$ на месца y, атрымаем:

$$(a+2b-b^2)^4=a^4+4a^3(2b-b^2)+6a^2(2b-b^2)^2+4a(2b-b^2)^3+(2b-b^2)^4.$$

А дзеля таго, што:

$$(2b-b^2)^2=4b^2-4b^3+b^4$$

$$(2b-b^2)^3=8b^3-12b^4+6b^5-b^6$$

$$(2b-b^2)^4=16b^4-32b^5+24b^6-8b^7+b^8,$$

значыцца канчаткова:

$$(a+2b-b^2)=a^4+8a^3b-4a^3b^2+24a^2b^2-24a^2b^3+6a^2b^4+$$
$$+32ab^3-48ab^4+24ab^5-4ab^6+16b^4-32b^5+24b^6-8b^7+b^8.$$

Задачы.

Знайсьці здабыткі наступных сумножнікаў.

809. $(x+1)(x+3)(x+5)$

810. $(x-3)(x-4)(x+2)$

811. $(x+5)(x+6)(x-8)$

812. $(3x+1)(2x+1)(5x+1)$

Разьвінуць ступені двохчленаў:

813. $(x+4)^4$

814. $(x-y)^5$

815. $(1+x)^8$

816. $(x-1)^9$

817. $\left(2-\frac{1}{2}x\right)^5$

818. $(2a+3b)^5$

819. $(3a-2b)^6$

820. $\left(\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}b\right)^6$

821. $(a^5-x^5)^5$

822. $(2x^3-1)^5$

823. $\left(\frac{1}{2}a^{-3}b^2+\frac{2}{3}ab^{-3}\right)^6$

824. $(\sqrt{a}+x)^7$

825. $\left(\sqrt{\frac{1}{2}a}-\sqrt{2x}\right)^7$ 826. $(\sqrt{3ay}+\sqrt[3]{2x^2y})^7$

827. У разьвіненьні $(a+b)^{20}$ знайсьці 5-ты выраз.

828 » $(3+2x^2)^9$ » 6-ты »

829 » $(a^2-3x^5)^{20}$ » 12-ты »

830 » $(1+x^2)^{30}$ » 18-ты »

831 » $(\sqrt{a}-\sqrt[3]{x^2})^{11}$ » 4-ты »

832. Знайсьці коэфіцыэнт пры выразе a^5b^4 разьвіненьня $(a+b)^9$

833. » » » » $x^{10}y^4$ » $(x+y)^{14}$

834. » » » » a^5b^3 » $(2a+3b)^8$

835. » » » » a^4b^7 » $(3a-2b)^{11}$

836. » » » » a^8b^4 » $\left(\frac{1}{2}a+\frac{2}{3}b\right)^{12}$

837. » » » » z^4 » $(\sqrt{z}+\sqrt[3]{z})^9$

838. Знайсьці коэфіцыэнт таго выразу разьвіненьня $(\sqrt[3]{z}+\sqrt{z^{-1}})^{15}$, які не заключае z.

839. Сума коэфіцыэнтаў другога і трэцяга выразаў разьвіненьня

$$(z\sqrt[3]{z}+z^{-1,8666....})^n$$

ёсьць роўная 78. Знайсьці выраз разьвіненьня, які не заключае z.

840. Знайсьці

$$(1+x)^7+(1-x)^7$$

841. Знайсьці

$$(2a+3b)^6+(2a-3b)^6$$

842. Знайсьці

$$(4x-3y)^5-(4x+3y)^5$$

Вылічыць:

843. $(2+\sqrt{6})^4$ 844. $(\sqrt{5}+\sqrt{3})^6$

845. $(2\sqrt{2}+\sqrt{6})^6$ 846. $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})^5$

847. Знайсьці гранічнае значэньне выразу

$$\frac{(1+x)^6-1}{x}, \quad \text{калі } x \to 0.$$

848. Знайсьці гранічнае значэньне выразу

$$\frac{(1+x)^9-(1-x)^9}{x}, \quad \text{калі } x \to 0.$$

849. Разьвінуць у многачлен ступень:

$$(a+bx+cx^2)^4$$

IX.

Няроўнасьці.

Падзел няроўнасьцяў і іх уласьцівасьці.

§ 111. *Няроўнасьцяй* называюцца два альгэбрычныя выразы, злучаныя знакамі няроўнасьці:

$$> \text{(больш за) і } < \text{(менш ад).}$$

Лік a называем большым за b, калі розьніца $a-b$ ёсьць дадатная, і меншым ад b, калі розьніца $a-b$ ёсьць адмоўная, напрыклад:

$$11 > 3, \quad \text{бо} \quad 11-3=8$$

$$-5 < -2, \quad \text{бо} \quad -5-(-2)=-3 .$$

Няроўнасьці бываюць *бязумоўныя* (тожсамыя) і *умоўныя* (якія падобны да раўнаньняў)

Няроўнасьць называецца бязумоўнай, калі яна правільна пры ўсялякіх значэньнях літар, уходзячых у яе склад, і—умоўнай, калі яна правільна не пры ўсялякіх значэньнях яе літар, а толькі пры некаторых.

Так, напрыклад, няроўнасьці

$$25 > 4, \text{ або } a+b^2 > a$$

ёсьць бязумоўныя.

Няроўнасьці

$$a+2 > 6, \quad \text{або} \quad 3x+\frac{1}{2} < 10$$

ёсьць умоўныя.

§ 112. I. *Да абодвух бакоў няроўнасьці можам дадаць адзін і той самы лік, не зьмяняючы знака няроўнасьці.*

І праўда, калі

$$a > b,$$

то, згодна азначэньню,

$$a-b > 0,$$

а, значыцца, і

$$a-b+c-c > 0,$$

або

$$(a+c)-(b+c) > 0,$$

адкуль

$$a+c > b+c$$

Вынік I.

Ад абодвух бакоў няроўнасьці можам адняць адзін і той самы лік, не зьмяняючы знака няроўнасьці, бо адняць лік c—гэта тое самае, што дадаць $(-c)$.

Вынік II.

Кожны выраз можам перанесьці з аднаго боку няроўнасьці на другі са зьмененым знакам.

І праўда, дадаўшы да абодвух бакоў няроўнасьці

$$a-b < c+d$$

па $b-d$, атрымаем.

$$a-b+b-d < c+d+b-d$$

або

$$a-d < c+b$$

II. *Абодва бакі няроўнасьці можам памножыць або падзяліць на адзін і той самы дадатны лік, не зьмяняючы знака няроўнасьці.*

Памнажаючы-ж або дзелячы абодва бакі на адмоўны лік, зьмяняем знак няроўнасьці на супрацiўны.

Довад.

1) Множнік або дзельнік—дадатны.

Калі

$$a > b,$$

тады

$$a-b > 0$$

Але, памножыўшы або падзяліўшы дадатны лік $(a-b)$ на дадатны лік c, атрымаем і рэзультат дадатны; значыцца:

$$ac-bc > 0 \quad \text{і} \quad \frac{a}{c}-\frac{b}{c} > 0,$$

адсюль

$$ac > bc \quad \text{і} \quad \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$$

2) Множнік або дзельнік—адмоўны.
Маем:

$$a > b$$

$$\text{і} \quad a-b > 0.$$

Хай c—адмоўны лік, тады $(-c)$ будзе дадатным і дзеля гэтага:

$$-ac > -bc\,;\ -\frac{a}{c} > -\frac{b}{c}$$

Перанясем у апошніх няроўнасьцях члены з аднаго боку на другі;

тады

$$bc > ac\,;\ \frac{b}{c} > \frac{a}{c}\,,$$

або

$$ac < bc \quad \text{і} \quad \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$$

Так, напрыклад, калі абодва бакі няроўнасьці

$$2 > -7$$

памножым на 3, то атрымаем

$$6 > -21;$$

памнажаючы-ж абодва бакі гэтай няроўнасьці на (—4), будзем мець:

$$-8 < 28.$$

Вынік I.

У няроўнасьці можам звольніцца ад назоўнікаў, памнажаючы ўсе яе выразы на супольны назоўнік.

Напрыклад, няроўнасьць

$$\frac{5}{6} + 2a < 8 - \frac{3b}{4}$$

можам напісаць у відзе

$$10 + 24a < 96 - 9b$$

Вынік II.

Перад усіма выразамі няроўнасьці можам зьмяніць знакі, зьмянійшы адначасна і знак няроўнасьці на супрацiўны.

Правільнасьць гэтага выніку стане зразумелай, калі мы ўсе выразы няроўнасьці памножым на (—1); напрыклад, памнажаючы абодва бакі няроўнасьці

$$-3 < 6$$

на —1, атрымаем:

$$3 > -6.$$

Разьвязваньне ўмоўных няроўнасьцяў.

§ 113. Умоўная няроўнасьць заключае, апрача вядомых лікаў, таксама і невядомыя. Разьвязаць няроўнасьць—значыць знайсьці значэньні невядомай велічыні, пры якіх няроўнасьць ёсьць правільная (тожсамая).

Для прыкладу разьвяжам няроўнасьць:

$$2(3-x) > \frac{x}{3}$$

Зносячы дужкі, атрымаем:

$$6 - 2x > \frac{x}{3}$$

Зносячы назоўнік:

$$18 - 6x > x$$

Пераносячы невядомыя выразы на левы бок, а вядомы выраз на правы:

$$-6x - x > -18,$$

або

$$-7x > -18.$$

Зьмяняючы знакі на супраціўныя, зьмяняем і знак няроўнасьці:

$$7x < 18.$$

Падзяліўшы абодва бакі на 7, канчаткова атрымаем:

$$x<\frac{18}{7}\text{, або } x<2\frac{4}{7}\,,$$

г. ё. усе лікі, меншыя ад $2\frac{4}{7}$, здавальняюць данай няроўнасьці.

Бачым, што ўмоўная няроўнасьць з аднэй невядомай мае неаграні-чана-вялікую колькасьць разьвязкаў. Разьвязваючы няроўнасьць, мы знаходзім толькі яе вышэйшую або ніжэйшую граніцу.

Калі $x>a$, тады лік a ёсьць ніжэйшая граніца значэньняў невядомай x; калі-ж $x<a$, тады лік a ёсьць вышэйшая граніца значэньняў невядомай x.

§ 114. Калі маем некалькі няроўнасьцяў з аднэй невядомай, то, разьвязваючы іх, знаходзім адпаведную колькасьць граніц невядомай; пры гэтым могуць быць тры выпадкі:

1) *Усе граніцы—вышэйшыя*, напрыклад

$$x<5;\ x<-2;\ x<7\frac{1}{3}$$

Каб здавольніць усім няроўнасьцям, бярэм у гэтым выпадку найніжэйшую граніцу, а мянавіта:

$$x<-2\,,$$

бо, калі невядомая x ёсьць меншая ад —2, то тым болей яна менш ад 5 і $7\frac{1}{3}$.

2) *Усе граніцы—ніжэйшыя*, напрыклад:

$$x>4\frac{3}{5};\ x>7;\ x>-3.$$

У гэтым выпадку здавольнім усім няроўнасьцям, узяўшы найвышэйшую граніцу

$$x>7\,,$$

бо, калі x ёсьць больш за 7, то тым болей яна болей за $4\frac{3}{5}$ і —3

3) Калі маем *некалькі вышэйшых і ніжэйшых граніц*, то прыводзім іх да дзьвёх граніц, узяўшы найніжэйшую з вышэйшых граніц і найвышэйшую з ніжэйшых.

Так, напрыклад, маючы:

$$x>2;\ x>5;\ x>-1;\ x<9;\ x<12\frac{1}{2}\,,$$

мы здавольнім усім няроўнасьцям, узяўшы

$$x>5 \text{ і } x<9\,.$$

Калі пры гэтым здарыцца, як у даным прыкладзе, што ніжэйшая граніца ёсьць менш ад вышэйшай граніцы, то кажам, што *граніцы ёсьць згодныя* і невядомая мае рад значэньняў, якія заключаюцца паміж гэтымі граніцамі.

Наадварот, калі здарыцца, што ніжэйшая граніца будзе больш за вышэйшую граніцу, тады *даныя граніцы ня ёсьць згодныя*, і няроўнасьці—не аднačасныя.

Так, напрыклад, маючы

$$x>7 \text{ і } x<3\,,$$

бачым, што ні адзін лік ня можа адказваць даным няроўнасьцям.

ПРЫКЛАД I.

Знайсьці ўсе цэлыя лікі, здавальняючыя ўкладу няроўнасьцяў:

$$3(x+1)>5x-7$$

$$x+\frac{1}{2}>\frac{1}{3}(x-1)$$

Разьвязаньне I няроўнасьці.

$$3x+3>5x-7$$

$$3x-5x>-7-3$$

$$-2x>-10$$

$$2x<10$$

$$x<5$$

Разьвязаньне II няроўнасьці.

$$x+\frac{1}{2}>\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$$

$$x-\frac{1}{3}x>-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{3}x>-\frac{5}{6}$$

$$x>-1\frac{1}{4}$$

Адсюль

$$x=-1;0;1;2;3;4.$$

ПРЫКЛАД II.

Знайсьці капітал, які пры процантнай таксе, большай за 4, дае ў год 640 рублёў зыску.

Разьвязаньне.

Калі абазначым колькасьць рублёў капіталу праз x, то знойдзем, што пры процантнай таксе $=4$ ён дае зыску $\frac{4x}{100}$ рублі; але сума гэтая менш ад 640, бо процантная такса ёсьць большая за 4; дзеля гэтага

$$\frac{4x}{100}<640,$$

адкуль

$$x<16000.$$

Задачы.

Памножыць няроўнасьці:

850. $3>-1$ на 7.

851. $-9<1$ на 2

852. $3>0{,}5$ на -2.

853. $a^2>b$ на $-b$

854. $(a-b)^2>(x+y)^2$ на -1.

855. $m-1>a$ на $-m$.

Падзяліць няроўнасьці:

856. $-36<48$ на 6.

857. $-10<+5$ на -5.

858. $a^2-b^2>a-b$ на $(a-b)$

859. $13x+26z>91x^2$ на -13

Разьвязаць няроўнасьці:

860. $x+4>2-3x$

861. $4x-3>1\frac{1}{2}x-\frac{3}{5}$

862. $(x+1)^2<x^2+3x-5$

863. $(x^2-a^2)x<(x-a)(x^2-2a^2x+2)$

864. $\frac{2ax+3b}{5bx-4a}>4$

865. $\frac{2c^2x}{a^2}-\frac{a^2}{2b}>\frac{3x}{2}+\frac{b^2}{a}$

Разьвязаць у цэлых ліках наступныя адначасныя няроўнасьці:

866. $2x+5>15$
$3x-5>25$

867. $7x-12<9$
$9x+10<55$

868. $4x+5>45$
$3x-20<25$

869. $7x+8>40$
$2x-5<3$

870. $\frac{1}{2}(8x+3)<2x+25$
$6x+\frac{5}{7}>4x+7$

871. $15x-2>2x+\frac{1}{3}$
$2(x-4)<\frac{1}{2}(3x-14)$

872. $\frac{1}{2}(x-4)+3>\frac{1}{4}(x+2)+\frac{1}{3}x>\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1}{3}$

873. $4x-3>3x+2$
$10-7x<28-9x$
$5x+9>2x+30$

874. Арол знаходзіцца на вышыні 1200 мэтраў і ляціць уверх па 250 мэтраў у мінуту. Праз які час паднімецца ён вышэй за гару, вышыня якой = 2000 мэтраў?

875. Колькі я маю грошай, калі вядома, што падвойны іх лік, зьменшаны на 6, ёсьць меншы ад 2, а пяцёхразавы іх лік, зьменшаны на 7, ёсьць большы за 3?

876. На стале знаходзяцца гарэхі. Калі далажыць яшчэ 50 гарэхаў, то колькасьць гарэхаў павялічыцца менш, як у $1\frac{1}{2}$ разы; калі-ж далажыць 51 гарэх, то колькасьць гарэхаў павялічыцца больш, як у $1\frac{1}{2}$ разы. Колькі гарэхаў знаходзіцца на стале?

877. Калі да лічніка і назоўніка дробу дадаць па 1, то значэньне яго будзе больш за $\frac{11}{15}$, калі-ж ад лічніка і назоўніка адняць па 1, то значэньне яго будзе менш за $\frac{11}{15}$. Знайсьці гэты дроб, калі вядома, што яго лічнік на 1 менш за назоўнік?

X.

Неазначаныя раўнаньні.

§ 115. *Неазначаным* называецца такое раўнаньне, якое заключае больш, як адну невядомую.

Неазначанае раўнаньне першае ступені з дзьвёма невядомымі можна заўсёды прывесьці да агульнага віду

$$ax+by=c,$$

у якім a, b і c ёсьць цэлыя лікі (бо ад дробаў у кожным раўнаньні можам звольніцца).

Калі лікі a, b і c маюць супольны множнік, то перад разьвязаньнем раўнаньня трэба яго скараціць на гэты множнік.

Калі коэфіцыэнты a і b маюць супольны множнік, на які выраз c ня дзеліцца, то раўнаньне ня мае цэлых разьвязкаў. Каб давесьці гэта, дапусьцім, што такім множнікам ёсьць лік m. Падзяліўшы раўнаньне на m і абазначыўшы цэлы лік $\frac{a}{m}$ праз a_1, а цэлы лік $\frac{b}{m}$ праз b_1, атрымаем

$$a_1x+b_1y=\frac{c}{m}.$$

Ясна, што данае раўнаньне ня можа мець цэлых разьвязкаў, бо ў супрацiўным выпадку цэлы левы бок раўняўся-бы дробаваму праваму. Напрыклад, раўнаньне

$$4x+6y=25,$$

або посьле скарочаньня

$$2x+3y=12\frac{1}{2},$$

ня мае цэлых разьвязкаў.

Разьвязаньне неазначаных раўнаньняў спосабам паступовай падстаноўкі

Каб разьвязаць раўнаньне

$$ax+by=c$$

спосабам паступовай падстаноўкі, азначым з яго адну невядомую, напрыклад x:

$$x=\frac{c-by}{a}$$

Падстаўляючы ў атрыманай формуле адвольныя значэньні на месца y, будзем атрымліваць адпаведныя значэньні для x; а значыцца:

калі $y=$	-2	-1	0	1	2	......
то $x=$	$\frac{c+2b}{a}$	$\frac{c+b}{a}$	$\frac{c}{a}$	$\frac{c-b}{a}$	$\frac{c-2b}{a}$	......

Бачым, што неазначанае раўнаньне з дзьвёма невядомымі мае бяскрайна-вялікую колькасьць пар разьвязкаў.

Колькасьць разьвязкаў неазначанага раўнаньня часта абмяжоўваем умовай, што разьвязкі павінны быць цэлыя й дадатныя.

П Р Ы К Л А Д I.

Разьвязаць раўнаньне

$$3x+5y=34.$$

Выражаючы x праз y, атрымаем:

$$x=\frac{34-5y}{3}$$

Калі хочам атрымаць дадатныя разьвязкі, падстаўляем у атрыманую формулу рад натуральных дадатных лікаў, а значыцца:

калі	$y=$	1	2	3	4	5	6	7	......
то	$x=$	$9\frac{2}{3}$	8	$6\frac{1}{3}$	$4\frac{2}{3}$	3	$1\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	......

Падстаўляючы далей на месца y лікі $8, 9, 10$ і г. д., будзем атрымліваць для x адмоўныя значэньні.

З атрыманых рэзультатаў можам выбраць толькі дзьве пары цэлых дадатных разьвязкаў, а мянавіта:

$$y=2 \quad \text{і} \quad \text{тады } x=8$$

$$\text{і} \quad y=5 \quad \text{і} \quad \text{тады } x=3.$$

Надта лёгка атрымоўваем цэлыя разьвязкі раўнаньня, калі коэфіцыэнт пры аднэй невядомай ёсьць адзінка; у гэтым выпадку раўнаньне мае від:

$$x+by=c, \quad \text{або} \quad ax+y=c$$

Калі, напрыклад, азначым x з першага раўнаньня

$$x+by=c,$$

атрымаем

$$x=c-by.$$

Даючы ў гэтай формуле адвольныя цэлыя значэньні y, будзем атрымліваць цэлыя значэньні x.

ПРЫКЛАД.

Знайсьці цэлыя разьвязкі раўнаньня

$$x+11y=18.$$

Разьвязаньне.

$$x=18-11y.$$

Калі	$y=$	-2	-1	0	1	2	3	......
то	$x=$	40	29	18	7	-4	-15	......

Разьвязваньне неазначаных раўнаньняў спосабам Эйлера *).

117. На папярэднім прыкладзе мы пераканаліся, што, калі коэфіцыэнт пры аднэй невядомай у неазначаным раўнаньні ёсьць адзінка, то, падстаўляючы адвольныя цэлыя лікі на месца другой невядомай, будзем атрымліваць цэлыя значэньні для першай невядомай.

З гэтае прычыны, у мэтах разьвязаньня неазначанага раўнаньня з дзьвёма невядомымі, стараемся прывесьці яго да такога віду, у якім адна невядомая мае коэфіцыент $=1$.

Напрыклад, разьвязваючы раўнаньне:

$$7x+17y=65,$$

азначаем перш за ўсё невядомую, якая мае меншы коэфіцыэнт, а мянавіта x:

$$x=\frac{65-17y}{7}, \text{ або } x=9-2y+\frac{2-3y}{7}$$

З прычыны таго, што x і y ёсьць цэлыя лікі, значыцца,

$$\frac{2-3y}{7}$$

павінен быць таксама цэлым лікам; калі абазначым яго праз t, тады атрымаем:

$$\frac{2-3y}{7}=t \qquad (1) \qquad\qquad x=9-2y+t \qquad (A)$$

З раўнаньня (1) азначаем невядомую, якая мае меншы коэфіцыэнт, а мянавіта y:

$$y=\frac{2-7t}{3}, \text{ або } y=-2t+\frac{2-t}{3}$$

У раўнаньні гэтым y і t ёсьць цэлыя лікі; значыцца, і $\frac{2-t}{3}$ мае цэлае значэньне; абазначым яго праз t_1, тады:

$$\frac{2-t}{3}=t_1 \qquad (2) \qquad\qquad y=-2t+t_1 \qquad (B)$$

З раўнаньня (2) азначаем невядомую t:

$$t=2-3t_1 \qquad (C)$$

Посьле атрыманьня раўнаньня (C), у якім невядомая t мае коэфіцыэнт, роўны адзінцы, значэньне гэтай невядомай падстаўляем у раўнаньне (B); атрымаем:

$$y=-2.(2-3t_1)+t_1, \text{ або } \underline{y=7t_1-4}$$

*) Славутны нямецкі матэматык (1707–83).

Падставіўшы далей ў раўнаньне (A) атрыманае значэньне y з апошняга раўнаньня і значэньне t з раўнаньня (C), будзем мець:

$$x=9-2(7t_1-4)+2-3t_1\,,\quad \text{або}\quad \underline{x=19-17t_1}.$$

Раўнаньні $y=7t_1-4$ і $x=19-17t_1$ ёсьць агульныя разьвязкі неазначанага раўнаньня $7x+17y=65$.

У гэтых агульных разьвязках, як бачым, коэфіцыэнты пры x і y ёсьць роўныя адзінцы; дзеля гэтага, даючы невядомай t_1 адвольныя цэлыя значэньні, атрымаем цэлыя значэньні для x і y, а мянавіта:

$t_1=$	-2	-1	0	1	2	......
$x=$	53	36	19	2	-15	......
$y=$	-18	-11	-4	3	10	......

Калі пры разьвязваньні раўнаньня стаіць умова, што значэньні невядомых x і y павінны быць цэлыя і дадатныя, то тады з агульнага разьвязку y ($y=7t_1-4$) атрымоўваем:

$$7t_1-4>0,\ \text{або}\ 7t_1>4\,,\ t_1>\frac{4}{7},$$

з агульнага-ж разьвязку x ($x=19-17t_1$) атрымоўваем:

$$19-17t_1>0\,,\ \text{або}\ -17t_1>-19\,,\ \text{ці}\ 17t_1<19,$$

$$t_1<\frac{19}{17},\qquad t_1<1\frac{2}{17}$$

Такім чынам бачым, што t_1 заключаецца паміж $\frac{4}{7}$ і $1\frac{2}{17}$, а дзеля таго, што t_1 цэлы лік, значыцца $t_1=1$. Пры гэтым значэньні t_1 з разьвязку для y маем:

$$y=7-4=3\,,$$

а з разьвязку для x маем:

$$x=19-17=2.$$

Атрыманыя значэньні разьвязкаў ёсьць згодныя і са значэньнямі, атрыманымі ў табліцы.

П Р Ы К Л А Д I.

Знайсьці ўсе цэлыя і дадатныя разьвязкі раўнаньня $5x+8y=51$.

Разьвязаньне.

$$x=\frac{51-8y}{5}=10-y+\frac{1-3y}{5}=10-y+t$$

$$\frac{1-3y}{5}=t$$

$$y=\frac{1-5t}{3}=-t+\frac{1-2t}{3}=-t+t_1$$

$$\frac{1-2t}{3}=t_1$$

$$t=\frac{1-3t_1}{2}=-t_1+\frac{1-t_1}{2}=-t_1+t_2$$

$$\frac{1-t_1}{2}=t_2$$

$$t_1=1-2t_2$$

$$t=-1+2t_2+t_2=3t_2-1$$

$$y=-3t_2+1+1-2t_2=\underline{2-5t_2}$$

$$x=10-2+5t_2+3t_2-1=\underline{8t_2+7}$$

$$2-5t_2>0 \qquad 8t_2+7>0$$

$$-5t_2>-2 \qquad 8t_2>-7$$

$$5t_2<2 \qquad t_2>-\frac{7}{8}$$

$$t_2<\frac{2}{5}$$

Адсюль

$t_2=0$, а, значыцца, $x=7$, $y=2$.

ПРЫКЛАД II.

Разьвязаць у цэлых і дадатных ліках раўнаньне

$$5x+3y=114.$$

Разьвязаньне.

$$y=\frac{114-5x}{3}=38-x-\frac{2x}{3}=38-x-t.$$

$$\frac{2x}{3}=t$$

$$x=\frac{3t}{2}=t+\frac{t}{2}=t+t_1$$

$$\frac{t}{2}=t_1$$

$$t=2t_1$$

$$x=2t_1+t_1=\underline{3t_1}$$

$$y=38-3t_1-2t_1=\underline{38-5t_1}$$

$$3t_1>0 \qquad 38-5t_1>0$$

$$t_1>0 \qquad -5t_1>-38$$

$$5t_1<38$$

$$t_1<\frac{38}{5}, \quad \text{або} \quad t_1<7\frac{3}{5}$$

У даным прыкладзе t_1 мае 7 значэньняў, якія знаходзяцца паміж 0 і $7^3/_5$, значыцца, раўнаньне мае 7 пар цэлых і дадатных разьвязкаў, а мянавіта:

$t_1=$	1	2	3	4	5	6	7
$x=$	3	6	9	12	15	18	21
$y=$	33	28	23	18	13	8	3

ПРЫКЛАД III.

Разьвязваючы ў падобны спосаб раўнаньне

$$5x+4y=7,$$

атрымаем:

$$x=3-4t \quad \text{і} \quad y=5t-2,$$

адкуль

$$t<\frac{3}{4} \quad \text{і} \quad t>\frac{2}{5}.$$

З прычыны таго, што t ёсьць большае за $\frac{2}{5}$ і меншае ад $\frac{3}{4}$, значыцца, цэлых значэньняў для t няма; адсюль вынікае, што раўнаньне ня мае ні воднай пары целых разьвязкаў.

ПРЫКЛАД IV.

Пры разьвязваньні раўнаньня

$$2x+5y=-17$$

атрымаем наступныя агульныя разьвязкі:

$$x=-5t-6, \quad y=2t-1,$$

адкуль:

$$t<-1\frac{1}{5} \quad \text{і} \quad t>\frac{1}{2}$$

Значэньня t ня можам знайсьці, бо няма ліку, большага за $\frac{1}{2}$ і ў той самы час меншага ад $-1\frac{1}{5}$. Атрыманая недарэчнасьць паказвае, што раўнаньне было кепска ўложана, бо дадатны левы бок ня можа быць роўным адмоўнаму леваму.

ПРЫКЛАД V.

Раўнаньне $5x-3y=13$ мае бяскрайна-вялікую колькасьць пар цэлых і дадатных разьвязкаў. І праўда, разьвязваючы яго, атрымоўваем:

$$x=3t_1-1, \quad y=5t_1-6,$$

адкуль

$$t_1>\frac{1}{3} \quad \text{і} \quad t_1>1\frac{1}{5}$$

З прычыны таго, што абедзьве атрыманыя граніцы t — ніжэйшыя, значыцца, ліку t можам даваць адвольныя значэньні, большыя за $1\frac{1}{5}$.

Тады будзем мець:

$t=$	2	3	4	5	......
$x=$	5	8	11	14	......
$y=$	4	9	14	19	......

§ 118. У папярэднім параграфе мы бачылі, што неазначанае раўнаньне можа мець або агранічаную колькасьць пар цэлых і дадатных разьвязкаў, або бяскрайна-вялікую, або, ўрэшце, саўсім іх ня мае.

Азначыць усё гэта можам, не разьвязваючы самага раўнаньня. І праўда:

I) Калі раўнаньне мае від:

$$ax-by=c,$$

у якім знакі пры коэфіцыэнтах a і b—розныя, тады раўнаньне мае неагранічаную колькасьць пар цэлых і дадатных разьвязкаў, бо розьніца двух дадатных лікаў, пры зьмене гэтых лікаў, можа быць аднэй і тэй самай сталай велічынёй.

Так, напрыклад, у раўнаньні

$$5x-2y=7$$

$$x=2t+1 \qquad y=5t-1$$

$$t>-\frac{1}{2} \qquad t>\frac{1}{5}$$

абедзьве ніжэйшыя граніцы паказваюць, што t у агульных разьвязках $x=2t+1$ і $y=5t-1$ можа атрымліваць адвольныя значэньні, большыя за 1;

II) Калі раўнаньне $ax+by=c$ мае ўсе выразы дадатныя і сума коэфіцыэнтаў a і b ёсьць меншая ад c, тады існуе пэўная агранічаная колькасьць пар цэлых і дадатных разьвязкаў; так, напрыклад, раўнаньне

$$4x+3y=11$$

$$x=2-3t \qquad y=1+4t$$

$$t<\frac{2}{3} \quad \text{i} \quad t>-\frac{1}{4},$$

адкуль

$$t=0,$$

мае адну пару цэлых і дадатных разьвязкаў, а мянавіта:

$$x=2 \quad \text{i} \quad y=1.$$

III) Калі раўнаньне $ax+by=c$ мае усе выразы дадатныя, але сума коэфіцыэнтаў a і b ёсьць большая за c, тады раўнаньне саўсім ня мае цэлых разьвязкаў; напрыклад, разьвязваючы раўнаньне

$$5x+4y=3,$$

атрымліваем:

$$x=3-4t \qquad y=5t-3$$

$$t<\frac{3}{4} \qquad t>\frac{3}{5}$$

Няма цэлага ліку, меншага ад $^3/_4$ і большага ад $^3/_5$; з гэтае прычыны t ня можа мець цэлага значэньня і раўнаньне ня мае ні воднай пары цэлых і дадатных разьвязкаў.

§ 119. У параграфе 115-ым мы давялі, што, калі коэфіцыэнты a і b пры x і y у неазначаным раўнаньні $ax+by=c$ маюць супольны множнік, на які c ня дзеліцца без астачы, то раўнаньне ня мае цэлых разьвязкаў.

Цяпер давядзем, што, *калі коэфіцыэнты пры x і y ня маюць супольнага множніка, то раўнаньне мае цэлы разьвязак.*

Разьвязваючы неазначаныя раўнаньні способам Эйлера, можам лёгка заўважыць, што коэфіцыэнты пры невядомых у шэрагу пасьледаўных раўнаньняў мы творым у наступны способ. Дзелім большы коэфіцыэнт неазначанага раўнаньня на меншы; ад дзяленьня гэтага атрымоўваем астачу, якая будзе меншым коэфіцыэнтам другога раўнаньня; потым дзелім меншы коэфіцыэнт першага раўнаньня на першую астачу; атрымоўваем другую астачу, якая будзе меншым коэфіцыэнтам трэцяга раўнаньня; далей дзелім першую астачу на другую, другую на трэцюю і г. д., г. ё. робім так, як пры знаходжаньні найбольшага супольнага падзельніка способам вычэрпываючага дзяленьня.

З прычыны таго, што лікі a і b ня маюць супольных множнікаў, значыцца найбольшым супольным падзельнікам іх ёсьць 1.

Адсюль вынікае, што ў апошнім раўнаньні коэфіцыэнт пры адной невядомай павінен быць роўным адзінцы. З раўнаньня гэтага і атрымоўваем рад цэлых разьвязкаў.

Агульныя формулы цэлых разьвязаньняў неазначанага раўнаньня.

§ 120. Маючы адну пару цэлых разьвязкаў раўнаньня

$$ax+by=c,$$

можам напісаць агульныя формулы, паводле якіх знаходзім усе іншыя пары цэлых разьвязкаў гэтага раўнаньня.

Дапусьцім, што разьвязкамі раўнаньня $ax+by=c$ ёсьць лікі x_1 і y_1; тады маем тожсамасьць:

$$ax_1+by_1=c.$$

Аднімаючы яе ад раўнаньня адпаведнымі бакамі, атрымоўваем:

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)=0.$$

З гэтай роўнасьці азначаем x:

$$a(x-x_1)=-b(y-y_1)$$

$$x-x_1=\frac{-b(y-y_1)}{a}$$

$$x=x_1-\frac{b(y-y_1)}{a}$$

Але x ёсьць цэлы лік, x_1 — таксама цэлы лік, значыцца, і выраз $\frac{b(y-y_1)}{a}$ павінен быць цэлым лікам. У выразе гэтым b ня мае супольных множнікаў з a; з гэтага вынікае, што $y-y_1$ дзеліцца без астачы на a і $\frac{y-y_1}{a}$ ёсьць цэлы лік. Калі лік гэты абазначым праз t, то атрымаем:

$$\frac{y-y_1}{a}=t,$$

адкуль

$$y=y_1+at$$

$$\text{і } x=x_1-\frac{b(y-y_1)}{a}=x_1-bt.$$

А з прычыны таго, што t можа мець і дадатныя й адмоўныя значэньні, значыцца:

$$\underline{x = x_1 \pm bt}$$

$$\underline{y = y_1 \mp at}$$

Прыклад.

Хай у раўнаньні

$$5x + 12y = 59$$

мы знайшлі адну пару разьвязкаў, а іменна:

$$x = 7;\ y = 2\,.$$

Тады маем:

$$a = 5,\quad b = 12;$$

$$x_1 = 7,\quad y_1 = 2.$$

А, значыцца, агульныя формулы разьвязкаў гэтага раўнаньня будуць

$$x = 7 + 12t;\ y = 2 - 5t;$$

або

$$x = 7 - 12t;\ y = 2 + 5t\,.$$

Упрошчаньні пры разьвязваньні неазначаных раўнаньняў.

§ 121. Разьвязваньне неазначаных раўнаньняў спосабам Эйлера часам можам прысьпешыць, уводзячы пэўныя ўпрошчаньні.

I) Калі коэфіцыент a (або b) і выраз c маюць супольны множнік, напрыклад:

$$4x + 15y = 65\,,$$

то прыймаем

$$x = 5x_1\,;$$

тады будзем мець:

$$20x_1 + 15y = 65\,,$$

адкуль, посьле скарочаньня ўсіх выразаў на 5, атрымоўваем больш простае раўнаньне

$$4x_1 + 3y = 13\,;$$

разьвязаўшы яго, знойдзем:

$$y = 3 + 4t;\ x_1 = 1 - 3t\,,$$

адкуль

$$x = 5.(1 - 3t) = 5 - 15t.$$

У раўнаньні

$$8x + 15y = 84$$

лікі 8 і 84 маюць супольны сумножнік 4, а лікі 15 і 84 маюць супольны сумножнік 3. Дзеля гэтага, абазначыўшы x праз $3x_1$, а y праз $4y_1$, і скараціўшы ўсё раўнаньне на 12, атрымаем:

$$2x_1 + 5y_1 = 7\,,$$

адкуль:

$$x_1 = 5t + 1;\ y_1 = 1 - 2t;$$

$$x = 3x_1 = 3.(5t + 1) = 15t + 3$$

$$\text{і}\ \ y = 4y_1 = 4.(1 - 2t) = 4 - 8t\,.$$

II) Калі коэфіцыэнт пры невядомай у дзеліве акажацца большым, чымся палова дзельніка, тады бярэм розьніцу паміж дзельнікам і гэтым коэфіцыэнтам са зьмененым знакам, адначасна зьмяншаючы або павялічваючы на адзінку коэфіцыэнт пры гэтай невядомай перад дробам.

Так, напрыклад, разьвязваючы раўнаньне

$$5x+9y=28,$$

атрымоўваем:

$$x=\frac{28-9y}{5}=5-y+\frac{3-4y}{5},$$

а посьле ўпрошчаньня:

$$x=5-2y+\frac{3+y}{5}$$

Далейшае разьвязваньне робіцца звычайным шляхам.

III) Калі абодва выразы дзел'ва заключаюць супольны множнік, то выводзім яго за дужкі і адкідваем; напрыклад, пры разьвязваньні раўнаньня:

$$4x+7y=39,$$

атрымоўваем:

$$x=\frac{39-7y}{4}=9-y+\frac{3-3y}{4}=9-y+\frac{3.(1-y)}{4}=9-y+\frac{1-y}{4}=9-y+t$$

Лікі 3 і 4 ня маюць супольных множнікаў, значыцца для атрыманьня цэлых разьвязкаў неабходнай і выстарчаючай умовай ёсьць, каб $(1-y)$ дзяліўся-б на 4. А, значыцца, абазначыўшы $\frac{1-y}{4}$ праз t, атрымаем раўнаньне $\frac{1-y}{4}=t$, з якога знойдзем:

$$y=1-4t,$$

$$x=9-(1-4t)+t=8+5t.$$

Прыстасаваньне неазначаных раўнаньняў да разьвязваньня тэкстовых задач.

§ 122. Неазначаныя раўнаньні маюць прыстасаваньне пры разьвязваньні шмат-якіх задач, у якіх часта ўводзіцца ўмова, што адказы павінны быць цэлымі і дадатнымі, бо ў супраціўным выпадку задача магла-б мець бяскрайна-вялікую колькасьць разьвязаньняў. Умова гэтая бывае або пастаўлена ў задачы, або вынікае з самага сэнсу задачы.

П Р Ы К Л А Д Ы.

I) За 67 рублёў купілі некалькі нажоў і відэльцаў. За нож плаціл 5 рублёў, за відэлец 4 рублі. Колькі купілі нажоў і колькі відэльцаў?

Разьвязаньне.

Калі абазначым колькасьць нажоў праз x, а колькасьць відэльцаў праз y, то атрымаем:

$$5x+4y=67.$$

Колькасьць разьвязкаў раўнаньня агранічваем умовай, што лік нажоў і відэльцаў можа быць толькі цэлым і дадатным.

Першая ўмова дае нам наступныя агульныя формулы разьвязаньняў гэтага раўнаньня ў цэлых ліках:

$$x=3-4t \quad \text{i} \quad y=13+5t,$$

другая ўмова дае нам граніцы ліку t:

$$t<\frac{3}{4} \qquad \text{i} \qquad t>-2\frac{3}{5},$$

значыцца t можа быць роўным 0, —1, —2; адпаведныя значэньні для x і y будуць:

$t=$	0	—1	—2
$x=$	3	7	11
$y=$	13	8	3

II) Сын за кожную добра разьвязаную задачу атрымлівае ад бацькі 4 капейкі, а за кожную кепска разьвязаную задачу сам плаціць 11 кап. Колькі задач добра разьвязаў сын, калі атрымаў ад бацькі 1 капейку? Пры гэтым вядома, што ўсіх задач было менш, як 50.

Разьвязаньне.

Абазначыўшы колькасьць добра разьвязаных задач праз x, а колькасьць кепска разьвязаных — праз y, атрымаем раўнаньне:

$$4x-11y=1.$$

Разьвязаўшы яго ў цэлых ліках, будзем мець агульныя формулы:

$$x=3-11t \quad \text{i} \quad y=1-4t.$$

З прычыны таго, што колькасьць разьвязаных або неразьвязаных задач можа быць толькі дадатным лікам, азначаем граніцы ліку t:

$$t<\frac{3}{11}, \quad t<\frac{1}{4}$$

Бачым, што абедзьве граніцы t — ніжэйшыя; вышэйшую граніцу t атрымаем з умовы, што колькасьць ўсіх задач ёсьць меншая ад 50, г. ё.:

$$x+y<50,$$

ці:

$$3-11t+1-4t<50,$$

адкуль:

$$t>-3\frac{1}{15}, \text{ а, значыцца, } t=0, -1, -2, -3,$$

і значэньні x і y будуць:

$t=$	0	—1	—2	—3
$x=$	3	14	25	36
$y=$	1	5	9	13

Уклад неазначаных раўнаньняў першае ступені.

§ 123. Калі маем уклад раўнаньняў, у якім колькасьць невядомых ёсьць на адзінку большая за колькасьць раўнаньняў, тады, пры помачы вядомых нам спосабаў выключэньня аднэй невядомай (складаньня і адніманьня), уклад гэты можам прывесьці да аднаго раўнаньня з дзьвёма невядомымі.

Для прыкладу возьмем наступныя два раўнаньні з трома невядомымі:

$$6x+7y-z=29,$$

$$4x+5y+2z=31.$$

Выключыўшы з гэтых двох раўнаньняў z, атрымаем:

$$16x+19y=89,$$

агульныя разьвязкі якога ў цэлых ліках будуць:

$$x=2-19t_1 \quad \text{і} \quad y=3+16t_1$$

Падставіўшы значэньні x і y з гэтых формул у адно з пачатковых раўнаньняў, атрымаем агульны разьвязак у цэлых ліках для, z, а іменна:

$$z=4-2t_1$$

Каб знайсьці дадатныя значэньні невядомых, разьвязваем няроўнасьці:

$$2-19t_1>0$$

$$3+16t_1>0$$

$$\text{і} \quad 4-2t_1>0$$

З першай няроўнасьці атрымаем:

$$t_1 < \frac{2}{19},$$

з другой:

$$t_1 > -\frac{3}{16},$$

з трэцяй:

$$t_1 < 2.$$

Бачым, што t_1 можа мець толькі адно значэньне, роўнае 0; у такім разе:

$$x=2;\ y=3;\ z=4.$$

Задачы.

Разьвязаць у цэлых ліках раўнаньні:

878. $2x+7y=29.$ 879. $3x+7y=163$

880. $5x-8y=41$ 881. $9x-4y=-1$

Маючы адну пару цэлых разьвязкаў раўнаньня, знайсьці агульныя формулы на ўсе цэлыя разьвязкі:

882. $3x+5y=11;\ x_1=2$ і $y_1=1.$

883. $4x-7y=-1;\ x_1=5$ і $y_1=3.$

884. $15x+11y=1000;\ x_1=41$ і $y_1=35.$

Разьвязаць у цэлых і дадатных ліках:

885. $9x+4y=85$

886. $8x+23y=413$

887. $11x-8y=57$

888. $11x+16y=268$

889. $23x+41y=1299$

Разьвязаць у цэлых і дадатных ліках, прыстасоўваючы ўсе магчымыя ўпрошчаньні:

890. $7x+2y=21$

891. $15x+19y=345$

892. $3\frac{1}{2}x+5\frac{1}{3}y=144$

893. $16x+9y=152$

894. $18x-11y=27$

895. $8x+27y=90$

896. $12x-35y=140$

897. $63x+10y=105$

Не разьвязваючы наступных раўнаньняў, паказаць, якія з іх ня маюць: 1) цэлых разьвязкаў, 2) цэлых і дадатных.

898. $2x+4y=15$

899. $2x+5y=10$

900. $7x+8y=5$

901. $3x+12y=10.$

902. $5x-15y=7$

903. $7x-15y-0$

904. $-2x-5y=7$

905. $7x+14y=42$

906. $5x+10y=1$

Разьвязаць у цэлых і дадатных ліках сыстэмы раўнаньняў

907. $2x+3y=22$
$3x+2z=28$

908. $5x+3y=46$
$4y+7z=29$

909. $x+y+z=17$
$2x+3y+4z=45$

910. $8x+9y+6z=162$
$2x-3y+4z=6$

911. Знайсьці цэлыя й дадатныя лікі, якія пры дзяленьні на 3 даюць астачу 1, а пры дзяленьні на 5 даюць у астачы 2.

912. Сума цыфр трохзнакавага ліку ёсьць 15. Калі трэцюю яго цыфру перанесьці на першае месца, то новы лік будзе на 351 менш ад пачатковага. Знайсьці гэты лік.

913. Колькі бутэлек белага і чырвонага віна можна купіць за 40 р. 50 кап., калі бутэлька белага віна каштуе 3 рублі, а чырвонага 1 руб. 50 кап?

914. Колькі мужчынаў і жанчын прыймала ўдзел у вячорку, калі вядома, што кожны мужчына плаціў па 7 рублёў, а жанчына па 5 руб., усяго-ж разам заплацілі 111 рублёў?

915. Агароднік мае менш за 100 дрэваў. Калі-б ён пасадзіў іх па 23 у кожным радку, то засталося-б 7 дрэваў непасаджаных, а калі-б саджаў па 32, то засталося-б 3. Колькі ён мае дрэваў?

916. Даўжыня проціпростакутнай лініі простакутнага трыкутніка ня зьменіцца, калі меншую прыпростакутную павялічым на 11 мэтраў, а большую зьменшым на 9 мэтраў. Знайсьці гэтыя прыпростакутныя.

917. З чыстага сьпірту і сьпірту 60 градусаў зрабілі мешаніну 75⁰, якая заключала цэлы лік вёдзер. Колькі ўзята сьпірту кожнага гатунку?

918. За 1 рубель купілі некалькі алоўкаў і ад 6 да 12 сшыткаў; сшытак каштуе 7 кап., а аловак 3 капейкі. Колькі купілі тых і другіх?

919. У двох кашах знаходзіцца ад 75 да 100 яблыкаў. Калі-б у першым кашу было ў 8 разоў, а ў другім у 7 разоў больш яблыкаў, чымся цяпер знаходзіцца, і калі-б, апрача таго, з першага каша пералажыць у другі 1 яблыка, то тады-б у абодвух кашах яблыкаў было-б пароўну. Колькі яблыкаў ў кожным кашы?

920. Знайсьці лікі, якія заключаюцца паміж 100 і 400 і якія, будучы многакрацьцю 17, пры дзяленьні на 7 даюць у астачы 5.

Слоўнік тэрмінаў.

абазначэньне—обозначение
абсцыса—абсцисса
агранічаны—ограниченный
агульны—общий
адваротнасьць—обратная величина
адваротны—обратный
адвольны—произвольный
адзінка—единица
адказ—ответ
адказваць—отвечать, соответствовать
адлегласьць—расстояние
адмоўны – отрицательный
адназнакавы лік — однозначное число
адназначны лік—однозначное число
аднаковы—одинаковый
аднацыфровы лік—однозначное число
адначасныя раўнаньні—равносильные ур-ия, одновременные
адначлен—одночлен
адніманьне—вычитание
адпаведны соответственный
адцінак—отрезок
азнака лёгарытму — характеристика логарифма
азначаны—определенный
азначэньне—определение
акружына—окружность
апошні—последний
аснова—основа, основание
астача—остаток
атрыманы—полученный
а мянавіта—а именно

беспасрэдны— непосредственный
бок—сторона
бяскрайная прогрэсія—безконечная прогрессия
бяскрайна-вялікі—бесконечно-большой
бяскрайнасьць—бесконечность
бязумоўны—безусловный

велічыня—величина
від—вид
вобраз—изображение
вольны выраз раўнаньня—свободный член ур-ия
вось—ось
выгляд вид (внешний)
вызначаць—определять
выключэньне—исключение
выконваць—производить
вылічэньне — вычисление, исчисление
вылучэньне—выведение
вымерны—соизмеримый, рациональный
вынік- следствие
выраз—выражение, член
выстарчаючы—достаточный
вышэйшы член—высший член
вядома—известно
вяршыня—вершина

граніца—предел
гранічнае значэньне — предельное значение (напр., дроби)
грунтавацца - основываться
графічны—графический

дабываньне корня — извлечение корня
давесьці—доказать
дадатковы—дополнительный
дадатны—положительный
дакладнасьць—точность

дакладны—точный
дапаможны—вспомогательный
дапушчэньне—допущение, предположение
дасьледаваньне—исследование
даўжыня длина
двохквадратовае раўнаньне—биквадратное ур-ие
двохчлен—бином, двучлен
двохчленнае раўнаньне—двучленное ур-ие
дзеліва—делимое
дзель—частное
дзельнік—делитель
дзесятковы—десятичный
дзеяньне—действие
доказ—доказательство
дроб—дробь
дробавы—дробный
дужкі—скобки
дыяграма — диаграмма (изображение)

залежнасьць—зависимость
замена—замена
зваротнае раўнаньне—возвратное ур-ие
звольніцца освободиться
звычайны дроб—обыкновенная, простая дробь
згодны—согласный, непротиворечащий
здавальняць—удовлетворять
здабытак—произведение
злучэньне—соединение
знаходжаньне—нахождение, отыскание
значэньне—значение
знясеньне—уничтожение
зраўнаньне—уравнивание, уравнение (как процесс)
зьменная—переменная
зьмяняцца—изменяться
зьмяшчаць—содержать
зьяўляецца—является

імкнецца—стремится
існуе—существует

канцовы—конечный
канчатковы—окончательный
кірунак—направление
кола - круг
колькасьць количество
комбінацыя—сочетание
комплексны комплексный
корань—корень (радикал)
коска—запятая
коэфіцыэнт—коэффициент
красьліць —чертить

лёгарытмаваньне—логарифмирование
лёгарытмічнае раўнаньне—логарифмическое ур-ие
лік—число
лікавы—численный, числовой
літара—буква
лічнік дробу—числитель дроби

магчымасьць—возможность
мантыса—мантисса
многакутнік—многоугольник
многачлен—многочлен
множнік—множитель
множнік (прогрэсіі) — знаменатель (прогрессии)
мэта—цель
мяшаны—смешанный

навочна – наглядно
назоўнік дробу—знаменатель дроби
наступны—последующий, следующий
неазначанае раўнаньне—неопределенное ур-ие
неазначанасьць—неопределенность
невядомы,-ая –неизвестный,-ая
недарэчнасьць—абсурд, противоречие
недахват—недостаток
неўласьцівы дроб—неправильная дробь
ніжэйшы член—нисший член
нявымернасьць—иррациональность, несоизмеримость
нявымерны—иррациональный, несоизмеримый
нязгодны—противоречащий, несогласный
няпоўнае раўнаньне—неполное ур-ие
няроўнасьць—неравенство
няцотны —нечетный

ордыната—ордината

паасобны—отдельный
пабудованы—построенный
павялічэньне—увеличение
падвойны—двойной, удвоенный
падкарэнны лік—подкоренное число

падняцьце ў ступень—возвышение в степень
пазбыцца—избавиться
паземны—горизонтальный
паказальнік—показатель
паказальнікавае раўнаньне—показательное ур-ие
папярэдні—предыдущий
парадак—порядок
парадкаваць—располагать
паступова—постепенно
пасьледаўна—последовательно
пачатковы—начальный
перавышка—избыток
перайначваць—переделывать, преобразовывать
перанос—перенос
пераробка—преобразование
перастаўка—перестановка
перасячэньне—пересечение
плошча—площадь
побач—рядом, на ряду
потэнцыраваньне—потенцирование
поўны—полный
праверка—проверка
прадстаўленьне—представление
прогрэсія—прогрессия
простакутнік—прямоугольник
простастаўны—перпендикулярный
простая лінія—прямая линия
проціпростакутная—гипотенуза
прыбліжэньне—приближение
прывесьці—привести
прыклад—пример
прыпростакутная (катэт)—катет
прырост—прирост, приращение
прыстасаваньне—применение
пункт—точка, пункт
пэрыодычныя ўзносы—периодические взносы

рад—ряд
разважаньне—рассуждение
развіненьне—развертывание, разложение
разьвязак раўнаньня—корень ур-ия
разьвязаньне—решение
разьмяшчэньне—размещение
расклад—разложение
раскладаньне—разложение
расчыніць дужкі—открыть скобки
раўнаньне—уравнение
розны—различный
розьніца—разность, разница
раўнолежна—параллельно
роўнасьць—равенство
роўніца—плоскость
рыса—черта

сапраўдныя лікі—действительные (вещественные) числа
скарочаньне—сокращение
склад—состав
складаецца—состоит, составляется
складаньне—сложение
складаны—составной, сложный
складнік—слагаемое
скончаны—конечный, оконченный
спадаючы—убывающий
старчавы—вертикальный
стасунак—отношение
ступень—степень
сувязь—связь
сума—сумма
сумножнік—сомножитель
супольны—общий, совместный
супраціўны—противоположный, противный
супрэжаныя комплексныя лікі—сопряженные комплексные числа
сымэтрычнае раўнаньне—симметрич. уравнение

тожсамасьць—тождество
тожсамы—тождественный
трыкутнік—треугольник
тэрміновыя выплаты—срочные уплаты

ўагульненьне—обобщение
увод—введение
ужываць—употреблять
узрастаньне, узрост—возрастание
узрастаючы—возрастающий
уклад раўнаньняў, лёгарытмаў і г. д.—система ур-ий, логарифмов и т. п.
уключна—включительно
уклад (як працэс)—составление
уласьціць—составить
уласьцівасьць—свойство, особенность
уласьцівы дроб—правильная дробь

умова—условие
умоўны - условный
упросьціць—упростить
упрошчаньне—упрощение
утварыць—составить
ўявіць сабе—представить себе, вообразить
ўяўны лік—мнимое число

цотны—четный
цэлы—целый

член—член

штучны—искусственный
шуканы—искомый

А д к а з ы.

34. $16a^{12}$. **35.** $2^m a^{5m} b^{mn}$. **36.** $\frac{16a^4}{b^4c^4}$. **37.** $\frac{64a^6c^{15}}{125b^9}$. **38.** $\frac{81}{256}c^{28}d^8l^4$. **39.** $5\frac{1}{16}a^8b^{4m-4}$. **40.** $0{,}000001a^{6n-12}b^{6m}$. **41.** $4a^6b^{-4}c^{-2}$. **42.** $2\frac{1}{4}a^{-4}b^2c^{-6}d^4$. **43.** $\frac{a^{2m}b^{3m}}{c^{3m}d^{-2m}}$. **44.** $\frac{d^7}{3ac^7}$. **45.** $a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc$. **46.** a^8+2a^6- $-a^4-2a^2+1$. **47.** $9a^4-12a^3b-2a^2b^2+4ab^3+b^4$. **48.** $25x^4-70x^3+79x^2-$ $-42x+9$. **49** $\frac{x^4}{4}+x^3+2x^2+2x+1$. **50.** $a^6+2a^5+3a^4+4a^3+3a^2+2a+1$. **51.** $9a^{6x}+12a^{5x}+10a^{4x}+10a^{3x}+5a^{2x}+2a^x+1$. **52.** $a^6-3a^5b+\frac{3}{4}a^4b^2+$ $+2a^3b^3+\frac{15}{16}a^2b^4+\frac{3}{16}ab^5+\frac{1}{64}b^6$. **53.** $x^8-4x^7+10x^6-16x^5+19x^4-$ $-16x^3+10x^2-4x+1$. **54.** $\frac{x^6}{36}+\frac{x^5}{6}+\frac{7x^4}{12}+\frac{4x^3}{3}+2x^2+2x+1$. **55.** 10. **56.** 4. **57.** 9. **58.** 6. **59.** a^3. **60.** $\frac{a^2}{3}$. **61.** a^4b^3c. **62.** $\frac{1}{3}$. **63.** $\frac{1}{a^2}$. **64.** $2\frac{1}{2}a^3c^{2m}$. **65.** $0{,}3a^{2n-1}b^6c^{-2}$. **66.** $\frac{3a^2d}{2b^3c^4}$. **67.** $\frac{2c^n}{ab^{n-3}d^3l^{2n-1}}$. **68.** $4a^3b^4c^2$. **69.** $2a-2b$. **70.** $2a-2b$. **71.** $6a^2-10ab-9b^2$. **72.** 17. **73.** 18. **74.** 44. **75.** 55. **76.** 81. **77.** 89. **78.** 99. **79.** 156. **80.** 299. **81.** 184. **82.** 852. **83.** 699. **84.** 999. **85.** 5930. **86.** 1009. **87.** 9006. **88.** 10705. **89.** 7208. **90.** 27943. **91.** 69. **92.** 94. **93.** 489. **94.** 31,3. **95.** 9,53. **96.** 4,358. **97.** $2\frac{3}{5}$. **98.** $1\frac{5}{7}$. **99.** $9\frac{1}{6}$. **100.** $14\frac{8}{15}$. **101.** $19\frac{7}{25}$. **102.** $\frac{7}{9}$. **103.** $\frac{37}{45}$. **104.** $\frac{8}{71}$. **105.** $5\frac{3}{7}$. **106.** $23\frac{1}{2}$. **107.** $27\frac{2}{5}$. **108.** 2,7. **109.** 3,8. **110.** 6,07. **111.** 4,39. **112.** 5,84. **113.** 11,882. **114.** 1,9148. **115.** 2,54. **116.** 17,32. **117.** 3,86. **118.** 0,31. **119.** 241. **120.** 1049. **121.** 221. **122.** 340. **123.** 321. **124.** 513. **125.** $2a+3b$. **126.** $\frac{3}{4}ab^2-\frac{2}{5}a^2$. **127.** $\frac{1}{5}x-$ $-\frac{1}{6}y$. **128.** $\frac{x^2}{5y}-\frac{5y}{2x^2}$. **129** $0{,}2x^2y-5$. **130.** $2a^2-a+1$. **131.** $3a^2-3a-1$. **132.** $3a^2-ab+4b^2$. **133.** $\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+1$. **134.** $0{,}7x^2-0{,}5xy+y^2$. **135.** x^3+

$+3x^2-4x-5$. **136.** $5x^5+4x^4+3x^3+2x^2$. **137.** $\frac{a^2}{2}+\frac{a}{x}-\frac{x}{a}$. **138.** $\frac{2x}{3y^2}-$ $-z+\frac{3y^2z^2}{x}+\frac{9y^4z^3}{2x^2}$. **139.** $x+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$. **140.** $\frac{3m^2-2m+1}{m^4+5m^2-2}$. **141.** $2\sqrt{2}$.
142. $3\sqrt{3}$. **143.** $3\sqrt[3]{-4}$. **144.** $2\sqrt[5]{3}$. **145.** $18\sqrt{5}$. **146.** $5\sqrt[5]{4}$. **147.** $a^3b\sqrt[5]{b}$.
148. $10c^3d^2\sqrt{3}$. **149.** $\sqrt{6}$. **150.** $\frac{a^2}{b^2}\sqrt[5]{a^4}$. **151.** $-\frac{0,7}{x^2}$. **152.** $\frac{a-b}{5}\sqrt{y}$.
153. $2a^2b\sqrt{2a-b}$. **154.** $\frac{a+b}{a-b}\sqrt{\frac{b}{3}}$. **155.** $\sqrt{12}$. **156.** $\sqrt[3]{24}$. **157.** $\sqrt[6]{5y^6}$.
158. $\sqrt{2}$. **159.** $\sqrt{\frac{a}{b}}$. **160.** $\sqrt[3]{\frac{b}{a^2}}$. **161.** $\sqrt[n]{2^n.3.a^{m+n}b^{mn+2}}$. **162.** $\sqrt{\frac{b}{b+c}}$.
163. $\sqrt[4]{a^3}$. **164.** $\sqrt{a^3}$. **165.** $a^{-4}=\frac{1}{a^4}$. **166.** $\sqrt[3]{a^2}$. **167.** $\sqrt[4]{\frac{8a^2b^6}{9c^{-3}}}$
168. $\sqrt{a^4b^{-5}c}$. **169.** $\sqrt[12]{a^{10}}$ i $\sqrt[12]{a^9}$. **170.** $\sqrt[6]{4a^4}$ i $\sqrt[6]{ab^5}$.
171. $\sqrt[18]{\frac{3^9a^{45}}{b^{27}}}$, $\sqrt[18]{\frac{10^2.b^4}{a^2}}$. **172.** $\sqrt[24]{a^4b^6}$, $\sqrt[24]{a^6}$ i $\sqrt[24]{a^9}$.
173. $\sqrt[30]{\frac{a^{45}}{b^{30}}}$, $\sqrt[30]{\frac{x^6}{y^{24}}}$ i $\sqrt[30]{\frac{y^{10}}{z^{20}}}$. **174.** $\sqrt{10}$. **175.** $\frac{1}{2}\sqrt[3]{6}$. **176.** $\frac{1}{3}\sqrt[3]{44}$.
177. $\frac{1}{10}\sqrt[3]{350}$. **178.** $3y\sqrt{2xy}$. **179.** $\frac{1}{b}\sqrt{b^2-a^2}$. **180.** $\frac{3}{5a^2}\sqrt{2a^3-ab^2}$.
181. $\frac{a^3(a+b)}{a-b}\sqrt[3]{(a-b)^2}$. **182.** $\frac{a+b}{ab}\sqrt{3ab}$. **183.** $\frac{1}{2a-b}\sqrt{4a^2-b^2}$.
184. $17\sqrt{13}$. **185.** $8\sqrt[3]{2}$. **186.** $36\sqrt[3]{5}$. **187.** $10ab\sqrt{7ab}$. **188.** $25\frac{1}{2}\sqrt[5]{2}$.
189. $7\sqrt{6}+2\frac{1}{4}\sqrt[3]{2}-\sqrt{11}$. **190.** $x(3-2xy)(\sqrt[4]{2y}-\sqrt[3]{2y})$. **191.** $4xy\sqrt{y}-$ $-2y\sqrt[3]{x^2y^2}$. **192.** $(1-2b)\sqrt{a-b}$. **193.** 9. **194.** $2\sqrt[3]{4}$. **195.** $3\sqrt[3]{-10}$.
196. $\frac{1}{3}$. **197.** $72\sqrt[4]{20}$. **198.** 30. **199.** $196\sqrt{15}+84\sqrt{10}$. **200.** $40+$ $+12\sqrt[4]{6}.\sqrt[3]{25}+16\sqrt{2}.\sqrt[3]{25}+32\sqrt[3]{25}.\sqrt{3}$. **201.** $2\sqrt{30}-30$. **202.** $4a^2x\sqrt[4]{2}$.
203. $\sqrt[6]{40}+\sqrt[6]{20}-\sqrt[6]{10}-\sqrt[6]{200}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[6]{50}+\sqrt{10}+\sqrt[6]{500}-\sqrt[6]{250}$.
204. $\frac{1}{4x}\sqrt{256-x^4}$. **205.** $a^2bc\sqrt{d}-b^2cd\sqrt{a}+c^2ad\sqrt{b}-d^2ab\sqrt{c}$. **206.** $2ab$.
207. $\frac{a^5b}{2}\sqrt[5]{a^4b^4}$. **208.** 2. **209.** $\frac{2}{7}\sqrt{3}$. **210.** $6\sqrt[3]{10}$. **211.** $3\sqrt[4]{a}$. **212.** $\sqrt[4]{10}$
213. $\frac{1}{5}\sqrt{10}$. **214.** 0,2. **215.** $\sqrt[6]{4x}$. **216.** $\sqrt[8]{27}$. **217.** $2\sqrt[20]{8}$. **218.** $\frac{1}{a}\sqrt{ax}$.
219. $3(2a-1)$. **220.** $\sqrt{3ab}$. **221.** $\frac{7}{2}\sqrt{14}-\sqrt{15}-\frac{9}{2}\sqrt{2}+\frac{16}{5}\sqrt{5}$.
222. $2x\sqrt[4]{y^3}-\frac{3}{2}y\sqrt[4]{8x^2y}+\sqrt{y}$. **223.** $\sqrt{3}-\sqrt{2}$. **224.** $\frac{b}{2d}\sqrt[15]{a^{12}b^4c^7d^4}$.

225. $\frac{a^3}{b}\sqrt[10]{a^2b}+\frac{a^2}{b}\sqrt[20]{a^{11}b^8}-\frac{a^3}{b^3}\sqrt[5]{ab}$. **226.** $\sqrt[5]{4x^2}+\sqrt{3}\,.\sqrt[5]{2x}+3$.

227. $1+\sqrt{a}$. **228.** $\frac{a+b+c}{ab+ac+bc}$. **229.** $2\sqrt{2}$. **230.** $\sqrt[3]{4}$. **231.** $6\sqrt[3]{2}$.

232. $-2\sqrt{3}$. **233.** $\sqrt{a}$. **234.** $\sqrt[m]{x}$. **235.** $3a^4x^2\sqrt[3]{3a^2x}$. **236.** $16a\sqrt[3]{9a}$.

237. $(x-y)\sqrt[5]{(x-y)^3}$. **238.** $\frac{a}{b^6}\sqrt{a}$. **239.** $\frac{a^{2-n}}{4}\sqrt[3]{4a^nb}$. **240.** $5-2\sqrt{6}$.

241. $3+\sqrt[3]{2}-2\sqrt[6]{54}$. **242.** $11-2\sqrt{6}+4\sqrt{3}-6\sqrt{2}$. **243.** 10. **244.** $8(7-4\sqrt{3})$.

245. 1. **246.** $2x-2\sqrt{x^2-x}$. **247.** $\sqrt[3]{a}$. **248.** $\sqrt{5}$. **249.** $\sqrt[8]{a^7}$. **250.** $ac\sqrt[4]{ab}$

251. $x\sqrt[24]{x^{17}}$. **252.** $\frac{1}{y}\sqrt[12]{x^{11}y^9}$. **253.** $\sqrt[24]{2^83^3x^{11}y^7}$. **254.** $\frac{3x^2y}{4}\sqrt[8]{x^3}$. **255.** 12.

256. 3. **257.** $a+1$. **258.** $2a-\frac{3b}{2}$. **259.** $\sqrt{a}$. **260.** $b\sqrt{b}$. **261.** $(a+b)\sqrt[3]{(a-b)^2}$.

262. $\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{a-b}$. **263.** $2\sqrt{3}-3$. **264.** $\sqrt{(1-a)(1+\sqrt{a})}$. **265.** $\sqrt{15}$.

266. $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a+b}$. **267.** $15\sqrt{2}-12\sqrt{3}+9\sqrt{6}-18$. **268.** $\frac{1}{2}(\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7})$.

269. $\frac{\sqrt{5ab(a^2x-2b^2)\,(ax-b\sqrt{2x})}}{a^2x-2b^2}$. **270.** $\sqrt{6}+5\sqrt{3}-3$.

271. $\frac{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}}{3}$. **272.** $\frac{2\sqrt[3]{2}-2+\sqrt[3]{4}}{6}$. **273.** $\frac{\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{a^2b}+\sqrt[4]{ab^2}-\sqrt[4]{b^3}}{a-b}$

274. $1+\sqrt{2}$. **275.** $\sqrt{7}-1$. **276.** $\sqrt{7}-\sqrt{3}$. **277.** $\sqrt{5}+\sqrt{2}$. **278.** $\sqrt{10}-\sqrt{3}$.

279. $3\sqrt{5}-2\sqrt{3}$. **280.** $\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{14}\sqrt{42}$. **281.** $\frac{1}{11}\sqrt{110}-\frac{1}{22}\sqrt{22}$.

282. $\frac{3}{2}\sqrt{0{,}14}+\frac{1}{2}\sqrt{0{,}26}$. **283.** $\frac{1}{2}(\sqrt{10}+\sqrt{2})$. **284.** $\sqrt[4]{45}-\sqrt[4]{5}$. **285.** $\sqrt{14}$.

286. 2. **287.** $a^{2/3}$. **288.** $a^{-3/4}$. **289.** $a^{-3/5}b^{4/5}$. **290.** $a^{3/2}$. **291.** $\sqrt[6]{a^5}$.

292. $\sqrt[4]{a^{-3}}$ або $\sqrt[-4]{a^3}$. **293.** $\sqrt{a^{-3}}$ або $\sqrt[-2]{a^3}$. **294.** $\sqrt[3]{(a-b)^5}$.

295. $3\sqrt{a^{-1}}\cdot\sqrt[8]{(a-b)^3}$. **296.** 2. **297.** 27. **298.** $\frac{1}{32}$. **299.** $\frac{1}{16}$. **300.** 4.

301. 81. **302.** $1\frac{1}{5}$. **303.** 0,8. **304.** $\frac{1}{27}$. **305.** 64. **306.** -32. **307.** 8.

308. 3^9. **309.** $a^{17/12}.b^{19/15}$. **310.** $a^{-1/12}b^{1/12}$. **311.** $a^2-a^{3/2}b^{1/2}+a^{1/2}b^{3/2}-b^2$

312. 27. **313.** $a^{3/2}+a^{1/2}b+b^{5/2}+2ab^{1/2}-2a^{3/4}b^{5/4}-2a^{1/4}b^{7/4}$. **314.** $a^{8/5}b^{9/5}$.

315. $0{,}01a^{1/2}+0{,}25b+0{,}09c^{2/7}+0{,}1a^{1/4}b^{1/2}+0{,}06a^{1/4}c^{1/7}+0{,}3b^{1/2}c^{1/7}$. **316.** 1.

317. $a^{1/4}-b^{1/4}+c^{1/4}$. **318.** $a^{1/3}$ або $\sqrt[3]{a}$. **319.** a^6. **320.** $\frac{b^4}{a^{2/3}}$

321. $2^{1/6}a^{1/72}b^{-1/3}$. **322.** $a^{-5/2}.b^{-9/4}$. **323.** b. **324.** -1. **325.** $-i$. **326.** i.

327. -1. **328.** 1. **329.** -1. **330.** 1. **331.** -1. **332.** 1. **333.** -1.

334. $-i$. **335.** -1. **336.** i. **337.** $2i$, **338.** $6i$. **339.** ai. **340** b^3i.

341. $3b^4i$. **342.** $^3/_2 i$. **343.** $^4/_9 i$. **344.** $\sqrt{a}\, i$. **345.** $3i\sqrt{x}$. **346.** $i\sqrt{a^2+b^2}$. **347.** $(a-b)i$. **348.** $(x+y)i$. **349.** $5i$. **350.** $10i\sqrt{3}-6i$. **351** $57i-12i\sqrt{2}$. **352.** $4+17i$ **353.** $5a$. **354.** -4. **355.** $(a-b)i$. **356.** $1-46i$. **357.** $100-$ $-13i\sqrt{7}$. **358.** -17. **359.** $-i(a^2-x^2)$. **360.** $-x\sqrt{a}$. **361.** $a+bi$.

362. $\dfrac{-191-60i\sqrt{2}}{209}$. **363.** $\dfrac{6-7\sqrt{3}-i(2\sqrt{21}+3\sqrt{7})}{30}$. **364.** $7-6i\sqrt{2}$.

365. $\dfrac{i\sqrt{3}-1}{2}$. **366.** $-14-12i\sqrt{2}$. **367.** ± 7. **368.** $\pm\dfrac{19}{21}$. **369.** $\pm 2{,}8$. **370.** ± 8. **371.** ± 22. **372.** 5; 0. **373.** 0; 9. **374.** 0; $-^3/_5$. **375.** 0; $-^5/_7$. **376.** ± 5. **377.** 0; -1. **378.** 0; $-^{26}/_3$. **379.** ± 2. **380.** ± 2. **381.** ± 6.

382. $\pm\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$. **383.** 0; $^4/_3$. **384.** $\pm\dfrac{\sqrt{7}}{2}$. **385.** $\pm\sqrt{11}$. **386.** 5; 3. **387.** 7; 5. **388.** 2; -20. **389.** 22; -52. **390.** 9; -4. **391.** 3; -20. **392.** a; b. **393.** bd; $-ac$. **394.** $(a+b)^2$; $(a-b)^2$. **410.** $(x-34)(x+26)$. **411.** $(x-25)(x+37)$ **412.** $(x-9)(x+12)$. **413.** $(x-106)(x+93)$. **414.** $(x+a)(x+3a)$. **415.** $(x+a-b)(x+a+b)$. **416.** $(x+\sqrt{b})(x-\sqrt{b}-a)$. **417.** $(x+a)(x-a+\sqrt{b})$. **418.** $1^1/_2$. **419.** $3^1/_3$. **420.** -9. **421.** $-0{,}7$. **422.** 0,5. **423.** 2. **424.** 3. **425.** $^5/_6$. **426.** 4. **427.** $-^5/_6$. **428.** $\dfrac{5\pm\sqrt{-734}}{3}$.

429. $-^5/_6$. **430.** $1^1/_3$. **431.** 5. **432.** 7. **433.** $a+b$. **434.** $\dfrac{2ab}{a+b}$. **435.** 9. **436.** $1^1/_2$. **437.** 5. **438.** 5. **439.** $3^1/_2$. **440.** 2. **441.** $^2/_3$. **442.** 18. **443.** 30. **444.** 2. **445.** 1. **446.** 5. **447.** 4. **448.** $-a$. **449.** a. **450.** $\dfrac{a+b}{a-b}$. **451.** $2a-b$. **463.** $(3x-2)(2x+3)$. **464.** $(5x+2)(6x+5)$. **465.** $(5x+3)(3x+5)$. **466.** $(3x-8)(5x+11)$. **467.** $(x-3)(4x-5)$. **468.** $(x-a-b)(x-a+b)$. **469.** $(ax+1)(bx+1)$. **470.** $(ax-b)(bx+a)$. **489.** 12 і 6, або -12 і -6. **490.** $^1/_2$. **491.** 7 і 8. **492.** 4 і 2, або 6 і 0. **493.** 4 і 6, або -6 і -4. **494.** 5 і 12. **495.** 26 і 20. **496.** 12. **497.** 7. **498.** 4 і 3 рублі. **499.** 6; 8; 10. **500.** 9. **501.** 5. **502.** 40 і 30. **503.** 10. **504.** 30. **505.** Немагчымы. **506.** Перш. гатунку 39 або 12. **507.** 20. **508.** 6000 і 5000. **509.** 8000 і 6000. **510.** 3; -1; -3. **511.** 7. **512.** 8 і 7 раніцы наст. дня. **513.** 24 і 18. **514.** 14 і $17^1/_2$ гадз. **515.** 10. **516.** 60. **517.** 12 і 15 дэцым. **518.** 5. **519.** 2400. **520.** 30. **521.** 30. **522.** 45; 63. **523.** 6 дзён. **524.** ± 1. **525.** $\pm i$ **526.** ± 1; $\pm i$.

527. $\dfrac{\sqrt{2}\pm\sqrt{-2}}{2}$; $\dfrac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{-2}}{2}$. **528.** 2; $-1\pm\sqrt{3}$. **529.** -5; $\dfrac{5(1\pm\sqrt{-3})}{2}$.

530. $-{}^2/_5; \frac{1\pm\sqrt{-3}}{5}$. **531**. $\pm\frac{\sqrt{5}}{2}; \pm\frac{\sqrt{-5}}{2}$. **532**. $3; \frac{-3(1\pm\sqrt{-3})}{2};$ $-3; \frac{3(1\pm\sqrt{-3})}{2}$. **533**. $\pm5; \pm4$. **534**. $\pm2; \pm\sqrt{3}$. **535**. $\pm4; \pm3$.

536. Уяўныя. **537**. $\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}; \pm\sqrt{-1}$. **538**. $\pm1; \pm\frac{\sqrt{-6}}{3}$. **539**. $1; \sqrt[3]{2}; \ldots$

540. $-2; -1\pm\sqrt{-3}; \ldots.$ **541**. $4; 2(-i\pm\sqrt{-3}); \ldots.$ **542**. $5; {}^5/_2(-1\pm\sqrt{-3}); \ldots$

543. ±3; $\pm3i$; ±2; $\pm2i$. **544**. 2; -2; $2i$; $-2i$; ....

545. -1; .... **546**. -1; .... **547**. 1; .... **548**. -1; .... **549**. 2; ....

550. 2; ${}^1/_2$; -3; $-{}^1/_3$. **551**. 3; .... **552**. 2; .... **553**. 5; .... **554**. 2.

555. 2. **556**. 12. **557**. 4; .... **558**. 9. **559**. 12; .... **560**. 1; .... **561**. 7.

562. 4. **563**. 9; .... **564**. 2. **565**. 0; .... **566**. 2. **567**. 2. **568**. ±2.

569. 81. **570**. $-{}^2/_3$. **571**. (значэньне x) 6; $-7{}^1/_3$. **572**. ±3. **573**. 3 і 2.

574. 3 і 5. **575**. 12 і 7. **576**. 8 і 5. **577**. 4 і 6. **578**. 12 і 4. **579**. 9 і 12.

580. 8 і 3. **581**. 6 і -5. **582**. 10 і 5. **583**. 3 і 5. **584**. 5 і 6. **585**. 8 і 6.

586. 24. **587**. 12 і 4. **588**. 13 і 9. **589**. 20 і 30, або 48 і 16. **590**. 10100.

591. $\frac{[2a+(a-b)(n-1)]n}{2}$. **592**. 55; 403. **593**. 26; 451. **594**. 2; 1661.

595. -1; 20. **596**. -2; 330. **597**. 45; 3. **598**. $n=26$. **599**. $a_1=-9$.

600. $n=52$. **601**. $n=21$, або 24. **602**. 9 або 4. **603**. -10.

604. 14, 11, 8 .... або 2, 5, 8 .... **605**. 39. **606**. 6 сэк. **607**. 2 сэк.

608. 10230. **609**. $-\frac{683}{512}$. **610**. $a_1=2$; $S=254$. **611**. $a_1=5$. **612**. $q=3$.

613. $a_n=567$. **614**. $a_1=2$. **615**. $q=-6$ або 5. **616**. $q=3$ або $-{}^3/_4$.

617. 3069. **618**. 27, -9, 3, -1 або 54, 18, 6, 2. **619**. 64, 32, 16, 8, 4, 2.

620. $1{}^1/_2$. **621**. ${}^3/_4$. **622**. ${}^2/_3$. **623**. ${}^3/_2\sqrt{6}$. **624**. 100. **625**. ${}^{11}/_{16}$.

626. $\div\div\ {}^2/_3, {}^4/_9, \ldots$ **627**. ${}^5/_9$. **628**. ${}^{25}/_{99}$. **629**. $\frac{11}{333}$. **630**. ${}^3/_{10}$. **631**. ${}^4/_{45}$.

632. $1{}^{34}/_{45}$. **633**. $2\pi R^2$, ... **634**. 8. **635**. 2. **636**. 9. **637**. 243. **638**. 125.

639. 5. **640**. 4. **641**. 5. **642**. ${}^1/_{81}$. **643**. ${}^1/_{64}$. **644**. ${}^1/_{32}$. **645**. 16. **646**. 125.

647. 100000. **648**. 4. **649**. 9. **650**. 3. **651**. 16. **652**. ${}^2/_3$. **653**. ${}^1/_5$.

654. 2. **655**. 3. **656**. 3. **657**. 1. **658**. 6. **659**. ${}^1/_2$. **660**. -1. **661**. 1.

662. 2. **663**. 4. **664**. 4. **665**. 1. **666**. 2. **667**. 3. **668**. 2. **669**. $lg2+lga+lgb$.

670. $lg5+lgx+lgy$. **671**. $3lga+2lgb$. **672**. $2lga-3lgb-7lgc$.

673. $2lg(a-b)+lgc-lg(a+b)-lgd$. **674**. $lg5+2lga+lgb+{}^1/_3lgc$.

675. $lg2+lgb+{}^1/_2lga+{}^1/_2lgc$. **676**. ${}^1/_5(lg3+3lga+lgb-4lgc)$.

677. ${}^1/_4(3lga-lg2-2lgb-lgc)$. **678**. $lg2+lga+3lgb-lgc-{}^1/_2lgd$.

679. $-nlga-{}^1/_2lgb$. **680**. ${}^2/_3lga+{}^3/_5lgb$. **681**. ${}^1/_2[lg2+{}^1/_2(lg6+{}^1/_2lg15)]$.

682. ${}^1/_3(2lga+lgb-{}^3/_5lgc)$. **683**. ${}^1/_2[lg15+{}^1/_2(lg3+{}^1/_2lg5)-{}^1/_3(lg25+{}^1/_2lg3)]$.

684. $x={}^7/_3\,.\,2$. **685**. $x=5^3\,.\,3^2$.

686. $x = \frac{\sqrt[5]{11^3}}{\sqrt[7]{5^2}}$. **687.** $x = \frac{13^2}{\sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt[3]{7^4}}$

720. 31915. **721.** 0,30118. **722.** 0,03388. **723.** 151,96. **724.** 0,05465. **725.** 0,23879. **726.** 2,7176. **727.** 0,27219. **728.** 3,4871. **729.** 0,70985. **730.** 2,325. **731.** 5,0119. **732.** 0,0002353. **733.** 80,653. **734.** 0,9612. **735.** 0,16237. **736.** 9639400. **737.** 7,8134. **738.** 2011,3. **739.** 0,9937. **740.** 74,87. **741.** 1,24203. **742.** 0,56293. **743.** 1,28941. **744.** 0,90084. **745.** 0,44492. **746.** 6,8585. **747.** 0,68648. **748.** 1,1469. **749.** 1,3396. **750.** $x=3$. **751.** 4. **752.** 2. **753.** 1. **754.** $1^1/_3$. **755.** $^1/_3$. **756.** $-^3/_4$. **757.** 3; 2. **758.** 4. **759.** 2. **760.** $^1/_2$. **761.** 3. **762.** 4. **763.** 3. **764.** 36. **765.** 10; $^1/_{10}$. **766.** 4. **767.** 2. **768.** 8. **769.** Каля $^4/_{11}$. **770.** 8,64197. **771.** ± 3. **772.** 1,61122. **773.** 0,83492. **774.** 27703,75. **775.** 192310 рублёў. **776.** 153500. **777.** 6437,40. **778.** 1800. **779.** 19 гадоў. **780.** 20 гад. 1 м. і 23 дн. **781.** Праз 100 гадоў. **782.** 5%. **783.** $4,43\%$. **784.** 11265,70. **785.** 69443. **786.** 37645. **787.** 24. **788.** 379,94. **789.** 10000 рубл. **790.** 25 гадоў. **791.** 132. **792.** 720. **793.** 1860480. **794.** 504. **795.** 12. **796.** 6. **797.** 3628800. **798.** 40320. **799.** 120. **800.** 13. **801.** 8. **802.** 220. **803.** 210. **804.** 45. **805.** 14, або 3. **806.** 7. **807.** 792. **808.** 56. **828.** $326592x^{10}$. **829.** $-29753610120a^{18}x^{55}$. **830.** $119759850x^{34}$. **831.** $-165a^4x^2$. **832.** 126. **833.** 1001. **834.** 48384. **835.** -3421440. **836.** $\frac{55}{144}$. **837.** 84. **838.** 5005. **839.** 792. **841.** $128a^6+4320a^4b^2+9720a^2b^4+1458b^6$. **843.** $196+80\sqrt{6}$. **844.** $1952+504\sqrt{15}$. **845.** $10808+6108\sqrt{3}$. **846.** $9612\sqrt{2}-7848\sqrt{3}$. **847.** 6. **848.** 18. **860.** $x > -^1/_2$. **861.** $x > \frac{24}{25}$. **862.** $x > 6$. **863.** $x < \frac{2}{a+2a^2}$. **864.** $x > \frac{16a+3b}{20b-2a}$. **865.** $x > \frac{2ab^3+a^4}{4bc^2-3a^2b}$. **866.** $x > 10$. **867.** $x < 3$. **868.** 11,....14. **869.** Не разьвязв. **870.** 4,....11. **871.** 1. **872.** 5. **873.** 8. **874.** $x > 3^1/_5$ мін. **875.** 3. **876.** 101. **877.** $^2/_3$ або $^3/_4$. —Далей даецца адна пара разьвязкаў: **878.** 11 і 1. **879.** 52 і 1. **880.** 13 і 3. **881.** 3 і 7. **885.** 9 і 1. **886.** 20 і 11. **887.** 11 і 8. **888.** 20 і 3. **889.** 3 і 30. **890.** 3 і 0. **891.** 4 і 15. **892.** 32 і 6. **893.** 5 і 8. **894.** 7 і 9. **895.** Не разьвязваецца. **896.** 35 і 8. **897.** Не разьвязваецца. **907.** 2, 6, 11. **908.** 8, 2, 3. **909.** 9, 5, 3. **910.** 9, 8, 3. **911.** 7, 22, 37,.... **912.** 834. **913.** 10 б. і 7 ч. **914.** 3 і 18. **915.** 99. **916.** 8 і 21. **917.** 3 і 5. **918.** 17 і 7, або 10 і 10. **919.** 37 і 42, або 44 і 50. **920.** 187 і 306.

Зьмест.

Памылкі друку.

Стр.	Радок.	Надрукавана.	Павінна быць.
3.	9 зьверху	гэта	гэтая
5.	9 зьнізу	A(5,3).	A(5; 3).
12.	12 »	Праз гадзіну	Праз 2 гадзіны
17.	12 зьверху	бо $2^5=82$,	бо $2^5=32$,
22.	5 зьнізу	§ 15	—
24.	14 зьверху	корні якіх	корні, якіх
30.	13 »	(Лінейка корня павінна быць меншай: да знаку роўнасьці)	
31.	5 »	$\frac{4x^2}{9y^4}-\frac{4x^2}{3y^2}+$	$\frac{4x^2}{9y^4}-\frac{4xz}{3y^2}+$
32.	18 зьнізу	яе бак	яе бакі
34.	У задачы № 162 пад корнем	a^2+bc	b^2+bc
35.	20 зьнізу	$3ab^2\sqrt[3]{2a^2x}$	$3ab^3\sqrt[3]{2a^2x}$
40.	9 зьверху	степень	ступень
41.	Задача № 252 павінна быць:		$\sqrt{x\sqrt[3]{\frac{x^2}{y}\sqrt{\frac{x}{y}}}}$
44.	13 зьнізу	$\sqrt{6}=2{,}448\ldots\ldots$	$\sqrt{6}=2{,}449\ldots\ldots$
44.	12 »	$=2{,}448\ldots-1{,}414\ldots=1{,}034\ldots$	$=2{,}449\ldots-1{,}414\ldots=1{,}035\ldots$
44.	4 »	2,448	2,449
73.	12 зьверху	на $1_{3}/_{4}$	на $1\frac{3}{4}$
76.	20 »	$\ldots(x^2+ax+a)=0$	$\ldots(x^2+ax+a^2)=0$
79.	2 »	пад другім корнем: b^2+4ac	b^2-4ac
81.	7 »	мае выгляд;	мае выгляд:
91.	10 зьнізу	адмоўнаяпрогрэсія	адмоўная—прогрэсія
100.	12 »	$a_8+a_1=35$	$a_3+a_1=35$
102.	10 »	$\rightarrow\infty$),	(пры $n\rightarrow\infty$),
117.	10 »	адзінку	адзінку,
117.	13 »	адпаведніка	адпаведных
126.	2 зьверху	39.	739.
134.	14 »	$B_1=b$.	$B_1=b_1$.
147.	5 »	a, b, c .... κ па l	a, b, c .... κ на l
156.	18 зьнізу	яна болей	яна больш
159.	5 »	Каб	§ 116. Каб
165.	17 зьверху	$y=5t\ \ 1$	$y=5t-1$
165.	17 »	за 1;	за $^1/_5$.
169.	15 зьнізу	$x\ \ 3-11t$	$x=3-11t$
171.	15 зьверху	903. $7x-15y-0$	903. $7x-15y=0$
175.	11 зьнізу	развіненьне	разьвіненьне

ГІЗ № 7395.

$$y = \sqrt{\frac{448}{7}}$$