

Diskrete Mathematik

Arbeitsblatt 18

Übungsaufgaben

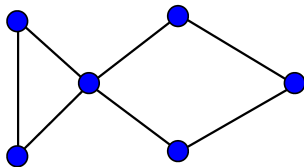
AUFGABE 18.1. Wir betrachten den Spielzuggraphen G zum Turm auf einem 3×3 -Schachbrett.

- (1) Bestimme die Anzahl der linearen Spannbäume von G .
- (2) Bestimme die Anzahl der Spannbäume von G .

AUFGABE 18.2. Wir betrachten den Spielzuggraphen G zum Läufer auf einem 4×4 -Schachbrett.

- (1) Bestimme die Anzahl der linearen Spannbäume von G .
- (2) Bestimme die Anzahl der Spannbäume von G .

AUFGABE 18.3. Es sei F ein Rundgang mit m Knoten und H ein Rundgang mit n Knoten, $m, n \geq 3$. Es sei G die Vereinigung der beiden Graphen an einem einzigen Punkt. Zeige, dass die Anzahl der aufspannenden Bäume von G gleich mn ist.



AUFGABE 18.4. Es sei G ein zusammenhängender Graph mit Durchmesser d . Zeige, dass es in G einen aufspannenden Baum mit Durchmesser d gibt.

AUFGABE 18.5. Es sei G der vollständige Graph mit n Knoten. Bestimme die Anzahl der linearen aufspannenden Bäume in G .

AUFGABE 18.6. Zeige, dass die Potenzmenge $\mathfrak{P}(E)$ zu einer Menge E ein Matroid ist.

AUFGABE 18.7. Es sei E eine Menge und $r \in \mathbb{N}$. Es sei \mathcal{M} die Menge aller Teilmengen von E , die höchstens r Elemente enthalten. Zeige, dass \mathcal{M} ein Matroid ist.

AUFGABE 18.8. Es sei E die Familie der folgenden Vektoren im \mathbb{R}^2 .

$$(0, 0), (4, 0), (2, 3), (4, 6), (5, 7), (3, 0), (0, 3).$$

Bestimme das Matroid, das durch die lineare Unabhängigkeit von Teilfamilien gegeben ist.

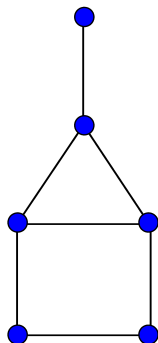
AUFGABE 18.9. Es sei G ein zusammenhängender Graph. Zeige, dass für einen Untergraphen $H = (V, F) \subseteq G$ (also mit voller Vertexmenge) die folgenden Aussagen äquivalent sind.

- (1) H ist ein Baum.
- (2) H ist ein aufspannender Baum.
- (3) H ist maximal kreisfrei, d. h. sobald man eine Kante aus G zu H hinzutut, entsteht ein Kreis.
- (4) H ist minimal zusammenhängend, d. h. sobald man eine Kante herausnimmt, wird der Graph unzusammenhängend.

AUFGABE 18.10. Es sei G ein Rundgang mit n Knotenpunkten. Bestimme die Anzahl der Spannbäume von G mit und ohne Lemma 18.11.

AUFGABE 18.11. Es sei G ein Graph. Zeige mit und ohne Lemma 18.11, dass die Anzahl der Spannbäume von G mit der Anzahl der Spannbäume des Graphen H übereinstimmt, der aus G entsteht, indem man alle Blätter zusammen mit den zugehörigen Kanten entfernt.

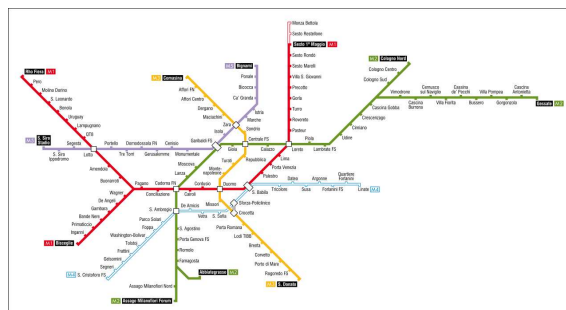
AUFGABE 18.12. Bestimme rekursiv die Anzahl der aufspannenden Bäume des abgebildeten Graphen.



AUFGABE 18.13. Bestimme die Anzahl der aufspannenden Bäume des dreidimensionalen Würfelgraphen.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 18.14. (2 Punkte)



Man beschreibe einen Spannbaum für die Mailänder Metro, indem man gewisse Kanten herausnimmt.

AUFGABE 18.15. (3 Punkte)

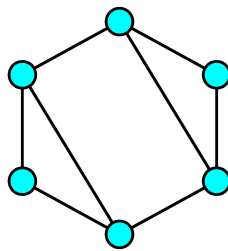
Auf der Knotenmenge v_1, \dots, v_n sei ein linearer Multigraph G gegeben, wobei $a_i, i = 1, \dots, n-1$, die Anzahl der Kanten zwischen v_i und v_{i+1} sei (und sonst gebe es keine Kanten). Zeige, dass die Anzahl der aufspannenden Bäume von G gleich $a_1 \cdots a_{n-1}$ ist.

AUFGABE 18.16. (5 Punkte)

Bestimme rekursiv die Anzahl der aufspannenden Bäume des vollständigen Graphen mit 5 Knotenpunkten.

AUFGABE 18.17. (3 Punkte)

Bestimme rekursiv die Anzahl der aufspannenden Bäume des abgebildeten Graphen.



AUFGABE 18.18. (5 Punkte)

Es sei G ein Graph zusammen mit zwei vollen Untergraphen $F, H \subseteq G$ mit (auf der Vertexmenge)

$$F \cap H = \{P\}$$

und derart, dass alle Kanten von G entweder zu F oder zu H gehören. Zeige, dass die Anzahl der aufspannenden Bäume von G gleich dem Produkt der Anzahl der aufspannenden Bäume von F und der Anzahl der aufspannenden Bäume von H ist.

Abbildungsverzeichnis

Quelle = Fish graph.svg , Autor = Benutzer Koko90 auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	1
Quelle = Antenna graph.svg , Autor = Benutzer Krishnavedala auf Commons, Lizenz = gemeinfrei	3
Quelle = Milano - mappa rete metropolitana (schematica).svg , Autor = Benutzer Arbalete auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0	3
Quelle = 2-edge connected graph.svg , Autor = Benutzer Krishnavedala auf Commons, Lizenz = gemeinfrei	4
Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von http://commons.wikimedia.org) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz.	5
Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt.	5