Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2018**

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Vorlesung 34

Die Diagonalisierbarkeit von Isometrien im Komplexen

Lemma 34.1. *Sei*
$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$
eine lineare Isometrie auf einem endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum V mit Skalarprodukt und sei $U \subseteq V$ ein invarianter Unterraum. Dann ist auch das orthogonale Komplement $U^\perp$ invariant. Insbesondere kann man φ als direkte Summe
$$\varphi = \varphi_U \oplus \varphi_{U^\perp}$$
schreiben, wobei die Einschränkungen φ_U und $\varphi_{U^\perp}$ ebenfalls Isometrien sind.

Beweis. Es ist
$$U^\perp = \{v \in V \mid \langle v, u\rangle = 0 \text{ für alle } u \in U\}.$$
Für ein solches $v \in U^\perp$ und ein beliebiges $u \in U$ ist
$$\langle \varphi(v), u\rangle = \left\langle \varphi^{-1}(\varphi(v)), \varphi^{-1}(u)\right\rangle = \langle v, u'\rangle = 0,$$
da $u' = \varphi^{-1}(u) \in U$ wegen der Invarianz von U liegt. Also ist wieder $\varphi(v) \in U^\perp$. $\square$

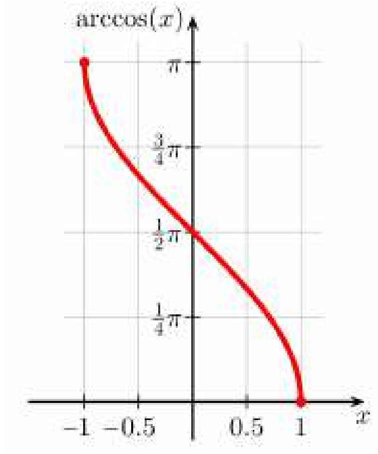
Die folgende Aussage heißt *Spektralsatz* oder genauer *Spektralsatz für komplexe Isometrien.* Im Verlauf dieses Kurses weredn wir noch weitere Spektralsätze kennenlernen, siehe Satz 41.11 und Satz 42.9.

Satz 34.2. *Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Skalarprodukt und sei*
$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$
eine Isometrie. Dann besitzt V eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren zu φ. Insbesondere ist φ diagonalisierbar.

Beweis. Wir führen Induktion über die Dimension von V. Im eindimensionalen Fall ist die Aussage klar. Aufgrund des Fundamentalsatzes der Algebra und Satz 23.2 besitzt φ einen Eigenwert und einen Eigenvektor, den wir normieren können. Es sei $E \subseteq V$ die zugehörige Eigengerade. Da eine Isometrie vorliegt, ist das orthogonale Komplement $E^\perp$ nach Lemma 34.1 ebenfalls φ-invariant, und die Einschränkung
$$\varphi|_{E^\perp}\colon E^\perp \longrightarrow E^\perp$$

ist ebenfalls eine Isometrie. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es also von $E^\perp$ eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren, die zusammen mit dem ersten Eigenvektor eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von V bildet. $\square$

Winkel



Bemerkung 34.3. Für zwei von 0 verschiedene Vektoren v und w in einem euklidischen Vektorraum V folgt aus der Ungleichung von Cauchy-Schwarz, dass

$$-1 \leq \frac{\langle v, w \rangle}{||v|| \cdot ||w||} \leq 1$$

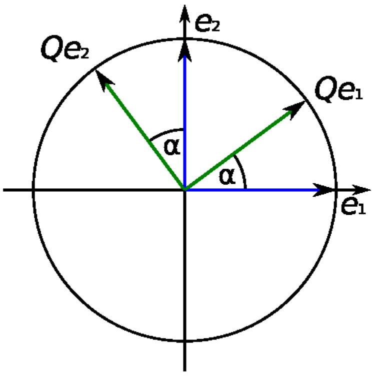
ist. Damit kann man mit Hilfe der trigonometrischen Funktion *Kosinus* (als bijektive Abbildung $[0, \pi] \to [-1, 1]$) bzw. der Umkehrfunktion den Winkel zwischen den beiden Vektoren definieren, nämlich durch

$$\angle(v, w) := \arccos \frac{\langle v, w \rangle}{||v|| \cdot ||w||}.$$

Der Winkel ist also eine reelle Zahl zwischen 0 und π.

Bei einem affinen Raum E über einem euklidischen Vektorraum V und bei gegebenen drei Punkten $P, Q, R \in E$ (einem *Dreieck*) mit $Q, R \neq P$ versteht man unter dem *Winkel* $\angle(Q, P, R)$ des Dreiecks an P den Winkel $\angle(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR})$.

Ebene Isometrien



Satz 34.4. *Sei*

$$\varphi \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

eine eigentliche, lineare Isometrie. Dann ist φ eine Drehung, und ihre Matrix hat bezüglich der Standardbasis die Gestalt

$$D(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

mit einem eindeutig bestimmten Drehwinkel $\theta \in [0, 2\pi[$.

Beweis. Es seien (x, y) und (u, v) die Bilder der Standardvektoren $(1, 0)$ und $(0, 1)$. Unter einer Isometrie wird die Länge eines Vektors erhalten, daher ist

$$|| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} || = \sqrt{x^2 + y^2} = 1.$$

Daher ist x eine reelle Zahl zwischen -1 und $+1$ und $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$, d.h. (x, y) ist ein Punkt auf dem reellen Einheitskreis. Der Einheitskreis wird bekanntlich durch die trigonometrischen Funktionen parametrisiert, d.h. es gibt einen eindeutig bestimmten Winkel θ, $0 \leq \theta < 2\pi$, mit

$$(x, y) = (\cos\theta, \sin\theta).$$

Da unter einer Isometrie die Senkrechtsbeziehung erhalten bleibt, muss

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\rangle = xu + yv = 0$$

gelten. Bei $y = 0$ folgt daraus (wegen $x = \pm 1$) $u = 0$. Dann ist $v = \pm 1$ und wegen der Eigentlichkeit muss das Vorzeichen dasselbe wie von x sein. Sei also $y \neq 0$. Dann gilt

$$\begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} = \frac{u}{y} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Da die beiden Vektoren die Länge 1 haben, muss der skalare Faktor u/y den Betrag 1 haben. Bei $u = y$ wäre $v = -x$ und die Determinante wäre -1. Also muss $u = -y$ und $v = x$ sein, was die Behauptung ergibt. $\square$

Die Hintereinanderschaltung von zwei Drehungen

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \text{ ist}$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}.$$

Diese Eigenschaft ist einleuchtend, wenn man die intuitive Vorstellung, die sich mit einer Drehung verbindet, verwendet. Unter Verwendung der Additionstheoreme für die trigonometrischen Funktionen kann man sie beweisen. Umgekehrt folgen die Additionstheoreme aus dieser Eigenschaft, siehe Aufgabe 34.11. Aus dieser Eigenschaft folgt auch, dass die Gruppe der ebenen Drehungen kommutativ ist.

Satz 34.5. *Sei*

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

eine uneigentliche lineare Isometrie. Dann ist φ eine Achsenspiegelung und ihre Matrix hat bezüglich der Standardbasis die Gestalt

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}.$$

mit einem eindeutig bestimmten Winkel $\alpha \in [0, 2\pi[$.

Beweis. Wir betrachten

$$\varphi \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

was nach dem Determinantenmultiplikationssatz eine eigentliche Isometrie ist. Nach Satz 34.4 gibt es somit einen eindeutig bestimmten Winkel $\alpha \in [0, \pi[$ mit

$$\varphi \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Somit ist

$$\varphi = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}.$$

$\square$

Bei einer solchen Achsenspiegelung ist $\begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha - 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 1, die Spiegelungsachse ist also $\mathbb{R} \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha - 1 \end{pmatrix}$, siehe Aufgabe 34.15. Eine Achsenspiegelung wird bezüglich der Basis, die aus einen Vektor $\neq 0$ der Spiegelungsachse und einem dazu senkrechten Vektor $\neq 0$ besteht, durch

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ beschrieben. Die in Satz 34.5 gegebene Beschreibung bezüglich der Standardbasis lässt sich also wesentlich verbessern.

Räumliche Isometrien

Satz 34.6. *Sei*

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

eine lineare Isometrie. Dann gibt es einen Eigenvektor zum Eigenwert 1 *oder* -1.

Beweis. Das charakteristische Polynom P zu φ ist ein normiertes Polynom vom Grad drei. Für $t \rightarrow +\infty$ geht $P(t) \rightarrow +\infty$ und für $t \rightarrow -\infty$ geht $P(t) \rightarrow -\infty$. Nach dem Zwischenwertsatz besitzt daher P mindestens eine Nullstelle. Eine solche Nullstelle ist ein Eigenwert von φ. Nach Satz 33.10 ist der Eigenwert gleich 1 oder gleich -1. □

Eine eigentliche lineare Isometrie des Raumes führt insbesondere die Einheitskugel durch eine Bewegung in sich über. Man kann sich eine solche Isometrie also gut als eine Drehung an einer Kugel vorstellen, die in einer passenden Schale liegt.

Satz 34.7. *Eine eigentliche Isometrie*

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

besitzt einen Eigenvektor zum Eigenwert 1, *d.h. es gibt eine Gerade (durch den Nullpunkt), die unter* φ *fest bleibt.*

Beweis. Wir betrachten das charakteristische Polynom von φ, also

$$P(\lambda) = \det(\lambda E_3 - \varphi).$$

Dies ist ein normiertes reelles Polynom vom Grad drei. Für $\lambda = 0$ ergibt sich

$$P(0) = \det(-\varphi) = -\det(\varphi) = -1.$$

Da für $\lambda \rightarrow \infty$ das Polynom $P(\lambda) \rightarrow \infty$ geht, muss es für ein positives λ eine Nullstelle geben. Aufgrund von Satz 33.10 kommt dafür nur $\lambda = 1$ in Frage. □

Satz 34.8. *Sei*

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

eine eigentliche Isometrie. Dann ist φ *eine Drehung um eine feste Achse. Das bedeutet, dass* φ *in einer geeigneten Orthonormalbasis durch eine Matrix der Form*

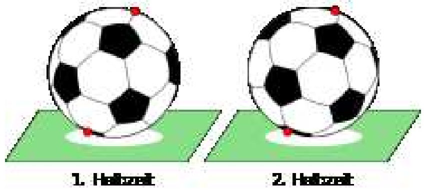
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

beschrieben wird.

Beweis. Nach Satz 34.7 gibt es einen Eigenvektor u zum Eigenwert 1. Sei $U = \mathbb{R}u$ die davon erzeugte Gerade. Diese ist fix und insbesondere invariant unter φ. Nach Lemma 34.3 ist dann auch das orthogonale Komplement $U^\perp$ invariant unter φ, d.h. es gibt eine lineare Isometrie

$$\varphi_2 \colon U^\perp \longrightarrow U^\perp,$$

die auf $U^\perp$ mit φ übereinstimmt. Dabei muss φ_2 eigentlich sein, und daher muss nach Satz 34.4 φ_2 eine Drehung sein. Wählt man einen Vektor der Länge eins aus U und dazu eine Orthonormalbasis von $U^\perp$, so hat φ bezüglich dieser Basis die angegebene Gestalt. □



Korollar 34.9. *Zu Beginn eines Fußballspiels liegt der Fußball auf dem Anstoßpunkt. Wenn ein Tor erzielt wird, so wird der Ball wieder auf den Anstoßpunkt zurückgesetzt. In dieser Situation gilt: Es gibt mindestens zwei (gegenüber liegende) Punkte auf dem Fußball (seiner Oberfläche), die beim Neuanstoß genau dort liegen, wo sie am Spielanstoß lagen. Die Gesamtbewegung des Balles lässt sich durch eine Achsendrehung realisieren.*

Beweis. Die Gesamtbewegung ist eine lineare Isometrie, daher folgt die Aussage aus Satz 34.8. □

Der Zerlegungssatz für Isometrien

Lemma 34.10. *Es sei $V \neq 0$ ein reeller endlichdimensionaler Vektorraum und*

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

ein Endomorphismus. Dann besitzt V einen φ-invarianten Untervektorraum $U \subseteq V$ der Dimension 1 oder 2.

Beweis. Wir können

$$V = \mathbb{R}^n$$

annehmen und dass φ durch die Matrix M bezüglich der Standardbasis gegeben ist. Wenn φ einen Eigenwert besitzt, so sind wir fertig. Andernfalls betrachten wir die entsprechende komplexe Abbildung, also

$$\varphi \colon \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n,$$

die durch die gleiche Matrix M gegeben ist. Diese besitzt einen komplexen Eigenwert $a + b\mathrm{i}$ und einen komplexen Eigenvektor $v \in \mathbb{C}^n$. Es ist also

$$Mv \,=\, (a + b\mathrm{i})v.$$

Mit

$$v \,=\, v_1 + \mathrm{i}v_2$$

und $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ bedeutet dies

$$Mv_1 + \mathrm{i}Mv_2 \,=\, Mv \,=\, (a + b\mathrm{i})\,(v_1 + \mathrm{i}v_2) \,=\, av_1 - bv_2 + \mathrm{i}(av_2 + bv_1).$$

Vergleich von Real- und Imaginärteil zeigt, dass $Mv_1, Mv_2 \in \langle v_1, v_2 \rangle$ sind, so dass der Untervektorraum $\langle v_1, v_2 \rangle$ invariant ist. □

SATZ 34.11. *Es sei*

$$\varphi\colon\, V \longrightarrow V$$

eine Isometrie auf dem euklidischen Vektorraum V. Dann ist V eine orthogonale direkte Summe

$$V \,=\, G_1 \oplus \cdots \oplus G_p \oplus H_1 \oplus \cdots \oplus H_q \oplus E_1 \oplus \cdots \oplus E_r$$

von φ-invarianten Untervektorräumen, wobei die G_i, H_j eindimensional und die E_k zweidimensional sind. Die Einschränkung von φ auf den G_i ist die Identität, auf H_j die negative Identität und auf E_k eine Drehung ohne Eigenwerte.

Beweis. Wir führen Induktion über die Dimension von V, die mit n bezeichnet sei. Der eindimensionale Fall ist wegen Satz 33.10 klar. Sei $n = 2$. Die Determinante kann wegen Lemma 33.13 nur die Werte 1 und -1 annehmen. Bei -1 besitzt das charakteristische Polynom zwei Nullstellen, und diese müssen nach Satz 33.10 1 und -1 sein. Es liegt dann also eine Achsenspiegelung vor und

$$V \,=\, G \oplus H.$$

Wenn die Determinante 1 ist, so sind wir in der Situation von Satz 34.4 und es liegt eine Drehung vor. Wenn der Drehwinkel 0 ist, so liegt die Identität vor und man kann $V = G_1 \oplus G_2$ zerlegen, und wenn der Drehwinkel π ist, so liegt die Punktspiegelung $-\operatorname{Id}$ vor und man kann $V = H_1 \oplus H_2$ zerlegen. Bei den anderen Winkeln gibt es keine Eigenvektoren.

Sei nun $n \geq 1$ beliebig und die Aussage für kleinere Dimensionen schon bewiesen. Nach Lemma 34.10 gibt es einen φ-invarianten Untervektorraum U der Dimension 1 oder 2 und nach Lemma 34.3 gibt es dazu ein invariantes orthogonales Komplement, also

$$V \,=\, U \oplus W.$$

Die Induktionsvoraussetzung angewendet auf W liefert das Resultat. □

In dieser Zerlegung ist $G_1 \oplus \cdots \oplus G_p$ der Eigenraum zum Eigenwert 1 und $H_1 \oplus \cdots \oplus H_q$ der Eigenraum zum Eigenwert -1, wobei die jeweiligen Zerlegungen nicht eindeutig sind. Die Isometrie ist genau dann eigentlich, wenn q gerade ist.

Abbildungsverzeichnis