

Einführung in die mathematische Logik

Arbeitsblatt 24

Übungsaufgaben

AUFGABE 24.1. Überprüfe, um die folgenden Wörter korrekt gebildete (einschließlich Klammerung) modallogische Ausdrücke sind.

- (1) $\Box((p) \wedge (q))$,
- (2) $(p) \rightarrow \Box(q)$,
- (3) $(p) \rightarrow (\Box(q))$,
- (4) $(\Diamond(p)) \rightarrow ((\Box(q)) \rightarrow (r))$.

AUFGABE 24.2. Zeige, dass das K -Axiom äquivalent zu

$$\vdash \Diamond\alpha \rightarrow (\Diamond\neg\beta \vee \Diamond(\alpha \wedge \beta))$$

ist.

AUFGABE 24.3. Formuliere die in Bemerkung 23.7 aufgeführten Eigenschaften für das Ableitungsprädikat in der Sprache der Modallogik.

AUFGABE 24.4.*

Zeige, dass im K -System der Ausdruck

$$\Box(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\Diamond\alpha \rightarrow \Diamond\beta)$$

ableitbar ist.

AUFGABE 24.5. Wir betrachten eine formale Modallogik, die durch das Axiomenschema

$$\vdash \Box\alpha \leftrightarrow \neg\alpha$$

gegeben sei.

- (1) Erfüllt diese Modallogik das Axiomenschema K ?
- (2) Erfüllt diese Modallogik die Notwendigkeitsregel?
- (3) Erfüllt diese Modallogik das Ideologiemaxiom?

AUFGABE 24.6. Es sei $p_i \quad i \in I$, eine Familie von Aussagenvariablen und sei L die zugehörige modallogische Sprache. Es sei S ein prädikatenlogisches Symbolalphabet, das unter anderem Konstanten $c_i, i \in I$, und eine fixierte Variable x enthalte.

- (1) Definiere eine natürliche injektive Abbildung $\Psi: L \rightarrow L^S$, bei der p_i auf $x = c_i$ und $\Box\alpha$ auf $\forall x\Psi(\alpha)$ abgebildet wird.
- (2) Was ist $\Psi(\Diamond\alpha)$?

- (3) Zeige, dass zu jeder in der K -Modallogik ableitbaren modallogischen Aussage α auch $\Psi(\alpha)$ im Prädikatenkalkül ableitbar ist.

AUFGABE 24.7. (1) Zeige, dass in einer K -Modallogik das Axiomenschema

$$\Diamond(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \Diamond\alpha \wedge \Diamond\beta$$

gilt.

- (2) Zeige, dass in einer K -Modallogik das Axiomenschema

$$\Diamond\alpha \wedge \Diamond\beta \rightarrow \Diamond(\alpha \wedge \beta)$$

nicht gelten muss.

AUFGABE 24.8. (1) Zeige, dass in einer K -Modallogik das Axiomenschema

$$\Diamond\alpha \vee \Diamond\beta \rightarrow \Diamond(\alpha \vee \beta)$$

gilt.

- (2) Zeige, dass in einer K -Modallogik das Axiomenschema

$$\Diamond(\alpha \vee \beta) \rightarrow \Diamond\alpha \vee \Diamond\beta$$

nicht gelten muss.

Zur folgenden Aufgabe vergleiche auch Aufgabe 8.24.

AUFGABE 24.9. Zeige, dass in einer K -Modallogik das Axiomenschema

$$\Diamond(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\Diamond\alpha \rightarrow \Diamond\beta)$$

nicht gelten muss.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 24.10. (2 Punkte)

Überprüfe, um die folgenden Wörter korrekt gebildete (einschließlich Klammerung) modallogische Ausdrücke sind.

- (1) $\Box((p) \wedge (q))$,
- (2) $(p) \rightarrow \Diamond((q) \vee (r))$,
- (3) $(\Box(\Box((p)))) \rightarrow (\Box(q))$,
- (4) $((\Diamond(p)) \rightarrow ((\Box(q)) \rightarrow (r)))$.

AUFGABE 24.11. (2 Punkte)

Zeige, dass in einer K -Modallogik

$$\vdash \Diamond\neg\neg\alpha \leftrightarrow \neg\neg\Diamond\alpha$$

ableitbar ist.

AUFGABE 24.12. (2 Punkte)

Zeige, dass die K -Modallogik widerspruchsfrei ist.

Abbildungsverzeichnis

- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 3
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 3