解高次方程新法

合肥徐士桐著

解高次方程新法

序

近世科學演進，實資於算學，而代數學，又爲衆法運算之機樞，然欲明代數，又必善解方程，始克暢宣其蘊，故歐美前哲，恆視此學爲重，各運巧思，競相製法，自十六世紀，迦但 Cardna 氏，發明解三次式法，實發方程學之曙光，繼之以弗來利 Ferrari 氏，尤拉Euler 氏，解四次式法，而牛頓Newton氏，忽拏 Horner 氏諸家，又創爲解任何次式之法，焜耀疇史，津逮後進，有功於科學界甚偉，猗歟盛矣，僕何人斯，曷敢步武，因性喜學算，質復鈍拙，每取諸家之法馭題，緣其陳義過高，喻理幽邃，運用甚艱，恆覺其苦，私念若得一庸平淺顯之法以濟之，庶可盡代數學之妙用，而無所礙，因此沈思默考，略達方程式之性情，遂循徑而製成斯法，其特點有三，

(1)能依三角理用比例，求出高次式內，多位小數之根，

實相下商式如次

(2)於 n 次式，求出一根之後，能令原式，自變爲

$n-1$ 次式，

(3)能循序導出，任何次式內，所藏之任何方次之虛

根，

皆發前人所未發，於以上諸家之法爲簡爽，而密處亦略無遜色，謹持一得之愚，貢獻於算界，大雅宏達，幸賜教焉，民國二十三年一月　合肥徐士桐

解高次方程新法

目　錄

頁數

解高次方程新法

第一章　法則

1 求整根　設方程式 $AX^n+BX^{n-1}+NX+C=0$ 更橫作直，

爲 $\begin{matrix}A\\B\\N\\C\end{matrix}$ 將X及指號悉去之，以行次爲方次，自上向下

序列，設方次有虛項者，以零號補充之，試商一數爲X_1。由右側自上向下，遞乘遞和，觀其至末行是否等零，演式如次，

$$\begin{aligned}&A\quad X_1=A_1\\&(B\quad +A_1)X_1=B_1\\&(N\quad +B_1)X_1=N_1\\&C\quad +N_1\gtreqless 0\end{aligned}$$

設非等零，則更改商X_2。X_3。……X_n。以等零而止，其X_n必表式內X同數之一，故X_n即爲其一根，

演題1　設求方程式 $X^3-7X^2+36=0$ 之一根，

第一次　商5

$$\begin{aligned}&1\quad \times5=5\\&(-7\quad +5)\times5=-10\\&(\ 0\quad -10)\times5=-50\\&36\quad -50=-14\end{aligned}$$

第二次　商3

$$\begin{aligned}&1\quad \times3=3\\&(-7\quad +3)\times3=-12\\&(\ 0\quad -12)\times3=-36\\&36\quad -36=0\end{aligned}$$

第一次任商5，遞乘遞和至末行，小於零14，知商5略大，第二次酌減，改商3，遞乘遞和至末行，等於零，遂求得此式之一根爲3，

案本題可書作簡式如次

第一次 商5

1	$1\times5=5$
-7	[illegible] $\times5=-10$
0	$-10\times5=-50$
36	-14

第二次 商3

1	$1\times3=3$
-7	$-4\times3=-12$
0	$-12\times3=-36$
36	0

式內左方，爲本題之各項係數及常數，右方各行之首項，卽原式首項暨括弧內相和之值，本編以後之題，咸作此簡式，

述商法，一題入手，設欲任商一數，似覺茫然，而商法有二，

(1)凡方程式必由問題產生，略近之根，可根據其問題審察之，易知端緒，

(2)視察式內各項正負係數，及末項常數之大小，可根據此點審度之，而可略知其位次，

凡任何次式方程，求根俱適用本法，

(釋)原理， 方程式，兩端固相等，然必將X所表之某數，揭明始顯，如方程式爲

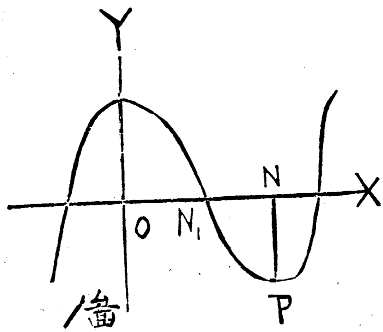
$$X^3-7X^2+36=0 \qquad (1)$$

案此式，X所表之數爲3。6。-2。將3揭明，則爲

$$(1\times3^3)-(7\times3^2)+36=0 \qquad (2)$$

惟X所表之數，初難看出，必由商而見，故列諸係數及常數爲直式，而便酌商之數，自右側遞乘遞和，其理實與(2)式之理無異，不晉將商數，按各項之方次，方之而乘其係數，設至末項常數，而等於零，則其商必卽X所表之一數無疑，

又方程式 $X^3-7X^2+36=0$ 其跡綫在坐標軸上，表之於(1圖)，



1圖

圖內ON表X_1爲所商之5，PN表Y_1爲末行−14，ON_1表X_2爲所商之3，N_1之點，爲跡綫所切，表Y_2，故末行等零，觀圖形因知所商之3，必爲揭明X所表之一數，顯然可見，

又案，設一次式方程，如 $8X-24=0$，原可演作除式爲，

$$\begin{array}{r|cc}
 & \text{商} & 3 \\ \hline
8 & 2 & 4 \\
 & 2 & 4 \\ \hline
 & & 0
\end{array} \qquad (3)$$

其義以商乘法之得數，而消實數，而二次以上等式，亦可根據此理，演爲除式，不過法之項數略多耳，如三次式爲

$$X^3-7X^2+36=0$$

演作除式爲

$$\begin{array}{r|cc}
 & \text{商} & 3 \\ \hline
1\times 3^3 & 3 & 6 \\
-7\times 3^2 & 3 & 6 \\ \hline
-36 & & 0
\end{array} \qquad (4)$$

用原式末項爲實，取各項係數爲法，以商，各按其方次，乘而和之，今消負數，設等於零，所得之商必眞，

如是，則解高次方程，亦非難事，與解一次式之理無異，統可作除法觀之，

略變其式，施之以遞乘遞和，更可節省其工作，故本編根據(2)(4)兩式之理，變其原式，用商與遞乘遞和，

2 求多數小位之根， 設方程式爲無絕根式，必將其根求至小數多位，始能密合，

先用第一節之法，求出其根第一位略近之某二值，第二位及第二位以上，諸漸近值，則用比例求之，

述比例法， 如 $F(X)=0$ 商 X_1 及 X_2 各試乘之，爲

$$F(X)X_1=Y_1 \quad (1) \qquad F(X)X_2=Y_2 \quad (2)$$

自 Y_1 減 Y_2 爲第一項，自 X_2 減 X_1 爲第二項，Y_1 爲第三項，而求第四項 C，演式如次，

$$Y_1-Y_2 : X_2-X_1 = Y_1 : C$$

以C加於 X_1，爲 X_3，再以 X_3 試乘，爲

$$F(X)\ X_3 \gtreqless 0$$

觀其是否等零，設非等零，再用比例進求 C_1 及 $X_4 \cdots\cdots X_n$，以等零而止，其 X_n 遂爲其式之一根，

〔註〕式內亦可取 Y_2 爲第三項而C須與 X_2 相加

演題2， 設方程式爲 $X^3-7X^2-2X+36=0$ 求其一根，

第一次商2

1	$1 \times 2 = 2$
-7	$-5 \times 2 = -10$
-2	$-12 \times 2 = -24$
36	12

第二次商3

1	$1 \times 3 = 3$
-7	$-4 \times 3 = -12$
-2	$-14 \times 3 = -42$
36	-6

查$X_1=2$，則$Y_1=12$，$X_2=3$，則$Y_2=-6$，觀Y_1與Y_2正負異號，因知眞根，在2與3，兩數之間，用比例求之如次，

0.66

$$12-(-6) : 3-2 = 12 : 0.66 \cdots\cdots \qquad (1)$$

得$C = 0.66\cdots\cdots$截前二位，與X_1相加，卽$2+.66=2.66$爲X_3，再列式試乘之，觀其至末行，是否等零，

第三次商2.66

1	$1 \times ⊥ = 2.66$
-7	$-4.34 \times ⊥ = -11.5444$
-2	$-13.5444 \times ⊥ = -36.028104$
36	-0.028104

〔註〕式內之(⊥)符號，爲(商)字省筆，係表商數2.66之義，

查$X_3=2.66$ 則$Y_3=-0.028104$ 已知距根甚近，再用比例求之，用前式第一第二兩項，以Y_3爲第三項，而求第四項C_1，

〔註〕用前式第一二兩項之理，參觀後之圖釋，

$$18 : 1 = -0.028104 : -0.001561\cdots\cdots \qquad (2)$$

得$C_1=-0.001561\cdots\cdots$ 截前五位，與X_3相加，卽$2.66+(-0.00156)=2.65844$ 爲X_4，再列式試乘之，觀其至末行，是否等零，

第四次商2.65844

1	$1\times\dotplus=2.65844$
-7	$-4.34156\times\dotplus=-11.54177677$
-2	$-13.54177677\times\dotplus=\ 36.000001$
36	-0.000001

查$X_4=2.65844$ 則$Y_4=-0.000001$ 與零相較，已至第六位小數，其值極微，可止，其2.65844 即爲此式之一密近之根，

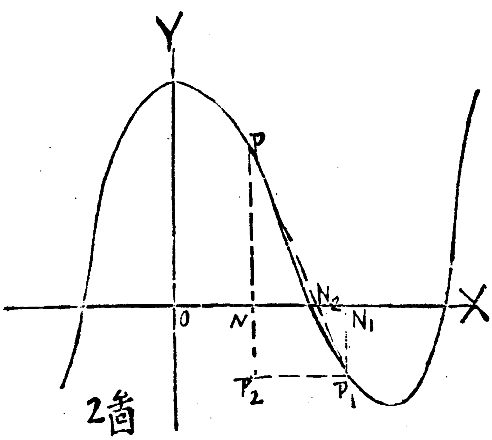
〔註1〕設Y_1與Y_2同號，亦俱適用本法，作比例式，

〔註2〕式內各行小數，視商數之大小，自末位酌截之，使位數稍短，而便於乘，

凡任何次式方程，求多位之根，俱適用本法，

(釋) 用疊次比例，求根之理，

案 方程式 $X^3-7X^2-2X+36=0$ 其跡綫，在坐標軸上，表之於(2圖)，



圖內ON表X_1 卽2，ON_1表X_2 卽3，PN表Y_1 卽12，P_1N_1表Y_2 卽-6，自P_1點與x軸平行，作P_1P_2綫，自P點與Y軸平行，作PP_2綫，將PP_1 以綫聯之，遂成PP_2P_1，PNN_2，P_1

N_1N_2，同式三角形三，依三角理，

作　$PP_2 : P_2P_1 = PN : NN_2$

故　$Y_1 - Y_2 : X_2 - X_1 = Y_1 : C$

即　$12-(-6) : 3-2 = 12 : 0.6\dot{6}\cdots\cdots$

NN_2 表 C，即 $0.6\dot{6}\cdots\cdots$，以C 加於 X_1 得 X_3，即 $2+.6\dot{6}=2.66$，表之於 ON_2，此爲作第一次比例之義，

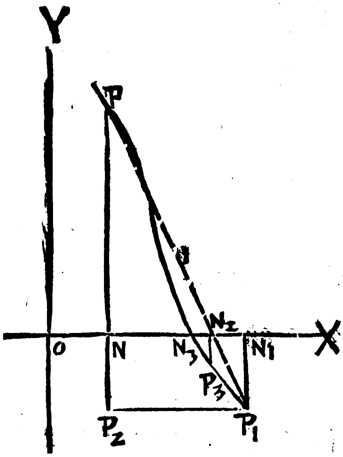
又設作　$PP_2 : P_2P_1 = P_1N_1 : N_1N_2$

而　$Y_1 - Y_2 : X_2 - X_1 = Y_2 : C$

即　$12-(-6) : 3-2 = -6 : -0.3\dot{3}\cdots\cdots$

N_1N_2 表C，即 $-0.3\dot{3}\cdots\cdots$，以C 加於 X_2 得 X_3，即 $3+(-.33\cdots\cdots)=2.6\dot{6}\cdots\cdots$ 截前三位，亦得 2.66 與用 Y_1 爲第三項，所得之 X_3 同値，故能任取 Y_1 或 Y_2 爲第三項，

再將 PP_1 一段曲綫，及 PP_2P_1 三角形，略放大如下附圖，而釋第二次比例之義，



圖內 P_3N_2 表 Y_3，即－0.028104 作 $P_3N'_2$ 綫，將 P_3N_3 以綫聯之，遂又成 $N_2P_3N_3$ 三角形一，亦與 PP_2P_1 三角形同式，依三角理

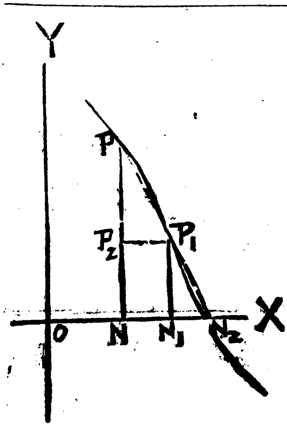
作 $PP_2 : P_2P_1 = P_3N_2 : N_2N_3$

故 $Y_1 - Y_2 : X_2 - X_1 = Y_3 : C_1$

即 $18 : 1 = 0.028104 : 0.001561\cdots\cdots$

N_2N_3 表 C_1，即－0.001561……以 C_1 加於 X_3 得 X_4，即 2.66+(－.001561)=2.65844 表之於 ON_3，此爲第二次比例之義，至此遂使Y軸，密等於零，而×軸上之 ON_3，表X之同數，無異瞭然揭出，顯現於圖內，設更求密，再作第三次四次等比例，進求 C_2，C_3，……

案 Y_1 與 Y_2 異號，用比例之理，已如上之圖釋，設如 Y_1 與 Y_2 同號，假設俱爲正號，釋之於附圖，



ON 表 X_1，ON_1 表 X_2，PN 表 Y_1，P_1N_1 表 Y_2，自 P_1 點與×軸平行，作 P_1P_2 綫，自P點與Y軸平行，作PN綫，自P點過 P_1 達 N_2，以綫聯之，遂成 PNN_2，PP_2P_1，$P_1N_1N_2$，同式三角形三，依三角理

$$作\quad PP_2 : P_2P_1 = PN : NN_2$$

$$故\quad Y_1 - Y_2 : X_2 - X_1 = Y_1 : C$$

觀圖形，知Y_1與Y_2同爲正號，其比例之理，與上項Y_1與Y_2異號之理，俱相通，卽同爲負號，與此理亦無異，因PP_1一段曲綫，斜倚×軸之上下，聯結而成，PP_2P_1等，順逆顚倒，自大漸小，而至極微之一點，卽P點達於×軸之時，有無限小三角形，俱同式，故不論Y_1與Y_2之號，同異正負，俱能適用此項比例式，

又考方程式跡綫，在坐標軸上，進行時之勢，恆爲斜倚凡經求出×軸上，NN_1相距之兩點，必俱能聯結而成，PP_2P_1等，相類之三角形，（比較通常之法，必先列表，而求其根之第一位，略近值，在連續某二數之間，工作大省，）

又察二次式以上之曲綫，無論爲上凹或下凹彎，及偏倚左右，然所聯結而成，諸三角形，其理則皆無異，故不論任何曲綫，亦俱適用此項比例式，

編者案，狄克生 Dickson 氏，方程式論內，有用曲綫內之割綫，求漸近値，又牛頓 Newton 氏，解數字方程之法內，用曲綫外之切綫，求漸近値，檢兩家所作之二方程式之理，與本編用曲綫上之同式三角形，所作之比例式，求漸近値之原理，則皆相異，

3 求二個根以上之根，令N次式，自變N-I次式，

案$F(X)^n$次式，求出一根之後，必令末行等零，遂消去一行，將

各行乘號前之項，移出另列之，必為 $F(X)^{n-1}$ 次式，其理顯然，極易觀察，演式如次，

設方程式為 $AX^2+BX+C=0$

第一式商 X_1

$$A \times X_1 = A_1$$
$$(B + A_1) \times X_1 = B_2$$
$$C + B_2 = 0$$

第二式商 X_2

$$A \times X_2 = A_2$$
$$B_1 + A_2 = 0$$

將一式乘號前之 A 及 B_1，移出列為二式，其二根，一由本次式求出，一由損次式求出，

演題3， 設方程式為 $X^2-2X-8=0$ 求其二根，

第一式商 4

1	$1\times4=4$
-2	$2\times4=8$
-8	0

第二式商 -2

1	$1\times-2=-2$
2	0

由本式求出一根為 4 之後，將式內乘號前之 1 及 2 移出，列為第二式，更求出一根為 -2，

演題4， 設方程式為 $X^3-7X^2+36=0$ 求其三根，

第一式商 3

1	$1\times3=3$
-7	$-4\times3=-12$
0	$-12\times3=-36$
36	0

第二式商 6

1	$1\times6=6$
-4	$2\times6=12$
-12	0

第三式商 −2

1	$1\times-2=-2$
2	0

將一式乘號前之各項，移出列第二式，更將二式乘號前之各項，移出列第三式，

由三種式，求出三根，爲3與6及−2，

演題5，　設方程式爲$X^3-7X^2-2X+36=0$求其三根，

第一式商 2.65844 $=\perp$

1	$1\times\perp=2.65844$
−7	$-4.34156\times\perp=-11.54177677$
−2	$-13.54177677\times\perp=-36.000001$
36	-0.000001

將各行乘號前之項，移出列第二式，

第二式商 6.4433 $=\perp$

1	$1\times\perp=6.4433$
−4.34156	$2.10174\times\perp=13.542141342$
−13.54177677	-0.000364572

將各行乘號前之項，移出列第三式，

第三式商 −2.10174 $=\perp$

1	$1\times\perp=-2.10174$
2.10174	0

由三種式，求出三根，一爲 2.65844 與 2.658439 之間，一爲 6.

4433 與 6.4432 之間，一爲 −2.10174，

編者案，依常法，求低次式，必用求出之根，除其原式，始得低於原式一次之式，用本編之法，不須相除，能令低次式，自現於原式之內，而省一度之工作，

凡任何次式，求兩個以上之根，俱適用本法，

4 式內函有虛根，求虛根之法，

方程式之原式，及低次式，設遇任商何數，俱不能使末行等零時，此式所函，必爲虛根，

述求虛根法，酌商一數，使末項爲最小，將末行得數易號，按本式方次加根號，與商相和，遂得式內所函之虛根，演式如次

$$F(X)X_n \neq 0 \qquad F(X)X_m = R$$

R 爲最小，遂得其虛根，爲 $X = X_m \pm \sqrt[n]{-R}$

演題6， 設方程式爲

$$X^5 - 168X^4 + 7823X^3 - 89857X^2 - 89688X - 97679 = 0$$

第一式 商19

1	1 × ⊥ = 19
−168	−149 × ⊥ = −2831
7823	4992 × ⊥ = 94848
−89857	4991 × ⊥ = 94829
−89688	5141 × ⊥ = 97679
−97679	0

第二式 商53

1	1 ×⊥＝53
−149	−96×⊥＝−5088
4992	−96×⊥＝−5088
4991	−97×⊥＝ 5141
5141	0

第三式 商97

1	1 ×⊥＝97
−96	1 ×⊥＝97
−96	1 ×⊥＝97
−97	0

第四式

1	
1	
1	

將四式書還原式，即

$$X^2+X+1=0$$

案四式，任商何數，俱莫能使末行等零，知所函必爲虛根，惟有商一數，使末行爲最小，演式如次，

求虛根式 商−0.5

1	1 ×⊥＝−.5
1	0.5 ×⊥＝−.25
1	0.75

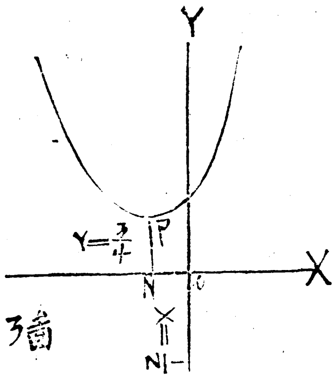
（釋）案此式，惟有商−0.5，末行0.75爲最小，因0.75爲正號，移置等號右端，應易爲負號，因係二次式，應加根號，因係偶次，其根號前，應作正負雙號，故得其二虛根式，爲

$$X=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{-\frac{3}{4}}$$

證之於普通解二次式之法解之，亦得此項同樣之根式，

本題求得五根，爲19，53，97，$-\frac{1}{2}\pm\sqrt{-\frac{3}{4}}$

又證，方程式 $X^2+X+1=0$ 之跡綫，在坐標軸上，表之於(3圖)



3圖

圖內ON表 X_1 爲 -0.5 PN表 Y_1 爲0.75

跡綫不切×軸，故無實根，×軸上，惟有N一點，Y爲最小，故虛根爲 $-\frac{1}{2}\pm\sqrt{-\frac{3}{4}}$

再證以微分之理，方程式 $X^2+X+1=0$ 求微分，爲 $2X+1=0$ 求此式之根，爲 $X=-\frac{1}{2}$ 係爲原式最小時之極限，即 X_1 達於ON之點，跡綫上之P點，距×軸爲最近，故 $Y_1=\frac{3}{4}$ 時爲最小，所以虛根，爲 $X=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{-\frac{3}{4}}$

演題7，設方程式爲 $X^4-16X^3+88X^2-192X+150=0$ 求根，

第一式 商2

1	$1\times\perp=2$
—16	$-14\times\perp=-28$
88	$60\times\perp=120$
—192	$-72\times\perp=-144$
150	6

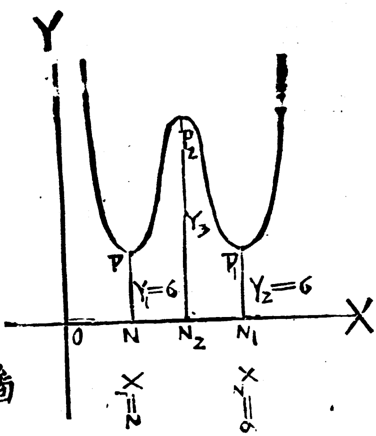
第二式 商6

1	$1\times\perp=6$
—14	$-8\times\perp=-48$
60	$12\times\perp=72$
—72	$0\times\perp=0$
6	6

案此式，惟有商2與6，可使末行爲最小，將兩式末行6易號，依方程次式，加根號，故求出四虛根，爲

$X=2\pm\sqrt[4]{-6}$　　　　$X=6\pm\sqrt[4]{-6}$

(釋)　本題方程式之跡綫，在坐標軸上，表之於(4 圖)，



4圖

圖內 ON 表 X_1 爲 2，PN 表 Y_1 爲 6，ON_1 表 X_2 爲 6，P_1N_1 表 Y_2 爲 6，

跡綫不切X軸，故無實根，惟有 N 及 N_1 兩點，Y_1 與 Y_2 爲最小，故求出 ON，得其二虛根，爲 $X=2\pm\sqrt[4]{-6}$ 又求出 ON_1，得其二虛根，爲 $X=6\pm\sqrt[4]{-6}$

再證以微分之理，方程式 $X^4-16X^3+88X^2-192X+150=0$ 求微分，爲 $X^3-12X^2+44X-48=0$ 求此三根，

第一式 商2

1	$1\times+=2$
-12	$-10\times+=-20$
44	$24\times+=48$
-48	0

第二式 商6

1	$1\times+=6$
-10	$-4\times+=-24$
24	0

第三式 商4

1	1 × 4 = 4
−4	0

求出 $X=2$ $X=6$ 爲原式最小之極限，所以原式之四虛根，爲 $X=2\pm\sqrt[4]{-6}$. $X=6\pm\sqrt[4]{-6}$. 確合於理，第三式求出之4，爲第四圖內 N_2 之點，Y_3 爲22，表之於 P_2N_2，爲本式最大之極限，

演題8 設方程式爲

$$10X^6-36X^5-75X^4+300X^3+120X^2-720X+600=0$$

第一式 商1

10	10 × 1 = 10
−36	−26 × 1 = −26
−75	−101 × 1 = −101
300	199 × 1 = 199
120	319 × 1 = 319
−720	−401 × 1 = −401
600	199

第二式 商3

10	10 × 3 = 30
−36	−6 × 3 = −18
−75	−93 × 3 = −279
300	21 × 3 = 63
120	183 × 3 = 549
−720	−171 × 3 = −513
600	87

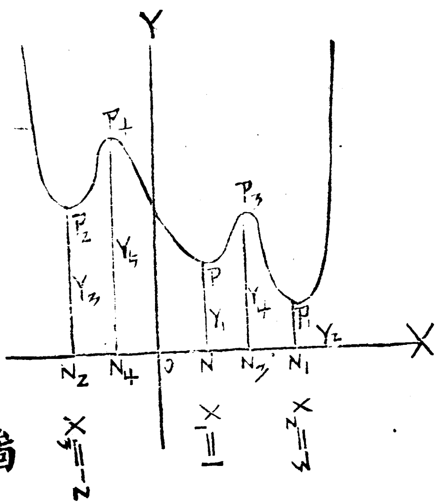
第三式 商 −2

10	10 × −2 = −20
−36	−56 × −2 = 112
−75	37 × −2 = −74
300	226 × −2 = −452
120	−332 × −2 = 664
−720	−56 × −2 = 112
600	712

案此式，惟有商1，3，−2，可使末行爲最小，各將末行易號，依方次加根號，故求出六虛根，爲

$X=1\pm_6\sqrt{-199}$，　$X=3\pm_6\sqrt{-87}$，　$X=-2\pm_6\sqrt{-712}$，

（釋）本題方程式之跡綫，在坐標軸上，表之於（5圖）



論

圖內ON表X_1爲1，PN表Y_1爲199，ON_1表X_2爲3，P_1N_1表Y_2爲87，ON_2表X_3爲-2，P_2N_2表Y_3爲712，

跡綫不切×軸，故無實根，惟有N，N_1，N_2，三點，Y_1，Y_2　Y_3為最小，跡綫上P，P_1，P_2，三點，距×軸爲近，故求出ON，得其二虛根，爲　$X=1\pm_6\sqrt{-199}$，又求出ON_1，得其二虛根，爲　$X=3\pm_6\sqrt{-87}$ 又求出ON_2，得其二虛根，爲　$X=-2\pm_6\sqrt{-712}$，

再證以微分之理，方程式

$$10X^6-36X^5-75X^4+300X^3+120X^2-720X+600=0$$

求微分，得　$X^5-3X^4-5X^3+15X^2+4X-12=0$求此五根，

第一式 商1

1	1×1=1
−3	−2×1=−2
−5	−7×1=−7
15	8×1=8
4	12×1=12
−12	0

第二式 商2

1	1×2=2
−2	0
−7	−7×2=−14
8	−6×2=−12
12	0

第三式 商3

1	1×3=3
0	3×3=9
−7	2×3=6
−6	0

第四式 商−1

1	1×−1=−1
3	2×−1=−2
2	0

第五式 商−2

1	1×−2=−2
2	0

求出　$X=1$，　$X=3$，　$X=-2$，爲原式最小之極限，所以原式之六虛根，爲

$X=1\pm\sqrt[6]{-199}$，　$X=3\pm\sqrt[6]{-87}$，　$X=-2\pm\sqrt[6]{-712}$，

皆屬眞確，

第二式求出之2，爲第五圖內N_3之點，第四式求出之−1，爲N_4之點，其Y_4，Y_5，皆爲原式最大之極限，

凡求任何次式虛根，俱適用本法，

編者案，二次式以上，任何次式內所藏之任何方次虛根，自有代數學以來，千百年中，中西古今，名輩如林，未經製有通法發此秘蘊，惟用本編之法，能將任何次式內之虛根，皆可循序而揭出之，

編者附言

以上各節，編輯既竣，竊恐前賢，已有此作，不免貽沿襲之譏，爰檢歷代諸家之書，有南海鄒氏，海甯李氏，各製有開多乘方之法，(多乘方與方程義同)而本編有一部分，與兩家之法相似，然完整則異，故仍不妨以新法名之，

第二章　例題

1　設求　$X^3-10X^2+31X-30=0$　之三根，

第一式　第一次　商1

1	1　×丄=1
−10	−9　×丄=−9
31	22×丄=22
−30	−8

第二次　商2

1	1×丄=2
−10	−8×丄=−16
31	15×丄=30
−30	0

X = 2

第二式　商3

1	1×丄=3
−8	−5×丄=−15
15	0

X = 3

第三式　商5

1	1×丄=5
−5	0

X = 5

共求出三根，　X=2，　X=3，　X=5，

2　設求　$X^3-6X-13=0$　之三根，各至小數三位，

第一次　商3

1	1×丄=3
0	3×丄=9
−6	3×丄=9
−13	−4

第二次　商3.1

1	1　×丄=3.1
0	3.1×丄=9.61
−6	3.61×丄=11.191
−13	−1.809

$$-4-(-1.809) : 3.1-3 = -4 : 0.18$$

$$3+.18=3.18$$

第三次 商3.18

1	1 × ⊥ = 3.18
0	3.18 × ⊥ = 10.1124
−6	4.1124 × ⊥ = 13.077
−13	.077

$$3.18+\frac{0.1\times .077}{-2.191}=3.1765$$

第四次 商3.1765

1	1 × ⊥ = 3.1765
0	3.1765 × ⊥ = 10.09
−6	4.09 × ⊥ = 12.992
−13	−.008≐0

截商前四位，得 $X=3.176$

求第二根 商−1.588

1	1 × ⊥ = −1.588
3.176	1.588 × ⊥ = −2.52174
4.09	1.56826

$$X=-1.588\pm\sqrt{-1.568}$$

案左式，任商何數，不能使之等零，惟有商第二項之$\frac{1}{2}$負數，可使末行爲最小，故知其爲虛根，截前四位得 1.568

〔註〕式內之(≐)符號，表密等之義，

共求出實根一，虛根二，　$X=3.176$　$X=-1.588\pm\sqrt{-1.568}$

3 設求　$X^4-8X^3-3X^2+126X-216=0$　之四根，

第一次 商5

1	1 × ⊥ = 5
−8	−3 × ⊥ = −15
−3	−18 × ⊥ = −90
126	36 × ⊥ = 180
−216	−36

第二次 商6

1	1 × ⊥ = 6
−8	−2 × ⊥ = −12
−3	−15 × ⊥ = −90
126	36 × ⊥ = 216
−216	0

$X=6$

第二式 第一次 商1

1	1 × ⊥ = 1
—2	—1 × ⊥ = —1
—15	—16 × ⊥ = —16
36	20

第二次 商3

1	1 × ⊥ = 3
—2	1 × ⊥ = 3
—15	—12 × ⊥ = —36
36	0

$X = 3$

第三式 商3

1	1 × 3 = 3
1	4 × 3 = 12
—12	0

$X = 3$

第四式 商—4

1	1 × ⊥ = —4
4	0

$X = -4$

共求出四根， $X = 6$， $X = 3$， $X = 3$， $X = -4$，

4 設求 $21X^4 - 126X^3 + 149X^2 + 123X - 170 = 0$ 之四根，各至小數三位，

第一次 商1

21	21 × ⊥ = 21
—126	—105 × ⊥ = —105
149	44 × ⊥ = 44
123	167 × ⊥ = 167
—170	—3

第二次 商2

21	21 × ⊥ = 42
—126	—84 × ⊥ = —168
149	—19 × ⊥ = —38
123	85 × ⊥ = —170
—170	0

$X' = 2$

第二式 第一次 商1

21	21×⊥=21.
−84	−63×⊥=−63
−19	−82×⊥=−82
85	3

第二次 商1.05

21	21×⊥=22.05
−84	−61.95×⊥=−65.0475
−19	−84.0475×⊥=−88.25
85	−3.25

3−(−3.25) : 1.05−1=3 : 0.024

1+.024=1.024

第三次 商1.024

21	21 ×⊥=21.504
−84	−62.496×⊥=−64
−19	−83×⊥=−84.992
85	0.008≐0

X=1.024

第三式 第一次 商−1

21	21×−⊥=−21
−62.496	−83.496×−⊥=83.496
−83	0.496

第二次 商−.99

21	21×−⊥=−20.79
−62.496	−83.286×−⊥=82.453
−83	−.547

第三次 商−.995

21	21×−⊥=−20.895
−62.496	−83.391×−⊥=82.974
−83	−0.026≐0

X=−.995

第四式 商3.971

21	21×⊥=83.391
−83.391	0

X=3.971

共求出四根

X=2， X=1.024

X=−.995 X=3.971

5　設求　$3X^5+75X^4+700X^3+2250X^2-3750X-28125=0$　之根，至小數三位，

第一次　商3

3	3×⊥=9
75	84×⊥=252
700	952×⊥=2856
2250	5106×⊥=15318
−3750	11568×⊥=34704
−28125	6579

第二次　商2.9

3	3×⊥=8.7
75	83.7×⊥=242.72
700	942.72×⊥=2733.92
2250	4983.92×⊥=14453.37
−3750	10703.37×⊥=31039.77
−28125	2914.77

$$6579-2914.77 : 2.9-3=6579 : -0.18$$

$$3+(-.18)=2.82$$

第三次　商2.82

3	3×⊥=8.46
75	83.46×⊥=235.36
700	935.36×⊥=2637.71
2250	4887.71×⊥=13783.34
−3750	10033.34×⊥=28294
−28125	169

$$2.82+\frac{-.1\times 169}{3664}=2.8154$$

截前四位，得　X=2.815

案本題爲第三章內，第五題之方程式，設進求之，則得2.814917688　與原題密合，不須更求他根，

6　設求　$-X^6+186X^5-11532X^4+240328X^3-186000X^2-1000000=0$　之根，

第一次商 1

−1	−1 ×⊥=−1
186	185×⊥=185
−11532	−11347×⊥−11347
240328	228981×⊥=228981
−186000	42981×⊥=42981
0	42981×⊥=42981
−1000000	−957019

第二次 商2

−1	−1 ×⊥=−2
186	184×⊥=368
−11532	−11164×⊥=−22328
240328	218000×⊥=436000
−186000	250000×⊥=500000
0	500000×⊥=1000000
−1000000	0

X = 2

案本題爲本編第三章，第六題內之方程式，求得一根，已與原題密合，不須更求他根，

---

7 設求 $X^7+2X^6+X^5-5000=0$ 之根至小數三位，

第一次 商3

1	1 ×⊥=3
2	5 ×⊥=15
1	16×⊥=48
0	48×⊥=144
0	144×⊥=432
0	432×⊥=1296
0	1296×⊥=3888
−5000	−1112

第二次 商3.1

1	1 ×⊥=3.1
2	5.1×⊥=15.81
1	16.81×⊥=161.544
0	52.111×⊥=161.544
0	161.544×⊥=500.786
0	500.786×⊥=1552.438
0	1552.438×⊥=4812.56
−5000	−187.44

−1112−(−187.44) ∶ 3.1−3 = −1112 ∶ 0.12

3 + .12 = 3.12

第三次 商3.12

1	1 ×丄=3.12
2	5.12×丄=15.974
1	16.974×丄=52.96
0	52.96×丄=165.235
0	165.235×丄=515.533
0	515.533×丄=1608.463
0	1608.463×丄=5018.4
−5000	18.4

$$3.12+\frac{0.1\times 18.4}{-924.56}=3.118$$

$$X=3.118$$

案本題爲第三章，第七題内之方程式，設進求之，則得 3.1182389，與原題密合，不須更求他根，

8 設求 $X^{11}+1=0$ 之虛實根，

第一式 商−1

1	1×−1=−1
0	−1×−1=1
0	1×−1=−1
0	−1×−1=1
0	1×−1=−1
0	−1×−1=1
0	1×−1=−1
0	−1×−1=1
0	1×−1=−1
0	−1×−1=1
0	1×−1=−1
1	0

$$X=-1$$

第二式 商0.747

1	1 ×丄=.747
−1	−.253×丄=−.188991
1	.811009×丄=.605824
−1	−.394176×丄=−.29445
1	.70555×丄=.527046
−1	−.472954×丄=−.353297
1	.646703×丄=.483087
−1	−.516913×丄=−.386134
1	.613868×丄=.458558
−1	−.541442×丄=−.404457
1	.595543

$$X=0.747\pm\cancel{10}\sqrt[12]{-0.59543}$$

案第二式，任商何數，俱莫能使末行等零，惟有商 0.747 而末行得 0.595543 爲最小，試商 0.746 則得 0.595546 商 0.748 則

得 0.595545 皆大於 0.595543 故知其爲虛根，

共求出實根一，虛根二，$X=-1$，$X=0.747\pm\sqrt{-0.595543}$

---

9 設求 $2X^{2}+5X+3X^{\frac{1}{2}}-4X^{\frac{1}{3}}-600=0$ 之根，至小數三位以上，

案式內有分數指號，更令Y表$X^{\frac{1}{6}}$，則$Y^{6}=X$，$Y^{12}=X^{2}$，$Y^{3}=X^{\frac{1}{2}}$，$Y^{2}=X^{\frac{1}{3}}$各以原係數乘之，得新方程式如次，

$$2Y^{12}+5Y^{6}+3Y^{3}-4Y^{2}-600=0$$

第一式 商1.58885

2	2 × ⊥ = 3.1777
0	3.1777 × ⊥ = 5.04889
0	5.04889 × ⊥ = 8.02193
0	8.02193 × ⊥ = 12.74564
0	12.74564 × ⊥ = 20.25091
0	20.25091 × ⊥ = 32.17566
5	37.17566 × ⊥ = 59.06655
0	59.06655 × ⊥ = 93.8479
0	93.8479 × ⊥ = 149.1102
3	152.1102 × ⊥ = 241.6803
−4	237.6803 × ⊥ = 377.6383
0	377.6383 × ⊥ = 600.01
−600	0.01≐0

$Y=1.58885$

$X=Y^{6}=16.088$

又令 $-Y^{3}$ 表 $X^{\frac{1}{2}}$ 餘悉如前，又得新方程式如次，

$$2Y^{12}+5Y^{6}-3Y^{3}-4Y^{2}-600=0$$

第二式　商1.5945

2	2 × 上 = 3.189
0	3.189 × 上 = 5.0849
0	5.0849 × 上 = 8.1078
0	8.1078 × 上 = 12.928
0	12.928 × 上 = 20.6137
0	20.6137 × 上 = 32.8685
5	37.8685 × 上 = 60.3813
0	60.3813 × 上 = 96.278
0	96.278 × 上 = 153.515
−3	150.515 × 上 = 239.996
−4	235.996 × 上 = 376296
0	376.296 × 上 = 600.004
−600	0.004≒0

$Y=1.5945$

$X = Y^6 = 16.434$

共求出原式之二根

$X=16.088$

$X=16.434$

試依X，將各項化成常數，代入原式證之，

（1）　$X=16.088$

$$X^2=258.824 \qquad X^{\frac{1}{2}}=4.011 \qquad X^{\frac{1}{3}}=2.524$$

$$(2\times 258.824)+(5\times 16.088)+(3\times 4.011)-(4\times 2.524)-600\doteq 0$$

（2）　$X=16.434$

$$X^2=270.0765 \qquad X^{\frac{1}{2}}=-4.054 \qquad X^{\frac{1}{3}}=2.5425$$

$$(2\times 270.0765)+(5\times 16.434)+(3\times -4.054)-(4\times 2.5425)-600\doteq 0$$

觀所求出之二根，代入原式，俱能密等於零，證明二根俱眞，

編　者　附　言

本編未設問題，學者可任自設題演習，且可用此法助證其他諸法，求出之根，是否眞確，甚爲便利，

第三章　駁題

1　設有梯式圓柱體木材一根，長27尺，上端徑10寸，下端徑16寸，截一體積最大，兩端相等方柱體，問方邊與長各幾何，

解　令X爲方端對角綫，依題理作方程式如下，

$$3X-32=0$$

求根　商$10.\dot{6}6\cdots\cdots$

3	$3\times+=32$
-32	0

$X=10.\dot{6}6\cdots\cdots$　答　長240寸　方邊7.54247232寸

編者附言

本章所設各題，取自一次至九次式俱備，借此助證，用新法求出諸根，俱屬眞確，雖至任何次式，無不合理，

至於如何依題理而作方程式之法，有按幾何理，有用微分法，且有參用中國代數法者，因其不在本編範圍，故俱從略，

案中國代數，卽古四元法，肇於有唐，成於元代，中絕於明，復顯於淸，而近時知者又尠，士桐懼國

粹之將就湮沒也，嘗有志取前哲之書，另行編輯，而與西法亦比較焉，使世人知吾先民，於算學未嘗無貢獻也，

---

2 設有等比發級數之三項：其和爲21，其平方和爲273問三項各幾何，

解 令X爲首項，Y爲公比 依題理作方程式如下，

$X^2-17X+16=0$ (1)　　$4Y^2-17Y+4=0$ (2)

求一式根 商1　　　　求二式根 商4

1	$1\times1=1$	4	$4\times4=16$
-17	$-16\times1=-16$	-17	$-1\times4=-4$
16	0	4	0

$X=1$　$Y=4$　　答首項1　第二項4　末項16

案一式內，尚有一根爲16，二式內，尚有一根爲0.25，則爲斂級數，不合理，

---

3 設有一球，直徑6寸，平切爲三段，須每段體積相等，問每段厚度各幾何，

解 令X爲第 段厚度，依題理作方程式如下，

理[illegible]？

$$-X^3+9X^2-36=0$$

求根 商2.32178

-1	$-1 \times + = 2.32178$
9	$6.67822 \times + = 15.5053576$
0	$15.5053576 \times + \doteq 36$
-36	0

X＝2.32178

答 中段1.35644寸
左右兩段各2.32178寸

4 設有電燈廠，距河沿3丈，河寬5丈，今欲安設電綫於沿河上流，7丈遠之對岸一工廠，陸綫每丈價2圓，水綫每丈價4圓，問水陸綫交點，在岸上何點，於價最省，

解 令X爲工廠對岸之點，至水陸綫交點之距，依題理作方程式如下，

$$3X^4-42X^3+158X^2+350X-1225=0$$

求根 商2.32023643

3	$3 \times + = 6.96070929$
-42	$-35.03929071 \times + = -81.29943879$
158	$76.70056121 \times + = 177.96343632$
350	$527.96343632 \times + \doteq 1225$
-1225	0

X＝2.32023643

答水陸綫之交點距工廠對岸之點爲2.32023643丈

5 設用木板，製一圓盆，底徑10寸，幫板高5寸，問口面直徑幾何，容量最多，

解 令X爲幫板斜度，依題理作方程式如下，

$$3X^5+75X^4+700X^3+2250X^2-3750X-28125=0$$

求根 商2.814917688

3	3 × ⊥ = 8.444753064
75	83.444753064 × ⊥ = 234.890111371
700	934.890111371 × ⊥ = 2631.63871083
2250	4881.63871083 × ⊥ = 13741.4111535
−3750	9991.4111535 × ⊥ = ≐28125
−28125	0

X = 2.814917688　　　　答15,629835376

6　設有等比發級數之三項，其和爲 6 2 ， 連乘爲 1000，問三項各幾何，

解　令X爲首項，Y爲公比，依題理作方程如下，

$$-X^{6}+186X^{5}-11532X^{4}+240328X^{3}-186000X^{2}-1000000=0 \quad (1)$$

$$125Y^{6}+375Y^{5}+750Y^{4}-28916Y^{3}+750Y^{2}+375Y+125=0 \quad (2)$$

求一式根 商2

−1	−1 × ⊥ = −2
186	184 × ⊥ = 368
−11532	−11164 × ⊥ = −22328
240328	218000 × ⊥ = 436000
−186000	250000 × ⊥ = 500000
0	500000 × ⊥ = 1000000
−1000000	0

X = 2

求二式根 商5

125	125 × ⊥ = 625
375	1000 × ⊥ = 5000
750	5750 × ⊥ = 28750
−28916	−166 × ⊥ = −830
750	−80 × ⊥ = −400
375	−25 × ⊥ = −125
125	0

Y = 5

答首項2　　第二項10　　末項50

7　設用水泥5000立方寸，製一長方形之梁，其深須如其寬之平方，其長須如寬深和之平方，問寬，深，長，三項各幾何，

解　令X爲寬，依題理作方程式如下，

$$X^7+2X^6+X^5-5000=0$$

求根　商3.1182389

1	1 × ⊥ = 3.1182389
2	5.1182389 × ⊥ = 15.959891638
1	16.959891638 × ⊥ = 52.884993844
0	52.884993844 × ⊥ = 164.908045031
0	164.908045031 × ⊥ = 514.22268094
0	514.22268094 × ⊥ = 1603.469167
0	1603.469167 × ⊥ ≐ 5000
−5000	0

$$X=3.1182389$$

答寬3.1182389寸　深9.72341384寸　長164.908046寸

8　設有銀幣10000圓，A B C D，四人分之，B之所分，須如A之所得數，平方加1，C之所分，須如B之所得數，平方減1，D之所分，須如C之所得數，平方加1，問各分幾何，

解　令X爲A之所得數，依題理作方程式如下，

$$X^8+4X^6+5X^4+3X^2+X-9998=0$$

求根　商3.0035865

1	1 × ⊥ = 3.0035865
0	3.0035865 × ⊥ = 9.021531863
4	13.021531863 × ⊥ = 39.111297313
0	39.111297313 × ⊥ = 117.474164607
5	122.474164607 × ⊥ = 367.86174741
0	367.86174741 × ⊥ = 1104.9045784
3	1107.9045784 × ⊥ = 3327.68723497
1	3328.68723497 × ⊥ ≒ 9998
−9998	0

$$X=3.0035865$$

答　A 分3.0035865圓　　B 分10.0215318圓

　　C 分99.4311圓　　D 分9887.5437817圓

9　設用水泥10000立方寸，製一長方形槃，其深須如寬之平方之半，其長須如深之立方，加寬與深之數，問寬，深，長，各幾何，

解　令X爲寬，依題理作方程式如下，

$$X^9+4X^5+8X^4-160000=0$$

求根 商3.773995522

1	1 × + = 3.773995522
0	3.773995522 × + = 14.2430422001
0	14.2430422001 × + = 53.7531774828
0	53.7531774828 × + = 202.8642511134
4	206.8642511134 × + = 780.704757364
8	788.704757364 × + = 2976.56822247
0	2976.56822247 × + = 11233.5551425
0	11233.5551425 × + = 42395.3868039
0	42395.3868039 × + = 160000
−160000	0

X = 3.773995522

答寬3.773995522寸　深7.1215211寸　長372.0710278寸

結　論

學算學必學代數，學代數又必學解方程，通常解二次式之法，不能通之於解三次四次之式，解三次四次式之法，不能通之於解任何次式，而解任何次式之法，又甚艱於運用，於是又設有分解因數，通度反商，種種之法，以助解之，學者必須自淺及深，循階學習，不得驟窺其奧，决非短少期間，所能卒業，本編法簡理一，自解一次式，至解任何次式，咸以一理貫之，只馭之以一法，數言可盡其蘊，故能於最短期間畢事，而於解方程之能事，亦堪告曲盡無遺，謹白於世，或可供研究斯學者之取擇焉，

又編者此作，是否優良非敢自信，尚祈當代明算羣公，賜予匡益，得使本編益臻完善，或予指駁，得使眞理，愈究愈明，皆所馨香默禱者也，編者識

中華民國二十三年一月初版

解高次方程新法一卷

（每卷定價大洋一角六分）

著作者　合肥徐士桐

發行所　安慶世界書局

印刷所　安慶東方印書館

NEW METHODS OF

SOLVING ALGEBRAIC EQUATIONS OF

HIGHER DEGREES

BY

S. T. HSU.