の性質を知つて置く方が便利である。素數は1かその數かでなくてはわれ切れぬ數である。2 3 5 7と順々に一つ一つ考へて行くもよい方法である。舊幕時代に於て、最上流の和算家會田安明氏はより小さい素數の積に分解することによつて素數を決定する方法を講じて居る。先づ百以下の數について言ふと、2を別にして、奇數全部を抽出し、それを分解しうるものと否とを鑑別して行つた。即ち

1　3　5　7　3×3　11　13　3×5　17　19　3×7

5×5　3×3×3　31　3×11　5×7　37　3×13　41　43　3×3×5　47

といふ様にして行つたのである。安明はこれに單數といふ名稱を附し、1 3 5 7 11 13等を單數とし100以下の單數廿五件と決定して居る。二十五件としたのは2を別に見た爲である。更に計算の結果二百以下四十六件、三百以下六十二件、……九百以下一百五十五件、一千以下一百六十九件とし、一萬以下は一千二百二十九件であるとしてある。因數に分解する方法は、和算家の自約術と稱へた處のものである。今一つの方法は、1 2 3 4 5の順に數を列記して置いてまづ1を消去し、次は2を殘して2の次二つ目毎に全部を消去して2の倍數を去り、3を殘して3より3番目に當る3の倍數を全部消去する等順次5 7 11と小さい素數によつて試みる方法である。頗る面倒であるけれど消え殘つたものが素數であるから、割合に困難はない。第三の方法としては、小さい素數で順々に割つて、商が除數よりも小さくなるまで割り試みる方法である。某數の素數か否かを決定するには最捷徑な方法であつて確實である。公倍數を求めて行くのに、100以下の素數を暗記して置いてそれを利用することは非常に好都合である。100以下の數の素數の歌も子供と共に作つた事がある。公倍數や最小公倍數の性質を明かにしたなら、まづ實際について試みさせるがよい。それには大體觀察によるべきである。觀察による第一の着眼はまづ最小さいものを考へることである。尋六二頁(9)の(2,6)(2,3,6)の如きに最好都合で、2は6を倍數とする故考の中より除くことをうる。故に第一のものは6一つについて考へればよいのである。第二のものは3と6とについて考へればよいが、3がまた6を倍數とする故これ亦6一ヶとなる。故

に兩者共6が最小公倍數となる。第二の着眼は素數に分解するのである。例へば(4.9)(6.10)(4.6.15)の如きである。此の三つの場合中の第一は $4=2\times2$ $9=3\times3$ で兩方共通の因子がないから、その儘掛けて $4\times9=36$ を最小公倍數とする。第二のものは $6=2\times3$ $10=2\times5$ で兩方に2をふくむ故一方を消去し、$2\times3\times5=30$ が最小公倍數となる。第三のものは $4=2\times2$ $6=2\times3$ $15=3\times5$ で4の中には2を2個有し6の中には一ヶ有す故に少き方を消去し、6の中にも3 15の中にも3を有する故いづれか一方を消去す。$2\times2\times3\times5=60$ を最小公倍數とするのである。かういふ利用法は中々に多い。第四は大きい方の2倍3倍……等が小さい數の倍數になるかどうかを考へるので、例へば(4.6)について6の2倍12が4の倍數であるから、12を採る如きである。又(2.3)(4.5)の如く連續せる二數は、その差が1であつて互に公約數を持たぬ故そのまゝ掛け合せて、$2\times3=6$ $4\times5=20$ が最小公倍數なることも明かである。以上の方法をうまく利用すれば、大抵の場合は視察によつて求め得られるのが常である。いよ〳〵視察の出來ぬものに特殊な方法を講ずべきである。

特殊な方法といふも實は素數に分解するか、共通の因子を消去するか、積を最大公約數でわるかといふ樣な方法である。いづれも一得一失は免れ難い。

(四)公約數最大公約數　約數の意義から出發して約數を發見する方法に行く。これは倍數を考へる時大體練習のつく事柄である。約數の意義もこれを碎いて言ふと、をわり切る數となる。をわり切る數であるから、4の約數は4をわり切る數である。卽1 2 4となる。此のうち1は普通約數の仲間に入れない。6の約數は6をわり切る數故2 3及6となる。かうしていろ〳〵の數について練習して行く。公約數を發見することは約分の基礎として大切な練習である。普通の約分は大抵視察を以て小さい素數から順々に考へて行くのである。こゝに倍數のうたを利用することは最その考へ方を助ける。12 18 20 24 27 30 36 48等の數を出して何で約せるかを考へさせることは、非常に大切な事である。これさへ正確に敏速に出來て居れば、最大公約數の特別な求め方等を使はずとも、普通の分數の取扱には差支ないのである。只一般的の方法を知りたいといふものの爲に高等一

學年の教科書にある樣な方法を採る。即ち一は共通の因子を抽出して行く方法で、一は小さいもので大きいものを割り、その差で小さい方をわり、更にその時の差で前の除數を割る方法を繰返すのである。割り切る事の出來た除數は兩數の公約數となる。

第十一章　分數

(一) 分數の發達　分數の起源は至つて古いものらしい。パピルスといふ書物は五六十年前に發見されたエヂプトの算術及幾何の教科書である。この種教科書中現存するものとしては最古のもので、目下英國博物館に藏されて居る。アイゼンロール氏の苦心慘憺たる研究の結果、一八七七年にはじめてその內容が世に紹介されたので、これを讀破する困難は容易なものではなかつたらしい。今その研究の結果を大略說明すると。

紀元前一七〇年以前の或る古い時代にアーメス王によつて編著されたもので、しかもそれよりもずつと古い紀元前三四千年頃の或る著書＝勿論これは現存しない＝を基にして記述したものであるといふ。「總ての暗きものの知識を得る指針」と題されて居る。

古代分數の特徴、とも見るべきは、分母分子の同時的變化を避けてゐることで、べ

ピロニヤ人は分母を60ローマ人は12とし、エヂプト、ギリシヤ人は分子を一定不變として、分母を變數に扱ふたさうである。この書に於ても分子は常に1のものを採つて居る。故に、$\frac{2}{5}$といふ分數は$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$の意味に書く。仕事を簡單にする爲に$\frac{2}{2n+1}$の形の分數を、すべて單位分數の和に直した所の表が載つて居て、nは49まで採つてあるから、畢竟分母は99までになつて居る譯である。例へば$\frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$ $\frac{2}{99}=\frac{1}{66}+\frac{1}{198}$といふ樣にする。そこで$5\div21$の如きは$5=2+2+1$とし、その表から$\frac{2}{21}=\frac{1}{14}+\frac{1}{42}$を繰つて、

$$\begin{aligned}\frac{5}{21}&=\frac{1}{21}+\left(\frac{1}{14}+\frac{1}{42}\right)+\left(\frac{1}{14}+\frac{1}{42}\right)\\&=\frac{1}{21}+\left(\frac{2}{14}+\frac{2}{42}\right)\\&=\frac{1}{21}+\frac{1}{7}+\frac{1}{21}\\&=\frac{1}{7}+\frac{2}{21}\\&=\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{42}\end{aligned}$$

といふ樣に、分子の1なる分數の和として表出させるのである。他の數との加減乘除をするには又この方法で行くので、この換算卽通分子の爲に非常に手間どるから計算は仲々こみいつたものとならうといふことは推するに難くはない。いづれにしても分數の起源は中々に遠い事が明かであらう。

この書の分數記法はまづ分母を書き、點を書き、次に分子を書いたので、今日我々の用ゐてゐる樣な記數法はずつと後に出來たものである。卽ち西暦千二百年の頃伊太利人フィボナチーの創めたものだといふ事である。この記數法が出來た爲め分數計算は非常な便利を得て分母子の同時的變化も非常に容易になつたものらしい。

(二)分數の計算と分數觀念　今までの本書の研究法は大抵觀念からはじめて性質計算法等に及んだが分數は逆に計算に必要な要素から分解的に溯つて研究して見よう。これ擴充の徑路を逆に辿るのである。まづ加減の計算に最も大切なことは通分である。諸等數の項で諸等數と分數とは一は1よりも大きい單位ではかり一は1を何等分かした單位で測るがいづれも各種まち／＼の單位が出て來るのでその單位を共通にしてからでなくてはある種の計算はなし得ない此の

點は兩方よく似てゐるといふことを言つて置いたが、通分卽分數の通法は諸等數の通法と全く同一精神である。　單位の違つた幾つかの分數について計算するのは不便且つ困難であるから、これを正す爲同一の單位ではかり直すのである。　この測りなほすこと卽たて直しは分數の性質から當然生れて來る。　次に乘除に必要な作業は帶分數と假分數との關係である。　帶分數を假分數に假分數を帶分數に直す、これはよく考へれば通分の一種である。　整數を分數として考へる。　卽整數(1といふ單位で測つて成立して居る)を1よりも小さい單位で測りなほすのである。　故にこれまた分數の性質から導かれる。　加減乘除を通じて必要な作業に約分がある。　約分は値を變化せずして形を簡易にする作業である。　通分の逆とも或一種とも見られる。　これまた分數の性質から自ら誘導される。　分數を純粹に應用した事實計算は幾種類もない。　これは皆分數特有の性質を利用するものであるからである。　かう考へて來ると分數の性質を明かにする事はすべての分數計算の根本問題であると言はなければならない。　性質の闡明。　これは觀念から發生して來る。　分數の意義を究め觀念を確立することは分數研究の第一步である。　最必要な第一步である、これを圖示すると、

分數の意義（觀念）→分數の性質→{通分 / 約分 / 帶分數⇅假分數}→{加減法 / 乘除法}→事實算

といふ形になる。

(三)分數の直觀教授　分數教授に於て確實な基礎觀念を得さすことはすべての計算の基である。　故に確實な觀念を明瞭に得させる事に充分力を入れなければならぬ。　それには實物圖形等の具體物を用ゐて、觀念の正確明瞭と順當にして正鵠を得た發展とを企圖すべきである。　まづ立體形のものとしては、水藥の瓶やメートルグラスは面白い。　水藥瓶は普通二日分を入れ、それが各三回分に區分され、その各がまた二等分されて居るから、此瓶を用ゐて二分の一・三分の一・三分の二・四

分の一・四分の二・四分の三及六分の一乃至六分の五・十二分の一乃至十二分の十一等を考へ且發見させる事が出來る。メートルグラスは100 c.cのものが最多いから、同様の取扱によつて、二分の一・四分の一・五分の一・十分の一・廿分の一等の系統が直觀出來る。立體形は一々兒童に持たせることは取扱上不便がある。子供と共に蒐集して敎室用とすべきである。最簡單なのは糸又は線である。折ることも、切ることも重ねることも容易であるから、取扱上の便はないわけでもない。只糸又は線の缺點は分數に最大切な1即全體の考を充分にすることの出來ない事である。1尺が1か1尺2寸で全體か。左右いくらでも延長出來さうな氣がする。いくらでも延長しうるのはいくら短くも切りうる事である。切つても延しても1たりうることは誤解の基となる。中庸を得て最取扱に便なのは平面圖形中の圓である。圓はそれ自身圓滿完全を象徴して居る。然もこれを等分して$\frac{1}{n}$を表すにも、圓周を等分し中心から幾つかの半徑を引くことによつて、簡單になしうる。そして重ねたり折つたりもやさしく出來る利益がある。尙その上半徑の一つを切り込んで置くことによつて、そこで喰ひ合してぐる〳〵まはす、重り合はす等の利益が非常に大きい。この半徑を切り込んで置くことは十數年前に自分の考案したもので、簡單な事ながら重大な意義が存する。自分はこれにM式圓板といふ名稱を與へた。方形等の平面圖形もわるい事はない。けれども何といつても圓の圓滿なのには及ばない。私は紙製のM式圓板を兒童に持たせ、銅貨を用ゐて圖形を描かせ、主としてこれによつて分數觀念の確立を圖ることにして居る。そして立體形や線や糸等は補助方便として用ゐる樣にする。M式圓板の敎師用は、白ボール製で直徑五寸乃至六寸位。五寸三分徑のものなら白ボール一枚から廿四枚を切りとれる。約廿枚あれば充分である。その廿枚で、(1)、二分の一系統のもの $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{1}{16}$ 等、(2)、三分の一系統のもの $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{1}{9}$ $\frac{7}{9}$ $\frac{1}{12}$ 等(3)、五分の一系統のもの $\frac{1}{5}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{3}{10}$ $\frac{1}{15}$ 等を作る。そして分割した一線を以て一の半徑だけ切れ込みを作つて置く。分割した數によつて一種乃至數種の色を塗つて區劃を明瞭

にする。圖示するとかういふ様になる。兒童に銅貨を用ゐて圖をかゝせるのも同じ様にする。只切れ込みはつけない。圓中心半徑といふ順序にかゝすがよい。

(四)分數の第一意義　からはじめて實驗と實測から歸納し推理して行く徑路を考究して見ようと思ふ。　分數の第一意義は1をm等分したnといふ意味である。小數はm等分のmが常に10又は10^nといふ特殊な數に限られて居たので、分數はその意味から小數の一般化である。　玆に $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{2}{6}$ $\frac{3}{6}$ $\frac{4}{6}$ $\frac{5}{6}$ 等を通觀し、更にその具體經驗を擴充して、$\frac{1}{7}$ $\frac{2}{7}$ $\frac{3}{7}$ $\frac{4}{7}$ $\frac{5}{7}$ $\frac{1}{11}$…$\frac{10}{11}$ 等及更に一般的に $\frac{13}{18}$ $\frac{53}{100}$ $\frac{100}{121}$ 等の意義を明瞭にする事をうる。尚それに附帶して讀方書き方分母分子の名稱も明かにすることが出來る。　これ實に分數研究の第一歩である。そして此の第一意義から誘導される諸性質がある。　此等諸性質は總て各種計算を生む所の母である。

A. 通分約分の基礎　M式圓板又は圖形について次の實驗をする。$\frac{1}{2}$ と $\frac{2}{4}$、$\frac{2}{4}$ と $\frac{3}{6}$、$\frac{3}{6}$ と $\frac{1}{2}$ 等の大小比較には、切れ込みを喰ひ合せると中心を固定してクル〳〵廻すことが出來、從つて兩圖形を重ね合して大小の比較をすることが出來る。　比較の結果は次の様に現れて來る。

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=\frac{5}{10}=\frac{6}{12}=\left(\frac{7}{14}\right)=\frac{8}{16}=\left(\frac{9}{18}\right)=\cdots\cdots$$

括孤で括つた數は推理から得られる數である。　これだけの具體經驗は、更に

$\frac{m}{2m}=\frac{1}{2}$　を歸納し得る。　次に

$$\frac{1}{3}=\frac{2}{6}=\frac{3}{9}=\frac{4}{12}=\frac{5}{15}=\left(\frac{6}{18}\right)=\left(\frac{7}{21}\right)=\left(\frac{8}{24}\right)\cdots\cdots$$

$$\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{6}{9}=\frac{8}{12}=\frac{10}{15}=\left(\frac{12}{18}\right)=\left(\frac{14}{21}\right)=\left(\frac{16}{24}\right)\cdots\cdots$$

等の例を實驗させ、その結果を歸納させる。　玆に分數の分母分子に同じ數を乘じ又は除するもその値は變化せざることが歸決される。　これを順に推究したものは分母子に同數を乘ずることであつて通分の因となり、逆に推究した結果は分母子を同數で割ることとなつて約分の基となる。

B. 整數の分數化と分數の種類　1の中に $\frac{1}{2}$ は幾つあるか。　$\frac{1}{3}$ は如何。　1は $\frac{2}{3}$ よりもいくら大なるか。　$\frac{3}{4}$ よりは等皆具體的に經驗する事が出來る。

そしてその結果は

$$1=\frac{2}{2}=\frac{3}{3}=\frac{4}{4}=\frac{5}{5}=\frac{6}{6}=\left(\frac{7}{7}\right)=\frac{8}{8}=\frac{9}{9}\cdots\cdots\left(\frac{m}{m}\right)=\left(\frac{n}{n}\right)$$

を歸納しうる。從つて推理と實驗とを結合して、

$$2=\frac{4}{2}=\frac{6}{3}=\frac{8}{4}=\frac{10}{5}=\frac{12}{6}=\left(\frac{14}{7}\right)=\frac{16}{8}\cdots\cdots\frac{2m}{m}=\frac{2n}{n}$$

$$3=\frac{6}{2}=\frac{9}{3}=\frac{12}{4}\cdots\cdots\frac{3m}{m}=\frac{3n}{n}$$

$$4=\frac{8}{2}=\frac{12}{3}=\frac{16}{4}=\cdots\cdots\frac{4m}{m}=\frac{4n}{n}$$

5=………　6=………

分類の種類として眞分數は1よりも小さく從つて分子が常に分母より小さく、帶分數は1よりも大で端數を伴ひ、$2\frac{1}{3}$は　$2<2\frac{1}{3}<3$　$3\frac{3}{4}$は$3<3\frac{3}{4}<4$といふ位置に居ること恰も帶小數の如く假分數は分母が分子に等しいか又は分子より小であつて、等しいのはその大さ1に等しく、小いのは1よりも必大である等の性質がだん／＼闡明されて行く。

C. 分數の大小を定めること　は自ら三様に分れる。第一は分母の同じな場合で、これは分子の大きい方が大きい事は自ら明白である。$\left(\frac{1}{3}\ \frac{2}{3}\right)$　$\left(\frac{4}{5}\ \frac{3}{5}\right)$　$\left(\frac{9}{24}\ \frac{13}{24}\right)$ $\left(\frac{7}{8}\ \frac{6}{8}\ \frac{9}{8}\right)$等。第二は分子の同じ場合で分母の小さい方が値は大である。例へば$\left(\frac{2}{3}\ \frac{2}{5}\right)\left(\frac{7}{10}\ \frac{7}{9}\right)\left(\frac{10}{36}\ \frac{10}{39}\right)\left(\frac{10}{11}\ \frac{10}{13}\right)\left(\frac{12}{10}\ \frac{12}{12}\ \frac{12}{13}\right)$等。第三は分母、分子、共異なる場合でこれはそのまゝ大小を比較することは出來ない。第一又は第三のやうに分母か分子か何れか一方を等しい分數に變じて見るか、或は分子を分母でわつてその値を小數として現して見るかしなければ分らない。$\left(\frac{2}{3}\ \frac{3}{4}\right)\left(\frac{5}{6}\ \frac{4}{7}\right)\left(\frac{7}{8}\ \frac{8}{9}\ \frac{9}{10}\right)$等の例がそれである。

D. 帶分數と假分數との關係　これも亦餘程まで實驗が出來る。また推究も出來る。$1\frac{1}{2}=\frac{2}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$　$2\frac{1}{3}=\frac{6}{3}+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$　$3\frac{2}{5}=\frac{15}{5}+\frac{2}{5}=\frac{17}{5}$　$4\frac{5}{6}=\frac{24}{6}+\frac{5}{6}=\frac{29}{6}$　順に研究して行けば帶分數の假分數化である。逆に進めば假分數の帶分數化である。

E. 簡單な加減乘除　もその説明も亦大抵實驗で行ける。實驗は推理の前に存する時發見的歸納的の實驗となり、推理の後に存する時證明的實證的の實驗となる。いづれでもよい。兩方併用も亦可である。$\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{3}{4}$　$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$　$\frac{1}{9}+\frac{5}{9}=\frac{2}{3}$　$\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$　$\frac{4}{5}-\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$　$\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$　$1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$　$\frac{2}{7}\times3=\frac{6}{7}$　$\frac{1}{5}\times4=\frac{4}{5}$　$\frac{1}{4}\times2=\frac{1}{2}$　$\frac{3}{4}\times2=1\frac{1}{2}$

(五) 分數の第二意義　は除法の一變化又は割算に於ける剩餘の處分法として發展して來る所のものである。自然數の範圍内では、$n \div m$ といふ割算は n が m の整數倍である時のみ成立する。n が m よりも小さい場合や、大きくとも丁度整數倍になつて居ない時は、剩餘として m より小さい或數が殘るから、n の m より小さい場合と結局同一な結果となる。此の剩餘を剩餘として餘さずに處分して了ふ方法として分數が生れる。即 m よりも小さい n を m 等分するのであつて、その結果を n/m と表はすのである。故に n/m は必1よりも小さい。此の n を m 等分した n/m は、1を n 等分した $1/m$ の n 倍である所の n/m と同一の大さを持つて居る。

こゝに第一意義と第二意義との交渉點が出來る。

$1 \div 5 = \frac{1}{5}$　$2 \div 5 = \frac{2}{5}$　$3 \div 5 = \frac{3}{5}$……

$1 \div 7 = \frac{1}{7}$　$2 \div 7 = \frac{2}{7}$　$3 \div 7 = \frac{3}{7}$……

これ等も亦實驗實測によつて、直觀し、推究し、概括して行く事が出來る。そして畢竟第二の意義は第一の意淺の發展擴充である事を知るのである。

第二の意義から更に比の觀念や歩合の考が發展して行く。これは第二意義の最大切な意義を有する點であるが、比や歩合の處で改めて申述べる事にする。

(六) 分數の第三意義　分數の二つの意義として第一及第二の兩意義については、何人もこれを口にするのであるが、自分は更に第三の意義を高唱したい考である。第一意義は1を幾つかに分つた幾つ即ち1の m 分の n であつたし、第二の意義は整數 n を m(整數)等分したものであつたのである。第三の意義は第一意義を一般化したもので、x の m 分の n といふ考へ方である。第一意義は常に1を母數にとつてその幾分の幾つを考へたのである。第三意義はその1といふ特殊數を一般化して x の n/m を考へるのである。しかもその x は整數とのみ限定しない。小數でも分數でも諸等數でもいかなる數にも及ぼうとするのである。又 n/m は普通 n が m より小さい場合であるが、$n=m$　$n>m$ の時にも及ぶ事が出來る。是に於て、眞に特殊が一般化されるのである。

A. 母數を整數とするもの　即4の $^2/_5$ 7の $^1/_4$ 等で、これは掛けるといふ意義の擴

充であらねばならぬ。掛けるとは普通整數倍の意味である。それを小數を採用する様になつて0.4とか0.25とかを乘ずる意味となつた。これは既に小數の條で研究した通り、×0.4とは÷10×4の意味即ち$\frac{4}{10}$を乘ずることであり、×0.25とは÷100×25の意味即ち$\frac{25}{100}$を乘ずることとなつたのである。今分數に於ては更にそれが一般化され、×$\frac{3}{4}$とは÷4×3の意味であり、×$\frac{2}{3}$とは÷3×2の意味となるのである。かける事がかはつてからかける事だといふのは、分數觀念の發展から自然に湧いて來る事柄である。こゝに掛けるといふ意味が前よりも擴充されて來るのである。5圓の$\frac{1}{3}$　6圓の$\frac{3}{8}$　10坪の$\frac{3}{4}$等皆この意味に外ならぬ。

B. 母數を分數にとる　ものは一層數の範圍が擴張され、從つて乘法の及ぶ範圍も擴大されるわけである。$\frac{3}{8}\times\frac{4}{5}$　$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$　$\frac{3}{4}$尺×$\frac{3}{8}$　$7\frac{5}{16}$貫の$1\frac{3}{8}$　$6\frac{3}{8}$貫の$2\frac{4}{15}$等。

C. 分數除法の意義　は乘法に伴つて擴大される事勿論である。順算たる乘法が擴張されゝば、その逆たる除法は當然意味の變化を生ずる。即÷$\frac{3}{4}$とは3で割つて4を乘ずる事であり、÷$\frac{2}{3}$とは2で割つて3を乘ずることである。$\frac{4}{7}\div\frac{3}{2}$　$\frac{3}{5}\div\frac{4}{7}$　$\frac{5}{6}\div\frac{2}{15}$　$3\frac{1}{5}\div\frac{1}{2}$　$7\frac{1}{7}\div3\frac{2}{5}$　4倍が12なる數　$\frac{1}{2}$が25なる數　$6\frac{3}{5}$倍が1斤なる目方等皆これから考へうる。割るといふ意味も包含の意味として考へる時には、實驗的に考察することがさまで困難でない。けれども$\frac{2}{3}$等分するとか、$\frac{5}{4}$等分するとかいふ様になると、推理を要し新しい意味の附加を要することになる。尤も乘除法が分數によつて意味が擴大されるといふことは擴大された意味の中には勿論整數の考へ方として自然數で成立する理論は包容されることになる。即ち整數の2なり3なりは$\frac{2m}{m}$　$\frac{3m}{n}$といふ様に考へられ、又$\frac{2}{1}$又は$\frac{3}{1}$と言ふ分數の形になりうるから、2をかけるとか、3で割るとかいふ事は$\frac{2m}{m}$をかけ$\frac{3}{1}$で割る事であるといふ様に變つて來るのである。さうした時に分數に當てはまる法則は整數にも必適用される事になる。これが實に面白い擴充の要點であり同時に計算法の擴充され發展される點である。

(七)分數に特殊な事實計算の基礎的觀念　分數に特殊な事實計算といふものを、分數を取扱ふ事實計算の意味に考へると果てしのない事柄である。自分は分數

的に考察せなければ考へ得ない事實算の意味に限定したいと思ふ。さうすると分數特殊な事實算はほんの僅かなものになる。

A. 全量は常に一　といふ觀念は第一意義から當然發展する所のものである。ある數量を幾つかの部分に等分するとその等分された部分は必等分した數だけある。即ち5等分すれば$\frac{1}{5}$が5つ出來、7等分すれば$\frac{1}{7}$が7つ出來る。これを一般的にいふとn等分すれば$\frac{1}{n}$がn個出來るのである。故に全量は常に$\frac{5}{5}$　$\frac{7}{7}$……　$\frac{n}{n}$でなければならぬ。$\frac{5}{5}=\frac{7}{7}=\frac{n}{n}=1$　即1である。決して1と假定するのではない。また勝手に1と決めて置くのでもない。見做すのでもない。當然の1、あるべき筈の1である。これ分數的に考へた考へ方から當然發展して來る所の結果であつて、この考へ方は全く分數に特殊なものである。この思想の下に考へられる問題に次の樣なのがある。一二の例だけを上げて置くから他は類推せられたい。

例一、或人三人の子に全財産を分ちたるに長子には其の$\frac{5}{9}$　次子には$\frac{2}{9}$を與へたりと、末子には全財産の幾分を與へたるか。

例二、甲乙二人の職工あり。或仕事をなすに甲は6日を要し、乙は8日を要す。甲乙二人にてなせば一日に此仕事の幾分をなしうるか。又全く仕上るには幾日を要するか。

といふ樣なものである。

B. 第三意義より來るもの　の何分の何といふ考へ方である。mを幾等分した幾つを考へる事である。

例三、或人一晝夜の$\frac{1}{3}$だけ眠るといふ。其眠る時間は何時間なるか。

例四、子供三人に紙48枚を分つに、甲にはその$\frac{1}{2}$を與へ、乙には其の$\frac{1}{3}$を與へ、殘りを丙に與へたり。各得る所幾枚か。

例五、或學校の男生徒は全生徒の丁度$\frac{3}{5}$にして195人なりといふ、全生徒數何程か。

例六、或家の先月の消費高は$37\frac{1}{2}$圓にて、收入高の$\frac{3}{4}$に當るといふ、收入高は何程

なるか。

例七。茶六斤あり、初めに其$\frac{1}{5}$を使ひ、次に其殘りの$\frac{1}{4}$を使へば、殘りは何斤となるか。

等皆この考へ方から出る所のものである。此種の事實算は分數應用として非常に多い。順も逆も變形もいろ／＼混じて實に多い。

以上二種の特殊なものを除いて、他に特に分數として考へる事實算があらうか。全然ないといつてよい位である。しかも此の兩者が又分數の觀念を確立することからその考へ方を導かれる事を思ふと、分數の意義の考察と、その考察から導かれる當然の性質とを、充分明瞭的確に扱つて置く事が最根本的な必要條件であることが、一層明瞭になるのである。

第十二章 比及比例

(一)比及比例の發生 比例といふ觀念が人類の文化史中に現はれて來たのは餘程古い事柄であらう。この事は普通常識的に我々の考へて居る所謂四則の應用問題、解法が實は比例の觀念を豫想しなければ成立しないことを見ても分る。此の點に關しては尙後に稍詳細に論じて見たい積りである。Cajori氏の數學史によれば、ギリシャの古代イォニア學派に屬して居るターレス(B.C.640—B.C.546)は既に比例の考を利用して問題を解決した事をいつて居る。ターレスはイォニャ學派の創立者で七賢人の一人と呼ばれてゐる。夕方散歩し乍ら星に見とれて溝におちた時、彼れについて居た正直な老婆が「あなたは足許のことも知らないでどうして天上の事が分りますか」といつたといふ事である。この話はターレスの逸話として有名な話であるが、彼は壯年時代商業の爲エジプトに住し彼地の僧侶について物理學と數學とを學び忽師の僧を凌駕して了つて、アマシス王といふ當時の王

樣を驚かしたさうである。その王を驚かしたことの一項は金字塔の高さを影によつて測定した事である。即ち長さの知れて居る一本の垂直な棒とその投ずる影との比が金字塔とその影との比とに等しいといふ原理に基いたものである。又一說には一つの棒の影がその長さに等しい時に金字塔の影の長さを計つたのだともいはれて居る。いづれにしてもその解法中には比例の知識を豫想して居るのである。この一事から少くとも比例の考へ方は既に埃及の古代に存して居た事が知れる。

更に百餘年たつた時偉大なる幾何學者アルキタス(B.C. 428—B.C. 347)があつて彼は容易に一つの立方體を2倍する事に成功したといふ事である。その巧みな解法は二つの與へられた線の間に比例中項を發見する事であつたといふ事である。この頃になつて比例の理論も格段の進歩を見た事が分る。

(二)比の意義　は分數の觀念から分派したものと見る事が出來る。甲數の乙數に對する割合といふのは卽$\frac{甲}{乙}$であつて甲が乙の何倍か又は何分の幾つかの意味である。これを $m:n$ と書いても $\frac{m}{n}$ と記しても意味は同一である。比の意義から當然生れて來る事柄は比の性質である。その二三重要事項を上げて見ると、第一は比は同じ名數の間にのみ成立する事である。兩方が不名數ならば勿論であるが、兩方が同名の名數でなければ割合の比較はしようがない。比べるといふ仕事の成立し得ない處に比は成立ち得やう筈がない。第二は比の値は常に不名數であること、及値を求める時には前後兩項の單位が揃つて居なければならぬこと。第三比の兩項を同じ數で乘除しても比の値は不變である事等である。これ等の諸性質は多少理論に偏する慊はあるけれども最大切な研究事項である。

(三)比例の考へ方　正比例の考へ方は二つの量の間に存する依存的函數的關係である。この關係は方眼紙を用ゐ縱に一つの量を示し横に他の一つの量を記してその間に存する兩者の關係を具體的に考究せしむる事も出來る。しかしその根本は既に四則算から發展して居る。否四則算中には既に冥々の裡に比例の考へが入つて居る。今これを具體的の實例で少しく說明して見よう。

例一、一本五錢の筆七本の代はいくら。この計算法として　5錢×7＝35錢　これを普通は四則の解法だといつて居る。然し「何が故に一本の代を7倍するか」を少しく立ち入つて考究して見る必要がある。「そりや7本だからさ」といへば說明らしくはきこえる。さらば7本なら何故7倍するのか、一本の代を7倍して果して7本の代となるか。然らば一本の代を12倍すれば必一打の代を求めうるか。事實は必ずしも然らずではないか。然るに一本の代五錢を7倍して7本の代を得たとして我も汝も又彼れも少しもあやしまない所以は何處にあるか。7本の代も一本の代と同じ割合で買へうるといふ豫想をお互に默認して居るからではないか。同じ割合で＝卽同し比で。これが比例の考を採用して居るものでなくて何であらう。此場合同じ割合の豫想なしに此の問題は解けよう筈があるまい。更に7本なるが故に7倍するといふ。7本なるが故に7倍するは7本は一本の7倍なるが故に7倍するのではないか。筆の數がm倍すれば、その價もm倍するといふ假定を許容しないで此の7倍に何の意味があらう。7本は1本の7倍であつたのである。此の1本は特定の數である。特殊な數量である。この特殊を一般化したなら直ちに比例の問題となるではないか。卽ち、

例二、筆三本の價十五錢ならば七本の代は何程か。

7本は3本の$\frac{7}{3}$倍であるから、15錢×$\frac{7}{3}$＝35錢　之が卽ち比例の解法である。15錢÷3＝5錢　5錢×7＝35錢　これは四則の解法だといふ。四則の解法中に比や比例の考は全然ないか。全然これなくして果して四則の問題は解きうるや。こゝを充分考へて見たいのである。私は言ふ。斷じて言ふ。比例の考も四則の考から發展して來る、否實は四則算中に比例の考がすでにはち切れさうになつて潛んで居るのであると。暗默の裡に人も許し我も許す＝卽ち相互に承認して居る比と比例との觀念。これが四則計算の根據である。故に四則のかうした計算は比例の一部分＝特殊な場合である。この特殊を一般化し暗默を公然に導き出すものが比例の敎授に外ならない。

(四)比例解法　比例で解きうる問題にはいろ〳〵の解法がある。(1)歸一法　(2)分

數法(3)比例式法等。然しいづれも比例の考は充分内側に汪溢して居るのである。これを貫く原理は一つである。これを原理までも違ふものと思ふのは大なる誤りである。今例を上げて更に解説して見よう。

例三、七本の代三十五錢の筆は一打の代何程か。

第一は歸一還元法である。七本で三十五錢だから一本の代はいくら。(此の考の中に一本の代も七本の代も同じ割合である事を默認して居るし、また1本は7本の$\frac{1}{7}$だから代も$\frac{1}{7}$になることも當然働いて居る)。そこで、

$35^{\text{錢}} \div 7 = 5^{\text{錢}}$　これが一本の代である。次に、1本の代が5錢故12本の代は……と考へ方は發展して行く。(此の場合も價格の同じ割合なこと、一打卽12本は1本の12倍な事が承認されて居るのである)。從つて代も12倍になつて、(相關的、函數的である)。$5^{\text{錢}} \times 12 = 60^{\text{錢}}$となるのである。此の歸一法は比例の解法ではないと、普通は思はれて居る。私は言ふ四則の解法が比例の考へ方であるが故に歸一法はまた比例の考へ方に外ならない。唯比例といへば一般的であるがその一般を導く1といふ特別な場合であるだけの相違である。

第二は分數法＝といふのもちと妙であるが、所謂比例式を用ゐない解法である。比例式を、用ゐないといふ事は決して比例の考を用ゐないといふ意味ではない。考は充分用ゐて居るのである。此の解法はかうである。

12本は7本の何倍か。$\frac{12}{7}$倍。(これが比の考へ方である)。代も$\frac{12}{7}$倍になつて、(相關的、函數的―比例の考へ方である)。$35^{\text{錢}} \times \frac{12}{7} = 60^{\text{錢}}$となるのである。尙12本は7本の$\frac{12}{7}$倍といふ考と、7本は1本の7倍とか、12本は1本の12倍とかを考へるのとの間に、何等か本質的の相違が存するだらうか。私は考へる。何等の相違もない。唯一つは1といふ特殊な數で、他はm又はnといふ一般的の數である。唯これだけの相違である。この相違は1の中に旣に存して居るものから發展して來るのである。特殊を普遍化する道行に外ならない。

第三の考へ方は更にかう發展する。筆の本數の比は價格の比と相等し＝故にこゝの二つの量の間には正比例の關係ありといふ。かういふのは抽象的である。

然しその抽象は第一第二の方法で考究した結果として歸納し得た所のものである。この様な關係のある事が分れば、次の様な比例式が成立つ。$7^{本} : 12^{本} = 35^{錢} : x$　此の比例式は推論し得た所をそのまゝ式として表現したものに過ぎない。そしてx即求むる一打の代は此の式を解くことによつて器械的に發見しうる。此場合に働く推理は唯二つの量の間に正比例の關係ありとの推斷のみである。この推斷さへつけばその結果は直ちに比例式を得。その比例式を解く器械的解法(內項の積は外項の積に等しといふ比例式の性質の利用)さへあればよいのである。故に比例式を用ゐる解法は思惟の經濟的使用である。慣れゝば慣れる程推斷は平易迅速になり、解法は器械的になる。この器械的解法に比例の巧妙が存し、特質が宿つて居る。然し冥々の間、隱然として一大勢力を有する內部的思想は依然として比例の考へ方でなくてはならない。

以上正比例について極めて大體の考察を試みた。以下進んで反比例について、若干の考察を拂はねばならぬ。

例四、或仕事を十二日間に仕上げんには毎日人夫十五人を要す、この仕事を五日間に仕上げんとせば、毎日人夫何人を要するか。

第一の解法は歸一法の解法である。十二日間に仕上げるのに人夫十五人づゝを要するのであるから、これを一日に仕上げようとするには、$15^{人} \times 12 = 180^{人}$を要すると推斷する。(此の推斷に比例の考の存して居る事は改めて言ふ必要もない程明かであるのに、これは四則の解法で比例の解法でないと普通いつて居る)。次に一日でするのに百八十人を要する仕事を五日でやるには人數を五分の一に減してよい事を推斷する。$180^{人} \div 5 = 36^{人}$　これが所要の人數である。此の間に自明の理窟として働いて居る反比例の考があることを何人も否定出來まい。のみならず十五人とか百八十人とかの多人數で協力して仕事をする場合も、一人か二人の小人數で協力してやる時も、或は一人でする時も皆同一の能率が出るものであり、各個人の能力も皆同一のものだといふ假定が、不言不語の間に、課題する人にも課題される人にも承認されて居るのである。

第二の解法は分數的の解法である。これも亦考へ方は比例の考へ方である事勿論である。日數が五日になれば十二日の時の$\frac{5}{12}$になるから人數は却つて$\frac{12}{5}$にならなければならない。故に$15^{人}\times\frac{12}{5}=36^{人}$と計算するのである。

第三は比例式を用ゐて器械的にこれを解く方法であるが、これとて二つの量の間の關係は反比例であるといふ斷定がまづ要るのである。そして初めて、

$$5^{日}:12^{日}=15^{人}:x$$

といふ反比例式が構成され、これを解いて所要の要件が充されるのである。

要するに比例の解法は、過去經驗から推斷し得る比例の關係を基礎にして正比例するか反比例するかを斷定し、その斷定に基いて比例式を構成し、その比例式を解くことによつて所要の要件に到達しようとするのである。故に頭腦を使ふ所は比例するや否や、反比例か正比例かの判斷にある。その判斷さへつけば、比例式は自ら構成され、解かれ、所要の點に歸決される。故に式の構成から以後には思惟の經濟、頭の作用の儉約が行はれるわけである。この點から考へると、比例解法の特徴は、その器械的な點にある。器械的になるといつて比例の解法を攻撃する人が、前半の判斷について攻撃の手を向けて居るなら、幾分尤もな點もあるけれど、若しも後半にまでも攻撃の鉾尖をむけて來るなら、それは見當違といはねばならない。構成した比例式が正比例式又は反比例式になつて居るかどうかといふ判定吟味は餘程重要な問題である。私はその判定法として次の様な方法を採る。それは二つの弧線（實際にかいても書かなくてもよいが今は人に説明する爲に實線としてかく）を描く。そして關係ある二量の連結をして見るのである。第三及第四の例でいふと、

$$7^{本}:12^{本}=35^{銭}:x \qquad 5^{日}:12^{日}=15^{人}:x^{人}$$

正比例の時　　　　反比例の時

となる。故に正比例の式の型は必と互違ひになり、反比例のは交錯することはない。

(五)複比例と連鎖比例　複比例は單比例の結合重複したものであり、連鎖比例は單比例が次々と一つづゝ連結して鎖狀の關係を保つて行くものである以上、原理としては何等單比例と變つた事がない。一はAといふ一つの量に關係を有するBCD等の數種の量があるのであるから、AとBとについて考へる時にはCD等を除外して置き、AとCとについて考究する時にはBやDを除いて置くといふ様に別々に考へて行つた結果を、一つの複合比例式にまとめればよいのである。今一つの連鎖法の方は、ABCD等の間の關係としてAB、BC、CDにそれ〴〵關係がついて居て、AとDとの關係を明かにしようとするのであるから、Aの方からAとCとの關係をBを介して明かにし、更にその結果からAとDとの關係をCを介して明かにするといふ様にすゝむか、然らずんば逆にDBの關係をCを介して求め、DAの關係を更にBを介して尋ねて行くといふ様にすればよいのである。複比例の方は實用上に相當の實例も存し、比例觀念の練磨上にも効力があらうと思ふ。連鎖法の方は實用上かくまはりくどい換算等をする事は少い。只比例の考へ方を練る上に幾分の効果を認むる位のものであらう。

(六)按分比例　は單比例の特別な場合に過ぎない。それも主として正比例の場合である。然しこれにはいろ〳〵な場合があるので、いろ〳〵な場合を主な代表的問題で排列して見ると面白い。それには尋六、高一、高二等の教科書を通覽して見るがよい。先づ尋六では主として割合の明示されて居るもので、

例一、金四百圓を2.5.9の比に三人に分て。

といふ様なのから、

例二、甲は百五十圓乙は百二十圓丙は百圓を出して商業を營み、四十貳圓五十五錢の利益を得た。これを出金高の割合に分てば何程宛となるか。

といふ様なのがある。これが高等一年にいくと、

例三、金百十五圓を $\frac{1}{2}$、$\frac{2}{3}$、$\frac{3}{4}$ の比に分て。

といふ様に分數比に進んで居り、

例四、甲は千二百圓を八ヶ月、乙は千圓を十ヶ月、丙は七百圓を一ヶ年出資し、共に

商業を營み利益金千百三十四圓を得た、これを出資高と出金期間とに應じて分くれば。

と例二が進展して來てゐる。更に別に例二の變形として、

例五、甲乙兩人5 3の割合に出資して營業し、利益金千三百八十圓を得たり。乙は業務擔當の廉にて特に利益の三分の一をとり、殘りを出資高に應じて分配せり所得金各何程か。

となつて居る。又別に、尋六年には、

例六、金七百六十圓を三子に與ふるに長子が5圓とれば次子は3圓末子は2圓といふ割にせんとす各何程づつ分くべきか。

とあるのが高等一年には連比を求める必要が生じて、

例七石炭三百四十噸を三艘に分載するに、甲船の分と乙船の分との比は7と6との如く、乙船のと丙船のとの比は3と2との如くなりと、各船の積高何程か。

のやうになり、高等二年に行くと更に、

例八、二百五十圓を甲乙丙三人に分配したるに、甲の9倍は乙の10倍に等しく、乙の2倍は丙の3倍に等しくなりたりと、三人の得分各何程か。

例九、甲乙丙丁四人共同して或仕事をなし、賃錢廿四圓十四錢を得たり。さて其の働きは甲七日の業に乙は8日を要し、丙は9日、丁は10日を要する割合なり、賃錢を如何に分配すべきか。

などと變つて來て居る。例九は例三の變形と見ることが出來るし、例八は例七の反比となつたものである。

これを見ると分數比を整數比に直すことや、連比を作ることなどが按分比例の解法に附帶して重要な問題であることを失はない。而してこれは皆比の性質から發展して來る事柄である。卽比の兩項には同一數を乘除してもその値を變ぜざること。此の性質から導かれる事柄である。

(七)混合算　混合算は比例の一部分と見ることは出來ないかも知れない。然し混合算に關係を持つて居る部分があると思ふので一言を附け加へて置きたい。

は、平均價を求めるものと、混合の割合を求めるものとがある。平均價を求めるものは全然四則算の一種であるから、混合の割合を求めるものが獨立した混合算と見られる。そして割合を求めるのは、高いものと安いものとを損益のない様に平均して、所要の値にしようとするのであるから、その根本條件として第一平均の價は高いものと安いものとの中間の價でなくてはならない。ＡＢの兩方のいづれよりも高い平均價やいづれよりも安い平均價には出來ない。第二にはその高いものと安いものとを混じて得る損益を分量で加減して損益の相殺をはからうとするのである。その相殺の條件を充す分量が求める割合になるのである。二種の量を求めたり、三種又はそれ以上の混合をしたり、或は或一種二種のものの分量をきめて置いて他の量の分量を求めたりするのがあるが、いづれも以上に述べた二つの根本條件から出發するのであるから、細い點は略して置く。

第十三章　歩合算及利息算

(一) 歩合の考へ方　は言ふまでもなく比の考への變化したものである。比は一般的に $n:m$ 又は n/m として表はされるが、その値を小數として表はした場合はそのまゝ歩合となるのである。割合とか割とかいふ言葉はよくこの割り算の意味に適合して居る。此の値は割算によつて求められるからである。此の大小の比較は比そのまゝではなし得ない。必値を求めてその大小を比較するか分數と考へて通分して見るかの必要がある。即 $3:5$　$4:7$ といふ二つの比があつて、その大小の比較をするには、是非小數として値を見て、$3:5=0.6$　$4:7=0.571(+)$ を比較するか。又は通分して $3:5=21:35$　$4:7=20:35$ として比較するかの外はない。歩合は此の考へをそのまゝ用ゐたもので、表し方は小數的の表し方と百分比としての表し方との二種ある。その内の百分比といふのは、分母を 100 とする分數に外ならず、小數の表し方は 10^n を分母とする表し方である。故に歩合は一般的の比の考

へ方を特殊な考へ方にうつしたものといつてよい。

かく特殊分數を分母として比を表はす樣になつたのは一に比較の爲である。比といふ言葉が比べる意味から出て居るので、比較は比の本性といつてもよい。歩合に至つては殊にこの比べる作用が必要である。今一二の例を以てこれを明かにしよう。

「こゝに三つの學級がある。兒童數は43 47 56である。或月の授業日數は24日で缺席の總數は65 80 71である。どの學級が最よく出席した事になるか」授業日數こそ同一であるが、兒童數が異ひ、缺席の總數も違つて居るので、このまゝ比較しても比較のしやうがない。そこで普通どこの小學校でもする樣な百分比の計算をして、三つの學級の出席統計を試みる。九三・七〇、九二・九一、九四・七二といふ百分比となつて出席歩合が出て來る。そこで初めて比較がとれるのである。或學級の出席狀況を今日と先月とを比較するとしても、兒童數や授業日數に變化があるので、そのまゝの比較は何の意味をなさない。故に百分比の必要があるのである。

「甲の町は全戸數千五百戸そのうち四百五十三戸が商家、乙の町は全戸數千六百六十三戸、そのうち四百八十三戸が商家どちらが商家の多くある割合か」如何に453:1500 483:1663 といふ比をつくつて見ても、比は比のまゝで比較にならない。しかるにその比の値を求めて、〇三〇二 〇二九四として見れば、はじめて比較が明瞭となるのである。その他損益の歩合にしても利息の歩合にしても、全然比較の必要がなく、一つ〳〵個々獨立のものたる限りは歩合の必要は認められない。歩合は實に比べる必要から發達して來たものである。

(二)歩合の表し方　に百分比と割合の兩方が存することは既に一言して置いた。パーセンテージの考は百分比の考に外ならない。記述の方法としては小數によるか、100分分數によるかがよい。元高と歩合高とから歩合即比の値が發見される。公式　歩合高÷元高＝歩合　は當然出て來る事柄である。然しこの公式は幾つかの具體的經驗を重ねた後、兒童が自身に構成し歸結すべき性質のもので、最初からこれを與へて置いて、この公式にあてはめて計算をさすべき性質のものではない。

かういふ事をする結果は、當然計算が器械的になつて無意味な運算をするやうになる。　またこの公式から更に他の公式を二つ誘導することが出來るが、その三つの公式を一々暗記させて公式に當てはめる如きは、感心する仕方ではない。　いづれか一つを考へうる時、他は當然生れて來ねばならない。　自分の經驗からいふと、元高×歩合＝歩合高　の一つを基にするも考へよい仕方であると思ふ。　何故かといふと、歩合高を求める時は、分數の　の何分の何　と同じ考へ方で、の何割何分となつて掛け算となるが、他の二つはその逆の除法となり、いつも歩合高を割ることとなるからである。　しかもこんな事は歩合算の最本質的な部分ではない。　歩合算の歩合算たる價値は、實質算としての方面にある。

㈢實質算としての歩合算　には損益の計算や、租税、の事や、利息、公債、株式等方面は仲々に廣い。　しかもそれが一々特別な社會的事項をふくむから、それ〴〵その注意點が變つて來る。　けれどもその變つてゐる社會的事實の中に、歩合算としての變らないものがある。　その變らないものが歩合算の統一點である。　歸決點である。　從つてまた學習の主眼點である。　また租税の如きも、地租があり營業税があり、所得税や關、税や、その外いろ〳〵違つた事情の下に、異つた税率及課税の方法が存する。　現在施行の法規の下に、その課税法・税率等を研究させる事も大切な仕事ではあらう。　然しそれ等の多くは、時と共に變遷する。　教科書の改訂がおくれて居る間に、所得税・地租の如きは數回改正されて居る。　私共は變る、もの、を取扱ひながら、その中に變らないもの、を學習させる態度を持する必要がある。　變つて了、つたもの、をそのまゝ取扱つて居る愚は言ふまでもない事であるが、いつになつても變らないものを學習させる考なしに、變る所のものに捉はれて居るのも褒めた話しではない。　事實算としての歩合算に變らぬものは何か。　それをしつかり握らせるにはどんな注意點が要るか。　この研究は最必要な事項であるといはなければならない。　各種税金等の事について、それの特質をあげて細かい事を言ひはじめれば切りがない。　所得税の超過累進率の如きは特によく研究する必要もあらう。　しかし今各論の細部に入る餘裕がないので略して置く。

利息の問題は歩合算と比較して、期間といふ觀念が増して居る。これは問題を一目見てたれしも氣のつく點である。この期間の研究は利息算に對して最重要な一項といはなければならない。既に期間を考へる以上、利率のあらはし方は、必期間と相伴つて離れられない關係に置かなければならない。利率のあらはし方は普通年利、月利、及日歩の三樣である。その三樣の變化は當然期間に影響を及ぼす。今試みに「或銀行から日歩二錢八厘で金七百圓を借りた。一ヶ年間の利息は何程か。四ヶ月間の利息及七十五日間の利息は何程か。」といふ問題と「或銀行から月利一分にて金七百五十圓を借りた。一ヶ年間の利息は何程か。四ヶ月間及七十五日間の利息は何程か」といふ二つの問題を比較して見給へ。此の區別が最明瞭に表れて來なければならない。而るに利息算を習つて此點の不明瞭な兒童があれば、未だ利息算を習つたのではないといはれても、止むを得まい。自分は利息算の研究上、常に此の點に不明瞭・不徹底を見ることが多い。これを一言にして言へば利率と期間とは必對應させねばならぬ。これ利息算の主眼點である。而して此點を一層明瞭にする爲には、第二の着眼點を考へるがよい。それは一期間の利息といふ事である。利息算計算の根本的な考へは此の一期の利息にある。一期の利息の求め方は、これを公式の樣に表はすと二樣ある。元金×利率　利息÷期間がこれである。この内日歩の計算は第一の式の通りでも表し得るが、普通は $日歩\times\frac{元金}{100}$ の形をとる。これは利率を歩合でいはずに、何錢、何厘とあらはす爲である。第三の着眼點は日歩の意義である。日歩の計算は日一日と多方面に活用されて行く。百圓一日につき何錢何厘。此の百圓一日につきが、此の意味となり、同時にまた利息算の最大切な部分となる。期間との關係、引いては一期の利息と關係づいて來るのである。

以上は單利法に關してであるが、複利法についても、その特殊な點、利息表の利用等の問題があり、複利から更に貯金の計算へも特別な連繫が存する。これ等はいづれ機を見て、詳細に申述べる積り。

公債株式は一種の利息計算である。公債が債務の一種であり、利息算の一部分

であることは勿論であるが、株式投資はまた一種の債權獲得に外ならない。唯普通の債權と性質の異る點は利率の不定な點である。

公債及株式が一種の商品として市場に賣買せられることは普通の貸金證書や預金證と異つた點である。賣買の行はれる爲時價が生じ時價あるが爲に利廻りの計算が必要となる。利廻りは二つ若くはそれ以上の公債株式を購入するか乗換へるか等の爲比較の必要を生じた時に是非なくてならぬ計算である。歩合の考は比較を要するによつて發達して來たといつた言葉はこゝにも亦あてはまる事柄である。

尚歩合算其他についていつて見たい事もあるがこの位にして一と先擱筆する事にする。

終

大正十一年九月一日印刷
大正十一年九月三日發行

不許複製

數概念と數學教育
定價金貳圓

校閲者　北澤種一
著者　小川通司
發行者　松邑孫吉　東京市京橋區南鍛冶町一番地
印刷者　村田豐吉　東京市京橋區新榮町五丁目七番地
印刷所　大倉印刷所　東京市京橋區新榮町五丁目七番地

發行所　松邑三松堂
東京市京橋區南鍛冶町
振替東京七九三四番
電話京橋一二七六番

終