Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2017**

Grundkurs Mathematik II

Arbeitsblatt 48

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 48.1. Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper mit der Eigenschaft, dass jede Intervallschachtelung in K einen Punkt enthält. Zeige, dass K vollständig ist.

Übungsaufgaben

Aufgabe 48.2. Die Dezimalentwicklung einer reellen Zahl beginne

$$3,601473301\ldots.$$

Beschreibe die zugehörige Intervallschachtelung mit Intervallen der Länge $10, 1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}, \frac{1}{100000}$ und entsprechenden Grenzen.

Aufgabe 48.3. Es sei $I_n = [a_n, b_n]$ eine Intervallschachtelung für x und $J_n = [c_n, d_n]$ eine Intervallschachtelung für y. Beschreibe eine Intervallschachtelung für $x + y$.

Aufgabe 48.4. Die Dezimalentwicklungen der beiden reellen Zahlen x und y beginnen

$$x = 0,24\ldots$$

und

$$y = 0,51\ldots.$$

Was kann man über die Ziffernentwicklung der Summe $x + y$ sagen?

Aufgabe 48.5. Die Dezimalentwicklungen der beiden reellen Zahlen x und y beginnen

$$x = 0,24719113\ldots$$

und

$$y = 0,60421809\ldots.$$

Was kann man über die Ziffernentwicklung der Summe $x + y$ sagen?

Aufgabe 48.6. Die Dezimalentwicklungen der beiden reellen Zahlen x und y beginnen

$$x = 0,3\ldots$$

und

$$y = 0,3\ldots.$$

Was kann man über die Ziffernentwicklung des Produktes $x \cdot y$ sagen? Was kann man über die erste Nachkommaziffer des Produktes sagen, wenn die zweite Nachkommaziffer gleich 5 ist.

Aufgabe 48.7. Die Dezimalentwicklungen der beiden reellen Zahlen x und y beginnen

$$x = 0,536080713\ldots$$

und

$$y = 0,663184254\ldots.$$

Was kann man über die Ziffernentwicklung des Produktes $x \cdot y$ sagen?

Aufgabe 48.8.*

Eine reelle Zahl x besitze die Ziffernentwicklung

$$0,523\ldots$$

im Dezimalsystem. Was kann man über die Ziffernentwicklung von $1/x$ sagen?

Aufgabe 48.9. Eine reelle Zahl x besitze die Ziffernentwicklung

$$0,3715\ldots$$

im Dezimalsystem. Was kann man über die Ziffernentwicklung von $1/x$ sagen?

Es sei K ein angeordneter Körper. Eine Teilmenge $T \subseteq K$ heißt ein *Abschnitt*, wenn für alle $a, b \in T$ mit $a \leq b$ und jedes $x \in K$ mit $a \leq x \leq b$ auch $x \in T$ ist.

Aufgabe 48.10. Es sei K ein angeordneter Körper. Zeige, dass jedes Intervall (einschließlich der unbeschränkten Intervalle) in K ein Abschnitt ist.

Man gebe ein Beispiel für einen Abschnitt in $\mathbb{Q}$, der kein Intervall ist.

Zeige, dass in $\mathbb{R}$ jeder Abschnitt ein Intervall ist.

Aufgabe 48.11. Inwiefern definiert eine rationale Zahl einen Dedekindschen Schnitt?

Aufgabe 48.12. Inwiefern definiert eine reelle Zahl einen Dedekindschen Schnitt?

Aufgabe 48.13. Definiere auf der Menge der Dedekindschen Schnitte eine Addition, die für rationale Schnitte mit der Addition auf $\mathbb{Q}$ übereinstimmt. Zeige, dass diese Verknüpfung kommutativ und assoziativ ist, dass es ein neutrales Element gibt und dass jeder Dedekindsche Schnitt einen negativen Schnitt besitzt.

Aufgabe 48.14. Definiere auf der Menge der Dedekindschen Schnitte eine Multiplikation, die für rationale Schnitte mit der Multiplikation auf $\mathbb{Q}$ übereinstimmt. Zeige, dass diese Verknüpfung kommutativ und assoziativ ist, dass es ein neutrales Element gibt und dass jeder Dedekindsche Schnitt $\neq 0$ einen inversen Schnitt besitzt.

Aufgabe 48.15. Definiere auf der Menge der Dedekindschen Schnitte eine totale Ordnung, die für rationale Schnitte mit der Größergleichrelation auf $\mathbb{Q}$ übereinstimmt.

Aufgabe 48.16. Zeige, dass die Menge der Dedekindschen Schnitte ein angeordneter Körper ist.

Aufgabe 48.17. Man gebe für jede der vier Bedingungen, die in der Definition eines Dedekindschen Schnittes vorkommen, ein Beispiel für ein Paar (A, B) mit $A, B \subseteq \mathbb{Q}$, das drei dieser Bedingungen erfüllt, aber nicht die vierte.

Aufgabe 48.18. Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper mit der Eigenschaft, dass jeder Dedekindsche Schnitt in K ein Punktschnitt ist. Zeige, dass K vollständig ist.

Aufgabe 48.19. Es sei $n \in \mathbb{N}_+$ und es seien r, s nichtnegative reelle Zahlen mit

$$r^n < s.$$

Zeige mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes, dass es ein $k \in \mathbb{N}_+$ mit

$$\left(r + \frac{1}{k}\right)^n < s$$

gibt.

Aufgabe 48.20. Zeige, dass das reelle Einheitsintervall $[0, 1]$ unendlich viele irrationale Zahlen enthält.

Aufgabe 48.21. Zeige, dass jedes reelle Intervall mit positiver Intervalllänge unendlich viele irrationale Zahlen enthält.

Aufgabe 48.22.*

Es seien x und y zwei nichtnegative reelle Zahlen. Zeige, dass das arithmetische Mittel der beiden Zahlen mindestens so groß wie ihr geometrisches Mittel ist.

Aufgabe 48.23. Es seien $b > a > 0$ positive reelle Zahlen. Wir definieren rekursiv zwei Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $x_0 = a$, $y_0 = b$ und durch

$$x_{n+1} = \text{ geometrisches Mittel von } x_n \text{ und } y_n\,,$$

$$y_{n+1} = \text{ arithmetisches Mittel von } x_n \text{ und } y_n\,.$$

Zeige, dass $[x_n, y_n]$ eine Intervallschachtelung ist.

Aufgabe 48.24. Berechne für die Folge

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

die ersten vier Glieder als Bruch. Man gebe jeweils einen approximierenden Dezmialbruch mit einem Fehler von maximal $\frac{1}{1000}$ an.

Aufgabe 48.25. Zeige die folgenden Abschätzungen.

a) $\binom{n}{k}\cdot\frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{k!}$,

b) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$.

Aufgabe 48.26.*

Für die Eulersche Zahl e seien die Abschätzungen

$$2,71 \leq e \leq 2,72$$

bekannt.

(1) Was lässt sich über die ersten Stellen der Dezimalentwicklung von e^2 sagen?
(2) Was lässt sich über die ersten Stellen der Dezimalentwicklung von e^{-1} sagen?

Eine Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}$ heißt *dicht*, wenn es zu jeder reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ und jedem $\epsilon > 0$ Elemente $t \in T$ mit

$$|t-x| < \epsilon$$

gibt.

Aufgabe 48.27. Zeige, dass die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ dicht ist.

Aufgabe 48.28. Zeige, dass die Menge der Dezimalbrüche in $\mathbb{R}$ dicht ist.

Aufgabe 48.29. Es sei $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ eine fixierte natürliche Zahl und es sei T die Menge aller rationalen Zahlen, die man mit einer Potenz von k als Nenner schreiben kann. Zeige, dass T in $\mathbb{R}$ dicht ist.

Aufgabe 48.30. Es sei $T \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge. Zeige, dass T genau dann dicht in $\mathbb{R}$ ist, wenn es zu jeder reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in T$ gibt, die gegen x konvergiert.

Aufgabe 48.31. Zeige, dass die Menge der irrationalen Zahlen in $\mathbb{R}$ dicht ist.

Für die folgende Aufgabe ist Aufgabe 47.7 hilfreich.

Aufgabe 48.32. Zeige, dass die Untergruppe

$$\mathbb{Z} + \mathbb{Z} \cdot \sqrt{3} \subseteq \mathbb{R}$$

dicht ist.

Aufgabe 48.33. Sei H eine (additive) Untergruppe der reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Zeige, dass entweder $H = \mathbb{Z}a$ mit einer eindeutig bestimmten nichtnegativen reellen Zahl a ist, oder aber H dicht in $\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 48.34. Zu den reellen Zahlen x und y sei die periodische Ziffernentwicklung bekannt,

$$x = z_0, \overline{z_1 \ldots z_m}$$

und

$$y = w_0, \overline{w_1 \ldots w_m}.$$

Zeige, dass die Summe $x+y$ ebenfalls eine (nicht unbedingt minimale) Periode der Länge m besitzt. Erläutere, wie sich die Periode der Summe aus den beiden einzelnen Perioden ergibt.

Aufgabe 48.35. Zu den reellen Zahlen x und y sei die periodische Ziffernentwicklung bekannt,

$$x = z_0, z_1 \ldots z_k \overline{z_{k+1} \ldots z_{k+r}}$$

und

$$y = w_0, w_1 \ldots w_\ell \overline{w_{\ell+1} \ldots z_{\ell+s}}.$$

Was kann man über die Periodenlänge der Summe $x + y$ sagen?

Aufgabe 48.36. Zu den reellen Zahlen x und y sei die periodische Ziffernentwicklung bekannt,

$$x = z_0, z_1 \ldots z_k \overline{z_{k+1} \ldots z_{k+r}}$$

und

$$y = w_0, w_1 \ldots w_\ell \overline{w_{\ell+1} \ldots z_{\ell+s}}.$$

Was kann man über die Periodenlänge des Produktes $x \cdot y$ sagen?

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 48.37. (3 Punkte)

Die Dezimalentwicklung einer reellen Zahl beginne

$$-7,35831149\ldots.$$

Beschreibe die zugehörige Intervallschachtelung mit Intervallen der Länge $10, 1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}, \frac{1}{100000}$ und entsprechenden Grenzen.

In der folgenden Aufgabe dürfen Sie annehmen, dass sich alles in $\mathbb{R}_+$ abspielt.

Aufgabe 48.38. (3 Punkte)

Es sei $I_n = [a_n, b_n]$ eine Intervallschachtelung für x und $J_n = [c_n, d_n]$ eine Intervallschachtelung für y. Beschreibe eine Intervallschachtelung für $x \cdot y$.

Aufgabe 48.39. (3 Punkte)

Eine reelle Zahl x besitze die Ziffernentwicklung

$$2,1278\ldots$$

im Dezimalsystem. Was kann man über die Ziffernentwicklung von $1/x$ sagen?

Aufgabe 48.40. (4 Punkte)

Eine reelle Zahl x besitze die Ziffernentwicklung

$$0,101001000100001000001\ldots$$

im Dezimalsystem, die angedeutete Regelmäßigkeit gelte für die gesamte Entwicklung. Bestimme die Ziffernentwicklung von $1/x$ bis zur vierten Nachkommastelle.

Aufgabe 48.41. (3 Punkte)

Bestimme die Ziffernentwicklung von

$$0,\overline{1} \cdot 0,\overline{1}\,.$$

Aufgabe 48.42. (3 Punkte)

Berechne für die Folge

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

die Glieder bis x_5 als Bruch. Man gebe jeweils einen approximierenden Dezmialbruch mit einem Fehler von maximal $\frac{1}{10000}$ an.